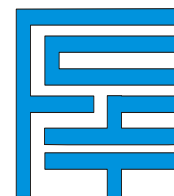


UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN SIMÓN
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
CARRERA DE INGENIERÍA CIVIL



**MODERNIZACIÓN DE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE EN LA
ASIGNATURA DE
“GEODESIA Y FOTOGRAMETRÍA CIV 215”**

**TRABAJO DIRIGIDO, POR ADSCRIPCIÓN, PARA OPTAR EL GRADO
ACADÉMICO DE
LICENCIADO EN INGENIERÍA CIVIL**

Presentado por: KARLA XIMENA CANEDO ROJAS

ELBIO RICARDO LAZCANO LAREDO

Tutor: Ing. M. Sc. Oscar A. Zabalaga Montaña

COCHABAMBA – BOLIVIA

DICIEMBRE - 2006

DEDICATORIA

**A mis amados padres y a mis hermanos por
brindarme su apoyo incondicional.**

*Con mucho amor a mis Padres
Por darme siempre lo mejor de ellos*

*Y a Fernandito....
Porque no son nueve los meses que te hacen mi hijo
Si no una vida entera caminando junto a ti*

AGRADECIMIENTOS

A Dios por bendecirme con una familia hermosa.

A mis padres Elita y René, por la paciencia y amor que me han brindado para conseguir este objetivo.

A mis hermanos Pablo y Ronaldo por la ayuda que me dieron.

A mi amada esposa, ternura y amor que vinieron a completar mi vida.

Al Ing. M. Sc. Oscar Zabalaga por toda su ayuda.

A los docentes por sus concejos y enseñanzas, haciendo de mí una persona de bien.

A la universidad por abrirme las puertas y cobijarme hasta la culminación de mis estudios.

Y a todos los amigos que me ayudaron y me apoyaron.

¡Muchas Gracias!

Agradecimientos

A Dios por regalarme esta vida, con todas sus alegrías y sus complicaciones.

A mi padre Alfredo Canedo, por ser siempre un guía y un gran amigo.

A mi madre Rossemmary Rojas, por forjar mi carácter, porque sin ella no habría logrado realizar ni uno solo de mis sueños.

A mis hermanos y sobrinos por el cariño que siempre me brindan.

A Carla Vargas, Carolina Patiño, Claudia Sejas, Mónica Cordova, Rommy Gil, Roxana Angulo, Yorka Villarroel, y Jorge Díaz por ofrecerme el regalo más lindo.....su amistad incondicional.

A Rubén Fuentes por darme siempre el apoyo, los consejos y el incentivo para seguir adelante.

A la Universidad Mayor de San Simón y a todos mis docentes, por haber colaborado con mi formación profesional.

Al Ing. Zabalaga por el tiempo y los consejos aportados para la elaboración de este documento.

A los Ingenieros Pereira, Torres y Vera por su cooperación.

Y por último, a Fernandito por ser el motor que me impulsa a seguir día a día en esta batalla de vivir, por ser el pilar que me sostiene en los momentos de debilidad y por ser la mayor alegría en mi vida.

FICHA RESUMEN

En el presente trabajo, se hará un desarrollo de la materia de la Geodesia y Fotogrametría, dividiéndola para su estudio didáctico en dos partes .

La primera parte estudiará la Geodesia y sus partes componentes: la Geodesia Esferoidal, la Geodesia Física y la Astronomía Geodésica.

Se realizará una introducción a la trigonometría esférica, para poder lograr una base teórica y poder ingresar al capítulo de Geodesia Esferoidal, teniendo en cuenta que aquella nos sirve para incursionar en lo referido a la transformación de coordenadas de un sistema a otro, ya que los distintos aparatos con los que se miden las coordenadas vienen calibrados en diferentes sistemas de referencia, y se hace necesaria la transformación a un sistema único.

En el caso de la Geodesia Física se brindará una descripción completa acerca de los acápites que están involucrados con esta ciencia, sin embargo no se realizará un estudio profundo de la misma ya que el nivel de complejidad acerca de la Geodesia Física es bastante significativa. La Astronomía Geodésica viene íntimamente relacionada con la Geodesia Física en lo concerniente a las coordenadas astronómicas, es así que se trabaja permanentemente temas referidos a la determinación de la desviación de la línea vertical, con relación a la influencia de la fuerza de gravedad.

En la segunda parte del texto se estudiará lo referente a la Fotogrametría y Cartografía. En el tema de Principios básicos de Fotogrametría se hace una descripción general de esta ciencia, y de sus principales elementos logrando los conocimientos acerca de la fotografía aérea, la observación estereoscópica así también el funcionamiento de las cámaras aéreas y algunos instrumentos fotogramétricos. Luego se realizará una descripción de un plan de vuelos y se dará una introducción a la Fotointerpretación.

Finalmente se estudiará el tema de Cartografía y para introducir un contenido de mayor practicidad se estudiará el Manejo de la Carta geográfica.

PLAN GLOBAL

I. IDENTIFICACIÓN.				
ASIGNATURA: Geodesia y Fotogrametría				
SIGLA: CIV 215		COD_SIS: 2012009	NIVEL (AÑO/SEMESTRE): 5to. Semestre	
PRE-REQUISITOS: 1. Métodos Geodésicos				
ÁREAS DE COORDINACIÓN CURRICULAR			DÍA	HORARIO
VERTICAL		HORIZONTAL		
Métodos Geodésicos				
Transportes y Comunicaciones				
NOMBRE DEL DOCENTE: Oscar Zabalaga Montaña				
DIRECCIÓN:				
TELÉFONO:		E-MAIL: oscar_zabalaga@hotmail.com		
II. JUSTIFICACIÓN GENERAL.				
<p>Realizando un análisis de las funciones del perfil profesional, corresponde tomar en cuenta que una parte importante de las obras civiles tienen que estar emplazadas correctamente con precisión y exactitud, mas aun si se trata de proyectos que abarcan una extensa porción de terreno añadido a esto la magnitud del proyecto no siempre permite que este trabajo se realice en campo, por estas razones, es absolutamente necesario para su diseño y posterior ejecución segura y económica. El conocimiento y aplicación de la materia Geodesia y Fotogrametría CIV 215 es precisamente el de realizar el cálculo de las posiciones geográficas, el estudiante debe adquirir los conocimientos, habilidad y criterio necesarios para satisfacer, en forma directa, uno de los objetivos generales o funciones especificados en el perfil profesional.</p> <p>Por otro lado en ésta época de gran aplicación de la informática a prácticamente toda la actividad humana es posible encontrar, a precios variados, sistemas computacionales que realizan dicho cálculo, sin embargo en nuestro país, los trabajos en el campo del posicionamiento global se siguen manejando métodos tradicionales. En éste caso, la materia Geodesia y Fotogrametría CIV 215, se justifica aún, puesto que proporciona la base teórica necesaria para interpretar correctamente la información cartográfica y la información proporcionada por los distintos aparatos que proporcionan los datos de nuestro posicionamiento.</p>				
III. PROPÓSITOS GENERALES.				
<p>Los propósitos de la enseñanza de esta materia son los de proporcionar a los estudiantes de Ingeniería Civil, la visión y el conocimiento de las técnicas necesarias que les permitan analizar, comprender, aplicar y resolver los problemas concernientes al análisis de la información proporcionada por los sistemas modernos de posicionamiento y la carta geográfica, utilizando los principios y los criterios que proporciona la materia para lograr la comprensión, además de alcanzar un grado de precisión en los trabajos topográficos.</p> <p>Desarrollar en el estudiante la capacidad de traducir la información recibida de los distintos sistemas de posicionamiento y la carta geográfica.</p>				

Desarrollar en el estudiante un sentido de responsabilidad haciéndole ver que el posicionamiento de las obras servirá para los distintos usos humanos y por tanto la capacidad de ubicar una obra civil en lugar más adecuado.

IV. OBJETIVOS GENERALES.

No obstante que dentro del plan global de la carrera de Ingeniería Civil están claramente establecidos los objetivos generales de la materia GEODESIA Y FOTOGRAMETRÍA, efectuamos el siguiente comentario:

Con el avance de la tecnología se ha facilitado la obtención de datos y procesamiento de la carta geográfica, inclusive a niveles de mayor complejidad, gracias a la existencia de Softwares, en tal virtud el objetivo principal de la materia es el de proporcionar al estudiante criterios para poder analizar, comprender y aplicar sus conocimientos en la utilización de estos y de esta manera permitirle la resolución de problemas.

V. ESTRUCTURACIÓN EN UNIDADES DIDÁCTICAS Y SU DESCRIPCIÓN.

NOMBRE DE LA UNIDAD (0): Introducción

DURACIÓN DE LA UNIDAD EN PERIODOS ACADÉMICOS: HT: 2 ;HP :0

OBJETIVOS DE LA UNIDAD:

- Proporcionar al estudiante, conocimientos acerca de la evolución de los estudios geodésicos en el transcurso del tiempo.
- Proporcionar al estudiante, conocimientos acerca de la institución encargada de la elaboración y procesamiento de los datos geodésicos.
- Proporcionar al estudiante, conocimiento de la utilidad y la aplicación de los trabajos geodésicos y de fotogrametría en la ingeniería civil.
- Proporcionar al estudiante, conocimiento acerca del trabajo realizado y las distintas áreas que se desarrollaran.

CONTENIDO:

- Generalidades
- Geodesia
- Fotogrametría En Bolivia
- Geodesia y Fotogrametría en Bolivia
- Geodesia Y Fotogrametría En Ingeniería Civil
- Geodesia Y Fotogrametría Como Asignatura De La Formación Profesional En Ingeniería Civil.

METODOLOGÍA DE LA ENSEÑANZA:	TÉCNICAS PREDOMINANTES PROPUESTAS PARA LA UNIDAD:
	<ul style="list-style-type: none"> • Exposiciones teóricas. • Clases desarrolladas con participación de los alumnos.
	EVALUACIÓN DE LA UNIDAD:
	<ul style="list-style-type: none"> • Diagnostico • Trabajo correctivo y medición
	BIBLIOGRAFÍA ESPECIFICA DE LA UNIDAD: 1. AYRES F.: "Trigonometría Plana y Esférica", Edit. San Fernando, Schaum 1980 2. Mc GRAW HILL: "Problemas de Trigonometría"

NOMBRE DE LA UNIDAD (1): Trigonometría Esférica

DURACIÓN DE LA UNIDAD EN PERIODOS ACADÉMICOS: HT: 4 ;HP:12

OBJETIVOS DE LA UNIDAD:

- Proporcionar al estudiante, conocimientos acerca de las definiciones básicas como ser: esfera, círculo máximo y polos de círculo máximo.
- Proporcionar al estudiante, conocimientos acerca de triángulos esféricos y sus relaciones.
- Que el estudiante sea capaz de utilizar las formulas de primer orden de la trigonometría esférica.

<ul style="list-style-type: none"> • Que el estudiante sea capaz de resolver los problemas de la trigonometría esférica. 	
CONTENIDO: 1.1 Definiciones Básicas 1.2 Triángulo Esférico 1.3 Fórmulas fundamentales de primer orden de la Trigonometría Esférica 1.4 Triángulos Esféricos singulares 1.5 Regla del Pentágono de Neper 1.6 Resolución de Triángulos Esféricos 1.7 Forma y Dimensiones de la Tierra. Coordenadas terrestres 1.8 Coordenadas	
METODOLOGÍA DE LA ENSEÑANZA:	TÉCNICAS PREDOMINANTES PROPUESTAS PARA LA UNIDAD: <ul style="list-style-type: none"> • Exposiciones teóricas. • Clases desarrolladas con participación de los alumnos.
	EVALUACIÓN DE LA UNIDAD: <ul style="list-style-type: none"> • Diagnostico • Trabajo correctivo y medición
	BIBLIOGRAFÍA ESPECIFICA DE LA UNIDAD:
	1. AYRES F.: "Trigonometría Plana y Esférica", Edit. San Fernando, Schaum 1980 2. Mc GRAW HILL: "Problemas de Trigonometría"
NOMBRE DE LA UNIDAD (2): Geodesia Esferoidal	
DURACIÓN DE LA UNIDAD EN PERIODOS ACADÉMICOS: HT:4;HP:4	
OBJETIVOS DE LA UNIDAD: <ul style="list-style-type: none"> • Que el estudiante sea capaz de utilizar los elementos de la elipse para determinar las longitudes de arcos sobre esta. • Que el estudiante sea capaz de utilizar las correcciones meteorológicas, del ángulo de pendiente, del horizonte, nivel del mar, el paso de la cuerda al arco y otras especiales, para reducir una base. • Proporcionar al estudiante, conocimientos acerca de las curvas alabeadas, necesarios para la conformación de una red geodésica. • Proporcionar al estudiante, conocimientos acerca de los conceptos sobre posiciones. • Proporcionar al estudiante, conocimientos acerca del problema inverso del transporte de coordenadas. • Que el estudiante sea capaz de determinar la longitud de un arco geodésico. • Proporcionar al estudiante, conocimientos acerca de los distintos tipos de sistemas de coordenadas existentes. • Que el estudiante sea capaz de realizar transformaciones de coordenadas de un sistema de coordenadas en otros. 	
CONTENIDO: 2.1 Consideraciones Sobre La Geometría De La Elipse 2.2 Nociones Sobre Curvas Alabeadas. La Línea Geodésica 2.3 Cálculo De Coordenadas Geodésicas 2.4 Problema Inverso Del Transporte De Coordenadas 2.5 Sistemas De Referencia Empleados En Geodesia	
METODOLOGÍA DE LA ENSEÑANZA:	TÉCNICAS PREDOMINANTES PROPUESTAS PARA LA UNIDAD: <ul style="list-style-type: none"> • Exposiciones teóricas. • Clases desarrolladas con participación de los alumnos.
	EVALUACIÓN DE LA UNIDAD:
	<ul style="list-style-type: none"> • Diagnostico

	<ul style="list-style-type: none"> Trabajo correctivo y medición
	BIBLIOGRAFÍA ESPECÍFICA DE LA UNIDAD:
	1. MARTIN ASIN, FERNANDO: "Geodesia y Cartografía Matemática", Ed. Paraninfo S.A. 3ª Edición Madrid 1990 2. MARTINEZ, OJEDA, SÁNCHEZ, REJAS, GARCÍA: "Formulario Técnico de Geodesia y Topografía", Profesores de Topografía de la ETSI de Caminos, Canales y Puertos e Madrid, Ed. Bellisco Ediciones técnicas y Científicas, 1ª Edición Madrid 2004 3. ZACATOV, P.S.: "Curso de Geodesia Superior", Ed. Rubiños – 1860, S. A. Edición Alcalá 1997
NOMBRE DE LA UNIDAD (3): Geodesia Física	
DURACIÓN DE LA UNIDAD EN PERIODOS ACADÉMICOS: HT:4;HP:4	
OBJETIVOS DE LA UNIDAD:	
<ul style="list-style-type: none"> Proporcionar al estudiante, conocimiento acerca de los objetivos de la geodesia física y las hipótesis utilizadas para su desarrollo. Proporcionar al estudiante, conocimiento acerca de el problema de la reducción. 	
CONTENIDO:	
3.1 Conocimientos Generales	
3.2 Breves Consideraciones Acerca Del Desarrollo De Los Conocimientos De La Tierra Y De Los Métodos De Estudio	
3.3 Fundamentos De La Teoría Del Potencial De La Fuerza De Gravedad	
METODOLOGÍA DE LA ENSEÑANZA:	TÉCNICAS PREDOMINANTES PROPUESTAS PARA LA UNIDAD:
	<ul style="list-style-type: none"> Exposiciones teóricas. Clases desarrolladas con participación de los alumnos.
	EVALUACIÓN DE LA UNIDAD:
	<ul style="list-style-type: none"> Diagnostico Trabajo correctivo y medición
	BIBLIOGRAFÍA ESPECÍFICA DE LA UNIDAD:
	1. MARTINEZ, OJEDA, SÁNCHEZ, REJAS, GARCÍA: "Formulario Técnico de Geodesia y Topografía", Profesores de Topografía de la ETSI de Caminos, Canales y Puertos e Madrid, Ed. Bellisco Ediciones técnicas y Científicas, 1ª Edición Madrid 2004 2. WEIKKO A. HEISMEN Y HELMUT MORITZ: "Geodesia Física", Ed. W. H. Freeman and company, 1966
NOMBRE DE LA UNIDAD (4): Astronomía Geodésica	
DURACIÓN DE LA UNIDAD EN PERIODOS ACADÉMICOS: HT:4;HP:2	
OBJETIVOS DE LA UNIDAD:	
<ul style="list-style-type: none"> Proporcionar al estudiante, conocimiento acerca de la trigonometría esférica, de los distintos sistemas de coordenadas en astronomía, además de la esfera celeste. Que el estudiante sea capaz de realizar las transformaciones de coordenadas entre los sistemas ecuatoriales horarios, horizontales y absolutas. 	
CONTENIDO:	
4.1 Trigonometría Esférica. Formulas De Bessel.	
4.2 La Esfera Celeste y sus Definiciones	
4.3 Los Sistemas de Coordenadas en la Astronomía	
4.4 Transformación De Coordenadas	
4.5 Posiciones Particulares de la Esfera	

METODOLOGÍA DE LA ENSEÑANZA:	TÉCNICAS PREDOMINANTES PROPUESTAS PARA LA UNIDAD:
	<ul style="list-style-type: none"> Exposiciones teóricas. Clases desarrolladas con participación de los alumnos.
	EVALUACIÓN DE LA UNIDAD:
	<ul style="list-style-type: none"> Diagnostico Trabajo correctivo y medición
	BIBLIOGRAFÍA ESPECIFICA DE LA UNIDAD: 1. MARTINEZ, OJEDA, SÁNCHEZ, REJAS, GARCÍA: "Formulario Técnico de Geodesia y Topografía", <i>Profesores de Topografía de la ETSI de Caminos, Canales y Puertos e Madrid, Ed. Bellisco Ediciones técnicas y Científicas, 1ª Edición Madrid 2004</i>
NOMBRE DE LA UNIDAD (5): Fundamentos de la Geodesia Espacial	
DURACIÓN DE LA UNIDAD EN PERIODOS ACADÉMICOS: HT:4;HP:2	
OBJETIVOS DE LA UNIDAD: <ul style="list-style-type: none"> Proporcionar al estudiante, conocimiento acerca de la geodesia espacial y los elementos que lo componen. Que el estudiante sea capaz de aplicar las formulas de la y transformación de coordenadas en el sistema rectangular instantáneo al sistema WGS84. 	
CONTENIDO: 5.1 Introducción A La Geodesia Espacial 5.2 Primeros Satélites 5.3 Generalidades Sobre Satélites 5.4 Sistemas Actuales 5.5 Sistema de Referencia GPS	
METODOLOGÍA DE LA ENSEÑANZA:	TÉCNICAS PREDOMINANTES PROPUESTAS PARA LA UNIDAD:
	<ul style="list-style-type: none"> Exposiciones teóricas. Clases desarrolladas con participación de los alumnos.
	EVALUACIÓN DE LA UNIDAD:
	<ul style="list-style-type: none"> Diagnostico Trabajo correctivo y medición
	BIBLIOGRAFÍA ESPECIFICA DE LA UNIDAD: 1. B. HOFFMAN Y WELLENHOF H.: "Global Positioning System Theory and Practice", <i>Ed. Springer Verlag Wien New York, 1992</i> 2. NÚÑEZ ALFONSO, VALBUENA DURÁN JOSÉ LUÍS, VELASCO GÓMEZ JESÚS: "GPS, La nueva etapa de la Topografía", <i>Ed. Ediciones de las Ciencias Sociales S.A. Madrid 1992</i>
NOMBRE DE LA UNIDAD (6): Principios Básicos de Fotogrametría	
DURACIÓN DE LA UNIDAD EN PERIODOS ACADÉMICOS: HT:8;HP:4	
OBJETIVOS DE LA UNIDAD: <ul style="list-style-type: none"> Que el estudiante tenga conocimientos básicos de Fotogrametría Que consiga identificar los elementos de una fotografía aérea, sus deformaciones geométricas y su clasificación Que pueda realizar el cálculo de distancias y áreas en una fotografía aérea. Proporcionar al estudiante conocimientos sobre los elementos geométricos de la visión binocular y la Teoría Epipolar. Proporcionar al estudiante conocimientos para la observación estereoscópica de fotografías y sus diferentes métodos. Que el estudiante pueda realizar el calculo de pendientes del terreno en base a Fotografías aéreas. 	

<ul style="list-style-type: none"> • Proporcionar al estudiante conocimiento acerca del funcionamiento, las características, componentes y usos de las cámaras aéreas. • Proporcionar al estudiante conocimientos sobre algunos instrumentos prácticos para la corrección de las deformaciones geométricas en las Fotografías. • Proporcionar al estudiante conocimientos acerca de la clasificación de los instrumentos aproximados y sus usos mas frecuentes. 	
CONTENIDO: 6.1 Definición 6.2 Definición De Elementos De Una Fotografía Aérea 6.3 Deformaciones Geométricas De Las Fotografías 6.4 Clasificación De Fotografías Aéreas 6.5 Escala De Fotografías 6.6 Medición De Distancias Y Áreas Sobre Fotos Aéreas 6.7 Elementos Geométricos de la Visión Binocular 6.8 Requisitos Para la Observación Estereoscópica de Fotografías 6.9 Teoría Epipolar 6.10 Métodos Para Observación Estereoscópica de Fotografías 6.11 Paralelaje y Marca Flotante 6.12 Medición y Estimación de Pendientes 6.13 Fotogrametría Digital 6.14 Cámaras Aéreas 6.15 Instrumentos Fotogramétricos Aproximados	
METODOLOGÍA DE LA ENSEÑANZA:	TÉCNICAS PREDOMINANTES PROPUESTAS PARA LA UNIDAD:
	<ul style="list-style-type: none"> • Exposiciones teóricas. • Clases desarrolladas con participación de los alumnos.
	EVALUACIÓN DE LA UNIDAD:
	<ul style="list-style-type: none"> • Diagnostico • Trabajo correctivo y medición
	BIBLIOGRAFÍA ESPECIFICA DE LA UNIDAD:
	1. DEAGOSTINI ROUTIN, DANIEL: "Introducción a la Fotogrametría", <i>Centro Interamericano de Fotointerpretación, Bogota-Colombia 1978</i> 2. MARTIN ASIN, FERNANDO: "Geodesia y Cartografía Matemática", <i>Ed. Paraninfo S.A. 3ª Edición Madrid 1990</i> 3. PÉREZ ÁLVAREZ, JUAN ANTONIO: "Apuntes de Fotogrametría II", <i>Universidad de Extremadura – Centro Universitario de Mérida – Ingeniería Técnica en Topografía, Septiembre 2001</i>
NOMBRE DE LA UNIDAD (7): Planificación y Evaluación de Vuelos	
DURACIÓN DE LA UNIDAD EN PERIODOS ACADÉMICOS: HT:4;HP:4	
OBJETIVOS DE LA UNIDAD: <ul style="list-style-type: none"> • Proporcionar al estudiante los conocimientos básicos para Planear vuelos para Proyectos Fotogramétricos. • Que el estudiante consiga determinar los elementos necesarios para una correcta planeación de vuelo. • Proporcionar al estudiante los conocimientos necesarios para realizar una evaluación del vuelo y el análisis cualitativo de las fotografías 	
CONTENIDO: 7.1 Símbolos. 7.2 Relaciones Y Formulas. 7.3 Planeación De Vuelos.	

7.4	Control De Plan De Vuelo.
7.5	Evaluación Del Vuelo.
METODOLOGÍA DE LA ENSEÑANZA:	TÉCNICAS PREDOMINANTES PROPUESTAS PARA LA UNIDAD:
	<ul style="list-style-type: none"> Exposiciones teóricas. Clases desarrolladas con participación de los alumnos.
	EVALUACIÓN DE LA UNIDAD:
	<ul style="list-style-type: none"> Diagnostico Trabajo correctivo y medición
	BIBLIOGRAFÍA ESPECIFICA DE LA UNIDAD:
1. DEAGOSTINI ROUTIN, DANIEL: "Introducción a la Fotogrametría", <i>Centro Interamericano de Fotointerpretación, Bogota-Colombia 1978</i>	
2. DEAGOSTINI ROUTIN, DANIEL: "Fotografías aéreas y planeación de vuelos", <i>Centro Interamericano de Fotointerpretación, Bogota-Colombia 1971</i>	
NOMBRE DE LA UNIDAD (8): Principios de Fotointerpretación Topográfica	
DURACIÓN DE LA UNIDAD EN PERIODOS ACADÉMICOS: HT:2;HP:2	
OBJETIVOS DE LA UNIDAD: <ul style="list-style-type: none"> Proporcionar al estudiante los conocimientos de las características mas relevantes de la imagen fotográfica y la preparación de estas para su Fotointerpretación. Proporcionar al estudiante conocimientos sobre Fotointerpretación Topográfica, los elementos a ser considerados para el análisis de fotografías. Proporcionar al estudiante el conocimiento de los pasos para la elaboración de estereogramas, estereotriplets, multipletes y fotomosaicos además de su utilidad en trabajos de ingeniería 	
CONTENIDO: <ul style="list-style-type: none"> 10.1 Definición. 10.2 Características De La Imagen Fotográfica. 10.3 Elementos Para El Análisis De Fotografías. 10.4 Claves De Interpretación. 10.5 Preparación De Las Fotografías Para Su Fotointerpretación. 10.6 Interpretación Topográfica. 10.7 Principales Campos De Aplicación De Fotointerpretación En Ingeniería 10.8 Introducción 10.9 Estereogramas 10.10 Estereotriplets 10.11 Multipletes 10.12 Fotomosaicos 10.13 Fotomosaicos De Fajas De Fotografías Para Estudios De Ingeniería 	
METODOLOGÍA DE LA ENSEÑANZA:	TÉCNICAS PREDOMINANTES PROPUESTAS PARA LA UNIDAD:
	<ul style="list-style-type: none"> Exposiciones teóricas. Clases desarrolladas con participación de los alumnos.
	EVALUACIÓN DE LA UNIDAD:
	<ul style="list-style-type: none"> Diagnostico Trabajo correctivo y medición
	BIBLIOGRAFÍA ESPECIFICA DE LA UNIDAD:
1. DEAGOSTINI ROUTIN, DANIEL: "Introducción a la Fotogrametría", <i>Centro Interamericano de Fotointerpretación, Bogota-Colombia 1978</i>	
2. DEAGOSTINI ROUTIN, DANIEL: "Fotografías aéreas y planeación de vuelos",	

	<p><i>Centro Interamericano de Fotointerpretación, Bogota-Colombia 1971</i></p> <p>3. PÉREZ ÁLVAREZ, JUAN ANTONIO: "Apuntes de Fotogrametría III", <i>Universidad de Extremadura – Centro Universitario de Mérida – Ingeniería Técnica en Topografía, Septiembre 2001</i></p>
NOMBRE DE LA UNIDAD (9): Cartografía	
DURACIÓN DE LA UNIDAD EN PERIODOS ACADÉMICOS: HT:2;HP:2	
OBJETIVOS DE LA UNIDAD: <ul style="list-style-type: none"> • Proporcionar al estudiante, conocimientos básicos de los procesos que se utilizan para el transporte de las coordenadas en tres dimensiones (esfera, elipse), a un sistema de coordenadas en dos dimensiones (plano). • Que el estudiante sea capaz de realizar transformación de coordenadas geodésicas a coordenadas UTM, manteniendo sus características fundamentales. 	
CONTENIDO: <p>9.1 Proyecciones Cartográficas</p> <p>9.2 Desarrollo Cilíndrico</p> <p>9.3 Desarrollo Cilíndrico De Mercator (Tierra Elipsoídica)</p> <p>9.4 Desarrollo Cilíndrico Transverso (Tierra Esférica)</p> <p>9.5 La Proyección U.T.M.</p>	
METODOLOGÍA DE LA ENSEÑANZA:	TÉCNICAS PREDOMINANTES PROPUESTAS PARA LA UNIDAD:
	<ul style="list-style-type: none"> • Exposiciones teóricas. • Clases desarrolladas con participación de los alumnos.
	EVALUACIÓN DE LA UNIDAD:
	<ul style="list-style-type: none"> • Diagnostico • Trabajo correctivo y medición
	BIBLIOGRAFÍA ESPECIFICA DE LA UNIDAD:
	<p>1. MARTIN ASIN, FERNANDO: "Geodesia y Cartografía Matemática", <i>Ed. Paraninfo S.A. 3ª Edición Madrid 1990</i></p> <p>2. MARTINEZ, OJEDA, SÁNCHEZ, REJAS, GARCÍA: "Formulario Técnico de Geodesia y Topografía", <i>Profesores de Topografía de la ETSI de Caminos, Canales y Puertos e Madrid, Ed. Bellisco Ediciones técnicas y Científicas, 1ª Edición Madrid 2004</i></p> <p>3. FRANCO REY, JORGE: "Nociones de Cartografía"</p>
NOMBRE DE LA UNIDAD (10): Manejo de la Carta	
DURACIÓN DE LA UNIDAD EN PERIODOS ACADÉMICOS: HT:2;HP:4	
OBJETIVOS DE LA UNIDAD: <ul style="list-style-type: none"> • Proporcionar al estudiante, información básica que se presenta en una carta geográfica. • Que el estudiante sea capaz de realizar utilizar e interpretar una carta geográfica. 	
CONTENIDO: <p>10.1 Información Marginal Y Símbolos</p> <p>10.2 Cuadrículas</p> <p>10.3 Escala Y Distancia.</p>	
METODOLOGÍA DE LA ENSEÑANZA:	TÉCNICAS PREDOMINANTES PROPUESTAS PARA LA UNIDAD:
	<ul style="list-style-type: none"> • Exposiciones teóricas. • Clases desarrolladas con participación de los alumnos.
	EVALUACIÓN DE LA UNIDAD:
	<ul style="list-style-type: none"> • Diagnostico • Trabajo correctivo y medición
	BIBLIOGRAFÍA ESPECIFICA DE LA UNIDAD:

	1. "Lectura de Mapas – Texto especial del FM 21 – 26 de la Secretaria del Ejercito de los E.E.U.U", <i>Material traducido al español por la escuela de las Américas de los E.E.U.U. con sede en el fuerte de Gullik, zona del canal de Panama.</i>
VI. EVALUACIÓN.	
<ul style="list-style-type: none"> • Diagnostico • Trabajo correctivo y medición • Exámenes de rendimiento 	
VII. CRONOGRAMA.	
VIII. DISPOSICIONES GENERALES.	
IX. BIBLIOGRAFÍA GENERAL.	
1. ZABALAGA M., OSCAR: "Apuntes de la materia de Geodesia y Fotogrametría" 2. AYRES F.: "Trigonometría Plana y Esférica", <i>Edit. San Fernando, Schaum 1980</i> 3. Mc GRAW HILL: "Problemas de Trigonometría" 4. MARTIN ASIN, FERNANDO: "Geodesia y Cartografía Matemática", <i>Ed. Paraninfo S.A. 3ª Edicion Madrid 1990</i> 5. ZACATOV, P.S.: "Curso de Geodesia Superior", <i>Ed. Rubiños – 1860, S. A. Edición Alcalá 1997</i> 6. MILTON ARANA, JOSÉ: "Geodesia Física – Notas de Aula", <i>Unesp – Campus de Presidente Prudente, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Departamento de Cartografia, Março 2000</i> 7. WEIKKO A. HEISMEN Y HELMUT MORITZ: "Geodesia Física", <i>Ed. W. H. Freeman and company, 1966</i> 8. MARTINEZ, OJEDA, SÁNCHEZ, REJAS, GARCÍA: "Formulario Técnico de Geodesia y Topografía", <i>Profesores de Topografía de la ETSI de Caminos, Canales y Puertos e Madrid, Ed. Bellisco Ediciones técnicas y Científicas, 1ª Edición Madrid 2004</i> 9. NÚÑEZ ALFONSO, VALBUENA DURÁN JOSÉ LUÍS, VELASCO GÓMEZ JESÚS: "GPS, La nueva etapa de la Topografía", <i>Ed. Ediciones de las Ciencias Sociales S.A. Madrid 1992</i> 10. FRANCO REY, JORGE: "Nociones de Geodesia. GPS" 11. B. HOFFMAN Y WELLENHOF H.: "Global Positioning System Theory and Practice", <i>Ed. Springer Verlag Wien New York, 1992</i> 12. DEAGOSTINI ROUTIN, DANIEL: "Introducción a la Fotogrametría", <i>Centro Interamericano de Fotointerpretación, Bogota-Colombia 1978</i> 13. DEAGOSTINI ROUTIN, DANIEL: "Fotografías aéreas y planeación de vuelos", <i>Centro Interamericano de Fotointerpretación, Bogota-Colombia 1971</i>	

14. PÉREZ ÁLVAREZ, JUAN ANTONIO: "Apuntes de Fotogrametría II", *Universidad de Extremadura – Centro Universitario de Mérida – Ingeniería Técnica en Topografía*, Septiembre 2001
15. PÉREZ ÁLVAREZ, JUAN ANTONIO: "Apuntes de Fotogrametría III", *Universidad de Extremadura – Centro Universitario de Mérida – Ingeniería Técnica en Topografía*, Septiembre 2001
16. FRANCO REY, JORGE: "Nociones de Cartografía"
17. ÁLVAREZ DE ZAYAS, CARLOS M.: "La Escuela en la Vida", *Didáctica General*, Quinta Edición, 2002
18. ÁLVAREZ DE ZAYAS, CARLOS M.: "Fundamentos Teóricos de la Dirección del Proceso de Formación del Profesional de Perfil Amplio", *UMRPSXCh, Sucre*, Tercera Edición, 1992
19. MILTON ARANA, JOSÉ: "Geodesia Física – Notas de Aula", *Unesp – Campus de Presidente Prudente, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Departamento de Cartografia*, Março 2000
20. "Lectura de Mapas – Texto especial del FM 21 – 26 de la Secretaria del Ejercito de los E.E.U.U", *Material traducido al español por la escuela de las Américas de los E.E.U.U. con sede en el fuerte de Gullik, zona del canal de Panama.*
21. <http://www.cartesia.org/articulo222.html>
22. <http://www.gabrielortiz.com/>

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO i

INTRODUCCIÓN

i.- Generalidades	1
ii.- Geodesia	5
iii.- Fotogrametría	9
iv.- Geodesia y Fotogrametría en Bolivia	12
v.- La Geodesia y Fotogrametría en Ingeniería Civil	13
vi.- Geodesia y Fotogrametría como asignatura de la formación profesional en Ingeniería Civil	14

CAPÍTULO I

1.- TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

1.1.- Definiciones básicas	16
1.2.- Triángulo Esférico	17
1.2.1.- Relaciones de un Triángulo Esférico	18
1.3.- Fórmulas Fundamentales de primer Orden de la Trigonometría Esférica	18
1.3.1.- Fórmulas de Bessel	19
1.3.2.- Fórmula de la Cotangente	21
1.4.- Triángulos Esféricos singulares	21
1.5.- Regla del Pentágono de Neper	22
1.6.- Resolución de Triángulos Esféricos	23
1.7.- Forma y Dimensiones de la Tierra. Coordenadas Terrestres	24
1.7.1.- El Geoide	25
1.7.2.- Definiciones	26
1.8.- Coordenadas	27
1.8.1.- Coordenadas geográficas	27
1.8.2.- Coordenadas geocéntricas	28
1.8.3.- Latitud reducida o excéntrica	29
1.8.4.- Relación entre las latitudes	29

1.8.5.- Relación entre ρ y las latitudes	30
1.8.6.- Correcciones a las coordenadas	31

CAPÍTULO II

2.- GEODESIA ESFEROIDAL

2.1.- Consideración sobre la Geometría de la Elipse	34
2.1.1.- Cálculo de las normales principales	34
2.1.2.- Longitud del arco de la elipse meridiana	41
2.1.3.- Exceso esférico de un triángulo	41
2.1.4.- Teorema de Legendre	43
2.2.- Nociones sobre curvas alabeadas. La línea geodésica	44
2.2.1.- Introducción	44
2.2.2.- Cálculo de redes geodésicas	47
2.2.3.- Conceptos sobre curvas alabeadas	48
2.2.4.- Línea geodésica. Propiedades	49
2.2.5.- Cálculo de los lados de la red geodésica. Aplicación de los teoremas de Gauss y Legendre.	54
2.3.- Cálculo de coordenadas geodésicas	57
2.3.1.- Introducción	57
2.3.2.- Conceptos sobre posiciones	60
2.3.3.- Métodos utilizados en las antiguas redes geodésicas	61
2.4.- Problema inverso del transporte de coordenadas	73
2.4.1.- Determinación de acimutes directo y reciproco	73
2.4.2.- Cálculo de longitudes del arco geodésico $Q_0 Q'$	76
2.4.3.- Aplicaciones de la proyección UTM al problema de transporte de coordenadas.	77
2.5.- Sistemas de Referencia empleados en Geodesia	79
2.5.1.- Introducción	79
2.5.2.- Sistema Elipsoidal	79
2.5.3.- Sistemas de coordenadas espaciales rectangulares X, Y, Z	80
2.5.4.- Sistemas de coordenadas rectangulares esferoidales p y q	81
2.5.5.- Coordenadas rectangulares planas	82
2.5.6.- Sistema de coordenadas geodésicas	82
2.5.7.- Coordenadas Geocéntricas cartesianas	84
2.5.8.- Paso de coordenadas geodésicas a geocéntricas.	84
2.5.9.- Paso de coordenadas geocéntricas a geodésicas	85

CAPÍTULO III

3.- GEODESIA FÍSICA

3.1.- Conocimientos generales	86
-------------------------------	----

3.1.1.- Objetivos de la geodesia física	86
3.2.- Breves consideraciones acerca del desarrollo de los conocimientos de la Tierra y de los métodos de estudio.	87
3.2.1.- Fuerza de gravedad.	87
3.2.2.- Métodos generales para la determinación de la figura de la Tierra.	87
3.2.3.- El Problema de la reducción.	89
3.3.- Fundamentos de la teoría del potencial de la fuerza de gravedad.	89
3.3.1.- Noción sobre los métodos de medición de la fuerza de gravedad.	89

CAPÍTULO IV

4.- ASTRONOMÍA GEODESICA

4.1.- Trigonometría esférica. Formulas de Bessel.	101
4.2.- La esfera celeste y sus definiciones.	104
4.3.- Los sistemas de coordenadas en la astronomía.	107
4.3.1.- Coordenadas horizontales.	108
4.3.2.- Coordenadas ecuatoriales horarias.	110
4.3.3.- Coordenadas ecuatoriales absolutas.	111
4.4.- Transformación de coordenadas.	112
4.4.1.- Transformación de coordenadas horizontales en ecuatoriales horarias.	113
4.4.2.- Transformación de coordenadas ecuatoriales horarias en horizontales.	114
4.4.3.- Transformación de coordenadas ecuatoriales horarias en coordenadas absolutas y viceversa.	115
4.5.- Posiciones particulares de la esfera.	115
4.5.1.- Máxima digresión.	115
4.5.2.- Primer vertical.	117
4.5.3.- Orto y ocaso.	118
4.5.4.- Paso por el meridiano o culminación.	120

CAPÍTULO V

5.- FUNDAMENTOS DE LA GEODESIA ESPACIAL

5.1.- Introducción a la geodesia Espacial.	121
5.2.- Primeros satélites	122
5.3.- Generalidades sobre satélites.	123
5.3.1.- Tipos de satélites.	124
5.3.2.- Posicionamiento..	124
5.3.3.- Propagación de emisiones radioeléctricas.	126

5.3.4.- Vacío	127
5.3.5.- Ionosfera	127
5.3.6.- Troposfera.	128
5.4.- Sistemas Actuales	130
5.4.1.- Sistema TRANSIT	131
5.4.2.- GPS	134
5.5.- Sistemas de referencia GPS.	135
5.5.1.- Datum Geodésico	136
5.5.2.- Orbitas	136
5.5.3.- Coordenadas en el plano orbital	142
5.5.4.- Coordenadas en sistema rectangular instantáneo	143
5.5.5.- Sistema WGS84	143

CAPÍTULO VI

6.- PRINCIPIOS BÁSICOS DE FOTOGRAMETRÍA

6.1.- Definición	146
6.1.1.- Sistemas de Proyección	151
6.1.2.- Características del terreno.	152
6.1.3.- Equipo.	153
6.2.- Definición de elementos de una fotografía aérea	154
6.3.- Deformaciones Geométricas de las Fotografías	158
6.3.1.- Desplazamiento debido al relieve	158
6.3.2.- Desplazamiento debido a la inclinación de la Fotografía	160
6.3.3.- Distorsión	162
6.4.- Clasificación de Fotografías Aéreas	163
6.5.- Escala de Fotografías	164
6.6.- Medición de distancias y áreas sobre Fotos aéreas	166
6.6.1.- Corrección de los puntos que definen la línea o área	166
6.6.2.- Cálculo de la escala media	167
6.6.3.- Cálculo de distancia y áreas	167
6.7.- Elementos Geométricos de la visión Binocular	169
6.8.- Requisitos para la observación estereoscópica de fotografías	171
6.9.- Teoría epipolar	173
6.10.- Métodos para observación estereoscópica de fotografías	176

6.11.- Paralelaje y Marca Flotante	178
6.11.1.- Principio de la Marca Flotante	178
6.11.2.- Paralelaje	179
6.11.3.- Diferencia de Paralelaje	184
6.11.4.- Barra de Paralelaje	184
6.11.5.- Ejemplos para el cálculo de diferencias de alturas	190
6.12.- Medición y Estimación de Pendientes	192
6.12.1.- Método semigráfico para medición de pendientes - Stellingwerf	194
6.12.2.- Estimación de pendientes	199
6.13.- Fotogrametría Digital	200
6.13.1.- Imagen Digital	201
6.13.2.- Ventajas e Inconvenientes de la Utilización de imágenes en Formato Digital en Fotogrametría	202
6.13.3.- Sistemas Fotogramétricos Digitales	204
6.13.4.- Aplicaciones	206
6.13.5.- Etapas de Generación de una Ortofotografía Digital	208
6.14.- Cámaras Aéreas	210
6.14.1.- Clasificación de Cámaras Aéreas	211
6.14.2.- Características y Componentes de las Cámaras Aéreas	212
6.15.- Instrumentos Fotogramétricos Aproximados	213
6.15.1.- Clasificación de Instrumentos Aproximados	213

CAPÍTULO VII

7.- PLANEACIÓN Y EVALUACIÓN DE VUELOS	216
7.1.- Símbolos	216
7.2.- Relaciones y Formulas	217
7.2.1.- Número de fotografías por línea de Vuelo (NFLV)	219
7.2.2.- Número de líneas de vuelo (NLV)	219
7.2.3.- Número total de fotografías (NTF)	220
7.2.4.- Superficie fotografiada	220
7.2.5.- Área neta ganada por fotografía (AN)	221
7.3.- Planeación de vuelos	221
7.3.1.- Datos	221
7.3.2.- Cálculos	223
7.4.- Control de Plan de vuelo	229
7.5.- Evaluación del vuelo	231
7.5.1.- Geometría del vuelo	231
7.5.2.- Análisis cualitativo de negativos y/o fotografías	233

CAPÍTULO VIII.

8.- PRINCIPIOS DE FOTOINTERPRETACIÓN TOPOGRÁFICA	235
8.1.- Definición	235
8.2.- Características de la imagen fotográfica	236
8.3.- Elementos para el análisis de fotografías	238
8.3.1.- Tamaño	238
8.3.2.- Forma	239
8.3.3.- Tono y color	239
8.3.4.- Textura	241
8.3.5.- Patrón	241
8.4.- Claves de interpretación	242
8.5.- Preparación de las fotografías para su fotointerpretación	242
8.6.- Interpretación topográfica	244
8.6.1.- Vías de comunicación	247
8.6.2.- Construcciones	248
8.6.3.- Límites	249
8.6.4.- Uso actual de la Tierra	250
8.6.5.- Drenaje	251
8.6.6.- Puntos de control	524
8.6.7.- Altimetría	254
8.6.8.- Otros elementos	256
8.7.- Principales campos de aplicación de fotointerpretación en la ingeniería	257
8.8.- Estereogramas, estereotripletes, multiplanes y fotomosaicos	258
8.8.1.- Estereogramas	258
8.8.2.- Estereotripletes	259
8.8.3.- Multiplanes	260
8.8.4.- Fotomosaicos	262
8.8.5.- Fotomosaicos de fajas de fotografías para estudios de ingeniería	265

CAPÍTULO IX

9.- CARTOGRAFÍA	267
9.1.- Proyecciones cartográficas	267
9.1.1.- Generalidades.	267
9.2.- Desarrollo cilíndrico.	270
9.2.1.- Desarrollo cilíndrico esférico.	270
9.2.2.- Desarrollo cilíndrico de equivalente de Lambert.	270

9.2.3.- Desarrollo cilíndrico con meridianos automecóicos	273
9.2.4.- Desarrollo cilíndricos conforme (carta de Mercator).	274
9.2.5.- Longitud y acimut de la loxodrómica	277
9.3.- Desarrollo Cilíndrico de Mercator (Tierra Elipsoidica)	283
9.4.- Desarrollo cilíndrico transverso (Tierra Esférica).	285
9.4.1.- Desarrollo cilíndrico transverso conforme de Gauss.	285
9.5.- La proyección U.T.M.	289
9.5.1.- Fundamento matemático.	291
9.5.2.- Transformación de coordenadas.	292

CAPÍTULO X

10.- MANEJO PRACTICO DE LA CARTA GEOGRÁFICA	294
10.1.- Información marginal y símbolos.	294
10.1.1.- Introducción	294
10.1.2.- Símbolos y colores que se usan en los mapas topográficos.	301
10.1.3.- Abreviaturas topográficas	303
10.1.4.- Detalle de clasificación	304
10.2.- Cuadriculas.	310
10.2.1.- Manera de identificar direcciones.	310
10.2.2.- Coordenadas geográficas.	311
10.2.3.- Cuadrícula universal transversa de Mercator.	315
10.3.- Escala y Distancia.	317
10.3.1.- Importancia.	317
10.3.2.- Fracción representativa FR.	318
10.3.3.- Escalas Graficas.	320
10.4.- Altura y Relieve.	321
10.4.1.- Introducción.	321
10.4.2.- Curvas de nivel.	322
10.4.3.- Pendiente	333
10.4.4.- Perfiles.	335

ANEXOS	336
ANEXO I	
ANEXO II	
ANEXO III	
ANEXO IV	
ANEXO V	

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPITULO I

1.- TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

Figura 1.1	Imagen de un triángulo esférico
Figura 1.2	Deducción de las relaciones entre lados y ángulos
Figura 1.3	Regla de los pentágonos de Neper
Figura 1.4	Coordenadas terrestres geográficas
Figura 1.5	Coordenadas terrestres geocéntricas
Figura 1.6	Coordenadas terrestres con latitud reducida

CAPITULO II

2.- GEODÉSIA ESFEROIDAL

Figura 2.1	Elipse meridiana, representación de la gran normal
Figura 2.2	Curva Plana
Figura 2.3	Triángulo esférico
Figura 2.4.a	Triangulo Esférico
Figura 2.4.b	Triangulo plano
Figura 2.5	Reducción de ángulo de pendiente al terreno
Figura 2.6	Reducción al horizonte distancias cortas
Figura 2.7	Reducción al horizonte distancias largas
Figura 2.8	Distancia reducida al horizonte de altitud media.
Figura 2.9	Reducción a nivel del mar
Figura 2.10	Paso de la cuerda al arco
Figura 2.11	Corrección especial
Figura 2.12	Ejemplo
Figura 2.13	Haz de planos
Figura 2.14	Acimut de una sección normal.
Figura 2.15	Redes Geodésicas
Figura 2.16	Curva tangente a la familia de planos
Figura 2.17	Tiedro
Figura 2.18	Línea Geodésica
Figura 2.19	Línea Geodésica entre dos secciones
Figura 2.20	Línea geodésica a lo largo de una superficie de revolución
Figura 2.21	Coordenadas geodésicas
Figura 2.22	Esferas auxiliares
Figura 2.23 a	Triángulo esférico
Figura 2.23 b	Triángulo plano
Figura 2.24	Triángulo referido a la esfera de curvatura media
Figura 2.25	Convergencia de meridianos
Figura 2.26	Convergencia
Figura 2.27	Ejemplo
Figura 2.28	Línea Geodésica determinación de acimutes.
Figura 2.29	Triángulo esférico; determinación de acimutes
Figura 2.30	Triángulo esférico

Figura 2.31	Longitud de arco.
Figura 2.32	Problema directo.
Figura 2.33	Variación de coordenadas
Figura 2.34	Corrección de Coordenadas
Figura 2.35	Coordenadas sin saber el norte
Figura 2.36	Sistema de referencia elipsoidal
Figura 2.37	Elipsoide, sistema de referencia rectangular.
Figura 2.38	Elipse, sistema de coordenadas rectangulares esferoidales p y q
Figura 2.39	Elipse, sistema de coordenadas geodésicas
Figura 2.40	Coordenadas geocéntricas.

CAPITULO III

3.- GEODESIA FÍSICA

Figura 3.1	Estructura de la Tierra
Figura 3.2	Punto A sobre la superficie terrestre
Figura 3.3	Puntos materiales A y B en el espacio
Figura 3.4	Cuerpo atraído por otro cualquiera
Figura 3.5	Diferencia de altura
Figura 3.6	Base medida en la superficie terrestre
Figura 3.7	Segmento de la base medida

CAPITULO IV

4.- ASTRONOMÍA GEODESICA

Figura 4.1	Trigonometría esférica
Figura 4.2	Pentágono de Neper con triángulo rectángulo
Figura 4.3	Pentágono de Neper con triángulo rectilátero
Figura 4.4	Elementos de la esfera celeste
Figura 4.5	Elementos de la esfera celeste
Figura 4.6	Coordenadas horizontales
Figura 4.7	Coordenadas ecuatoriales horarias
Figura 4.8	Coordenadas ecuatoriales absolutas
Figura 4.9	Coordenadas ecuatoriales absolutas
Figura 4.10	Triángulo de posición
Figura 4.11	Máxima digresión
Figura 4.12	Triángulo de posición en máxima digresión
Figura 4.13	Pentágono de Neper en máxima digresión
Figura 4.14	Primer vertical
Figura 4.15	Pentágono en primer vertical
Figura 4.16	Orto y Ocaso

Figura
4.17 Pasos por el meridiano

CAPITULO V

5.- FUNDAMENTOS DE LA GEODESIA ESPACIAL

Figura 5.1 Cuenta Doppler
Figura 5.2 Esquema de la constelación NAVSTAR
Figura 5.3 Parámetros orbitales Keplerianos
Figura 5.4 Parámetros radiofundidos en el mensaje
Figura 5.5 Plano orbital
Figura 5.6 Sistema Rectangular instantáneo
Figura 5.7 Variación del polo

CAPITULO VI

6.- PRINCIPIOS BÁSICOS DE FOTOGRAMETRÍA

Figura 6.1 Etapas de la Fotogrametría
Figura 6.2 Proyección o perspectiva de un punto
Figura 6.3 Comparación entre fotografía, terreno y mapa
Figura 6.4 Definición de c y Z
Figura 6.5 Definición de los puntos p, i, n
Figura 6.6 Desplazamiento debido al relieve
Figura 6.7 Desplazamiento debido a la inclinación de la fotografía
Figura 6.8 Distorsión radial y tangencial
Figura 6.9 Clasificación en función del campo angular del objetivo
Figura 6.10 Clasificación en función de la inclinación del eje de la cámara
Figura 6.11 Escala de Fotografías aéreas
Figura 6.12 Elementos de visión binocular
Figura 6.13 Observación de una pirámide de base cuadrada desde dos puntos diferentes
Figura 6.14 Definición de eje epipolar, epipolos y líneas epipolares
Figura 6.15 Fotografías inclinadas orientadas para la observación estereoscópica de R y A
Figura 6.16 Observación estereoscópica de fotografías verticales
Figura 6.17 Métodos para observación estereoscópica de fotografías
Figura 6.18 Principio de Marca Flotante
Figura 6.19 Definición de paralelaje absoluta
Proyección de la pirámide ABCDT desde los centros de proyección O_1 y O_2

6.20	
Figura	
6.21	Imagen plana e imagen seudoscópica
Figura	
6.22	Esquema de una Barra de paralelaje
Figura	
6.23	Relación entre P , B , c y Z
Figura	
6.24	Medición de la pendiente α entre A y R
Figura	
6.25	Principio para la corrección del desplazamiento debido al relieve
Figura	
6.26	Principio para la corrección gráfica del desplazamiento debido al relieve
Figura	
6.27	Comparación entre pendiente real q y pendiente exagerada p
Figura	
6.28	<i>izq.</i> Fragmento de una fotografía aérea en formato digital
Figura	
6.28	<i>cen.</i> Ampliación de un elemento de la imagen (casa)
Figura	
6.28	<i>der.</i> Representación numérica de los primeros píxeles de la zona ampliada
Figura	
6.29	<i>izq.</i> Imagen analógica
Figura	
6.29	<i>der.</i> Representación de la misma tras el proceso de digitalización
Figura	
6.30	Relación entre la resolución espacial y el espacio requerido para el almacenamiento de una fotografía de formato 23x23 cm.
Figura	
6.31	Elementos constituyentes de un sistema fotogramétrico digital
Figura	
6.32	Esquema de una Cámara Aérea

CAPITULO VII

7.- PLANEACIÓN Y EVALUACIÓN DE VUELOS

Figura 7.1	Definición de planos de referencia
Figura 7.2	Recubrimiento longitudinal (u) y lateral (v)
Figura 7.3	Área neta ganada por fotografía
Figura 7.4	Desviación angular y horizontal de fotos aéreas

CAPITULO VIII.

8.- PRINCIPIOS DE FOTOINTERPRETACIÓN TOPOGRÁFICA

Figura 8.1	Área donde se debe interpretar en fotografías de terreno plano
------------	--

Figura 8.2	Área donde se debe interpretar en fotografías de terreno montañoso
Figura 8.3	Interpretaciones características del terreno
Figura 8.4	Principales redes de drenaje
Figura 8.5	Construcción de un estereograma
Figura 8.6	Construcción de un estereotriplete
Figura 8.7	Construcción de un multiplete
Figura 8.8	Construcción de un fotomosaico
Figura 8.9	Construcción de un mosaico de fajas de fotografías

CAPITULO IX

9.- CARTOGRAFÍA

Figura 9.1	Cilindro tangente a la Tierra
Figura 9.2 <i>a</i>	Tierra esférica elementos
Figura 9.2 <i>b</i>	Área diferencial sobre el plano
Figura 9.3	Ecuador automecánico.
Figura 9.4	Cilindro tangente a lo largo del ecuador.
Figura 9.5	Meridianos y paralelos.
Figura 9.6	Proyecciones en el cilindro.
Figura 9.7	Paralelo de latitud φ
Figura 9.8	Longitud.
figura 9.9	Coordenadas conocidas.
Figura 9.10	Dibujo en proyección Mercator
Figura 9.11	Elipsoide desarrollo cilíndrico
Figura 9.12	Coordenadas conocidas.
Figura 9.13	Arcos falsos paralelos.
Figura 9.14 <i>a</i>	Desarrollo cilíndrico.
Figura 9.14 <i>b</i>	Desarrollo cilíndrico.
Figura 9.15	Enumeración de los husos.
Figura 9.16	Representación en proyección U.T.M.

CAPITULO X

10.- MANEJO PRACTICO DE LA CARTA GEOGRÁFICA

Figura 10.1	Escala Gráfica.
Figura 10.2	casilla de referencia
Figura 10.3	Signos convencionales
Figura 10.4	Diagrama de declinación
Figura 10.5 <i>a</i>	Área vista desde una posición en el terreno.
Figura 10.5 <i>b</i>	Mapa de la misma área que se muestra en la figura 10.5 <i>a</i>
Figura 10.6	Líneas de referencia.
Figura 10.7	Localización de la posición.
Figura 10.8	Latitud y longitud
Figura 10.9	Una zona de cuadrícula de la Cuadrícula Universal de Mercator.
Figura 10.10	Desviaciones falsas hacia el este y hacia el norte para una zona de cuadrícula.

Figura 10.11	Relación entre la distancia en el plano y la distancia en el terreno.
Figura 10.12	Escala gráfica.
Figura 10.13	Cálculos de la elevación entre curvas de nivel.
Figura 10.14	Pendiente uniforme poco pronunciada.
Figura 10.15	Pendiente uniforme empinada
Figura 10.16	Pendiente cóncava
Figura 10.17	Pendiente convexa.
Figura 10.18	Colina
Figura 10.19 <i>a</i>	Valle
Figura 10.19 <i>b</i>	Quebrada.
Figura 10.20 <i>a</i>	Serranía
Figura 10.20 <i>b</i>	Estribación
Figura 10.21	Garganta.
Figura 10.22	Depresión
Figura 10.23 <i>a</i>	Corte
Figura 10.23 <i>b</i>	Terraplén.
Figura 10.24	Riscos.
Figura 10.25	Diagrama de una pendiente.
Figura 10.26	Pendiente expresada en forma de fracción.
Figura 10.27	Pendiente expresada en un tanto por ciento (%).
Figura 10.28	Pendiente expresada en grados.
Figura 10.29	Manera de dibujar un perfil.
Figura 10.30	Desenfilada determinada mediante un perfil.
Figura 10.31	Manera de dibujar un perfil hecho a la ligera
Figura 10.32	Trazado de áreas cubiertas.

INTRODUCCIÓN



1. GENERALIDADES.

Desde que el hombre hizo su aparición en este planeta, ha tratado de responder las incógnitas que su entorno le ha planteado, una de aquellas incógnitas de la infinitud existente en aquella época, ha ido acompañando a la raza humana por generaciones y se refiere a la determinación de la figura de la Tierra. Es por ello que las grandes civilizaciones e imperios, trataron de responder a ésta y otras interrogantes. Las primeras referencias de los estudios de estos temas se remontan alrededor de 1.000 años antes de Cristo, periodo en el que la civilización griega tenía la idea que la Tierra era plana; sin embargo, empezaron a surgir pensadores, filósofos y matemáticos, quienes en el siglo VI a C, comenzaron a rebatir las ideas de una superficie plana de la Tierra.

- **Pitágoras**, filosofo y matemático (siglo VI a C), fue el primero en dar una concepción sobre la redondez de la Tierra.
- **Eratóstenes**, astrónomo de la Escuela de Alejandría. Él estuvo a cargo de la Biblioteca del famoso Museo de Alejandría, sabía que el Sol estaba muy lejos

de la Tierra, por lo tanto los rayos solares que llegan a la Tierra son todos prácticamente paralelos. Eratóstenes sabía que en Syene, cerca de la moderna Aswan (en el extremo sur del río Nilo), en el solsticio de verano y al mediodía, los rayos solares llegan al fondo de un pozo. En ese mismo día el Sol no pasa por el cenit de Alejandría sino a $7,2^\circ$ de él. Razonó correctamente que eso se debía a la curvatura de la Tierra y que la vertical de Alejandría formaba en el centro de la Tierra un ángulo de $7,2^\circ$ con la vertical de Syene. Midió la distancia entre Alejandría y Syene, obteniendo 5.000 estadios (medida antigua, con longitud aproximada de 200 metros por estadio). Siendo el ángulo entre las dos verticales $1/50$ de un círculo, Eratóstenes obtuvo un perímetro para el meridiano terrestre de $50 \times 5.000 = 250.000$ estadios. Esta cifra la cambió después a 252.000 estadios, para que hubiese 700 estadios por grado. Desgraciadamente no se sabe con seguridad qué tipo de estadio utilizó Eratóstenes. Si fuese, como sugiere Plinio, el estadio de 157,5 metros es un valor casi idéntico al aceptado actualmente, ya que difiere en sólo unos ochenta kilómetros del valor correcto.

Eratóstenes descubrió que mientras en Syene el Sol alumbraba el interior de un pozo al mediodía, en Alejandría sólo llegaba a un mínimo de $7,2^\circ$ del cenit. Con ello concluyó que las verticales de ambos lugares forman un ángulo semejante en el centro de la Tierra, midiendo la distancia entre ambos lugares obtuvo el perímetro y el radio terrestres.

- **Aristóteles**, hacia el año 340 a. C., en su libro *De los cielos* planteó que la Tierra era una esfera y no una plataforma. Observó que los eclipses lunares se debían a que la Tierra se situaba entre el sol y la luna: la sombra de la Tierra sobre la luna era siempre redonda, lo que no sería así si aquella fuese un disco plano; en cuyo caso la sombra sería alargada y elíptica.

Con base en su teoría, Aristóteles estimó que la circunferencia de la Tierra era de 400 000 estadios, más o menos el doble de la longitud real de dicha circunferencia. Creía que el sol, los planetas y las estrellas giraban en orbitas

circulares alrededor de la Tierra, porque estaba convencido de que ésta era el centro del universo y de que el movimiento circular era el más perfecto.

- **Ptolomeo**, (a. C.100 - 170 a. C.), astrónomo y geógrafo griego. Su vida es casi un misterio, vivió en Egipto y al parecer era de descendencia griega.

Sus teorías tuvieron vigencia durante los mil años siguientes, si bien dos de ellas estaban radicalmente equivocadas: La teoría geocéntrica del universo y la de la dominación de las tierras sobre las aguas. Sin embargo, nadie ha logrado reunir un estudio tan amplio de todo el conocimiento científico de una época determinada. Su tratado astronómico mas celebre es el *Almagesto* que predecía los cambios de posiciones de los cuerpos celestes.

Ptolomeo creía que la tierra era el centro del universo y tenía buenas razones para creer en su forma esférica. Así mismo puso sus nombres a las estrellas y catalogó su brillo, dedujo normas para predecir los eclipses y sentó las bases de la astrología: sostenía que los planetas y las estrellas determinaban estatura, la complexión, el carácter nacional e incluso las anormalidades físicas congénitas de todos los seres humanos.

Trazó un mapa de todo el mundo conocido y creó un ingenioso sistema que relacionaba las latitudes y longitudes de 8 000 lugares, entre otras cosas. Por estas razones se lo conoce como el padre de la geografía.

Toda esta información quedó restringida por más de 1000 años, no obstante en el transcurso de este tiempo se realizaron estudios e investigaciones, estas no fueron divulgadas a la mayoría de la población por temas de índole religioso.

- **Cristóbal Colon** (1492 d. C), por los años 1480-1482, Cristóbal Colón era un buen navegante, un hombre práctico y autodidacta, pero carecía de ciencias y saberes teóricos: para elaborar su plan descubridor. Colón, que era más

medieval que moderno, y se sentía instrumento de la Providencia, utilizó varias fuentes informativas: la *Historia rerum ubique gestarum* del papa Pío II; la *Imago Mundi* del cardenal francés Pierre d'Ailly; y la *Correspondencia y Mapa* que, en 1474, el sabio florentino Paolo del Pozzo Toscanelli había hecho llegar al Rey de Portugal a través de su amigo, el canónigo lisboeta Fernando Martins.

Sin embargo, hay un punto en el que Colón discrepaba con el sabio florentino: las distancias entre ambos extremos del Océano. Toscanelli asignaba al mismo, 120 grados de la esfera terrestre (casi el doble de la que en realidad tiene), y, aunque situaba algunas islas en el camino, la empresa resultaba muy arriesgada. Por esta razón, los portugueses, tras estudiar el plan, lo rechazaron y archivaron. Sin embargo, Colón sabía que, en el capítulo de las distancias, Toscanelli estaba equivocado: al empezar el viaje descubridor, anunció que las primeras tierras se encontrarían a 800 leguas de las islas Canarias.

Para defender su proyecto ante los expertos, tenía que entrar en mediciones sobre el grado y la esfera terrestres, coincide con Alfragano: 1 grado = 56 millas y $\frac{2}{3}$ (milla árabe de casi 2.000 metros); por tanto, la circunferencia del ecuador era igual a 20.400 millas. Esto daría 40.000 kilómetros para la circunferencia del ecuador (prácticamente la medida real). Sin embargo, Colón achica la esfera terrestre y da al ecuador una medida de unos 30.000 kilómetros, es decir una cuarta parte menos, porque está manejando la milla itálica, de unos 1500 metros. Hacia 1483 o 1484 defendió este proyecto ante los portugueses, que lo rechazaron. De mediciones y cálculos realizados por Toscanelli, ellos sabían más que Colón. Por lo tanto éste, no les aportaba nada nuevo y además exigía mucho.

A finales de 1484 o principios de 1485 dejó Portugal lo más secretamente que pudo y entró en Castilla. Después de muchas tentativas de que intercediera

favorablemente de nuevo el monasterio de La Rábida y fray Juan Pérez, los Reyes Católicos en un acto personal y sin base científica, decidieron respaldar el plan colombino. El 17 de abril de 1492 se firmaron las Capitulaciones de Santa Fe o documento-contrato, que estipulaba las condiciones en que Cristóbal Colón haría el viaje descubridor.

- **Isaac Newton** (1642-1727), los razonamientos de Newton fueron los siguientes: si la Tierra no girara alrededor de su eje entonces todas sus partículas, sometidas a la atracción mutua, deberían formar un cuerpo con forma de globo. A consecuencia de la rotación diaria de la Tierra alrededor de su eje en cada punto surge una fuerza centrífuga que actúa perpendicularmente al eje de rotación y tiende a alargar la Tierra en dirección del ecuador.

Con el descubrimiento hecho por Newton de la Ley de Atracción Universal fue posible analizar la cuestión sobre la forma de la Tierra en su conjunto, como el problema físico del equilibrio de un cuerpo líquido viscoso que rota, y en el que todas sus partículas se atraen según dicha ley.

2. GEODESIA

La geodesia es una ciencia, que tiene como principal propósito realizar la determinación de la figura de la Tierra. En esta intención se trabajará en la obtención de las medidas y del tipo de superficie matemática regular, la cual sea representativa de la Tierra. La superficie que es considerada como cercana a la figura de la Tierra es el elipsoide de revolución de poco aplanamiento, a este se lo denomina *elipsoide terrestre*. También se trabajará en el estudio de la verdadera figura de la Tierra, esta labor consiste en establecer las magnitudes geodésicas (desviaciones de la superficie real de la Tierra, en comparación al elipsoide terrestre), del mismo modo se estudiara el campo gravitacional exterior de la Tierra.

La figura de la Tierra y el campo gravitacional terrestre, se estudian de manera conjunta e indivisible. El problema práctico del estudio de la Tierra se reduce a la determinación de las coordenadas de los puntos de superficie en un sistema único y el estudio del campo gravitacional externo de la Tierra se reduce a la determinación del potencial de la fuerza de gravedad sobre la superficie terrestre.

Para simplificar la complicada determinación de la superficie terrestre es que se han introducido conceptos un poco más sencillos acerca de la figura de la Tierra, es así que podemos mencionar los conceptos utilizados para este fin.

Geoide es la superficie de nivel, que coincide con la superficie del agua en reposo de los océanos, idealmente extendida bajo las continentes de modo que la dirección de la líneas verticales crucen perpendicularmente esta superficie en todos sus puntos.

Cuasi-geoide es la superficie que coincide con la del geoide en los océanos y mares y se aleja muy poco en la superficie del geoide en los lugares que corresponden a tierra firme, la superficie del *cuasi-geoide* juega el papel de “nivel del mar”, y desde ella se calculan las alturas topográficas.

Elipsoide de Referencia, la superficie de la Tierra puede representarse con mucha aproximación mediante un elipsoide de revolución, el elipsoide será definido por la elipse al girar alrededor del eje del mundo.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{Ecuación de la elipse})$$

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} y' = 0 \quad (\text{Ecuación de la elipse diferenciada})$$

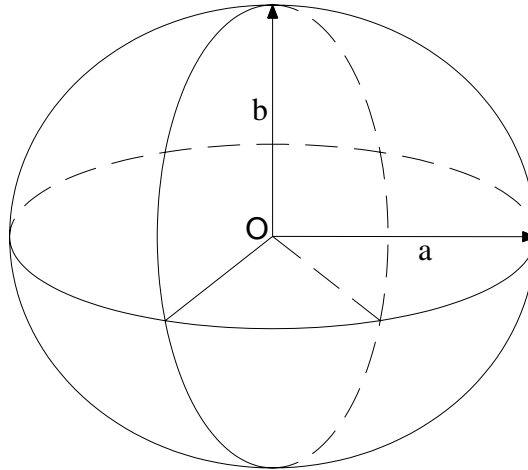


Figura 1 Elipsoide de revolución.

La definición de este sistema puede definirse con:

- Superficie de referencia: dimensiones (semiejes **a**, **b**), excentricidad (**e**).
- Ejes o líneas de referencia en la superficie.
- Sentidos de medida

La obtención de datos para realizar los cálculos acerca de la determinación de las medidas del Elipsoide terrestre son variados, es por esta razón que se han determinado distintos tipos de Elipsoides Referenciales de la Tierra, entre los cuales podemos mencionar:

Tabla Elipsoides de Referencia

Autor	Semieje mayor [m]	Achatamiento
Walbeck	6 376 896	1 : 302,8
Bessel	6 377 397	1 : 299,15
Clarke	6 378 249	1 : 293,5
Internacional o de Hayford	6 378 388	1 : 297,0
Krasovsky	6 378 245	1 : 298,3
Elipsoide asociado GRS80 (GWS84)	6 378 137	1 : 298, 25

La Geodesia como ciencia tiene un amplio campo de estudio, pero en general el objetivo que persigue es determinar la figura de la Tierra, para este trabajo la Geodesia se ha dividido en cuatro partes, que son: *Geodesia Física*, *Geodesia Esferoidal*, *Geodesia Cósmica* y *Geodesia Astronómica*.

Geodesia Física, básicamente intenta determinar la figura de la Tierra a través de la intensidad de la fuerza de gravedad, fundamentados en la dirección y magnitud de la misma, es por eso que en este capítulo analizaremos temas como: *el problema de la reducción*, que primordialmente trata de proyectar en la superficie del elipsoide de referencia los resultados de las mediciones del terreno, es bueno mencionar este aspecto, debido a que las diferencias en las correcciones de las mediciones son un gran problema al momento del emplazamiento de una obra que cuenta con kilómetros de extensión. También podemos mencionar la *Desviación de la Línea Vertical*, esto debido a la influencia de la gravedad que se encuentra entre la superficie terrestre y los satélites que nos dan la ubicación de los puntos requeridos.

Geodesia Esferoidal, involucrándonos en el estudio de este fragmento de la geodesia se tendrá conocimiento de los métodos que se emplean para resolver los problemas geodésicos sobre la superficie geométrica del elipsoide terrestre y la representación de ésta sobre la esfera y sobre el plano. Se llegara al calculo de las coordenadas geodésicas, esto implica el cálculo de Latitud, Longitud y Azimut. Se hará una breve consideración de la proyección U.T.M al problema de transformación de coordenadas, siendo concientes que este tema será tratado en un capítulo posterior, en el cual haremos una definición de mayor precisión.

Es en esta parte de la materia donde se tratara de acercar al estudiante hacia la comprensión de la importancia de la Geodesia como instrumento relevante de la formación de un ingeniero civil, al respecto en el documento elaborado para la asignatura se tendrá una serie de ejercicios tanto propuestos como resueltos.

Geodesia Cósmica, tiene como tarea la determinación de las coordenadas de los aparatos cósmicos, a través de los resultados de las mediciones, de las direcciones, distancias y velocidades relativas.

Determinándolas coordenadas de los satélites de la Tierra desde las estaciones cuyas coordenadas son conocidas y desde las estaciones cuyas coordenadas son desconocidas, se puede obtener las coordenadas de estas últimas. Utilizando los satélites artificiales se puede realizar el enlace geodésico entre puntos, que se encuentran ubicados a grandes distancias, por ejemplo, entre los puntos geodésicos de diferentes continentes.

Astronomía Geodésica, siendo la astronomía una ciencia que ha acompañado al hombre casi desde su aparición en nuestro planeta, debido a que el material de estudio es la naturaleza, movimiento y distribución de los cuerpos celestes y la constitución del universo en su conjunto.

La geodesia aplica los estudios hechos por la astronomía, en la determinación de las coordenadas geográficas en la superficie terrestre, basadas en dos ramas de la astronomía: la esférica y la práctica.

3. **FOTOGRAMETRÍA.**

La fotogrametría es la disciplina que utiliza las fotografías para la obtención de mapas de terrenos. Los levantamientos fotogramétricos comprenden la obtención de datos y mediciones precisas a partir de fotografías del terreno tomadas con cámaras especiales u otros instrumentos sensores, ya sea desde aviones (fotogrametría aérea) o desde puntos elevados del terreno (fotogrametría terrestre) y que tiene aplicación en trabajos topográficos.

Se utilizan los principios de la perspectiva para la proyección sobre planos a escala, de los detalles que figuran en las fotografías.

Los trabajos fotogramétricos deben apoyarse sobre puntos visibles y localizados por métodos de triangulación topográfica o geodésicos que sirven de control tanto planimétrico como altimétrico. Como una derivación de la fotogrametría, está la fotointerpretación que se emplea para el análisis cualitativo de los terrenos.

La fotogrametría aérea se basa en fotografías tomadas desde aviones equipados para el trabajo, en combinación de las técnicas de aerotriangulación analítica para establece posiciones de control para la obtención de proyecciones reales del terreno y para hacer comprobaciones con una menor precisión que la obtenida en las redes primarias de control geodésico.

Tiene las ventajas de la rapidez con que se hace el trabajo, la profusión de los detalles y su empleo en lugares de difícil o imposible acceso desde el propio terreno. Esta disciplina se emplea tanto para fines militares, como para los levantamientos topográficos generales, anteproyecto de carreteras, canales y usos agrícolas catastrales, estudios de tránsito, puertos, urbanismo, etc.

La fotogrametría terrestre hace los levantamientos basados en fotografías tomadas desde estaciones situadas sobre el terreno, constituye un excelente medio auxiliar para los levantamientos topográficos clásicos, especialmente en el trazado de planos a pequeña escala de zonas montañosas y para el levantamiento de accidentes de tránsito.

El trabajo consiste en esencia en tomar fotografía desde dos o más estaciones adecuadas y utilizarlas después para obtener los detalles del terreno fotografiado, tanto en planta como en alzado o perfil.

Las operaciones corrientes en un levantamiento fotogramétrico en general son las siguientes:

- Estudios sobre planos disponibles de la región para planificar el trabajo, determinar las líneas de vuelo, en función de la distancia focal de la cámara, la escala de la fotografía, la superposición o traslapes de las fotografías, tanto longitudinal como transversal, el tamaño de los negativos, la altura de vuelo, etc
- Reconocimiento del terreno a fotografiar.
- Fijación de los puntos de control terrestre básico, tanto planimétricos como altimétricos para lograr la correcta orientación y localización de los puntos sobre la fotografía.
- Toma, desarrollo, clasificación, y numeración de las fotografías.
- Ensamble de mosaicos o disposición secuencial de las fotografías en conjunto de tal manera que representen el área deseada.
- Elaboración de planos obtenidos por el sistema de restitución fotogramétrica y sus aplicaciones para proyectos de ingeniería.

Actualmente se han desarrollado otros tipos de fotogrametría como la espacial o satelital, inercial y los sensores remotos, las cuales tienen aplicaciones específicas en la estrategia militar y control de itinerarios de transporte a largas distancias. Los levantamientos por satélite incluyen la determinación de la posición de sitios en el terreno utilizando imágenes de satélite para la medición y mapeo de grandes superficies sobre la tierra.

Cartografía, habiendo desarrollado temas tan importantes como la determinación de una figura representativa de la Tierra, es en este desarrollo se encontró superficies, como el geoide, cuasi – geoide, elipsoide de referencia, donde la representación de las coordenadas únicas respecto a un sistema de referencia, se hace complejo debido a que la tierra no se puede representar en un plano sin que sufra deformaciones, debido a esto es que se trataran de conservar la mayoría de las características del terreno, para incorporarlas en una carta o mapa, es de ahí la importancia de la cartografía.

3. GEODESIA Y FOTOGrametría EN BOLIVIA

En nuestro país en particular y en Latinoamérica en general, el estudio de la Geodesia esta en un nivel incipiente, con relación a otros países que han hecho de esta ciencia una cuestión de estado. La importancia del estudio de la Geodesia para la vida de los países se ha convertido en un instrumento trascendental a través del cual las grandes potencias mundiales pueden explorar en primera instancia su territorio, para luego enfrentarse a un tema más amplio e interesante, como es la determinación de la figura de la Tierra.

El *Instituto Geográfico Militar y de Catastro Nacional (IGM) "Gral. Juan Mariano Mujia"*, con la función de mesa topográfica del Noreste y mesa topográfica del Estado Mayor que funcionaba en la ciudad de Sucre, es la institución encargada de la organización técnica Cartográfica, habiendo sido señaladas sus atribuciones en la presidencia del Gral. David Toro, mediante D.S. de 6 de Mayo de 1948. El instrumento jurídico en cuestión, establece su misión y atribuciones, siendo la principal, la formación del mapa general de la Republica. Esta disposición fue elevada a rango de ley el 21 de Diciembre del mismo año y reglamentada mediante D.S. N° 2282. en la presidencia del Gral. Hugo Banzer Suárez en fecha 8 de Mayo de 1973 y mediante D. S. N° 10902, se reconoce al I.G.M. como la única organización técnica cartográfica del país.

El I. G. M se presenta como el referente más importante en nuestro país relacionado al estudio de la Geodesia y Fotogrametría, además de ser la entidad que mayores esfuerzos realiza para la divulgación de toda la información generada en este campo de las ciencias.

El acumulo de conocimientos e información concernientes a la Geodesia, dieron como resultado el levantamiento de la red *geodésica local*, tomando como referencia planimétrica La Canoa (Venezuela) y como referencia altimétrica Arica (Chile), siendo este levantamiento un conjunto de puntos referenciales en toda la extensión del país. Los esfuerzos y trabajos realizados por la institución militar, son plasmados en cartas geográficas, mapas y planos, teniendo su punto más relevante con la elaboración del Atlas de Bolivia.

4. LA GEODESIA Y FOTOGRAMETRÍA EN INGENIERÍA CIVIL

Refiriéndonos a la utilización de la Geodesia como instrumento de la ingeniería, se debe tomar atención a la gran cantidad de trabajos geodésicos necesario para la Ingeniería Civil, considerando el rápido desarrollo científico y tecnológico observado al presente y cambios en la magnitud y escala de las obras de ingeniería que provocan mayores exigencias con respecto a la exactitud y calidad de los trabajos geodésicos necesarios para la planificación y elaboración de los proyectos en la fase de preinversión y construcción de estas obras.

La actual construcción de obras hidrotécnicas colosales, relacionadas con la generación de energía eléctrica o el empleo de embalses de agua de gran volumen para la irrigación de grandes extensiones de tierra o provisión de agua potable, exige considerar superficies de nivel no exactamente horizontales. Durante los trabajos geodésicos relacionados con la perforación de túneles de dimensiones significativas en las regiones montañosas, es necesario considerar las influencias anómalas,

provocadas por la atracción de las masas del relieve montañoso. En los últimos tiempos, se descubrió la necesidad de alcanzar exactitud en los resultados finales de los trabajos geodésicos de ingeniería, en un orden superior al que se tenía antes, es sabido que las macro construcciones que se realizan a nivel mundial exigen una exactitud milimétrica de la posición de los elementos estructurantes que forman la obra civil.

La Fotogrametría tiene un espacio ganado en la ingeniería, su contribución a la elaboración de las cartas geográficas es indispensable, además de servir como instrumento de referencia en el emplazamiento de obras de gran magnitud (elaboración de proyectos de carreteras, encauzamiento de ríos, etc).

Actualmente cualquier cartografía, así como los levantamientos topográficos de cierta magnitud, son realizadas con técnicas de fotogrametría, a partir de imágenes áreas o espaciales. Si bien el concepto esta íntimamente ligado con la cartografía comprende un campo de aplicación más amplio y se dividen en numerosas ramas que abarcan desde la Fotointerpretación hasta la Teledetección.

5. GEODESIA Y FOTOGRAMETRÍA COMO ASIGNATURA DE LA FORMACIÓN PROFESIONAL EN INGENIERÍA CIVIL

El presente trabajo que lleva por titulo “Modernización de la Enseñanza y Aprendizaje en la asignatura de Geodesia y Fotogrametría (CIV 215)”, esta plasmada en la producción de un documento de apoyo didáctico para el estudiante, complementado con el Texto Docente, las ayudas visuales para la exposición en clase y el desarrollo de una pagina web, que permitirán un proceso eficiente de enseñanza-aprendizaje de la signatura.

El propósito de la materia es amalgamar de forma coherente y consecuente los elementos de formación académica posteriores a la asignatura Geodesia y Fotogrametría, proyectándola como un eslabón entre las que sirvieron como prerrequisitos y las materias que están íntimamente vinculadas posteriormente en la estructura curricular de la Carrera, como ser Hidrología, Carreteras, Puentes, Obras Hidráulicas, Sanitaria, entre otras; donde el manejo correcto de las coordenadas geodésicas o UTM y su utilización son de trascendental importancia, en la implementación de obras de Ingeniería en general y de obras de Ingeniería Civil en particular.

CAPÍTULO I

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA



1. TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

1.1 Definiciones básicas

Esfera:

El lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan una distancia r (que se denomina *radio*) de un punto llamado *centro*. Hay que hacer notar que aunque la esfera es un volumen tridimensional finito en el espacio euclidiano su superficie es una superficie bidimensional ilimitada. Sobre esta superficie se puede definir una geometría, la cual se llamará *geometría esférica*, que difiere en varios puntos de la geometría euclidiana

Círculo máximo:

Es la intersección de un plano que pasa por el centro y la esfera. Este círculo máximo divide a la esfera en dos hemisferios. Cualquier plano que no pase por el centro de la esfera la interseca en un *círculo menor*.

Polos de un círculo máximo:

Más conocidos simplemente como **polos**, son los extremos del diámetro de la esfera perpendicular a ese círculo máximo.

Con estos conceptos se puede definir la **distancia esférica** entre dos puntos como la medida sobre el círculo máximo que los une, entendiendo por distancia el arco más corto que los une. Esta distancia se hará en medidas angulares (*i.e.* radianes o grados sexagesimales). Por la propia definición la distancia de un polo a un punto cualquiera de su círculo máximo es siempre igual a un cuadrante (90°).

1.2 TRIÁNGULO ESFÉRICO

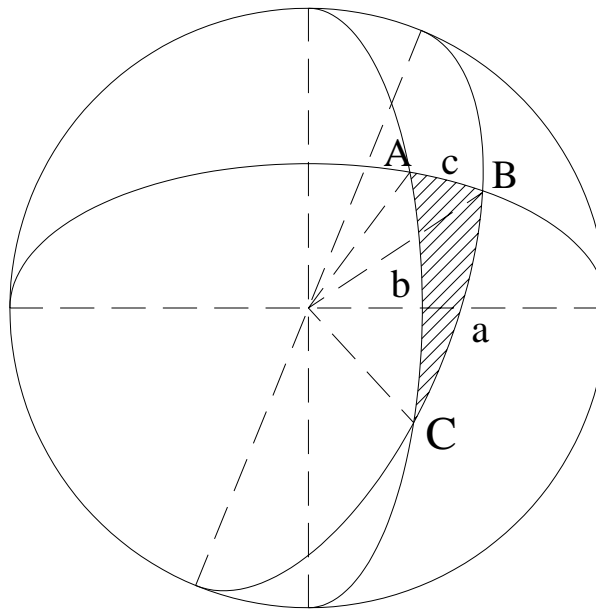


Figura 1.1 Imagen de un triángulo esférico

El **triángulo esférico** es la porción de superficie esférica limitada por tres círculos máximos, con la condición de que cada uno de los arcos que limita la figura es

menor que una semicircunferencia. Los vértices de este triángulo se suelen denotar por letras mayúsculas y sus lados opuestos por la letra minúscula correspondiente. Los ángulos se definen a partir del diedro definido por los lados y el centro de la esfera, mientras que los lados se corresponden a los ángulos interiores. Tanto ángulos como radios son, por tanto, medidas angulares.

1.2.1 Relaciones de un Triángulo Esférico

Entre los lados:

El lado de un triángulo esférico es siempre menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia ($b - c < a < b + c$).

La suma de los tres lados de un triángulo esférico es siempre menor que cuatro rectos ($a + b + c < 2\pi$).

Entre los ángulos:

La suma de los tres ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos rectos y menor que seis ($2\frac{2}{\pi} < A + B + C < 6\frac{\pi}{2}$).

Entre ángulos y lados:

La suma de los tres lados de un triángulo esférico es siempre menor que cuatro rectos ($A = B \rightarrow a = b$). Si un triángulo esférico tiene dos lados desiguales a mayor ángulo se opone mayor lado ($A < B \rightarrow a < b$).

1.3 FÓRMULAS FUNDAMENTALES DE PRIMER ORDEN DE LA TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA.

Resolver un triángulo esférico es calcular tres elementos del mismo una vez que se conocen los otros tres. Para ello se empleara las fórmulas fundamentales de la

trigonometría esférica. Las de primer orden nos relacionan los ángulos y lados enteros a través de sus funciones trigonométricas. Las de segundo orden relacionan los semielementos de los triángulos esféricos a través de esas mismas funciones.

1.3.1 Fórmulas de Bessel

Para encontrar las relaciones entre lados y ángulos del triángulo esférico se parte de un sistema de coordenadas rectangulares.

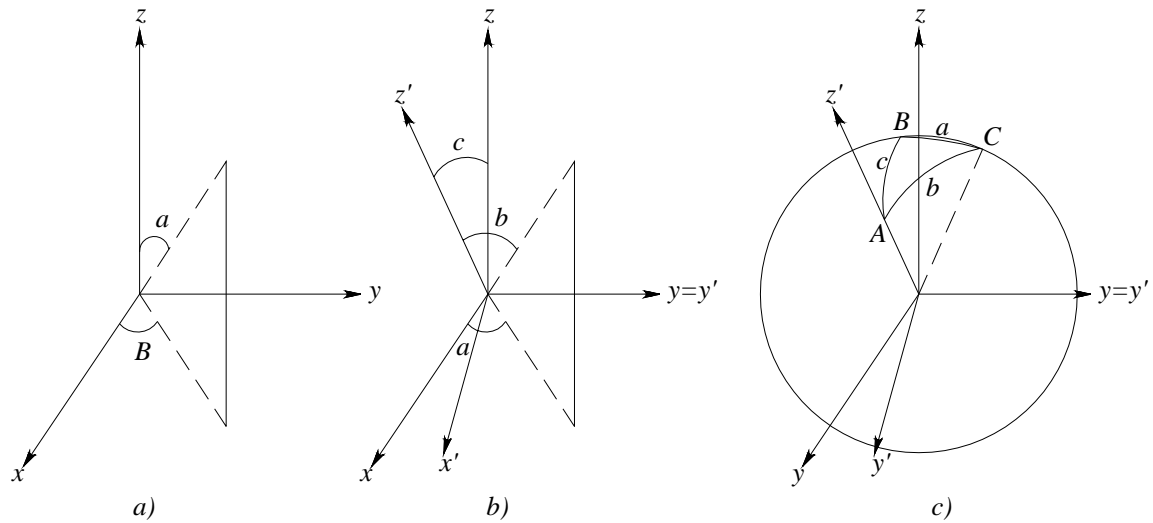


Figura 1.2 Deducción de las relaciones entre lados y ángulos

El punto P dista del origen una unidad y tiene coordenadas $P = (x, y, z)$. Por inspección de la figura 1.1 a, se ve que estas coordenadas pueden ser expresadas mediante:

$$\begin{aligned} x &= \text{sen } a \cdot \cos b \\ y &= \text{sen } a \cdot \text{sen } b \\ z &= \cos a \end{aligned} \quad [1.3.1]$$

Que resulta ser lo mismo que un cambio a coordenadas esféricas.

Si ahora se hace un giro en torno al eje y , de amplitud c figura 1.1 b , hace que el punto $P = (x', y', x'')$ siga distando una unidad del origen, pero sus coordenadas esféricas son ahora:

$$\begin{aligned}x &= \text{sen } b \cdot \cos(180^\circ - A) \\y &= \text{sen } a \cdot \text{sen}(180^\circ - A) \\z &= \cos b\end{aligned} \quad [1.3.2]$$

Pero, como se hizo una rotación en torno a un eje fijo, las expresiones [1.3.1] y [1.3.2] están relacionadas mediante una matriz de giro:

$$\begin{pmatrix} \text{sen } a & \text{sen } b \\ \text{sen } a & \text{sen } b \\ \cos a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos c & 0 & \text{sen } c \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } c & 0 & \cos c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\text{sen } b \\ \text{sen } b & \text{sen } A \\ \cos b \end{pmatrix} \quad [1.3.3]$$

Esta expresión matricial proporciona las relaciones entre los ángulos y los lados de un triángulo esférico, pero esto es cierto siempre y cuando la nomenclatura de los ángulos en las figuras 1.2 (a) y 1.2 (b) sean consecuentes con un triángulo esférico. Se puede ver que esta nomenclatura coincide con la realidad en la figura 1.2 (c). Por tanto, se puede realizar operaciones en esa expresión matricial y encontrar unas fórmulas relacionando ángulos y lados del triángulo esférico:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \text{sen } a \cdot \text{sen } b \cdot \cos A \quad \text{Primera formula de Bessel [1.3.4]}$$

$$\text{sen } a \cdot \text{sen } B = \text{sen } b \cdot \text{sen } A \quad \text{Segunda formula de Bessel [1.3.5]}$$

$$\text{sen } a \cdot \cos B = \cos b \cdot \text{sen } c - \text{sen } b \cdot \cos c \cdot \cos A \quad \text{Tercera formula de Bessel [1.3.6]}$$

Estas tres fórmulas son totalmente generales y se pueden obtener para otros ángulos mediante permutaciones cíclicas de los ángulos. La primera fórmula de Bessel

también recibe el nombre de teorema del coseno. La segunda fórmula de Bessel se conoce como teorema del seno.

1.3.2 Fórmula de la cotangente

Esta fórmula se obtiene dividiendo la ecuación [1.3.6] por la [1.3.5] (en el término a la izquierda del signo igual se divide por $\text{sen } a \cdot \text{sen } B$ mientras que el término a la derecha se divide por $\text{sen } b \cdot \text{sen } A$):

$$\frac{\text{sen } a \cdot \cos B}{\text{sen } a \cdot \text{sen } B} = \frac{\cos b \cdot \text{sen } c - \text{sen } b \cdot \cos c \cdot \cos A}{\text{sen } b \cdot \text{sen } A}$$

$$\text{ctg } B = \frac{\text{ctg } B \cdot \text{sen } c - \cos c \cdot \cos A}{\text{sen } A}$$

$$\text{sen } A \cdot \cot B = \cot b \cdot \text{sen } c - \cos c \cdot \cos A \quad [1.3.7]$$

1.4 TRIÁNGULOS ESFÉRICOS SINGULARES

Existen dos clases de triángulos que poseen una característica especial que ayuda a que los cálculos se simplifiquen notablemente, estos dos triángulos son:

Triángulos rectángulos:

Aquellos triángulos en los que uno de sus ángulos vale 90° .

Triángulos rectiláteros:

Aquellos triángulos en los que uno de sus lados vale 90° .

Las fórmulas se simplifican de un modo amplio es obvio, poniendo un ejemplo: si se toma la primera fórmula de Bessel (ecuación [1.3.4]) $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos A$ y se tiene un triángulo rectángulo en el cual $A = 90^\circ$ la fórmula se simplifica a $\cos a = \cos b \cdot \cos c$.

1.5 REGLA DEL PENTÁGONO DE NEPER

Esta es una regla mnemotécnica para la resolución de triángulos esféricos. Suponiendo que se tiene un triángulo rectángulo con $A = 90^\circ$ o un triángulo rectilátero con $a = 90^\circ$. En ese caso es posible construir un pentágono tal y como se indica en la figura 1.3.

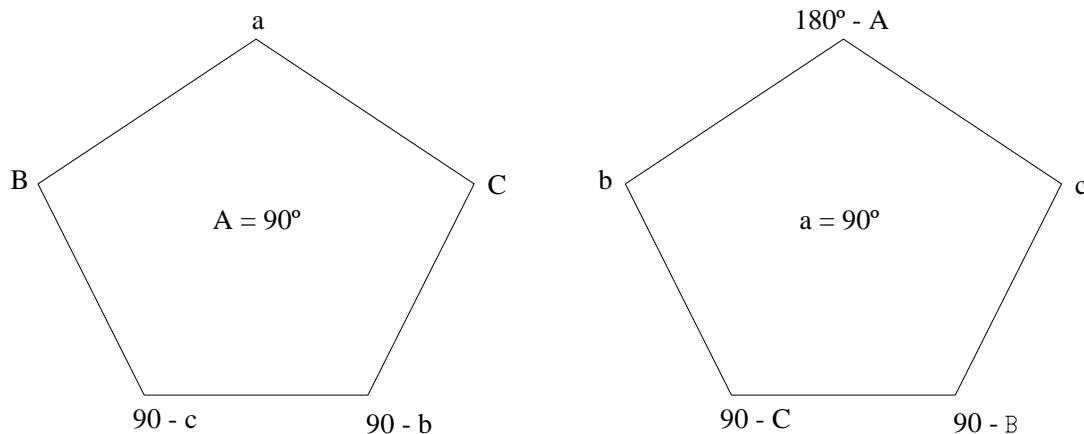


Figura 1.3 Regla de los pentágonos de Neper

La regla del pentágono de Neper dice que el coseno de un elemento situado en un vértice es igual al producto de las cotangentes de los elementos situados en los vértices continuos e igual al producto de los senos de los elementos situados en vértices opuestos.

Por ejemplo, en el caso de un triángulo rectángulo se tiene que:

$$\cos a = \cot B \cdot \cot C = \sin (90^\circ - b) \cdot \sin (90^\circ - c) = \cos 90^\circ \cdot \cos c.$$

1.6 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS ESFÉRICOS

Como ya se dijo, resolver un triángulo esférico es, dados tres datos, calcular los otros tres. Existen métodos generales que sólo emplean las fórmulas de Bessel para cumplir este objetivo, aunque usar cualquiera de las otras fórmulas o analogías es igualmente válido.

Hay que hacer notar que los ángulos y lados de los triángulos esféricos se definen entre 0° y 180° , con lo que a la hora de resolverlos empleando arco-cósenos y arco-tangentes no se presenta ninguna ambigüedad, pero a la hora de emplear arco-senos no se sabe si el ángulo o lado están en el primer cuadrante o en el segundo.

Sea un triángulo esférico de ángulos A , B y C y lados a , b y c ; se verá cómo se resuelve en función de los datos conocidos:

Conocidos b , c y A : Se calcula el lado a con la primera fórmula de Bessel para $\cos a$ y ahora que se conoce los tres lados, se calcula los otros dos ángulos con la primera fórmula de Bessel para $\cos b$ y $\cos c$.

Conocidos b , a y A : En este caso la solución no es única. Empleando la segunda fórmula de Bessel para los datos conocidos se obtiene el valor $\sin B$, que proporciona dos soluciones para el ángulo B . Ahora se hace dos veces (una para cada valor de B) un sistema de ecuaciones con la primera fórmula de Bessel para $\cos a$ y $\cos b$ y se obtiene los dos valores correspondientes de c . Por último, se aplica para cada valor de $\cos c$ la primera fórmula de Bessel y obteniendo los dos valores del ángulo que falta.

Conocidos B , C y a : se aplica la primera fórmula de Bessel para el triángulo polar para $\cos A$ y, una vez que se obtiene el ángulo que faltaba por conocer, se volverá a aplicar la primera fórmula de Bessel para el triángulo polar para $\cos B$ y $\cos C$.

Conocidos B , A y b : nuevamente la solución no es única. Utilizando la segunda fórmula de Bessel se obtendrá los dos valores posibles de a . Trabajando análogamente al segundo caso, se utilizará dos sistemas (uno para cada valor de a) entre las primeras fórmulas de Bessel para el triángulo polar para $\cos B$ y $\cos A$ siendo dato los dos valores de C . Por último, con la primera fórmula de Bessel para el triángulo polar para $\cos C$ se llega al correspondiente valor c .

Conocidos a , b y c : En este caso se utilizará la primera fórmula de Bessel para calcular los tres ángulos.

Conocidos A , B y C : En este caso se utilizará la primera fórmula de Bessel para calcular los tres lados.

1.7 FORMA Y DIMENSIONES DE LA TIERRA. COORDENADAS TERRESTRES

La cuestión de la forma que presenta nuestro planeta y sus dimensiones la trata una ciencia llamada *geodesia*. Este estudio se lleva a cabo por medio de aproximaciones sucesivas.

En general la forma de la Tierra es muy complicada y no se puede representar mediante una superficie geométrica de formulación matemática simple. Es por esto que se define el *geoide*.

1.7.1 El geoide

El geoide es una figura definida para describir la forma de la Tierra. Su propiedad característica a la hora de definirlo se refiere a:

El geoide es normal a la dirección de la gravedad en cada punto, entendiendo por gravedad la composición de la fuerza centrífuga y la fuerza de gravitación.

El campo gravitatorio terrestre resulta ser un campo conservativo, con lo que deriva de un potencial, lo que matemáticamente se expresa por: $\vec{F} = -\nabla \cdot V$. De modo que si $V = (x, y, z) = \text{constante}$, se tiene superficies equipotenciales.

Entonces el geoide es definido como la superficie equipotencial del campo gravitatorio terrestre al nivel del mar. Es decir, la superficie en calma de los océanos prolongada al lugar ocupado por los continentes.

En la actualidad la geodesia (y la forma del geoide) se basa en el estudio de las órbitas de los satélites artificiales. Se demuestra en mecánica que el potencial terrestre se puede representar en función de los armónicos esféricos J_i , de modo que:

$$V = J_1 (...) + J_2 (...) + J_3 (...) + \dots$$

Donde los J_i se determinan a partir de las órbitas de los satélites. Eliminando todos los armónicos esféricos en los que $i > 1$ (sabiendo que $J_1 = 1$) queda la expresión del potencial debido a una esfera homogénea, pero los satélites no se ajustan a esta órbita. Teniendo en cuenta el siguiente término el potencial se corresponde con un elipsoide de revolución; introduciendo el siguiente armónico daría una figura ligeramente parecida a una pera. La forma iría evolucionando según se tuviera en cuenta más y más potenciales armónicos.

En estos apuntes se va a suponer, para simplificar las cosas, que la forma de la Tierra es un elipsoide de revolución. Esta suposición no es muy descabellada ya que la distancia máxima entre el radio del geoide y el radio del elipsoide es de 100m, diferencia despreciable en distancias planetares y estelares. A este elipsoide le llamaremos *elipsoide de referencia*. El eje de giro pasa por los polos y coincide con el eje menor. Las dimensiones fueron definidas en el año 1976 por la Unión de Astrónomos Internacional del siguiente modo:

- a = radio ecuatorial = 6378,40 [km]
- b = radio polar = 6356,755 [km]
- α = achatamiento = $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{298,257}$
- e = excentricidad = $\sqrt{\alpha - 2\alpha} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = 0.8182$

1.7.2 Definiciones

Meridianos terrestres:

Son las líneas elipsoidales determinadas por el corte entre el elipsoide y el haz de planos que define el eje menor. Se considera como *meridiano cero* al que pasa por el observatorio de Greenwich.

- Si se toma un punto cualquiera A del elipsoide por él pasará un meridiano y un paralelo exclusivamente. Denominado **meridiano superior** de un lugar A a la semiellipse que parte de los polos y pasa por el lugar A .
- Se denomina **meridiano inferior** a la semiellipse que parte de los polos pero no pasa por el lugar A .

Polos:

Son los extremos donde el eje menor corta al elipsoide.

Ecuador:

El corte entre el plano perpendicular al eje menor que pasa por el centro del elipsoide y éste. Es un círculo máximo.

Paralelos terrestres:

El corte entre los planos paralelos al ecuador y el elipsoide de referencia. Son círculos menores. Se considera como *paralelo cero* al ecuador.

Vertical de un lugar:

Es la normal a la elipse por el lugar *A*. Esta vertical define dos direcciones: hacia arriba el *zénit* (*Z*) y hacia abajo el *nadir* (*Z'*).

Horizonte del lugar:

Es el plano perpendicular a la vertical del lugar *A*. El horizonte interseca al plano que contiene al meridiano superior en una línea llamada *línea meridiana*. Esta línea indica la dirección norte-sur. La perpendicular a la línea meridiana trazada sobre el horizonte del lugar indica la dirección este-oeste.

1.8 COORDENADAS

1.8.1 Coordenadas geográficas

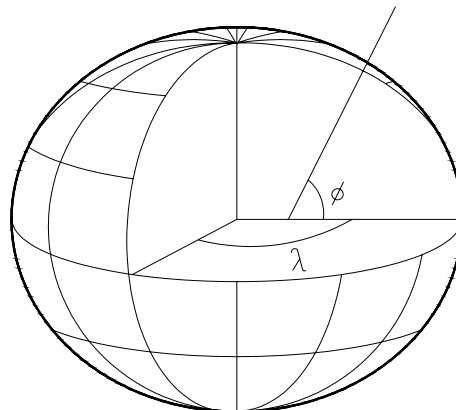


Figura 1.4 Coordenadas terrestres geográficas

Latitud geográfica (ϕ):

Ángulo que forma la vertical del lugar con el plano del ecuador. Este valor varía entre 0° y $+90^\circ$ si son contados en dirección norte y entre 0° y -90° si se los cuenta en dirección sur.

Longitud geográfica (λ):

Ángulo diedro que forma el meridiano cero con el meridiano superior del lugar. Este valor varía entre 0^h y $+12^h$ si se los cuenta en dirección este y entre 0^h y $+12^h$ si se los cuenta en dirección oeste.

1.8.2 Coordenadas geocéntricas

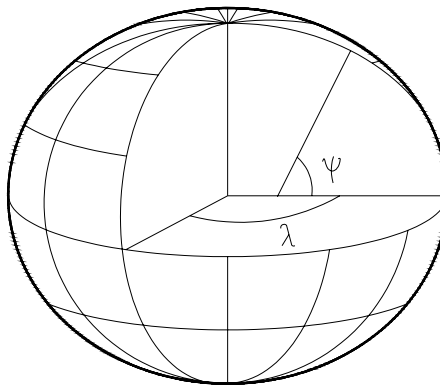


Figura 1.5 Coordenadas terrestres geocéntricas

Radio vector:

Es la distancia entre el centro de la Tierra y el lugar A .

Latitud geocéntrica (ψ):

Ángulo que forma el radio vector con el plano del ecuador. Este valor varía entre 0° y $+90^\circ$ contando en dirección norte y entre 0° y -90° contando en dirección sur.

Latitud geocéntrica:

Coincide con la latitud geográfica (λ).

1.8.3 Latitud reducida o excéntrica

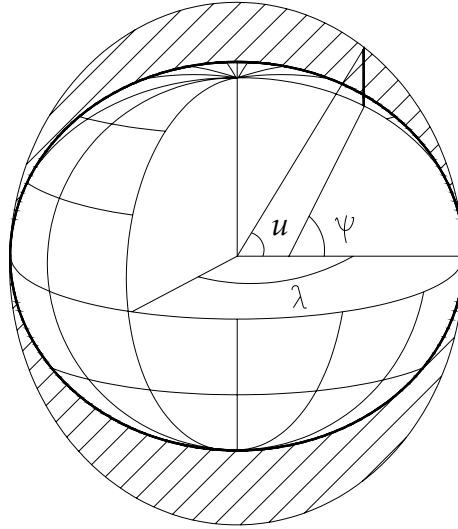


Figura 1.6 Coordenadas terrestres con latitud recudida

A veces se usa otra latitud que se denomina latitud reducida o excéntrica. Para definirla se traza una semicircunferencia de radio igual al semieje mayor y se pasa por A una perpendicular al semieje mayor que corta a la semicircunferencia en A' . Uniendo A' con el centro de la elipse se vera que esta línea corta al plano del ecuador con un ángulo u , que e la latitud reducida.

1.8.4 Relación entre las latitudes

Hay que hacer notar que el punto $A = (x, y)$ pertenece a una elipse, por lo tanto

verifica su ecuación: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Por inspección de las figuras se puede observar que $\text{tag } \psi = \frac{y}{x}$. Para hallar la

tangente de ϕ se tiene en cuenta que es la normal a la tangente a una curva por un punto, por lo que (como demuestra el cálculo diferencial)

$$\text{tag } \phi = -\frac{1}{f'(x, y)} = -\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y}{x}.$$

Relacionando estas dos tangentes se tiene enseguida que:

$$\tag \phi = \frac{a^2}{b^2} \cdot \tag \psi \quad [1.8.1]$$

Por otra parte el punto $A' = (x', y')$ pertenece a una circunferencia y cumple la ecuación $x'^2 + y'^2 = a^2$. Por construcción se tiene, además, que $x' = x$, de modo que;

$$\frac{x'^2 + y'^2}{a^2} = 1 \Rightarrow 1 - \frac{y'^2}{a^2} = \frac{x'^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow y' = \frac{a}{b} y$$

Escribiendo la ecuación de la esfera dependiendo de la latitud reducida u del modo siguiente: $x' = a \cdot \cos u$, $y' = a \cdot \sin u$. Por tanto, de esta relación y la deducida anteriormente se obtiene:

$$y = b \cdot \sin u \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin u}{\cos u} \Rightarrow \tag \phi = \frac{b}{a} \cdot \tag u \quad [1.8.2]$$

Para obtener la tercera relación entre las latitudes basta con combinar las dos relaciones obtenidas, con lo que queda:

$$\tag \phi = \frac{a}{b} \cdot \tag u \quad [1.8.3]$$

1.8.5 Relación entre ρ y las latitudes

De la definición de las coordenadas geocéntricas se relaciona ρ con las coordenadas cartesianas: resulta claro ver que $x = \rho \cdot \cos \psi$ e $y = \rho \cdot \sin \psi$, con lo que $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Además, por la definición de latitud reducida se puede ver que;

$$\rho^2 = a^3 \cos^2 u + b^3 \sin^3 u$$

y teniendo en cuenta que según la definición de excentricidad $b^2 = a^2(1 - e^2)$ se puede llegar a $\rho^2 = a^3 (1 - e^3 \sin^3 u)$.

Partiendo de la ecuación de la elipse en coordenadas cartesianas se llega a otra relación entre ρ y ψ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{también se tiene} \quad \frac{\rho^2 \cdot \cos^2 \psi}{a^2} + \frac{\rho^2 \cdot \sin^2 \psi}{b^2} = 1,$$

$$\text{por lo que} \quad \rho^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{b^2 \cdot \cos^2 \psi + a^2 \cdot \sin^2 \psi}$$

$$\text{Por último, y como } \tan \phi = \frac{a^2}{b^2} \cdot \tan \psi \quad \text{se obtiene a } \rho^2 = \frac{a^4 \cdot \cos^2 \phi + b^4 \cdot \sin^2 \phi}{a^2 \cdot \cos^2 \phi + b^2 \cdot \sin^2 \phi}.$$

1.8.6 Correcciones a las coordenadas

Las correcciones que se muestran a continuación se hacen necesarias debido a que el lugar de observación no se encuentra, por lo general, sobre el elipsoide que es utilizado para describir la Tierra, sino a una altitud sobre él. Esta altitud (h) se mide sobre la vertical del lugar, de modo que se define las nuevas coordenadas (X, Y) del lugar como:

$$X = x + \Delta x = x + h \cos \phi$$

$$Y = y + \Delta y = y + h \sin \phi$$

Ahora se intentara expresar x e y también como función de la latitud geográfica para tener expresiones sólo en función de ella. Se verifica que

$$x = \rho \cos \psi = a \cos u = a C(\phi) \cos \phi$$

$$y = \rho \sin \psi = b \sin u = a S(\phi) \sin \phi$$

donde $C(\phi)$ y $S(\phi)$ son dos funciones a calcular.

Dividiendo y por x se obtiene:

$$\frac{y}{x} = \tan \phi = \frac{b}{a} \cdot \tan u = \frac{S}{C} \cdot \tan \phi$$

que, teniendo en cuenta la ecuación queda como;

$$\frac{b}{a} \tan u = \frac{S}{C} \cdot \frac{a}{b} \cdot \tan u \Rightarrow S = \frac{b^2}{a^2} C$$

Ahora, despejando de la expresión para x se tiene que $\cos u = C \cos \phi$ y despejando de la expresión para y ; se tiene que $\sin u = \frac{a}{b} S \sin \phi$. Elevándolas al cuadrado y sumando miembro a miembro obtenemos la expresión para C :

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1 = C^2 \cos^2 \phi + \frac{a^2}{b^2} S^2 \sin^2 \phi = C^2 \left[\cos^2 \phi + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \phi \right]$$

$$C^2 = \frac{a^2}{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi} \quad [1.8.4]$$

Y despejando de la relación entre S y C .

$$S^2 = \frac{b^4 / a^2}{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi} \quad [1.8.5]$$

Por tanto las ecuaciones para la posición de un lugar en relación al elipsoide de la Tierra, teniendo en cuenta la corrección por motivo de la altitud, son:

$$X=(aC(\phi) + h)\cdot\cos \phi \quad [1.8.6]$$

$$Y=(aS(\phi) + h)\cdot\sen \phi \quad [1.8.7]$$

Con $C(\phi)$ y $S(\phi)$ dadas por las ecuaciones [1.8.4] y [1.8.5]

CAPÍTULO II

GEODÉSIA ESFEROIDAL



2.1 CONSIDERACIONES SOBRE LA GEOMETRÍA DE LA ELIPSE.

2.1.1 Cálculo de las Normales Principales.

a) *Normal Principal, N*

La normal principal es el segmento comprendido entre el punto M considerado y la intersección de la normal en él con eje menor de la elipse meridiana, o sea con el eje del elipsoide (punto E). Este segmento se representa por la letra N. Se considera para su cálculo una sección del elipsoide (Fig. 2.1) que contenga el eje PP'. Dicha sección, que será la *elipse meridiana*, permite escribir sin dificultad las siguientes expresiones, partiendo de la ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad [2.1.1]$$

El elipsoide será el desarrollado por la elipse al girar alrededor del eje del mundo. Diferenciando:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0$$

donde,

$$y' = -\frac{b^2}{a^2} * \frac{x}{y} = \operatorname{tg}(\varphi + 90) = -\operatorname{ctg} \varphi$$

luego,

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{a^2}{b^2} * \frac{y}{x} \quad [2.1.2]$$

El signo menos tiene una significación geométrica clara; y es el incremento de la x le corresponde un incremento de la y que es negativo.

Se considera por otra parte la excentricidad:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

de donde,

$$b^2 = a^2(1 - e^2)$$

y

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

sustituyendo en la ecuación anterior

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a^2}{a^2(1 - e^2)} * \frac{y}{x} = \frac{1}{1 - e^2} * \frac{y}{x}$$

de donde

$$y = x(1 - e^2)\operatorname{tg} \varphi \quad [2.1.3]$$

que llevado a la ecuación anterior [2.1.1], junto con el valor de b^2 , da como resultado

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2(1 - e^2)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{a^2(1 - e^2)} = 1$$

de donde,

$$y = x(1 - e^2)\operatorname{tg} \varphi = a^2$$

y realizando operaciones,

$$x^2 = \frac{a^2}{1 + (1 - e^2) \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}} = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + (1 - e^2) \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

y en consecuencia

$$x = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad [2.1.4]$$

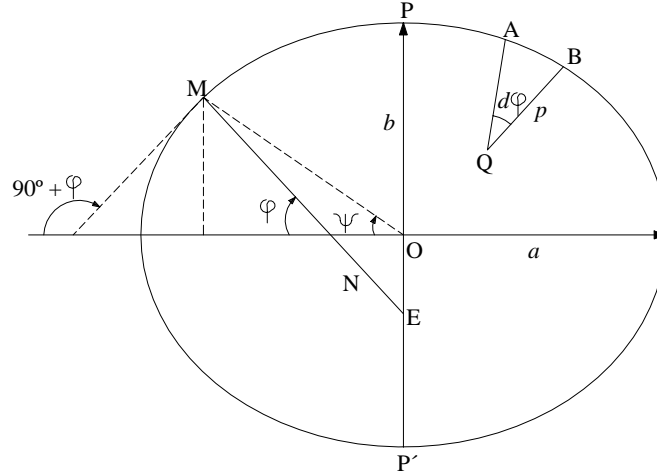


Figura 2.1 Elipse meridiana, representación de la gran normal

Se obtiene un valor que se utilizara constantemente, llamado la normal principal, representado por N (Fig. 2.1)

$$N = \frac{x}{\cos \varphi} = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \quad [2.1.5]$$

b) Radio de curvatura de la Elipse meridiana ρ (Fig. 2.1)

Sea una curvatura plana sobre el elipsoide. Se definirá el concepto de curvatura. Considerando un punto A la normal en él. Se tiene otro punto B próximo y tomando en cuenta también la normal. Ambas normales se cortan en un punto Q. Cuando el punto B tiende hacia el A, o sea cuando el arco $\widehat{AB} = ds$, tiende a cero, el punto al cual tiende Q es llamado *centro de curvatura* de la curva en el punto A.

Se llama *radio de curvatura* de la curva en el punto A.

$$\frac{ds}{d\varphi} = \rho$$

siendo $d\varphi$ el ángulo que forman ambas normales. Al círculo, cuyo radio es ρ , se llama *círculo osculador*. A la inversa

$$\frac{d\varphi}{ds}$$

del radio de curvatura se le llama *curvatura de la curva* en el punto. Es claro que este cociente mide la curvatura de una curva, ya que entre dos curvas con el mismo arco s , tendrá más curvatura (estará más curvada) la que tenga mayor $d\varphi$.

Si la curva considerada es la elipse meridiana, o intersección del elipsoide por un plano que pasa por los polos, el límite del cociente,

$$\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta\varphi}$$

es lo que se denomina *radio de curvatura de la elipse meridiana* en el punto considerado y se representa por la letra ρ . Para su cálculo se considera el círculo principal de radio a (Fig. 2.2). Se escribe;

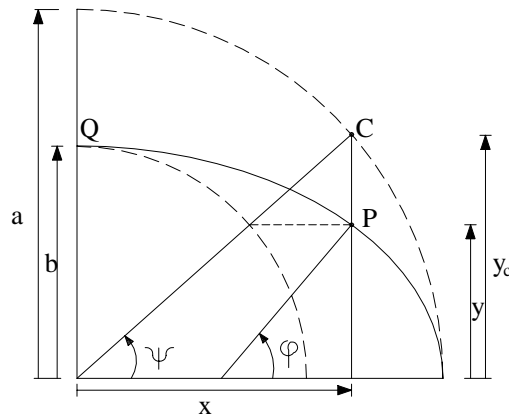


Figura 2.2 Curva Plana

$$\frac{y_c}{y} = \frac{a}{b} ; \quad \frac{a \operatorname{sen} \psi}{y} = \frac{a}{b}$$

que junto con:

$$\begin{aligned} x &= a \cos \psi \\ y &= b \operatorname{sen} \psi \end{aligned} \quad [2.1.6]$$

se utilizara después. Por definición

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi}$$

pero

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

y sustituyendo los valores [2.1.6] y diferenciando

$$\left. \begin{array}{l} dx = -a \operatorname{sen} \psi \frac{d\psi}{d\varphi} \\ dy = b \cos \psi \frac{d\psi}{d\varphi} \end{array} \right\} ds = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi} \cdot d\psi \quad [2.1.7]$$

Por otra parte la expresión [2.1.4] proporciona un valor de x en función de φ y de los parámetros a y e^2 del elipsoide. De las ecuaciones [2.1.3] y [2.1.4] se obtiene;

$$y = \frac{a(1 - e^2) \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

suele emplearse la notación

$$W^2 = 1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi$$

con la que

$$\begin{aligned} x &= \frac{a \cos \varphi}{W} \\ y &= \frac{a(1 - e^2) \operatorname{sen} \varphi}{W} = \frac{b^2}{a} * \frac{\operatorname{sen} \varphi}{W} \end{aligned} \quad [2.1.8]$$

Por otra parte se obtuvo

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{1 - e^2} * \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{1 - e^2} * \frac{b}{a} \operatorname{tg} \psi$$

pero,

$$\frac{1}{1 - e^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

luego,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \psi \quad [2.1.9]$$

y realizando la diferenciación de esta expresión:

$$\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{a}{b} * \frac{d\psi}{\cos^2 \psi}$$

luego

$$d\psi = \frac{b}{a} * \frac{\cos^2 \psi}{\cos^2 \varphi} d\varphi \quad [2.1.10]$$

Igualando convenientemente [2.1.6] y [2.1.8]

$$\begin{aligned} x = a \cos \psi &= \frac{a \cos \varphi}{W} \Rightarrow \cos \psi = \frac{\cos \varphi}{W} \\ y = b \operatorname{sen} \psi &= \frac{b^2}{a} * \frac{\operatorname{sen} \varphi}{W} \Rightarrow \operatorname{sen} \psi = \frac{b}{a} * \frac{\operatorname{sen} \varphi}{W} \end{aligned} \quad [2.1.11]$$

y sustituyendo estos valores de $\operatorname{sen} \varphi$ y $\cos \varphi$ en [2.1.7] resulta

$$ds = \sqrt{a^2 \frac{b^2}{a^2} \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{W^2} + b^2 \frac{\cos^2 \varphi}{W^2}} \cdot d\psi$$

y de la primera de [2.1.11]

$$ds = \frac{b^2}{a} * \frac{d\varphi}{W^3}$$

y llevando este valor a la expresión de

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{b^2}{a} * \frac{1}{W^3} = \frac{a^2(1-e^2)}{a} * \frac{1}{W^3}$$

se obtiene finalmente:

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{3/2}} \quad [2.1.12]$$

Los dos valores de N y ρ que se ha definido, son fundamentales en el estudio del elipsoide, llamados *radios de curvatura de las secciones principales en cada punto*. Una de las secciones es por tanto el propio meridiano. Todas las secciones que se obtienen producidas por el haz de planos cuyo eje fuera normal a la superficie en el punto

considerado, es decir, todas las curvas así obtenidas, se demuestran que tienen por radio de curvatura valores comprendidos entre N y ρ . Por tanto estos dos valores son los límites máximo y mínimo de entre todos los radios de las secciones normales producidas a un elipsoide en un punto del mismo.

Los elipsoides que se utilizan son de dos ejes o de revolución, generados por la elipse meridiana al girar sobre el eje de los polos (PP').

Tanto N como ρ , llamados *radios de curvatura principales*, dependen únicamente de la latitud φ (aparte de los parámetros a y e del elipsoide), por lo que todos los puntos de un paralelo tendrán los mismos radios de curvatura principales.

El radio del paralelo de un punto, que en la esfera es:

$$R \cos \varphi$$

en el elipsoide a pesar de ser

$$N \cos \varphi$$

Un elemento de arco de paralelo vendrá dado por

$$N \cos \varphi \cdot d\lambda$$

Análogamente un arco de ds de meridiano sobre la esfera tiene un valor

$$ds = R d\varphi$$

y sobre el elipsoide valdrá:

$$ds = \rho d\varphi$$

Todo el estudio, que se realizará sobre la esfera, puede aplicarse sobre el elipsoide simplemente con estos cambios.

Teniendo en cuenta que la Tierra se considera como esfera, las normales en cada punto pasan todas por el centro de la misma. Todos los planos normales cortan a la superficie terrestre según circunferencias. Sin embargo, si se considera a la Tierra como un elipsoide de revolución ni las normales pasan (en general) por el centro de

la Tierra, ni las secciones producidas por los planos normales son circunferencias, sino curvas diferentes (que podrán ser elipses), al variar la orientación del plano normal y al variar el punto sobre la superficie terrestre.

2.1.2 Longitud del Arco de la Elipse Meridiana.

Por ser un dato necesario en multitud de problemas en Geodesia, y en particular para el cálculo de coordenadas geodésicas, cuando se estudie el transporte de coordenadas, es necesario calcular el arco que sobre el meridiano corresponde a una diferencia de latitudes $d\varphi$.

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho d\varphi$$

haciendo operaciones se escribe este valor de s en la forma,

$$s = \rho \Delta\varphi \left[1 + \frac{e^2}{8} \Delta\varphi^2 \cos 2\varphi_M \right]$$

Conocido este valor del arco de la elipse meridiana en función de la diferencia de latitudes de sus extremos, se puede calcular el problema inverso, pudiendo dar como expresión de dicha diferencia de latitudes la siguiente.

$$\Delta\varphi' = (\varphi - \varphi_0)'' = \frac{s}{\rho \text{ sen } 1''} \left[1 - \frac{e^2}{8a^2} s^2 \cos 2\varphi_M \right] \quad [2.1.13]$$

obtenida en función de los parámetros del elipsoide y lógicamente en función del arco de elipse meridiana. Esta expresión será utilizada en el cálculo de las coordenadas geodésicas, cuando se estudie el cálculo de coordenadas en el elipsoide.

2.1.3 Exceso Esférico de un Triángulo

Se llama *exceso esférico* de un triángulo, el valor en que la suma de sus tres ángulos excede de dos rectos,

$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ$$

Sea el triángulo ABC (Fig. 2.3) limitado por tres círculos máximos. Suponiendo que el lado AB coincide con el plano de la figura. Cada vértice del triángulo, produce en la esfera un sector de superficie conocida. En efecto, considerando como 1 al área de la esfera y A° es el valor en grados de dicho huso, se escribe:

$$\begin{array}{rcl} 360^\circ & \text{-----} & 1 \\ A^\circ & \text{-----} & x \end{array}$$

de donde,

$$x = \frac{A^\circ}{360}$$

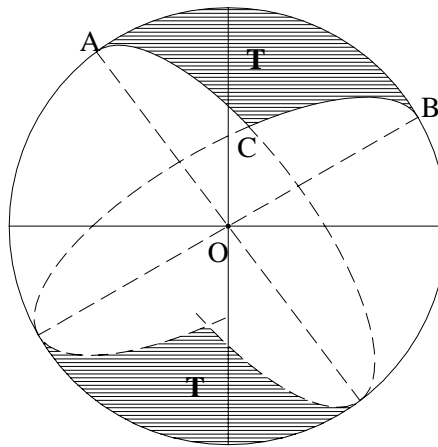


Figura 2.3 Triángulo esférico

Por otra parte, sumando las áreas de los tres sectores de ángulos A, B, C resulta contando dos veces el triángulo cuya superficie se denomina T, es decir

$$\frac{A}{360^\circ} + \frac{B}{360^\circ} + \frac{C}{360^\circ} = \frac{1}{2} + 2T$$

El sumando $\frac{1}{2}$ corresponde a la media esfera exterior al papel. Por otra parte,

escribiendo el área del triángulo como parte del área de la esfera, cuyo valor es

$$4 \pi R^2$$

se tiene

$$\frac{A + B + C}{360^\circ} = \frac{1}{2} + 2 \frac{T}{4\pi R^2}$$

y de aquí

$$A + B + C - \frac{2T * 360^\circ}{4\pi R^2} = 180^\circ$$

de donde

$$A + B + C - 180^\circ = \frac{T * 360^\circ}{2\pi R^2} = \frac{T}{R^2}$$

al suprimir el 360° con el 2π , lo que resta es el exceso esférico en radianes, o escrito en segundos

$$\varepsilon'' = \frac{T}{R^2 \sin 1''} \quad [2.1.14]$$

Este valor es utilizado en el caso de triángulos esféricos y también de triángulos elipsóidicos, cuyos lados sean pequeños frente al radio de la esfera. Muchas veces no habrá error en considerar

$$T = \frac{1}{2} bc \sin A$$

Se hará una mayor aplicación en el tema de curvas alabeadas del concepto de exceso esférico a los triángulos que constituyen las redes geodésicas de los distintos órdenes.

2.1.4 Teorema de Legendre

Considerando un triángulo esférico de lados abc situado sobre una esfera de radio R (Fig.2.4 a).

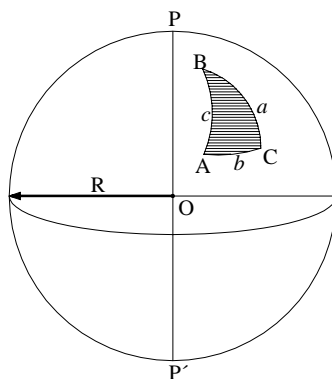


Figura 2.4.b Triángulo plano

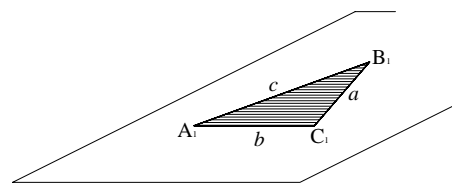


Figura 2.4.a Triángulo Esférico

Luego de simplificaciones se llega a:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{24R^2bc} \quad [2.1.15]$$

Por otra parte en el triángulo plano

$$\cos A_1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

por tanto de [2.1.15] se tiene;

$$\cos A = \cos A_1 - \frac{bc \operatorname{sen}^2 A_1}{6R^2}$$

la diferencia quedara

$$A - A_1 = \frac{T}{3R^2} \quad B - B_1 = \frac{T}{3R^2} \quad C - C_1 = \frac{T}{3R^2}$$

sumando,

$$A + B + C = A_1 + B_1 + C_1 + \frac{T}{R^2} = 180^\circ + \frac{T}{R^2}$$

Este *teorema de Legendre*, que se enuncia como sigue: puede reemplazarse el calculo de un triángulo geodésico situado sobre la esfera de curvatura media de radio

$$R = \sqrt{N\rho}$$

por el calculo de un triángulo plano cuyos lados sean los del esférico, y cuyos ángulos sean los de aquel disminuidos en la tercera parte del exceso esférico. Como se llega en los desarrollos hasta el cuarto orden, significa esto, que el error absoluto cometido en cada uno de los lados es cantidad de quinto orden.

2.2 NOCIONES SOBRE CURVAS ALABEADAS.

LA LÍNEA GEODÉSICA

2.2.1 Introducción

Antes de entrar al estudio del elipsoide, y para familiarizarse en general con las

superficies, se va a dar algunos conceptos sobre curvas. Empezando por curvas planas o situadas en el plano.

Tomando en una curva plana dos puntos **A** y **B**, y llamando s a la distancia entre ambos, el ángulo de las normales en **A** y **B**, al que se llama ω , permite definir como *curvatura* de la línea el cociente $\frac{\omega}{s}$. Cuando el punto **B** tiende a confundirse con el **A**, esta curvatura se aproxima a cierto valor, que será por definición la curvatura en el punto **A**. A la inversa, $\frac{s}{\omega}$ se llama *radio de curvatura* de la curva en ese punto, o *radio del círculo osculador* correspondiente a ese punto. En general, se llama *radio de curvatura principal* en un punto **A** de una superficie, al correspondiente a la sección producida por un plano normal a la misma, tal que el radio de curvatura correspondiente sea el máximo o el mínimo entre todos los posibles.

Normalmente, en una superficie habrá dos secciones principales. Todas las demás producidas por planos que pasen por la normal en el punto **A**, tendrán radios de curvatura comprendidos entre ambos (Fig. 2.5).

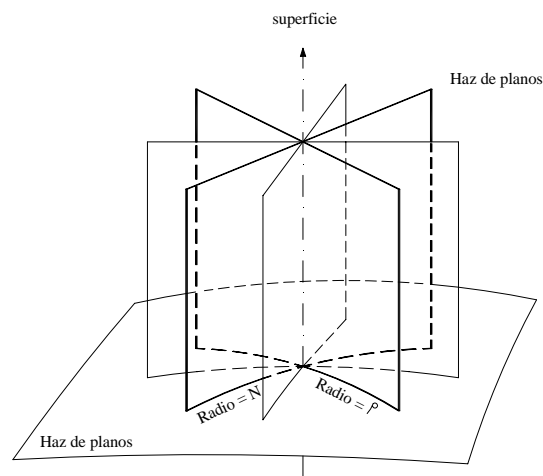


Figura 2.5 Haz de planos

Concretándose al elipsoide se llaman secciones principales: una, la *elipse meridiana*, cuya curvatura es máxima, y otra, la producida al elipsoide por un plano que contuviera a la

normal en el punto A y fuese perpendicular al plano meridiano, cuya curvatura es mínima.

Los radios de curvatura correspondientes a estas secciones principales, y que se denominó como ρ y N , tenían por valores respectivamente (deducidos en el subtitulo 2.1).

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \quad N = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}$$

conocidos los radios de curvatura principales en un punto, se define como curvatura de media a la expresión.

$$\frac{1}{R_M} = \frac{1}{\sqrt{N\rho}}$$

y a la inversa, radio de curvatura medio

$$R_M = \sqrt{N\rho}$$

Si en un punto A del elipsoide (Fig. 2.6) se conoce el azimut de una sección normal z , el radio de curvatura correspondiente a esa sección lo proporciona el *teorema de Euler*.

$$\frac{1}{R_z} = \frac{\cos^2 z}{\rho} + \frac{\sin^2 z}{N} \quad [2.2.1]$$

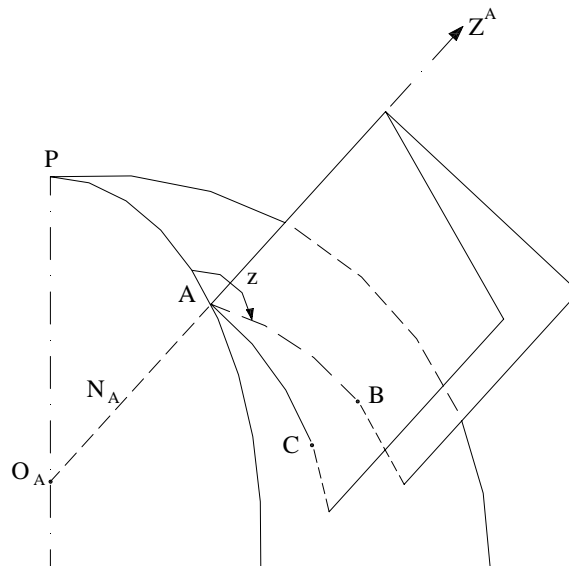


Figura 2.6 Azimut de una sección normal.

2.2.2 Cálculo de redes Geodésicas

Suponiendo momentáneamente que todos los vértices de la red se encontrasen sobre la superficie misma del elipsoide, y sean éstos los puntos **A B C**. Sea **PO** el eje de rotación del elipsoide. Al hacer estación en el punto **A** para medir el ángulo **BAC** se coloca el teodolito de forma que su eje principal coincida con la normal al elipsoide (o normal geodésica). Esta normal **AN_A** y el punto **B** definen un plano, normal en **A** al elipsoide y que corta a esta superficie según la curva 1 (Fig. 2.7).

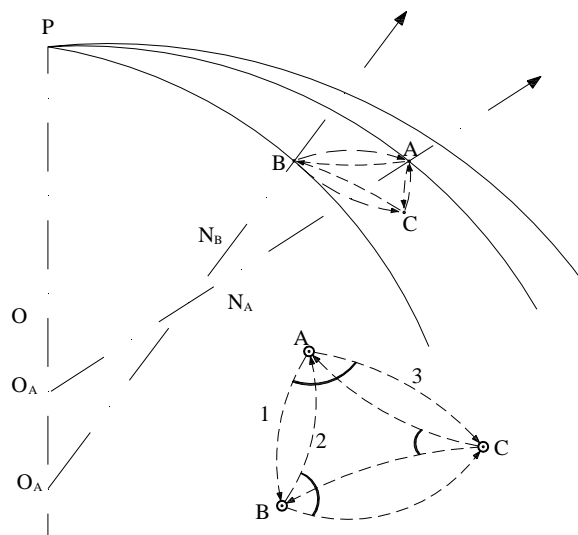


Figura 2.7 Redes Geodésicas

La misma normal **AN_A** y el punto **C** definen otro plano normal también al elipsoide en **A**, y que lo corta según la curva 3, y es el ángulo de estos dos planos, o sea el de las dos secciones normales 1 y 3 del elipsoide, el que se medirá con teodolito. Análogamente, al estacionar en **B**, se mide al ángulo formado por las dos secciones normales en **B** y que pasan por **A** y **C**, respectivamente. Ahora bien, las rectas **AN_A** y **AN_B** no se cortan en general. Únicamente lo harán si ambos puntos están en el mismo meridiano o en el mismo paralelo; luego cuando desde **B** se observa **A**, el plano de la sección normal en **B** que pasa por **A** (**BN_BA**) no coincidirá con el de la sección en (**AN_AB**). Este nuevo plano, normal en **B** al elipsoide y que pasa por **A**, corta al elipsoide, según una línea 2 que coincide con la 1.

Lo mismo podría repetirse en cuanto a las observaciones efectuadas en el vértice **C**. Resulta así que las observaciones geodésicas en **A, B, C** no definen un triángulo, puesto que cada dos vértices aparecen unidos por dos líneas, que se denominara *secciones normales directa y recíproca*, no existiendo ninguna razón para elegir como lado **AB** la línea 1 o la 2.

Antes de pasar a la definición de la *línea geodésica* que resolverá el problema, se observará algunos conceptos, en general correspondientes a curvas alabeadas.

2.2.3 Conceptos sobre curvas alabeadas

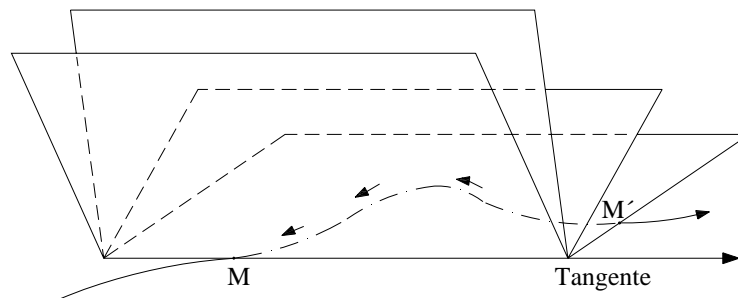


Figura 2.8 Curva tangente a la familia de planos

Una curva alabeada esta definida, en general, por tres ecuaciones

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$$

función de un parámetro (es necesario que no exista entre las tres ninguna relación lineal).

Son curvas que no están contenidas en un plano, es decir no son planas. En un punto M cualquiera de la curva, se considera la tangente y la familia de planos que pasan por ella (fig. 2.9). Tomando un punto M' próximo al M fuera de la tangente. A cada punto M' corresponderá un plano del haz de plano que pasa por la tangente. Por definición el *plano osculador en M* es la posición límite del plano determinado por

la tangente T y el punto M' , cuando M' tiene a M . La curva alabeada atraviesa en general su plano osculador en el punto.

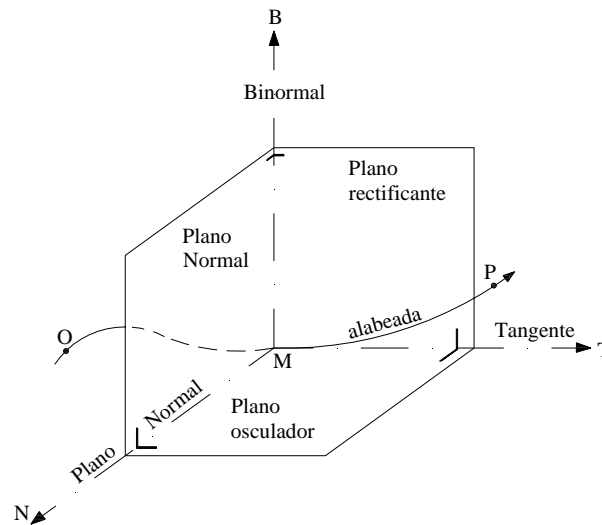


Figura 2.9 Triedro

Por todo lo anterior, en un punto M de la curva se puede considerar un triedro, usado el plano osculador NMT como referencia (fig. 2.9). Los tres ejes del triedro se dirigen respectivamente: el primero según la tangente MT ; el segundo eje es el vector unitario MN , normal a la tangente en M y situado en el plano osculador. La recta MN se llama *normal principal*. El tercer eje MB es tal que define con los dos ejes anteriores un triedro positivo. La recta MB se llama *binormal*.

Así, el triedro define tres planos:

El plano osculador ya conocido MT , MN .

El plano normal, perpendicular a MT , MNM , MB .

El plano rectificante MB , MT .

2.2.4 Línea Geodésica. Propiedades

Con estos breves conceptos sobre las curvas alabeadas en general, puede definirse la línea geodésica. Se ha visto que el plano osculador en un punto, se genera tomando

la tangente en dicho punto y un punto próximo al primero. El plano determinado por la recta y el punto, cuando el segundo punto tiende al punto de tangencia, en el plano osculador. También se ve con la facilidad que tomando un punto a cada lado del considerado y haciendo que ambos puntos tiendan al central, el plano que en un principio determinaban los tres puntos, tiende hacia lo que se ha definido como plano osculador.

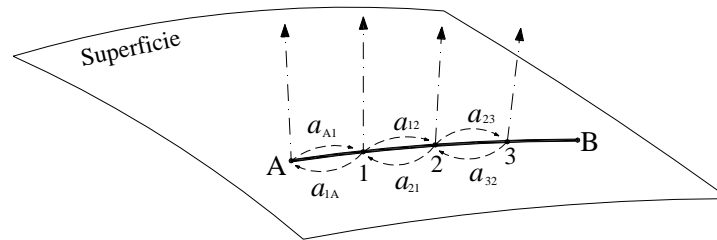


Figura 2.10 Línea Geodésica

Admitiendo sobre el elipsoide dos puntos **A** y **B**, entre los cuales se tratará de definir la geodésica que los une (Fig. 2.10). Suponiendo que puesto en estación el teodolito en el punto A, de manera que su eje principal coincida con la normal en **A** a la superficie, se observa un punto 1 próximo en la dirección de **B**.

El plano determinado por la normal en A al elipsoide y el punto 1, corta al elipsoide según la curva a_{A1} . Haciendo después estación con el teodolito en el punto 1, se dirige la visual al punto A, girando luego el aparato alrededor de eje de muñones, visando al punto 2. El plano descrito por el eje de colimación del anteojo, contiene en 1; es pues, un plano normal al elipsoide, cortando a esta superficie según la línea a_{1A}, a_{12} . Puesto en estación el teodolito en el punto 2, se dirige el anteojo hacia 1, y de la misma forma que antes se observo un nuevo punto 3. El plano normal al elipsoide en 2, le corta según la línea a_{21}, a_{23} . Suponiendo continuado este proceso hasta llegar al punto B. En cada estación se ha determinado una línea de intersección a la superficie, producida por un plano normal a esta. Ahora bien, las dos secciones normales reciprocas $a_{A1}a_{1A}, a_{12}a_{21}, a_{23}a_{32}$, etc., que unen dos puntos consecutivos no coinciden.

Suponiendo ahora que el número de puntos 1, 2, 3... aumenta identificadamente normales reciprocas en dos puntos consecutivos se aproximan, confundiéndose en el límite, y verificándose siempre la condición que antes se indicó: el plano normal a la superficie en un punto de esta línea contiene dos elementos consecutivos de la misma. Dicho de otra forma: el plano osculador de la curva en un punto es siempre normal a la superficie.

Repitiendo alguno de estos conceptos para dejar claras estas ideas. El plano osculador variable en cada punto esta constituido por el limite al que tiende un plano formado por tres puntos de la curva, por ejemplo, O, M, P, cuando los dos extremos O y P tienden al central M (fig.2.9). Esta idea se la toma para la geodésica. Se ha descompuesto la línea AB en pequeños arcos. En el punto 1 se pone el teodolito con su eje principal según la normal al elipsoide. Visando hacia atrás y adelante, luego los puntos A, 1, 2 están en un plano. Este camino es el que según el proceso indicado ha de llevar al punto B.

Este plano, determinado por cada terna de puntos A, 1, 2; 1, 2, 3; 2, 3, 4, etc., va siendo en el plano osculador en el punto 1, 2, 3..., luego a lo largo de la geodésica el plano normal en cada punto va siendo un plano osculador. De aquí la propiedad que se ha enunciado de que *a lo largo de una geodésica el plano osculador es siempre normal a la superficie.*

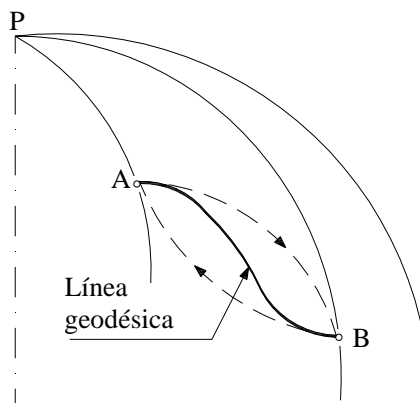


Figura 2.11 Línea Geodésica entre dos secciones

Volviendo al elipsoide en que estaban los tres puntos A, B, C. Aparecen entre A y B dos secciones normales (fig. 2.11). Así se tiene una nueva línea determinada entre los dos puntos, que quedan perfectamente definidos y que es llamada *línea geodésica* de la superficie considerada (en el caso sobre el elipsoide).

Se ha estudiado ya una primera propiedad de la línea geodésica, pero tiene otra propiedad importante: *la de ser la distancia mas corta entre dos de sus puntos, medida sobre la superficie*. Ocurre, además, que la línea geodésica de una superficie de revolución cumplen el teorema de Clairaut, que dice: a lo largo de una línea geodésica de una superficie de revolución, el producto del radio del paralelo por el seno del acimut es una cantidad constante (fig. 2.12).

$$r_A \cdot \text{sen } z_A = r_B \cdot \text{sen } z_B$$

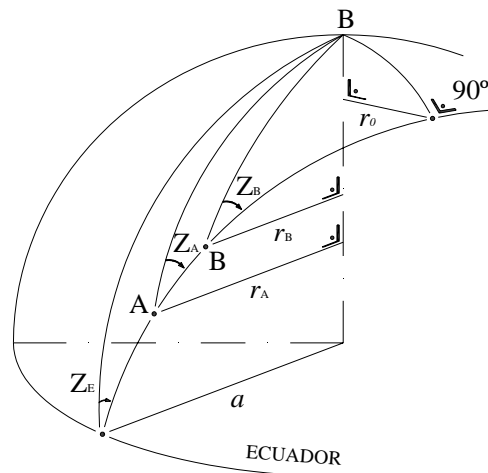


Figura 2.12 Línea geodésica a lo largo de una superficie de revolución

Esta propiedad indica que al aumentar la latitud y disminuir el radio del paralelo, la línea geodésica deberá ir curvándose, o aumentando su acimut, hasta llegar al punto mas alto, en que z vale 90° , punto en el cual el radio del paralelo alcanza su mínimo valor. A partir de este punto, la geodésica comienza a descender hacia el Ecuador.

Para completar el estudio de la geodésica se procederá a deducir el valor de su radio de curvatura. Aplicando el teorema de Euler [2.2.1]

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho} \cos^2 z + \frac{1}{N} \sin^2 z = \frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{\rho} \right) \sin^2 z \quad [2.2.2]$$

y en virtud del teorema del Clairaut

$$r \cdot \sin z = a \cdot \sin z_E = N \cos \varphi \sin z$$

donde denominando a z_E al acimut con la geodésica corta al Ecuador, que es una constante de cada geodésica. Se calculara el valor de

$$\frac{1}{N} - \frac{1}{\rho}$$

de [2.2.2] para ser sustituido posteriormente en el valor de $\frac{1}{R}$

$$\frac{1}{N} - \frac{1}{\rho} = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}{a} - \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}{a(1 - e^2)}$$

y haciendo operaciones

$$\frac{1}{N} - \frac{1}{\rho} = \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} (1 - e^2 \sin^2 \varphi) (1 - e^2)}{a(1 - e^2 \sin^2 \varphi) (1 - e^2)} - \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}{a(1 - e^2)}$$

operando convenientemente con la primera fracción de la expresión anterior y sacando $\frac{1}{\rho}$ factor común, quedar

$$\frac{1}{\rho} \left[\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} - 1 \right] = \frac{-1}{\rho} \frac{e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

de donde

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \sin^2 z = \frac{1}{\rho} - \frac{e^2 \cos^2 \varphi \sin^2 z}{\rho (1 - e^2 \sin^2 \varphi)} \frac{a^2}{a^2} = \frac{1}{\rho} - \frac{e^2 N^2 \cos^2 \varphi \sin^2 z}{\rho a^2}$$

aplicando al teorema de Clairaut

$$N^2 \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 z = a^2 \sin^2 z_E$$

luego

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho} - \frac{e^2}{\rho} \frac{a^2 \sin^2 z_E}{a^2} = \frac{1}{\rho} - \frac{e^2}{\rho} \sin^2 z_E = \frac{1}{\rho} (1 - e^2 \sin^2 z_E)$$

llegando finalmente a

$$R = \frac{\rho}{(1 - e^2 \sin^2 z_E)}$$

es decir, que el radio de curvatura de una geodésica es proporcional al radio de curvatura ρ de la sección meridiana en el punto de la misma latitud (puesto que el denominador es una constante que solo depende de la geodésica considerada).

2.2.5 Cálculos de los lados de la Red Geodésica. Aplicación de los teoremas de Gauss y Legendre.

Se ha estudiado la línea geodésica y sus propiedades. Como consecuencia entre dos puntos A y B del elipsoide, existirá una sola línea geodésica, que se tomará como lado del triángulo geodésico, con lo que esta queda perfectamente definido. Ahora bien, la observación de los ángulos definidos por secciones normales del elipsoide, por lo que será necesario introducir una corrección en cada uno de ellos para pasar del ángulo de las secciones normales a de las líneas geodésicas correspondiente que determine cada triángulo.

De esta forma se tiene ya una red constituida exclusivamente por triángulos geodésicos eclipsóidicos, cuyos lados se tendrá que conocer. La resolución de estos triángulos es realizable, pero resulta exclusivamente complicada para poderla aplicar en el ángulo geodésico. El primer paso hacia la solución del problema lo da el siguiente teorema enunciado por Gauss: para que un elemento de una superficie considerada perfectamente flexible e inextensible pueda aplicarse sobre un elemento de otra superficie sin sufrir desgarraduras ni dobleces, es necesario y suficiente que en los centros de los elementos considerados las curvaturas medida de ambas superficies sea la misma. En esta transformación se conserva los ángulos, las distancias y las áreas; en particular, un arco de línea geodésica de la primera superficie se transforma en un arco de línea geodésica en la segunda.

Si se pasa de elipsoide a esfera, las líneas geodésicas de la primera superficie pasan a ser círculo máximos (que son las geodésicas en la esfera) y los problemas se reducen a resolución de triángulo esférico. Por consiguiente, aplicando el teorema de Gauss, puede transformarse un elemento de superficie del elipsoide en un elemento de esfera cuyo radio sea

$$R = \sqrt{N\rho} \quad [2.2.3]$$

siendo N y ρ los radio de curvatura principales del elipsoide en el elemento considerado.

Los triángulos elipsóidicos se resolverán como esféricos, conservándose las longitudes de los lados y los valores de los ángulos. HELMERT, en su celebre obra *Höheren Geodasie*, cálculo las diferencias entre los ángulos de un triangulo elipsóidicos y el correspondiente triángulo sobre la esfera local, para distintas dimensiones de los lados.

Estas diferencias son

$K = 127 \text{ Km.}$	$\Delta A = 0'',0005$
$K = 319 \text{ »}$	$\Delta A = 0'',008$
$K = 638 \text{ »}$	$\Delta A = 0'',062$

Que son siempre despreciables por ser muy inferiores a los errores de observación.

También son despreciables los errores introducidos en las longitudes de los lados para todos los triángulos que puedan observarse en una red geodésica, resultando que la transformación definida por el teorema de Gauss puede admitirse en todos los triángulos geodésicos. El cálculo de cada uno de los triángulos que constituyen una red geodésica, puede pues, efectuarse sobre la *esfera local*. Esta esfera es distinta para cada triangulo, debiéndose calcular los valores de los radios principales de curvatura N y ρ en cada uno de los triángulos.

Considerando ya cada triángulo sobre la correspondiente esfera local de radio R [2.2.3], si son a , b , c las medidas lineales de sus lados, dicho triángulo podrá resolverse aplicando la formula de trigonometría esférica, remplazando en ella los lados del triángulo por los valores

$$\frac{a}{R} \quad , \quad \frac{b}{R} \quad , \quad \frac{c}{R}$$

expresando en segundos.

Puesto que para la longitud de la base medida toma para la de los restantes lados de triangulación han de utilizarse medidas lineales, la resolución de los triángulos mediante la formula de la trigonometría esférica exigirá la reducción de la longitud de la base a su medida angular sobre la esfera de curvatura media. Una vez resueltos los triángulos se pasan los lados calculados a sus medidas lineales. Por otra parte, los triángulos que forman las redes geodésicas son siempre muy pequeños en relación con las dimensiones de la superficie terrestre; los valores angulares de los lados de estos triángulos serán, en consecuencia, muy pequeños, y el cálculo siempre inseguro. Todo esto hace que no sea conveniente calcular los triángulos geodésicos reduciendo a triángulos esféricos, aplicando las formulas corrientes de la trigonometría esférica.

Este inconveniente se salva mediante la aplicación del *teorema de Legendre*. Según este puede reemplazarse la resolución de un triángulo esférico de lados muy pequeños por la de un triángulo plano cuyos lados tienen la misma longitud que los del triángulo esférico y cuyos ángulos (A' , B' , C') vienen dados en función de los del triángulo esférico (ABC) por la expresión.

$$A' = A - \frac{\varepsilon}{3} \quad B' = B - \frac{\varepsilon}{3} \quad C' = C - \frac{\varepsilon}{3}$$

siendo ε el exceso esférico del triángulo considerado, cuyo valor es

$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ$$

Hasta lados de 100 Km. la aplicación del teorema de Legendre da precisiones suficientes. En lados mayores, habría que aplicar el teorema de Legendre generalizado.

Para terminar, se añadirá algo sobre exceso esférico. Si el triángulo es de lados pequeños frente al radio de la esfera, el exceso es igualmente pequeño.

Cuanto más pequeño son los lados (frente al radio), mas pequeño será el exceso. Cuando el triángulo es plano, el radio de la esfera infinito y la suma de los ángulos 180° , por lo que, en este caso, el exceso será cero.

Ya en triángulos, como pueden ser constituidos por las redes geodésicas de primero, segundo y tercero orden, el exceso es para lados de

Primer orden	10"
Segundo orden	0",5 a 1"
Tercer orden	0",02 a 0", 04

Por otra parte, se tiene que recordar que conociendo el exceso esférico puede obtenerse el área del triángulo (y recíprocamente), ya que

$$\varepsilon = \frac{\text{area}}{R^2} - \quad \text{o} \quad \text{área} = \varepsilon \cdot R^2 = T$$

dando ε en relaciones, y para un cálculo práctico, se puede escribir para valor del exceso

2.3 CÁLCULO DE COORDENADAS GEODÉSICAS

2.3.1 Introducción

Una vez hechas las correcciones y compensaciones precisas se llega a conocer los lados y ángulos de cada triángulo de la red sobre el elipsoide. Con ellos se inicia el

cálculo de las coordenadas geodésicas de los vértices. Partiendo de un punto fundamental, llamado *datum*, en el cual se determinan por métodos astronómicos las coordenadas iniciales λ , φ y un acimut z , a partir de las cuales se calculan sobre el elipsoide de referencia, con los valores compensados, las coordenadas de los vértices sucesivos de la red.

El elipsoide adoptado actualmente es internacional de *Hayford*, con *Datum Postdam*. Esta definido por su parámetro a y α (aplanamiento), y con la condición de ser tangente al geoide en dicho punto astronómico fundamental, además de tener su eje de revolución paralelo al del polar PP' .

El problema del cálculo de coordenadas se basa, por tanto, que a partir de las coordenadas de un punto A (λ_A, φ_A), se tiene que obtener las correspondientes a un segundo punto B (λ_B, φ_B) (fig 2.13).

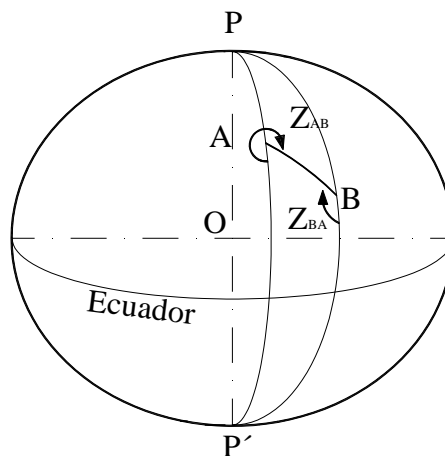


Figura 2.13 Coordenadas geodésicas

Aunque la resolución rigurosa del cálculo del triángulo elipsoidal \triangle_{PAB} , que sirve para obtener las coordenadas del punto B, la obtuvo Jacobi utilizando las propiedades de la línea geodésica, y también lo resolvió Legendre por desarrollos en serie muy complejos, al igual que en otros capítulos anteriores se verá como se ha simplificado en la práctica este problema.

Para ello se desdobra en fases sucesivas utilizadas las llamadas *esferas auxiliares* (fig. 2.14).

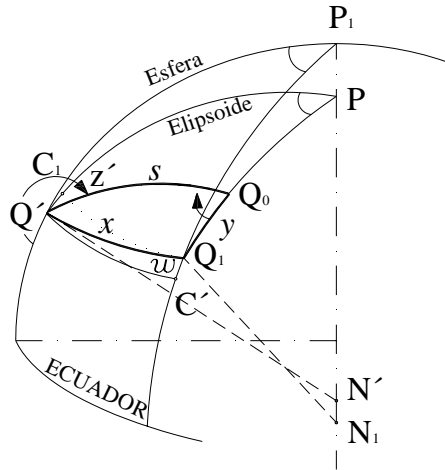


Figura 2.14 Esferas auxiliares

Primera fase

Calculo de x , en la esfera de radio

$$R_M = \sqrt{N_M \cdot \rho_M}$$

o esfera de curvatura media, siendo φ_M la media de dos latitudes

$$\varphi_M = \frac{\varphi_o + \varphi'}{2}$$

y aplicando del teorema de Legendre al triángulo $Q_0Q'Q_1$ para resolverla como plano. (El valor de φ' se obtendría de calculo aproximado).

Segunda fase

Cálculo de arco ω de elipse meridiano $\omega = Q_1C'$ con ayuda de la esfera de la radio N_1 , tangente al paralelo de latitud φ_1 , aplicando el desarrollo de Lagrange al triángulo $P_1Q'Q_1$. Esta esfera puede utilizarse, ya que el dato buscado ω es de segundo orden de pequeñez. Con las dos esferas citadas, la de curvatura media y está cuyo radio es N_1 , se tiene resuelto el problema de la latitud.

Tercera fase

Cálculo de la diferencia de longitud $\Delta\lambda$. Se emplea la esfera de radio N' , tangente al paralelo de latitud φ' . La diferencia de latitud en el elipsoide y en la esfera de la misma, lo buscado es el rectilíneo del diedro formado por los dos meridianos.

Cuarta fase

Cálculo de la convergencia de meridiano de la esfera de Jacobi (radio α). Este fue uno de los caminos utilizados en varias redes mundiales (aunque con algunas variaciones que luego se indicara al hablar de los parámetros PQR), que aunque era lento y laborioso, en la cantidad, con ayuda de los modernos ordenadores, podría utilizarse nuevamente, dada la precisión que se obtenía con él. Tanto una fórmula como otras, llegan a precisiones que son suficientes en Geodesia de primer orden. Después de estudiar este problema directo en el cálculo siguiente, se analizara en el inverso en el que, del conocimiento de las coordenadas de dos vértices, interesa calcular la longitud de la geodésica que los une y los acimutes directo e inverso entre ambos.

2.3.2 Conceptos sobre Precisiones.

Para tratar este problema del cálculo de coordenadas es necesario aclarar algunas ideas sobre *precisiones*. Si se busca una aproximación final de un centímetro en la situación de un punto (lo que equivale a $0^s,001$), pueden limitarse los cálculos, incluso para las triangulaciones de primer orden, a los términos del tercer orden de pequeñez. La equivalencia del centímetro con la milésima de segundo centesimal de arco es fácil justificarla. En efecto, 1 [cm] es;

$$1 \text{ cm.} \approx \frac{10^{-2} m}{6 \cdot 10^6 m} = \frac{1}{6} 10^{-8}$$

en radianes, o en segundos centesimales

$$\frac{1}{6} \cdot 10^{-s} : \frac{1}{6} 10^{-s} \approx 10^{-3} = 0,001^s$$

Para los lados normales de triangulación (60 km), las cantidades

$$\frac{s}{R} = 0,01 \quad ; \quad e^2 = 0,007 \quad ; \quad \alpha = \frac{1}{300} = 0,003$$

se consideran de primer orden de pequeñez. Se extiende a este orden de magnitudes que están entre $0,01$ y $0,01^2$. Asimismo se consideran como de segundo orden las comprendidas entre

$$0,01^2 \quad \text{y} \quad 0,01^3$$

y así sucesivamente.

2.3.3 Métodos utilizados en las antiguas redes Geodésicas.

Establecida esta valoración, se procede al cálculo de las cuatro fases resumidas anteriormente, correspondientes al problema directo del transporte de coordenadas.

a) CÁLCULO DE LA LATITUD

Primera fase

Considerando (fig 2.14) Q_0 como origen de coordenadas conocidas, y sea Q' el punto cuyas coordenadas se busca. Se traza desde Q la línea geodésica $Q'Q_1$, perpendicular al meridiano de Q_0 , y denominando;

$$Q'Q_1 = x$$

$$Q_0Q_1 = y$$

que se define como coordenadas geodésica ortogonales del punto Q' con respecto al punto Q_0 (fig. 2.15 a).

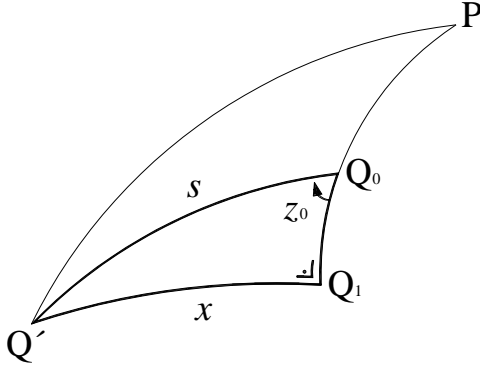


Figura 2.15 a Triangulo Esférico

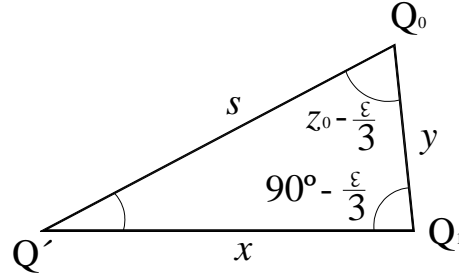


Figura 2.15 b Triangulo Pla

En primer lugar, se calcula x e y sobre la primera esfera auxiliar, o *esfera de curvatura media*, aplicando el teorema de Gauss, ya que los lados del triángulo $Q'Q_0Q_1$ son muy pequeños respecto del radio de la esfera. Por aplicación a continuación del teorema de Legendre, se calcula dicho triángulo como rectángulo plano, conociendo la hipotenusa s y el ángulo z_0 . Insistiendo en que al aplicar el teorema de Gauss, el triángulo, que sobre el elipsoide está limitado por línea geodésica se ha transformado en uno esférico, sin cambiar ni los lados ni los ángulos ni el área. Además, la afirmación de que es esférico es consistente, pues dicho teorema transforma las geodésicas de una superficie en geodésicas en la otra y en la esfera las geodésicas son círculos máximos.

Finalmente, al triángulo esférico se aplica el teorema de Legendre, disminuyendo los ángulos Q_0, Q' y Q_1 en la tercera parte del exceso ε . El ángulo Q' , que se denomina α en el triángulo plano, tendrá por valor (según la fig. 2.15 b)

$$\alpha = 180^\circ - \left[90^\circ - \frac{\varepsilon}{3} + z_0 - \frac{\varepsilon}{3} \right] = 90^\circ - z_0 + \frac{2\varepsilon}{3}$$

Ahora se puede establecer la relación entre los lados y seno de ángulos opuestos

$$\frac{Q'Q_0}{\text{sen}\left(90^\circ - \frac{\varepsilon}{3}\right)} = \frac{Q_0Q_1}{\text{sen}\left[90^\circ - \left(z_0 - \frac{2\varepsilon}{3}\right)\right]} = \frac{Q'Q_1}{\text{sen}\left(z_0 - \frac{\varepsilon}{3}\right)}$$

sustituyendo

$$\frac{s}{\cos \frac{\varepsilon}{3}} = \frac{y}{\cos \left(z_0 - \frac{2\varepsilon}{3} \right)} = \frac{x}{\operatorname{sen} \left(z_0 - \frac{\varepsilon}{3} \right)}$$

Despejando

$$Q_0 Q_1 = y = s \cos \left(z_0 - \frac{2\varepsilon}{3} \right) : \cos \frac{\varepsilon}{3}$$

$$Q' Q_1 = x = s \operatorname{sen} \left(z_0 - \frac{\varepsilon}{3} \right) : \cos \frac{\varepsilon}{3}$$

el valor de ε es de pocos segundos, por lo que

$$\cos \frac{\varepsilon}{3} \approx 1$$

y por tanto quedara

$$y = s \cos \left(z_0 - \frac{2\varepsilon}{3} \right)$$

[2.3.1]

$$x = s \operatorname{sen} \left(z_0 - \frac{\varepsilon}{3} \right)$$

En primera aproximación, el triángulo rectángulo plano tendrá por área

$$T = \frac{1}{2} xy = \frac{1}{2} s^2 \cos \left(z_0 - \frac{2\varepsilon}{3} \right) \operatorname{sen} \left(z_0 - \frac{\varepsilon}{3} \right)$$

y desprendiendo los excesos y recordando que

$$\varepsilon = \frac{T}{R^2}$$

en la esfera y

$$\varepsilon \frac{T}{N\rho} \quad \text{o} \quad \varepsilon'' = \frac{T}{N \cdot \rho \cdot \operatorname{sen} 1''}$$

en el elipsoide

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{s^2}{N_\rho} \cos z_0 \operatorname{sen} z_0 \quad [2.3.2]$$

(siendo s la longitud $Q'Q_0$). Este valor de ε es el que se lleva a las expresiones anteriores [2.3.1], para calcular x e y . Si en este estudio del cálculo de x e y se quisiera más precisión, moviendo a la formula [2.3.1], tendría que considerarse para el área del triángulo Q_0Q_1Q' (Fig. 2.16) el siguiente valor:

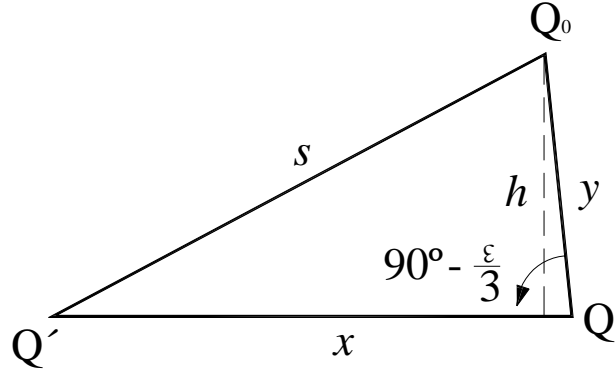


Figura 2.16 Triángulo referido a la esfera de curvatura media

$$T = \frac{1}{2} x h = \frac{1}{2} xy \sin\left(90^\circ - \frac{\varepsilon}{3}\right) = \frac{1}{2} s \cos\left(z_0 - \frac{2}{3}\varepsilon\right) s \sin\left(z_0 - \frac{\varepsilon}{3}\right) \sin\left(90^\circ - \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

Y como

$$\varepsilon'' = \frac{T}{N \cdot \rho \cdot \sin l''} = \frac{\frac{1}{2} s \cos\left(z_0 - \frac{2}{3}\varepsilon\right) s \sin\left(z_0 - \frac{\varepsilon}{3}\right) \sin\left(90^\circ - \frac{\varepsilon}{3}\right)}{N \cdot \rho \cdot \sin l''}$$

Volviendo a los valores de y , x de [2.3.1] se tiene;

$$x = s \left(\sin z_0 \cos \frac{\varepsilon}{3} - \cos z_0 \cdot \sin \frac{\varepsilon}{3} \right) \approx s \sin z_0 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\cos z_0}{\sin z_0} \varepsilon \right)$$

$$x = s \sin z_0 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\cos z_0}{\sin z_0} \cdot \frac{1}{2} \frac{s^2}{N\rho} \cos z_0 \cdot \sin z_0 \right)$$

de donde finalmente se escribe

$$x = s \sin z_0 \left[1 - \frac{1}{3} S_{\pi} \sin l'' \left(s^2 \cos^2 z_0 \right) \right] \quad [2.3.3]$$

Análogamente

$$y = s \cos\left(z_0 - \frac{2}{3}\varepsilon\right) = s \left(\cos z_0 \cos \frac{2}{3}\varepsilon + \sin z_0 \sin \frac{2}{3}\varepsilon \right)$$

$$y = s \cos z_0 \left(1 + \frac{2}{3} \varepsilon \frac{\text{sen} z_0}{\cos z_0} \right) = s \cos z_0 \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\text{sen} z_0}{\cos z_0} \frac{1}{2} \frac{s^2}{N\rho} \cos z_0 \text{sen} z_0 \right)$$

de donde finalmente se tiene

$$y = s \cos z_0 \left(1 + \frac{2}{3} S_\pi \text{sen} 1'' (s^2 \text{sen}^2 z_0) \right) \quad [2.3.4]$$

siendo en ambas expresiones

$$S_\pi = \frac{1}{2N\rho} \quad [2.3.5]$$

Que se refiere a la esfera de curvatura media, correspondiente a los puntos Q_0 y Q_1 . Se ha calculado la distancia y sobre el elipsoide, entre los puntos Q_0 y Q_1 , y teniendo que calcular la diferencia de latitudes correspondiente. Para comprender mejor el problema se deberá repasar el capítulo 2.1, en que se había deducido las formulas que da la diferencia entre latitudes de dos puntos de un meridiano en función de la distancia que los une. Se repetirá algunos conceptos de los allí expuestos. Considerando un arco de meridiano de pequeña amplitud, como es nuestro caso.

Puede considerarse como trazado sobre la esfera de la curvatura media, pudiendo escribirse:

$$y = Q_0 Q_1 = \rho_m \cdot \Delta\varphi$$

Recordando el valor ρ , en el que desarrollando en serie $\text{sen}^2 \varphi$, sustituyendo y apoyando, se llega a:

$$y = \rho_m \Delta\varphi \left[1 + \frac{e^2}{8} \Delta\varphi \cos 2\varphi_M \right]$$

de donde despejado $\Delta\varphi$

$$\Delta\varphi'' = (\varphi_1 - \varphi_0)'' = \frac{1}{\rho_m \text{sen} 1''} y \left[1 - \frac{e^2}{8\alpha^2} y^2 \cos 2\varphi_M \right] \quad [2.3.6]$$

expresión que da la diferencia en latitudes entre Q_0 y Q_1 (se ha sustituido $\Delta\varphi = \frac{y}{\alpha}$ dado que figura como de segundo orden).

Segunda fase

Tomando ahora (Fig. 2.14) los puntos C' y C_1 , situado sobre los meridianos de Q' y Q_1 , y respectivamente a las latitudes φ' y φ_1 . Se utilizara en la segunda fase de la *segunda esfera auxiliar*, que ahora se fijara, con el fin de calcular el valor

$$\omega = C'Q_1$$

La esfera que se toma es tangente al elipsoide a lo largo del paralelo de Q_1 , o sea de latitud φ_1 , siendo su radio N_1 y su polo P_1 .

Para el calculo de ω , se resolverá el triangulo esférico P_1Q_1Q' , en el que ω es la diferencia entre la hipotenusa y el cateto mayor. El cálculo se realiza utilizando el desarrollo en serie de Lagrange, que da la diferencia entre la hipotenusa y al cateto (cuando el otro cateto es muy pequeño)

$$a - c = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} B \cdot \operatorname{sen} 2a - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^4 \frac{1}{2} B \cdot \operatorname{sen} 4a + \dots = \frac{b^2}{2} \operatorname{ctg} c$$

En nuestro caso $a = P_1Q'$ y $c = P_1Q_1$, siendo su diferencia

$$a - c = \omega$$

Sustituyendo, según el desarrollo de Lagrange

$$\frac{a}{R} - \frac{c}{R} = \frac{1}{2} \frac{b^2}{R^2} \operatorname{ctg} c \quad \text{o} \quad a - c = \frac{1}{2} \frac{b^2}{R} \cdot \operatorname{tg} \varphi_1$$

y finalmente

$$Q_1C' = \frac{x^2}{2R} \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{x^2}{2N_1} \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = \omega \quad [2.3.7]$$

Para tener un orden de magnitud de este valor ω suponiendo que Q_1Q' sea igual a 50 [km], y $\varphi = 45^\circ$ se encuentra $\omega = 190$ [m], y tal como se ha dicho puede suponerse situado tanto en el elipsoide como en la esfera tangente. Sobre esta esfera, los puntos homólogos de los elipsoide se obtiene por proyección central (desde N_1), por tanto, a cada punto A del elipsoide de coordenadas λ y φ (elipsóidicas), corresponderá otro A' de la esfera. En esta esfera el arco ω es diferente entre la hipotenusa P_1Q' y el cateto mayor P_1Q_1 y es de segundo orden de pequeñez, ya que $\Delta\lambda$ (ángulo en P_1) es de primer orden. Podría haberse utilizado la esfera de radio N' , pero al no disponer aun de la latitud φ' (incógnita al calcular). En cambio, para la esfera N_1 se dispone del valor φ_1 , calculado a partir de y . Conocido ω , igual a lo que se hizo con y , se puede deducir sobre el elipsoide la diferencia de latitudes entre Q_1C' , con lo que juntos a la diferencia de latitudes deducida anteriormente se tiene terminado el problema de calculo de la latitud de Q' .

b) Calculo de la longitud

Tercera fase

La diferencia de longitudes $\Delta\lambda$ se obtendrá considerando la longitud $Q_1Q' = x$ como trazada sobre la esfera tangente al elipsoide a lo largo del paralelo de Q' , sobre la cual la diferencia de longitud conserva el mismo valor. Considerando como radio de esa esfera el valor N' , que en la normal principal de Q' que ya se conoce;

$$N' = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{\frac{1}{2}}}$$

puesto que se conoce φ' . Puede resolverse el triangulo $P'Q'Q_1$ como rectángulo (en efecto, $Q'Q_1$ puede considerarse perpendicular a Q_1P') y expresar la relación de senos

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin(90^\circ - \varphi')} = \frac{\sin \Delta\lambda}{\sin \frac{x}{N'}}$$

de donde

$$\text{sen } \Delta\lambda = \text{sen} \frac{x}{N'} \frac{1}{\cos \varphi'} \quad [2.3.8]$$

Desarrollando en serie la función de seno se obtiene

$$\Delta\lambda = \frac{x}{N' \cos \varphi'} \left[1 - \frac{x^2}{6N'^2} + \frac{x^2}{6N'^2 \cos^2 \varphi'} \right] \quad [2.3.9]$$

Aunque se podría haber utilizado para estos cálculos la esfera de radio N_1 , las formulas introducidas hubieran sido mas complicadas. Realmente al trabajar actualmente con ordenadores o calculadoras es mas riguroso utilizar la formula [2.2.8] en lugar de la siguiente [2.2.9].

c) *Convergencia de Meridianos*

Cuarta fase

Se emplea para este cálculo la esfera de Jacobi o de los acimutes conservados, que tiene de radio a y es tangente al elipsoide a lo largo del Ecuador. Este calculo sigue al de $\Delta\lambda$ e $\Delta\varphi$. A cada punto del elipsoide le corresponde otro en la esfera. La relación entre los puntos de ambas superficies no es una proyección geométrica, sino analítica. Se llama convergencia de meridianos (Fig. 2.17) a la diferencia

$$\Delta z = z_0 - (z' - 180^\circ) \quad [2.3.10]$$

Considerando el teorema de Dalby, que «hasta el cuarto orden, la convergencia de meridianos entre dos puntos A y B del elipsoide, es igual a la que tendrían los puntos A' y B' sobre la esfera de Jacobi, cuyas latitudes esféricas fueran iguales a las geodésicas A y B».

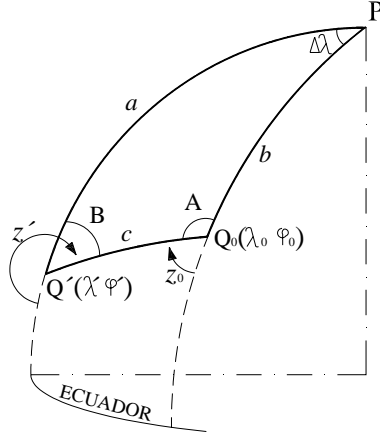


Figura 2.17 Convergencia de meridianos

Se calcula el triángulo esférico que se supone situado sobre la esfera de Jacobi PQ_0Q' , aplicando las analogías de Neper, en la que se llama a y b , respectivamente, a los lados PQ' y PQ_0

$$\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \cot g \frac{C}{2} \quad [2.3.11]$$

La ecuación [2.3.10] permite escribir

$$z' - z_0 = 180^\circ - \Delta z$$

calculando se tiene;

$$\left. \begin{array}{l} A = 180^\circ - z_0 \\ B = z' - 180^\circ \end{array} \right\} A + B = z' - z_0 = 180^\circ - \Delta z$$

y de aquí

$$\left. \begin{array}{l} a = 90^\circ - \varphi' \\ b = 90^\circ - \varphi_0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a + b = 180^\circ - (\varphi_0 + \varphi') \\ a - b = \varphi_0 - \varphi' = \Delta \varphi \end{array}$$

Luego

$$\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{\Delta z}{2}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &= 90^\circ - \frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi') = 90^\circ - \varphi_M \\ \frac{a-b}{2} &= \frac{\Delta \varphi}{2} \end{aligned}$$

Luego substituyendo convenientemente en [2.3.11], se obtiene;

$$\operatorname{ctg} \frac{\Delta z}{2} = \frac{\cos \frac{\Delta \varphi}{2}}{\operatorname{sen} \varphi_M} \cot g \frac{\Delta \lambda}{2}$$

luego

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta z}{2} = \frac{\operatorname{sen} \varphi_M}{\cos \frac{\Delta \varphi}{2}} \operatorname{tg} \frac{\Delta \lambda}{2} \quad [2.3.12]$$

Expresión cuyo cálculo no tiene ninguna dificultad, ya que todos los elementos que intervienen en ella son conocidos.

Cuando no se disponía de ordenadores se partía de esta formula, y mediante desarrollo en serie, y conservando hasta el tercer orden, se llegaba a la expresión

$$\Delta z = \Delta \lambda \operatorname{sen} \varphi_M \left[1 + \frac{\Delta \varphi^2}{8} \operatorname{sen}^2 1'' + \frac{\Delta \lambda^2 \operatorname{sen}^2 1''}{12} \cos^2 \varphi_M \right] \quad [2.3.13]$$

El conocimiento de la convergencia es preciso, ya que cuando se ha realizado el cálculo de coordenadas de B (a partir de A), se tiene que utilizar este punto para seguir calculando C. Así, como el ángulo ABC es conocido (después de las reducciones, compensaciones y cálculos correspondientes), ya se puede tener acimut hacia C (Fig. 2.18).

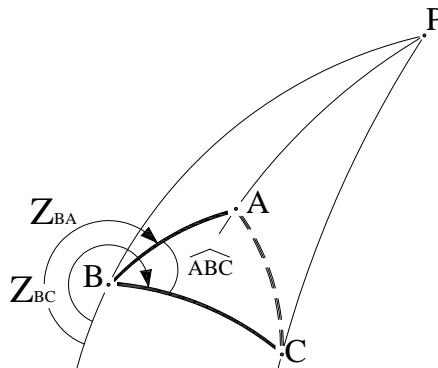


Figura 2.18 Convergencia

Ejemplo

Como ejemplo para el lector se elige los mismo dos vértices Bolos y Carbonera que se utilizara mas adelante en la aplicación de la proyección U.T.M. se da los siguientes pasos intermedios (fig. 2.19)

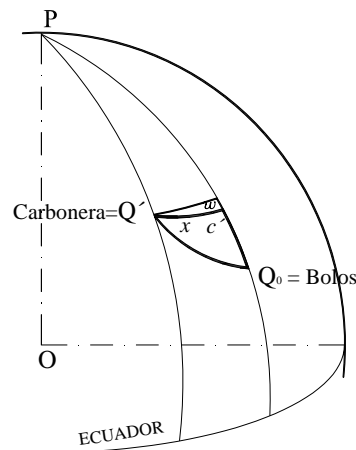


Figura 2.19 Ejemplo

Dato. — Se conocen las coordenadas geodésicas de Bolos

$$\lambda_B = -3^{\circ} 26'38'',50$$

$$\varphi_B = 39^{\circ}29'27'',38$$

así como la distancia de la geodésica que le une con Carbonera

$$14.662,898 \text{ [m]}$$

El acimut de dicha línea geodésica es

$$295^{\circ} 26' 21'', 09$$

Se pide las coordenadas del vértice Carbonera

a) Se empieza el cálculo de las coordenadas geodésicas ortogonales x e y aplicando las formulas [2.3.3] y [2.3.4], en las que se sustituye los valores de N y ρ

$$N = 6.387.076,880 \text{ [m]}$$

$$\rho = 6.361.343,893 \text{ [m]}$$

b) Con este valor de y se puede obtener la diferencia de latitudes entre Q_0 , Q_1 , con la ayuda de la formula [2.3.6], obteniendo

$$\Delta\varphi = 3'24'',22$$

(se ha utilizado la misma ρ anterior), con lo que se deduce para latitud de Q_1

$$\varphi_{Q_0} = 39^\circ 29' 27'',38$$

$$\Delta\varphi = + \underline{3' 24'',22}$$

$$\varphi_{Q_1} = 39^\circ 32' 51'',60$$

c) Para el cálculo de ω , con esta latitud, se va a obtener los valores de N y ρ correspondientes

$$N = 6.387.097,806 \text{ [m]}$$

$$\rho = 6.361.497,416 \text{ [m]}$$

ya que va a utilizarse la esfera, cuyo radio será este valor de N .

Aplicando la formula [2.3.7] se obtiene;

$$\omega = 11,333m \approx 0'',37$$

Con cuyo valor termina el cálculo de la latitud, ya que bastara restar la latitud de Q_1 este valor, obteniendo para latitud de Carbonera

$$\varphi_c = 39^\circ 32' 51'',23$$

d) Pasando a determinar la diferencia de latitudes, para la que se utilizara una nueva esfera que tendrá por radio la normal principal correspondiente a este ultimo valor de φ . Calculando, por tanto, con la latitud de Carbonera, dicho valor de N

$$N = 6.387.097,768 \text{ [m]}$$

Con la formula [2.2.8] se obtiene;

$$\Delta\lambda = 9'14'',55$$

que restado de la latitud de Bolos

$$\lambda_B = -3^\circ 26' 38'',50$$

proporciona la latitud de Carbonera

$$\lambda_C = -3^\circ 35' 53'',05$$

e) Finalmente, para la convergencia de meridianos, se aplica la expresión [2.2.13], obteniendo sin dificultad, ya que se conoce todos los datos que intervienen en ella

$$\Delta_z = 5'52'',88$$

con cuyo valor es deducible el acimut inverso Carbonera-Bolos en función del directo, y tras restar 180°

$$\text{ACIMUT Bolos-Carbonera} = 295^\circ 26' 21'',09$$

$$\Delta z = \underline{\underline{5'52'',88}}$$

$$\text{ACIMUT Carbonera-Bolos} = 115^\circ 20' 28'',21$$

2.4 PROBLEMA INVERSO DEL TRANSPORTE DE COODENADAS

Se suponen en este problema inverso conocidas las coordenadas geodésicas de Q_0 y de Q' , y se desean determinar los acimutes z_0 y z' de la línea geodésica que los une, así como la longitud s de dicha línea (fig.2.20)

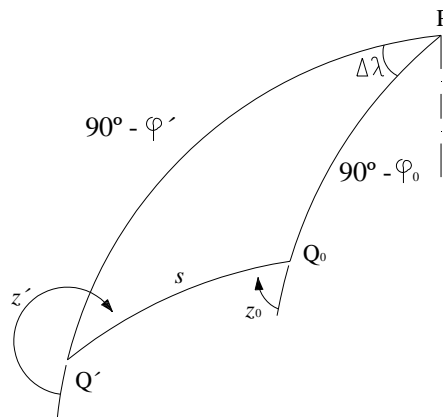


Figura 2.20 Línea Geodésica determinación de acimutes.

2.4.1 Determinación de acimutes directo y reciproco.

El cálculo se realiza sobre la esfera de Jacobi, recordando (capitulo anterior) que era tangente al elipsoide a lo largo del Ecuador y de radio a (semieje mayor

del elipsoide). En ella se considera dos punto A y B, cuyas latitudes esféricas u_A y u_B son iguales a las geodésicas de Q_0 y Q' . Se puede calcular sobre dicha esfera el valor de Δz , que se recuerda era igual a;

$$\Delta z = z_0 + 180^\circ - z'$$

Aplicando el triangulo esférico PAB (fig 2.13) las analogía de Neper, se llega, con un calculo similar al realizado en el problema directo [2.2.12], a

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta z}{2} = \frac{\operatorname{sen} u_M}{\cos \frac{\Delta u}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\Delta \lambda}{2} \quad [2.4.1]$$

en cuya expresión se determina Δz al ser conocido todos los valores del segundo miembro. Por otra parte, de la segunda analogía

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen} \frac{a+b}{2}} \cot g \frac{C}{2} \quad [2.4.2]$$

y con los mismos datos citados anteriormente y siendo

$$\begin{aligned} a &= 90^\circ - u_B & A &= z' - 180^\circ \\ b &= 90^\circ - u_A & B &= 180^\circ - z_0 \end{aligned}$$

se obtendrá

$$\begin{aligned} a + b &= 180^\circ - (u_A + u_B) \\ a - b &= u_A - u_B \end{aligned}$$

sustituyendo convenientemente en [2.4.2] los valores anteriores se tiene;

$$\operatorname{tg} z_M = \operatorname{tg} \frac{z_0 + z}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta u}{2}}{\cos u_M} \cdot \cot g \frac{\Delta \lambda}{2} \quad [2.4.3]$$

que da el valor de z_M .

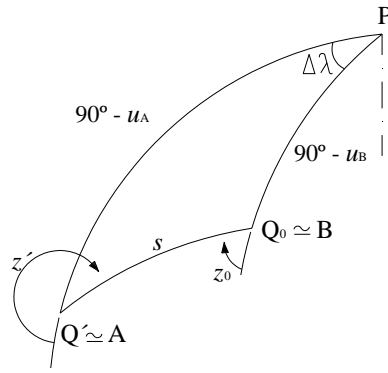


Figura 2.21 Triángulo Esférico; determinación de acimutes.

Finalmente con la formula [2.4.3], se obtiene z_M y Δz , escribiendo;

$$z_M = \frac{z_0 + z'}{2}$$

$$\Delta z = z_0 - z' + 180^\circ$$

De donde

$$z_0 + z' = 2z_M$$

$$z_0 - z' = -180^\circ + \Delta z$$

sumando y restando ordenadamente (Fig. 2.15)

$$z_0 = z_M - 90^\circ + \frac{\Delta z}{2}$$

$$z' = z_M + 90^\circ - \frac{\Delta z}{2}$$

con lo que se termina el problema del cálculo de los acimutes directo e inverso.

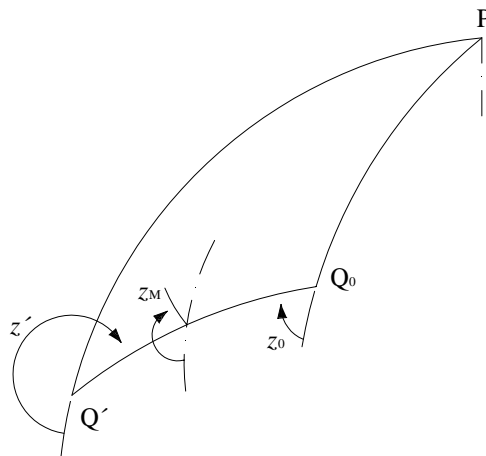


Figura 2.22 Triángulo esférico

2.4.2 Cálculo de la longitud s del arco geodésico $Q_0 Q'$

Se efectúa a partir de cualquiera de las coordenadas geodésicas ortogonales x e y . Con preferencia debe utilizarse con la mayor de ambas cantidades, aunque como comprobación conviene emplear las dos. En cualquier caso es previo el cálculo de z_0 y z' , realizado anteriormente.

Viendo la obtención de s a partir de la x . Despejando en [2.3.8] el valor de

$$\text{sen} \frac{x}{N} = \text{sen} \Delta\lambda \cdot \cos \varphi'$$

se vera que es conocido todo el segundo miembro de la ecuación así con N' . De la expresión [2.3.5] se despeja el valor de s ;

$$s = \frac{x}{\text{sen} z_0} \left[1 + \frac{1}{3} \text{sen} 1'' \cdot S_{\pi} \cdot y^2 \right]$$

en la que se sustituye el valor de x correspondiente, obteniendo en la anterior expresión. Para el valor de y que aparece en la formula puede ser sustituido (dado el pequeño valor de S_n) por el arco elipse meridiana β correspondiente a la diferencia de latitudes entre φ_0 y φ' , o en caso de necesitarse mas precisión, con la formula

$$y = \beta - \frac{x^2}{2N} \text{tg} \varphi' \quad [2.4.4]$$

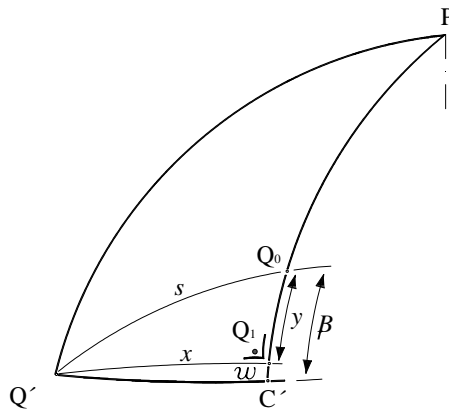


Figura 2.23 Longitud de arco.

Este termino correctivo que se resta a β , representa el valor que se denomina ω en la segunda esfera auxiliar del problema directo 2.3.7, según se observa en la figura 2.23.

Tal como se dijo anteriormente, se puede calcular s en función de la y , y a partir de la expresión siguiente, despejada de [2.3.5], también del problema directo en cuya expresión se tendría que sustituir el valor de x de la formula [2.4.4], terminando el calculo del valor de s .

$$s = \frac{y}{\cos z_0} \left[1 - \frac{2}{3} \text{sen}^2 S_n x_2 \right]$$

2.4.3 Aplicaciones de la proyección U.T.M al problema de transporte de coordenadas.

Anticipando el estudio que se hará sobre la proyección U.T.M. en la segunda parte de este proyecto de grado (capitulo 9), viendo su aplicación al problema directo e inverso de transporte de coordenadas, sin analizar en ellos los capítulos correspondientes.

i) *Problema Directo*

Partiendo de la figura 2.24, en la que están situados los vértices A de coordenadas geodésicas conocidas, y B cuyas coordenadas geodésicas se quiere obtener. Los pasos sucesivos empleando esta proyección serían:

a) Cálculo de las coordenadas U.T.M. de A, a partir de sus geodésicas. Al ser conforme su proyección, el acimut geodésico AB conserva su valor (ángulo \hat{I}). Este acimut estará contado desde el meridano hasta la tangente a la transformada de la geodésica.

- b) Cálculo de convergencia en A, γ_A con la formula correspondiente a partir de las coordenadas U.T.M. o de las geodésicas (ángulo 3).
- c) Con ángulo aproximado de la coordenada de B se obtiene a la reducción a la cuerda (ángulo 2). No importando que sean aproximadas, dado que el valor de este ángulo es de pocos segundos.
- d) Cálculo de las coordenadas B, después de introducir el factor de escala para tener el valor de la cuerda AB, a partir de la longitud de la geodésica correspondiente.
- e) Cálculo de coordenada geodésica correspondiente a partir de las U.T.M. calculadas.

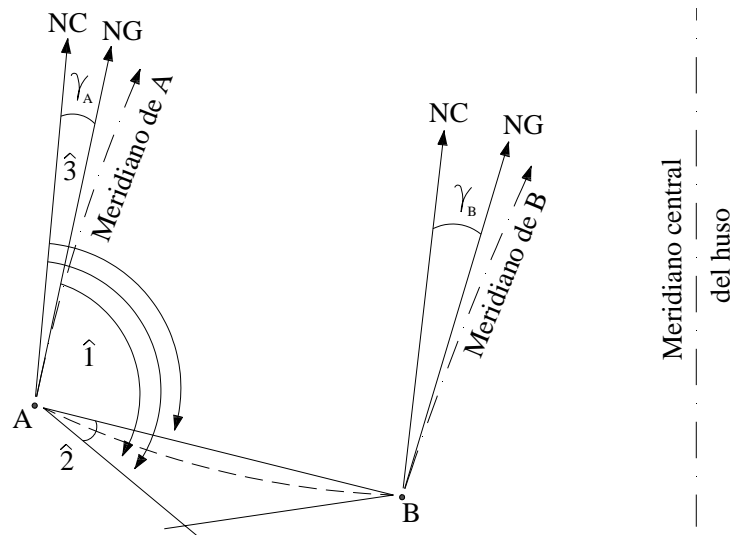


Figura 2.24 Problema directo.

ii) Problema Inverso

En el son conocidas de las coordenadas geodésicas de A y B con lo que se pasará a sus U.T.M. Con ella se calcula la convergencia y reducciones a la cuerda y al factor de escala, que permite pasar de la distancia AB plana a la distancia de la geodésica en el elipsoide.

Finalmente con la ayuda de la figura correspondiente a la posición de los puntos A y B, respecto del meridiano central del huso, se combinan los ángulos, obteniéndose los acimutes directo e inverso.

El problema directo e inverso, calculado de esta forma, simplifica enormemente el transporte de coordenadas, por lo que se ve la gran importancia que tiene el estudio de la proyección U.T.M.

2.5 SISTEMAS DE REFERENCIA EMPLEADOS EN GEODESIA.

2.5.1 Introducción

Todos los datos observados por los distintos métodos geodésicos deben ser referidos a unos sistemas en los que se llevarán a cabo los cálculos necesarios para correlacionar todas las observaciones entre si.

En geodesia esferoidal se utilizan sistemas se utilizan sistemas de referencia tridimensionales, dentro de estos vamos a ver el sistema cartesiano global y el sistema elipsoidal.

2.5.2 Sistema Elipsoidal

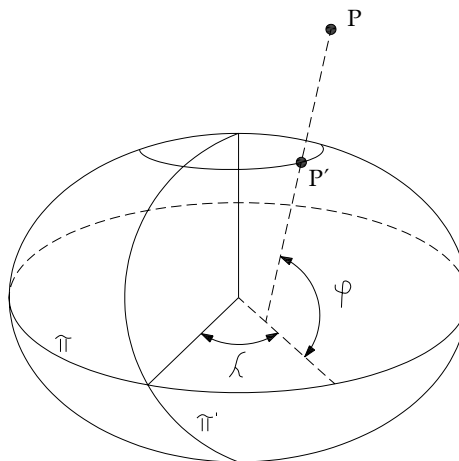


Figura 2.25 Sistema de referencia elipsoidal

Si se toma como aproximación de la figura de la Tierra un elipsoide de dos ejes (de

revolución), la situación de un punto **P** sobre la superficie terrestre (ver figura 2.25) quedará definida por coordenadas φ_p , λ_p y h_p (altitud sobre la superficie del elipsoide).

Sean:

π = Plano del ecuador

π' = Plano que contiene al meridiano de Greenwich.

P' = Punto en que corta al elipsoide la normal a este que pasa por **P**.

φ_p = Angulo que forma la normal al elipsoide con el plano del ecuador.

λ_p = Angulo que forma el meridiano que pasa por P' con el meridiano origen en sentido dextrógiro ($0 \leq \lambda \leq 360^\circ$).

h_p = Módulo del vector PP' , es decir, distancia sobre la distancia sobre la normal al elipsoide.

2.5.3 Sistemas de coordenadas espaciales rectangulares X, Y, Z.

El centro del elipsoide **O** (Fig. 2.26) se toma como origen de coordenadas. El eje **OZ** se sitúa a lo largo del elipsoide POP_1 ; el eje **OX** se encuentra sobre el plano ecuatorial en el meridiano PEP_1 , el que se toma como origen; el eje **OY** esta situado sobre el plano ecuatorial pero en el meridiano PKP_1 ; la superficie del meridiano forma un ángulo de 90° con la superficie del meridiano de origen.

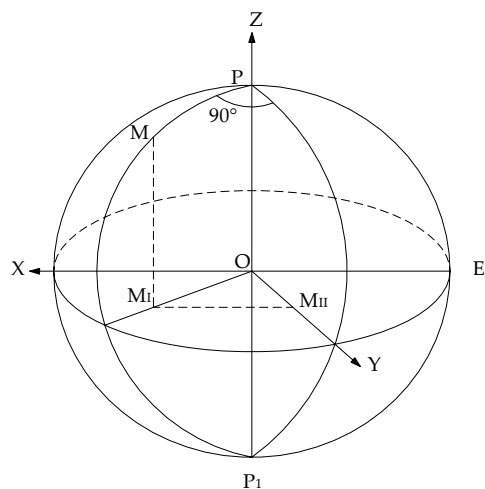


Figura 2.26 Elipsoide, sistema de referencia rectangular.

El centro del elipsoide O (Fig. 2.26) se toma como origen de coordenadas. El eje OZ se sitúa a lo largo del elipsoide POP_1 ; el eje OX se encuentra sobre el plano ecuatorial en el meridiano PEP_1 , el que se toma como origen; el eje OY esta situado sobre el plano ecuatorial pero en el meridiano PKP_1 ; la superficie del meridiano forma un ángulo de 90° con la superficie del meridiano de origen.

De este modo el punto M sobre la superficie del elipsoide se determina mediante las coordenadas:

$$X = OM_I, Y = OM_{II}, Z = OM_{III}$$

2.5.4 Sistemas de coordenadas rectangulares esferoidales p y q .

Los ejes de las coordenadas rectangulares esferoidales se disponen sobre el elipsoide. En dependencia de la ubicación de sus ejes se obtendrá distintos tipos de sistemas de coordenadas. Tomando cualquier punto A (Fig.2.27), cuyas coordenadas geodésicas sean conocidas, como origen del sistema.

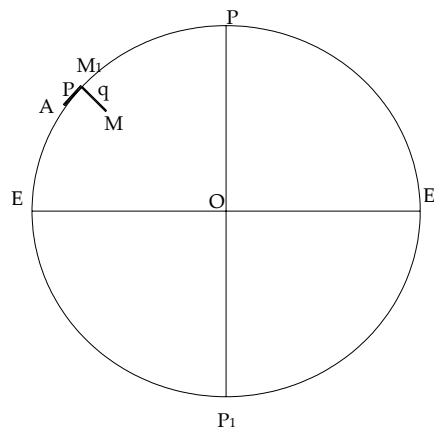


Figura 2.27 Elipse, sistema de coordenadas rectangulares esferoidales p y q

Al meridiano que pasa por el punto A se toma como el primer eje de coordenadas: el de las abscisas. Las abscisas se consideran positivas para los puntos situados al norte del punto A , y negativas para los puntos situados al sur del mismo. Para

determinar la posición del punto M corte normal de tal manera que interseque al meridiano del punto de origen A , formando un ángulo de 90° .

Sea la línea MM_1 , representada en la (Fig.2.28), la curva de esta sección normal (mas exactamente la línea geodésica, o sea la curva de menor distancia a la superficie del elipsoide). Entonces la posición del punto M en el sistema de coordenadas observado permite determinar la longitud de las siguientes curvas sobre la superficie del elipsoide, las cuales a su vez serán las coordenadas rectangulares esféricas del punto M :

$$AM_1 = p$$

$$MM_1 = q$$

2.5.5 Coordenadas rectangulares planas.

En la práctica es indispensable conocer las coordenadas de los puntos de la red geodésica situados en un sistema de coordenadas cartesianas para que pueda utilizarse fácilmente los datos geodésicos al llevar a cabo diferentes tipos de trabajo de proyección.

2.5.6 Sistema de Coordenadas Geodésicas.

En la figura 2.28 PE_1P_1E la elipse de meridiano, que pasa por el punto a partir del cual se miden las longitudes; $PMRP_1$, el meridiano que pasa por el punto dado M . El ángulo agudo φ , se denomina latitud geodésica y esta formado por la normal M a la superficie del elipsoide en el punto dado y por el plano ecuatorial ERE_1 : a la longitud geodésica λ del punto M se la llama ángulo diedro PMP_1E , formado por el plano del meridiano de origen PEP_1 y el plano del meridiano del punto en cuestión.

Las latitudes de los puntos, situados en el hemisferio norte, se llama *latitud norte*; la

de los puntos situados en el hemisferio sur *latitud sur*. Los puntos situados al oriente del meridiano de origen poseen una longitud llamada *oriental*; los puntos situados al occidente del meridiano de origen, poseen una longitud llamada *occidental*.

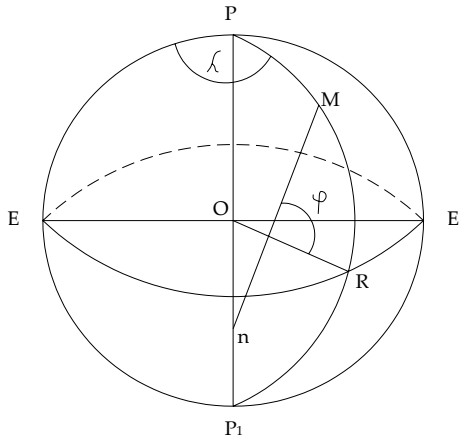


Figura 2.28 Elipsoide, sistema de coordenadas geodésicas.

La latitud φ y la longitud λ , como ya se vio anteriormente, determinan exactamente la posición del punto M sobre la superficie del elipsoide. De esta forma las latitudes y longitudes geodésicas definen las proyecciones de los puntos de la superficie terrestre sobre el elipsoide conforme a la normal de este punto.

Para determinar las coordenadas de los puntos de la superficie terrestre en un sistema de coordenadas es indispensable además saber la *altura geodésica* H que es el segmento de la normal al elipsoide de referencia que va desde el punto terrestre dado M (ver Fig.2.26) hasta el elipsoide de referencia. Dicho de otro modo, reduciendo previamente los resultados de las medidas a la superficie del elipsoide de referencia, se los lleva a una altura nula ($H=0$). Esto simplifica esencialmente la resolución de los problemas geodésicos: del cálculo de las tres coordenadas (φ , λ , H), que determinan la situación del punto en el espacio, pasamos al cálculo de las coordenadas (φ , λ). Esto resulta conveniente para los puntos de la superficie terrestre, en los cuales H siempre es pequeña y, por lo tanto, las reducciones también lo son.

2.5.7 Coordenadas geocéntricas cartesianas.

Se denomina coordenadas cartesianas geocéntrica a las definidas en un sistema en el que el origen O coincide con el centro de la Tierra, el eje Z determinado por el eje de rotación y un plano XY perpendicular a Z coincidente con el plano ecuatorial y con el eje X pasando por un meridiano origen (Greenwich).

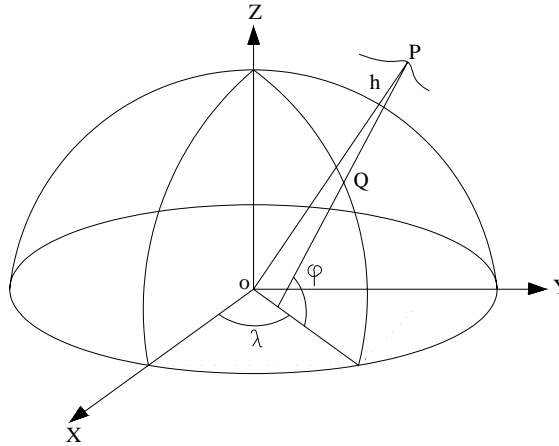


Figura 2.29 Coordenadas geocéntricas.

2.5.8 Paso de coordenadas geodésicas o geocéntricas.

El problema planteado es pasar de coordenadas geodésicas (φ, λ, h) al sistema cartesiano elipsoidal, donde h es la altura del punto, pero medida sobre la normal al elipsoide (proyección Helmert).

El radio vector OQ es:

$$\overline{OQ} = \begin{pmatrix} XQ \\ YQ \\ ZQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \cos \varphi \cos \lambda \\ N \cos \varphi \sin \lambda \\ N(1 - e^2) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

De la misma forma, h tiene la misma dirección del vector OQ , por lo que:

$$\bar{h} = \overline{QP} = \begin{pmatrix} h \cos \varphi \cos \lambda \\ h \cos \varphi \sin \lambda \\ h \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Se tiene que $OP = OQ + QP$, con lo cual finalmente:

$$\overline{OP} = \begin{pmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N+h)\cos\varphi \cdot \cos\lambda \\ (N+h)\cos\varphi \cdot \sin\lambda \\ (N(1-e^2)+h) \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}$$

Hay que tener en cuenta que en sentido estricto, h es altitud elipsoidal y no sobre el geoide, para lo cual sería necesario conocer la ondulación del geoide.

2.5.9 Paso de coordenadas geocéntricas o geodésicas.

En el problema inverso, a partir de coordenadas geométricas (X, Y, Z), obtener coordenadas geográficas, hay que operar iterativamente, de tal forma que:

$$h = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos\varphi} - N$$

$$\varphi = \arctan \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \cdot \left(\frac{N+h}{N \cdot (1-e^2) + h} \right)$$

$$\lambda = \arctg \frac{Y}{X}$$

El proceso iterativo empezaría entrando en la formula primera con $h = 0$, deduciendo N :

- Calculo de φ con $h = 0$
- Cálculo de N
- Cálculo de h
- Calculo nuevo de φ

La convergencia del sistema de ecuaciones es muy rápida, puesto que $N \gg h$. Existe también formulas aproximadas en la que no es necesario la iteración:

$$\varphi = \arctan \frac{Z + e'^2 b \sin^3 \theta}{p - e^2 a \cos^3 \theta}, \quad \lambda = \arctan \frac{Y}{X}, \quad h = \frac{P}{\cos\varphi} - N$$

donde θ es una cantidad auxiliar:

$$\theta = \arctan \frac{Za}{pb}, \quad \text{con} \quad p = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

CAPÍTULO III

GEODÉSIA FÍSICA



3.1 CONOCIMIENTOS GENERALES

3.1.1 Objetivo de la Geodesia Física

La geodesia física es la parte de la geodesia superior que analiza los métodos de estudio de la figura de la Tierra como cuerpo físico y geométrico. En la geodesia física se analizan los métodos de determinación de los parámetros del elipsoide terrestre y los métodos de estudio de la figura real de la tierra.

El estudio de la figura de la Tierra esta basado en la figura del campo gravitacional exterior real de la Tierra, por eso en la geodesia física se le otorga gran importancia a la teoría del potencial de la fuerza de gravedad de la Tierra. Con la geodesia física se relaciona también el problema de la reducción de la geodesia superior, entendida habitualmente como el conjunto de tareas para el calculo de las correcciones a los valores de los ángulos, de las líneas y de otros elementos medidos directamente mediante el traslado a la superficie de relación.

3.2 BREVES CONSIDERACIONES ACERCA DEL DESARROLLO DE LOS CONOCIMIENTOS DE LA TIERRA Y DE LOS MÉTODOS DE ESTUDIO

Se conoce que el primero que llegó a la conclusión sobre la redondez de la Tierra fue el celebre filósofo y matemático griego Pitágoras (siglo VI a. C).

Una nueva época en el estudio de la Tierra comenzó después de que la ley de gravitación universal fuera descubierta por el genial Isaac Newton. Partiendo de la suposición de que nuestro planeta en otros tiempos estuvo en estado líquido incandescente, Newton demostró que la Tierra debe tener una forma de elipsoide achatado en el sentido de sus polos*.

3.2.1 Fuerza de Gravedad

A partir de razonamientos elementales se concluye que en el caso de la figura exterior de la Tierra debe determinarse en función a la magnitud de la *fuerza de gravedad como resultante de las fuerzas de atracción y centrífuga*.

3.2.2 Métodos Generales para la determinación de la figura de la Tierra.

Con la comprobación de la teoría de Newton acerca de la elipsoidalidad de la Tierra comenzó una nueva etapa en el desarrollo de los conocimientos sobre la figura de la Tierra. Esta etapa se caracterizó porque sobre la base de las investigaciones científicas se fundaron dos métodos para el estudio de la figura de la Tierra: el *geométrico* y el *físico*.

Por consiguiente en el método *geométrico* se utiliza la dirección de la fuerza de gravedad, esto basado en la utilización de los resultados de la medición de los

elementos geométricos de la superficie de la Tierra (de las longitudes de lados, de los ángulos y las direcciones).

En el método *físico* se utiliza la intensidad de la fuerza de gravedad, basado en la medición de la aceleración de la fuerza de gravedad sobre la superficie terrestre, se obtuvo la conclusión única, de que la figura de la Tierra por su forma es muy cercana al elipsoide de revolución, pero no coincide con este.

Se llega a otra conclusión, muy importante; que *es imposible determinar la forma de la Tierra teóricamente como planeta*.

Como ya se señaló, si para la determinación del radio de la Tierra considerada como un globo es necesario medir un arco y determinar las coordenadas astronómicas de sus extremos, para la determinación de la figura de la Tierra considerada como un elipsoide es necesario medir dos arcos según el número de parámetros.

Denominando las longitudes de estos arcos por s_1 y s_2 , entonces, se considera que estos han sido trazados por el meridiano, se puede escribir:

$$S_1 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi = a \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)''}{\rho''} \left\{ 1 - \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \right] e^2 - \dots \right\}$$

$$S_2 = \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} M d\varphi = a \frac{(\varphi_4 - \varphi_3)''}{\rho''} \left\{ 1 - \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos(\varphi_3 + \varphi_4) \right] e^2 - \dots \right\}$$

donde $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, son las latitudes astronómicamente medidas de los extremos de los arcos de meridiano.

Se concluyo que la figura de la Tierra puede ser representada solamente por el elipsoide con cierto grado de aproximación y como una figura geoméricamente más

compleja, ella no se expresa mediante ninguna de las superficies estudiadas en matemática.

De aquí se concluye que conociendo la fuerza de gravedad en todos los puntos de la superficie de la Tierra (magnitud y dirección) se puede determinar su figura.

3.2.3 El Problema de la Reducción.

Para dotar de rigurosidad a la formulación de la triangulación el profesor Krasovsky propuso proyectar en la superficie del elipsoide de referencia todos los resultados de las mediciones del terreno. En relación con esto surgió la necesidad de solucionar exactamente el *problema de la reducción*, teniendo en cuenta que la cuestión más compleja no resuelta fue el descubrimiento de las magnitudes que determinaban la reducción debida al paso de las mediciones directas sobre la superficie de la Tierra a sus elementos correspondientes en la superficie del elipsoide de referencia.

3.3 FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DEL POTENCIAL DE LA FUERZA DE GRAVEDAD.

3.3.1 Noción sobre los Métodos de medición de la Fuerza de Gravedad.

Se tiene un punto material cualquiera A sobre la superficie terrestre (fig. 3.1) sobre el cual actúan dos fuerzas:

- La de atracción terrestre AF .
- La centrífuga AQ , dirigida al eje de rotación PO .

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{Q} \quad [3.3.1]$$

La fuerza de atracción de la Tierra sobre un punto material cualquiera A que se encuentra sobre la superficie terrestre se indica por la formula.

$$F = f \frac{mM}{R^2} \quad [3.3.2]$$

La fuerza centrífuga Q se expresa en la formula:

$$Q = \frac{v^2}{\rho} \quad [3.3.3]$$

donde v es la velocidad lineal del punto; ρ es la distancia desde el punto hasta el eje de rotación; m es la masa del punto A .

Asumiendo $m = 1$, se tiene:

$$Q = \rho \omega^2 \quad [3.3.4]$$

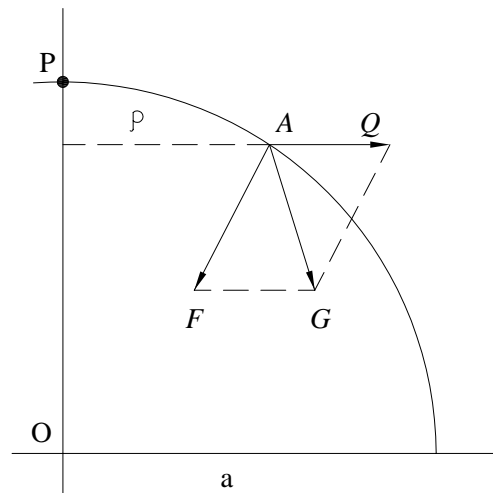


Figura 3.1 Punto A sobre la superficie terrestre.

La velocidad angular de rotación de la Tierra ω se determinara:

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} \quad [3.3.5]$$

donde 86164 es el numero promedio de segundos de los días siderales.

3.4 EL PROBLEMA DE LA REDUCCION.

3.4.1 Conocimientos Generales.

En la geodesia superior, el *problema de reducción* se ha acordado entender el concepto como: el conjunto de problemas debidos al traslado de las magnitudes directamente medidas sobre la superficie de la Tierra a sus correspondientes valores sobre la superficie de referencia: habitualmente a la superficie del elipsoide de referencia adoptado.

En casos particulares puede sugerir también el problema inverso: el traslado de las magnitudes conocidas desde la superficie de referencia a cualquier otra superficie y en particular, a la terrestre.

En esencia, si son conocidos los datos iniciales necesarios, no hay diferencia entre el problema directo y el inverso.

La reducción de las mediciones directas en la superficie del elipsoide, es necesaria para tener la posibilidad de realizar la elaboración matemática conjunta de los resultados de las mediciones, aprovechando las propiedades y dependencias geométricas existentes entre los elementos de la superficie del elipsoide. Este procesamiento matemático incluye: cálculos niveladores con el fin de obtener los valores mas probable de las magnitudes niveladas; resolución de problemas matemáticos de distinto termino para determinar la función de los valores prácticamente necesarios, medidas directamente. Como ejemplo de tales problemas pueden servir: las soluciones de triángulos esféricos y esferoidales; el cálculo de áreas, de las coordenadas geodésicas de punto, etc.

Esta acordado que la superficie a la cual deben reducirse las mediciones directas es conocida, es decir, ha sido determinada de antemano: y que también ha sido determinada la ubicación de esta superficie en el cuerpo de la Tierra.

Matemáticamente no tiene importancia que superficie es, o si se habla de elipsoide, y cuales de sus medidas han sido tomadas en calidad de superficie de referencia; pero en la practica es importante que la superficie de referencia posea la menor desviación con respecto a la figura real de la Tierra y sea en lo posible paralela a la superficie de nivel de esta figura. En tal caso las magnitudes calculadas sobre la superficie de referencia se diferenciaran poco de sus valores sobre la superficie terrestre. Las reducciones serán menores (en su valor numérico) si las desviaciones entre ambas superficies son pequeñas. Esto es muy importante puesto que en presencia de pequeñas reducciones simplifica la deducción de las formulas; se hacen mas fácil la elaboración de los cálculos prácticos; además se puede determinar con menor exactitud los argumentos iniciales para el calculo de las reducciones.

También se puede señalar, que el proceso de reducción de las cantidades medidas directamente sobre la superficie del elipsoide es un método de la simplificación de los cálculos, que permite disminuir el argumento independiente de tres (λ , φ , H) a los dos (λ , φ). Se puede elaborar una teoría para el calculo de las redes geodésicas, expresando la situación de cada punto en función de las tres coordenadas (λ , φ y H) o de las coordenadas rectangulares especiales (X , Y , Z). Entonces desaparecería la necesidad de resolver la mayoría de los problemas de reducción; pero con esto los cálculos de nivelación y la solución de diferentes problemas geodésicos de cómputo se dificultarían sustancialmente. Por esta razón, es más sencillo y cómodo efectuar la reducción de las magnitudes medidas sobre la superficie del elipsoide y realizar la subsiguiente elaboración matemática de los resultados de las mediciones hecha sobre dicha superficie, especialmente cuando, en

relación con el radio de la Tierra, son pequeñas las magnitudes de la altura geodésica H .

A la solución de las tareas de reducción, que en conjunto conforman el problema de la reducción, se le presentan algunas exigencias generales. Estas surgen de las condiciones para la conversión en las magnitudes directas. Por lo tanto, los errores de las reducciones y su influencia deben ser de cinco a diez veces menores que los errores de las mismas mediciones.

Para esto es imposible conocer con suficiente exactitud las magnitudes que caracterizan las desviación de la figura real de la Tierra con respecto a la superficie de referencia tomada, es decir, los argumento para el calculo de las reducciones correspondiente: la altura de los puntos en la superficie terrestre; la inclinación de la línea vertical; las anomalías de la fuerza de gravedad.

Estas cantidades deben determinarse solamente en base a resultados de las mediciones y no partir de cualquier otro dato hipotético. Sin esta condición los problemas de reducción correspondientes no pueden resolverse exactamente. El cumplimiento de dicha condición representa un serio problema. Hasta antes de las investigaciones de Molodiensky no se poseía un método riguroso para la determinación de las magnitudes señaladas. Los métodos que existían antes o bien eran prácticamente irrealizables o bien se basaban en la utilización de datos acerca de la densidad o la estructura de la Tierra, los cuales hasta el presente no son conocidos con la fiabilidad requerida. Y ahora con motivo de la determinación de esta u otras magnitudes se puede concluir sobre la necesidad de elevar la exactitud, pero esto no es consecuencia de una elaboración teórica insuficiente, sino que el resultado de que las mediciones sobre la Tierra no se han concluido o han sido deficientemente realizadas, (por ejemplo, el levantamiento gravimétrico de la Tierra no ha sido concluido, las redes geodésicas de distinto continentes no están

enlazadas, es poca la necesidad de los levantamientos gravimétricos en las regiones montañosas, etc.).

Los fundamentos anteriormente dados de la teoría y las formulas que determinan las magnitudes iniciales, son indispensables para calcular correctamente la reducciones. Por esto se considera que las magnitudes iniciales para la reducción son conocidas con la exactitud requerida.

Durante la obtención de las formulas para el cálculo de la reducción es necesario dotarlas de una exactitud, que debe corresponder de la exactitud de las mediciones directas. Además los errores en los valores de la reducciones, causado por la inexactitud de las formulas deben ser despreciable en comparación con los errores de las mediciones. Para esto es importante considerar también el carácter (sistemático o casual) de la influencia de los errores de las reducciones en los elementos de reducción de la red geodésica.

Si la influencia de las reducciones, es despreciablemente pequeña para la reducción unitaria de una magnitud cualquiera, se introduce una deformación sistemática en la red geodésica en su conjunto, entonces la resolución del cálculo de las reducciones del tipo dado debe ser hecha considerando esta situación. Por ejemplo, la corrección a la dirección por la altura del punto de observación para una dirección alejada por lo común es despreciablemente pequeña pero, para una línea geodésica, en la cual los lados poseen aproximadamente los mismos azimutes, esta reducción tendrá un signo. Por esta razón despreciar estas reducciones será equivalente a la acción de un error sistemático, y la influencia del mismo puede ser notable. Por esto la reducción señalada casi siempre debe tenerse en cuenta de una triangulación de primera clase.

Existen dos métodos para reducir el resultado de las mediciones directa a la superficie del elipsoide de referencia: *método de proyección y método de desarrollo*.

Conforme al *método de proyección* la magnitud medida directamente se reduce matemáticamente con exactitud de la superficie de la Tierra a la superficie del elipsoide. Las reducciones por el traslado de las magnitudes medidas directamente a su proyección se calcula mediante formula que expresa las correcciones señaladas en función de las magnitudes, que determinan la posición mutua de la superficie terrestre y del elipsoide de referencia, es decir, las alturas geodésicas y la desviaciones es las líneas verticales.

Las longitudes de las bases medidas se proyectan a la superficie del elipsoide de referencia mediante las *normales* al elipsoide. En las direcciones medidas se introducen correcciones por las desviaciones de las líneas verticales con respecto a las normales al elipsoide. Al calcular la corrección se toma como altura del punto observador la distancia desde el objeto de colimación hasta la superficie del elipsoide según la normal a este ultimo.

En el método de desarrollo las magnitudes medidas directamente *se reducen a la superficie del geoide*. En estos casos las reducciones se calculan en función de las magnitudes que determinan la posición reciproca de la superficie terrestre y del geoide. Así, por ejemplo, durante la reducción de las longitudes de las bases medidas se introducen correcciones por las alturas medidas desde el nivel del mar, es decir, desde el geoide, además, la reducción se efectúa a lo largo de las normales a este ultimo ósea con la ayuda de las líneas verticales. En los ángulos medidos no se introducen corrección alguna.

Las magnitudes geodésicas reducidas a la superficie del geoide se consideran como si fuesen reducidas a la superficie del elipsoide de referencia: dicho de otra manera, en el método de desarrollo se desprecian las no coincidencias del geoide con el elipsoide de referencia. Las investigaciones muestran que el alejamiento del geoide aun desde el mejor elipsoide de referencia elegido puede alcanzar 150 [m]. De aquí

fácilmente se puede deducir, que no se debe despreciar la no coincidencia del geoide y el elipsoide de referencia.

El método geométrico de desarrollo se puede representar así: como si las magnitudes reducidas a la superficie del geoide se tendieran, se ensancharan, se desplegaran o *desarrollaran* sobre otra superficie: la del elipsoide de donde surgen el nombre del método.

La comparación de ambos métodos de reducción permite hacer las siguientes observaciones generales.

1.- *El método de proyección* es el método de traslación rigurosa de las magnitudes geodésicas medidas a sus proyecciones sobre la superficie del elipsoide de referencia, que conservan la ubicación recíproca de los puntos de la superficie terrestre y hacen posible elaborar rigurosamente una red geodésica de cualquier extensión. Para emplear este método es indispensable establecer previamente las dimensiones del elipsoide de referencia y su orientación en el cuerpo de la Tierra. Además, no se requiere emplear el mejor elipsoide de referencia establecido. En principio el método brinda la posibilidad de una elaboración matemática rigurosa para desviaciones significativas del elipsoide de referencia con respecto al elipsoide mas conveniente, pero a partir de las consideraciones practicas que se señalo al comienzo del presente párrafo, es indispensable que el elipsoide de referencia sea lo suficientemente cercano al elipsoide mas conveniente.

2.- *El método de desarrollo* no es riguroso; su empleo introduce distorsiones (de carácter sistemático) de los elementos de las redes astrónomo-geodésicas durante su elaboración, provocadas por lo aproximado de los resultados de la resolución de los problemas de reducción.

La magnitud de estas distorsiones depende de la dimensión de la red astrónomo-geodésica y los errores del parámetro del elipsoide de referencia adoptados durante los cálculos. Para obtener resultados lo más exactos posibles en la elaboración de los materiales de la red astrónomo-geodésica con el método de desarrollo, es indispensable que el elipsoide de referencia sea el que mejor le convenga al geoide dentro de los límites de la red astrónomo-geodésica. Sin embargo también en este caso las distorsiones se reducen pero no desaparecen, puesto que permanece la influencia de las no coincidencias del geoide con dicho elipsoide. De esta manera, para la elaboración matemática completa y exacta de vastas redes astrónomo-geodésicas el método de desarrollo no resulta conveniente.

Una reducción exacta de las magnitudes medidas a la superficie del geoide, requiere el conocimiento de las densidades de la Tierra por fuera del geoide; estos datos son desconocidos, por esta razón, hablando con rigor, es imposible una reducción exacta del geoide.

Además, los errores surgidos como consecuencia de lo aproximado de la resolución de este problema será incomparablemente menores que las distorsiones condicionadas por la rigurosidad del método de desarrollo.

De lo expuesto se desprende que para la elaboración de las redes astrónomo-geodésicas se debe emplear el método de proyección.

3.4.2 Reducción de una base a la superficie del Elipsoide de Referencia

Sea que la superficie terrestre se ha medido la base entre los puntos *A* y *B* (Fig. 3.2).

El problema es la determinación de su proyección sobre la superficie del elipsoide de referencia mediante las normales a esta última en los puntos extremos de la base.

Si AA_1 y BB_1 son las normales al elipsoide de referencia, entonces se requiere encontrar la longitud de la curva A_1B_1 como un arco de la sección normal de la superficie del elipsoide, que posea azimut A .

Se toma algún segmento pequeño de la base medida dl (Fig. 3.2), de longitud igual a la de un hilo de invar. (de 24 metros) y se plantea el objetivo de encontrar su proyección sobre el elipsoide de referencia.

La reducción que se busca de este segmento esta formada por tres componentes de las reducciones: a) Por el traslado de la proyección del segmento a la superficie de nivel del horizonte del instrumento (corrección por reducción al horizonte).

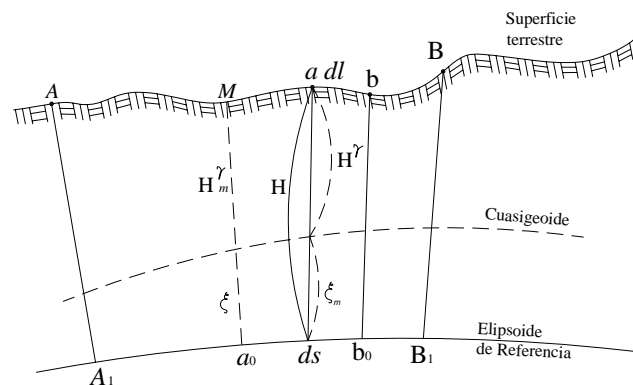


Figura 3.2 Base medida en la superficie terrestre.

- b) Por el no paralelismo de la superficie del nivel del horizonte del instrumento y de la superficie del elipsoide.
- c) Por la altura de la base sobre el elipsoide de referencia.

En la Fig. 3.3, dl es la longitud del segmento ab medido directamente; dl_0 , la proyección del segmento dl en la superficie de nivel que pasa por el punto a , es decir, el horizonte del instrumento; el segmento dl_0 es perpendicular a las direcciones de las líneas verticales mn y m_1n_1 ; ds_0 , la proyección del segmento dl en la curva ab_2 ,

paralela a la sección normal de la superficie del elipsoide en el plano de la base; v , el ángulo de la inclinación del segmento dl con respecto al horizonte del punto a ; θ la inclinación relativa de la línea vertical en el plano vertical de la base; dH , el exceso de un extremo del tramo sobre otro, obtenido a partir de la nivelación de los puntos de la mira.

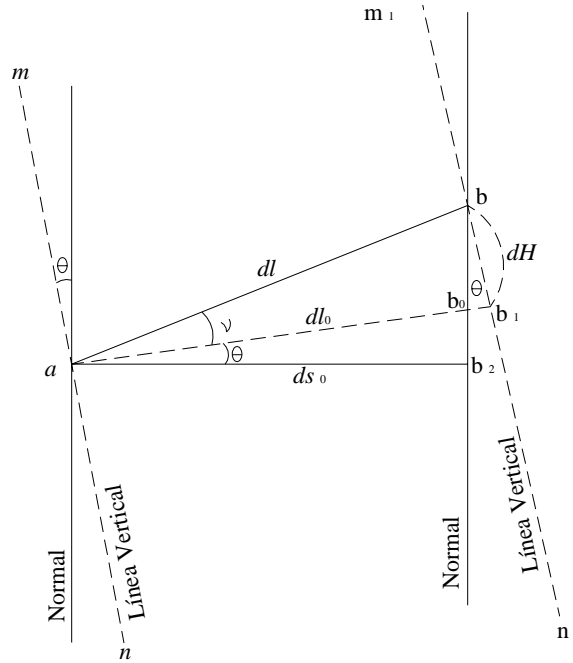


Figura 3.3 Segmento de la base medida.

A partir de la Fig. 3.3 se deduce inmediatamente que

$$dl_0 = dl \cos v \quad [3.4.1]$$

y

$$ds_0 = dl_0 - \theta dH \quad [3.4.2]$$

Para obtener la proyección del segmento dl en la superficie del elipsoide de referencia, es decir, ds , se recurre a la Fig. 3.3, a partir de la cual

$$\frac{ds}{ds_0} = \frac{\rho_A}{\rho_A + H} \quad [3.4.3]$$

donde ρ_A es el radio de curvatura de la sección normal $ao b_o$ calculada por la formula $H = H^\gamma + \xi$. Se compone la proporción derivada

$$\frac{ds_0 - ds}{ds_0} = \frac{H}{\rho_A + H} \quad [3.4.4]$$

Luego,

$$ds^0 - ds = \frac{H}{\rho_A + H} ds^0 = \frac{H}{\rho_A + \left(1 + \frac{H}{\rho_A}\right)} ds_0 = \frac{H}{\rho_A} ds_0 - \frac{H^2}{\rho_A^2} ds_0 \quad [3.4.5]$$

Reemplazando ds_0 en [3.4.5] por su expresión [3.4.2] y desprendiendo las pequeñas magnitudes del tercer elemento, se obtiene:

$$dl_0 - \theta^1 dH - ds = \frac{H}{\rho_A} dl_0 - \frac{H^2}{\rho_A^2} dl^0 \quad [3.4.6]$$

de donde, teniendo en cuenta [3.4.1]

$$ds = dl \cos v - \frac{H}{\rho_A} dl_0 + \frac{H^2}{\rho_A^2} dl_0 - \theta dH_{med}, \quad [3.4.7]$$

$$s = \int ds. \quad [3.4.8]$$

Teniendo en cuenta las exigencias, que se le plantean al perfil de la base, los valores de H se pueden sustituir por el valor medio de la altura de la base H_m . Entonces, [3.4.8] toma la siguiente forma lineal.

$$s = l_0 \frac{H_m}{\rho_A} l_0 + \frac{H_m^2}{\rho_A^2} l_0 - \int_{AB} \theta dH \quad [3.4.9]$$

Para calcular con la exactitud exigida la determinación de H a partir de [3.6.9] se escribe;

$$\frac{\Delta s}{l_0} = \frac{\Delta H}{\rho_A}$$

Para que el error relativo de la reducción de la base a la superficie del elipsoide de referencia sea menor de 1:2 000 000, es necesario que sea menor de 3 metros.

$$\Delta H = \Delta H^\gamma + \Delta \xi$$

CAPÍTULO IV

ASTRONOMIA GEODÉSICA



4.1 TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA. FORMULAS DE BESSEL.

La mayoría de los conceptos fundamentales y problemas relacionados con los diferentes sistemas de coordenadas utilizados en Astronomía de Posición se resuelven a partir de las formulas de Bessel de la trigonometría esférica.

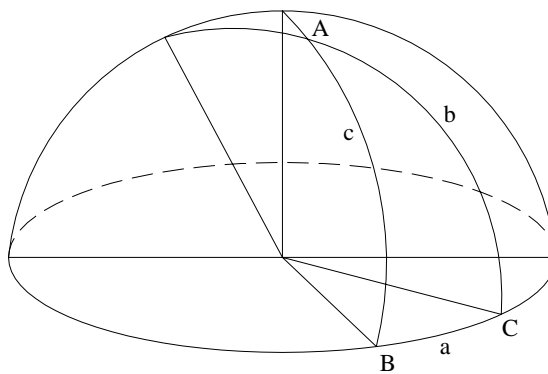


Figura 4.1 Trigonometría esférica

Se denomina triángulo esférico simple a la superficie sobre la esfera que esta limitada por tres círculo máximos (Fig. 4.1).

Sean tres puntos A, B y C situados sobre la esfera de radio la unidad y a, b, c los lados determinados por este triángulo (a determinado por el diedro AB y AC, b por BA y BC, c por CA y CB).

De la figura 4.1, mediante relación de senos se deducen las tres formulas de Bessel.

1^a. Relacion de senos

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } B} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } C}$$

con lo que:

$$\text{sen } a \cdot \text{sen } B = \text{sen } A \cdot \text{sen } b$$

$$\text{sen } a \cdot \text{sen } C = \text{sen } c \cdot \text{sen } A$$

$$\text{sen } c \cdot \text{sen } B = \text{sen } b \cdot \text{sen } C$$

2^a. Relacion del coseno

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \text{sen } b \cdot \text{sen } c \cdot \cos A$$

Análogamente,

$$\cos b = \cos c \cdot \cos a + \text{sen } c \cdot \text{sen } a \cdot \cos B$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b \cdot \cos C$$

3^a. Relacion del seno por el coseno

$$\text{sen } a \cdot \cos B = \cos b \cdot \text{sen } c - \text{sen } b \cdot \cos c \cdot \cos A$$

De la misma forma se pueden sustituir en esta formula los lados y ángulos como en las anteriores.

Caso de triangulo rectángulo en A.

Considerando el denominado “pentágono de Neper”, las formulas son fácilmente recordables, ya que situados los lados y ángulos como indica la figura:

Coseno de un vértice = producto de los senos de los vértices opuesto = producto de las cotangentes de los vértices contiguos

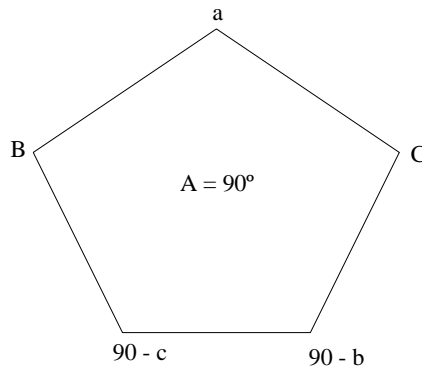


Figura 4.2 Pentágono de Neper con triángulo rectángulo.

De forma que se pueden deducir las siguientes relaciones:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c$$

$$\tan b = \tan a \cdot \cos C$$

$$\cos a = \cotg B \cdot \cotg C$$

$$\sen b = \sen a \cdot \sen B$$

$$\tan c = \tan a \cdot \cos B$$

$$\cos B = \cos b \cdot \sen C$$

$$\sen c = \sen a \cdot \sen C$$

$$\tan b = \sen c \cdot \tan B$$

$$\cos C = \cos c \cdot \sen B$$

$$\tan c = \sen b \cdot \tan C$$

Caso de triángulo rectilátero en a.

En este caso el pentágono de Neper se construye tal y como indica la siguiente figura:

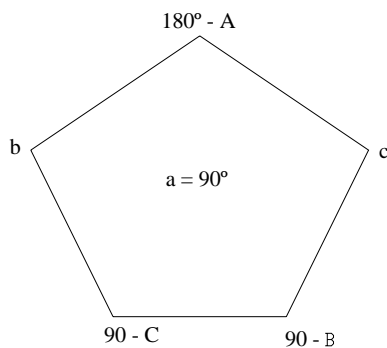


Figura 4.3 Pentágono de Neper con triángulo rectilátero.

De donde se pueden deducir las siguientes relaciones:

$$\cos A = -\cotg b \cdot \cotg c$$

$$\tan B = -\tg A \cdot \cos c$$

$$\cos b = \cos B \cdot \sen c$$

$$\tan C = -\tan A \cdot \cos b$$

$$\cos c = \sen b \cdot \cos C$$

$$\tan B = \sen C \cdot \tan b$$

$$\sen B = \sen A \cdot \sen b$$

$$\tan C = \sen B \cdot \tan c$$

$$\sen C = \sen A \cdot \sen c$$

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C$$

4.2 LA ESFERA CELESTE Y SUS DEFINICIONES.

Todos los cálculos y Sistemas de Coordenadas en Astronomía de Posición han de sustentarse sobre la esfera celeste, entendiendo como tal a una esfera con centro situado en el observador, de radio cualquiera y sobre cuya superficie se proyectan todos los astros. Si se corta el conjunto de semirrectas que van desde el observador, situado en el centro, por la esfera celeste, cada astro vendrá representado en dicha esfera por un punto E, que va a representar la posición del mismo en uno determinados sistemas de coordenadas. Para estudiar estas posiciones se prescinde totalmente de la distancia entre la Tierra y el astro, ya que los sistemas coordenadas astronómicos únicamente fijan una posición a partir de ángulos, al igual que una posición en la Tierra queda definido por dos ángulos: longitud y latitud.

También es necesario hacer constar que la Tierra, aunque tiene dos movimientos regulares de rotación y traslación, se considera fija en los sistemas de coordenadas, en tanto en cuanto son los astros los que se mueven con el tiempo por la esfera celeste. En Astronomía de Posición, los sistemas son topocéntricos e invariables y son los astros los que tienen un movimiento aparente por la esfera celeste.

Si se prolonga el eje del mundo hasta cortar la esfera celeste, se obtendrá los **polos celestes**, Norte y Sur respectivamente. El plano perpendicular a este eje se denomina **ecuador celeste**, dividiendo a la esfera celeste en dos hemisferios celestes (Norte o boreal y Sur o austral). Los planos paralelos al del Ecuador determinan en la esfera círculos máximos que contienen al eje **PP'** se denominan **meridiano celeste**.

Si un observador se sitúa esta vez sobre la superficie terrestre, la **vertical de un lugar** es la dirección de la gravedad en dicho lugar y corta a la esfera celeste en dos puntos llamados **cenit (Z)** y **nadir (N)**, estando el cenit situado por encima del observador y el nadir por debajo. Esta dirección esta determinada claramente por la línea de la plomada en el lugar considerado de la superficie terrestre.

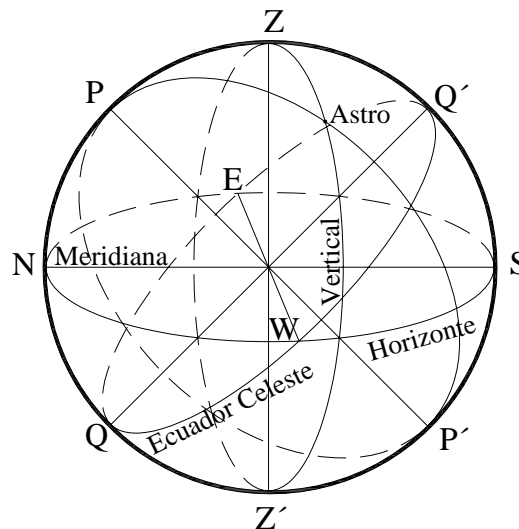


Figura 4.4 Elementos de la esfera celeste.

El horizonte de un lugar será el plano perpendicular a la vertical donde este situado el observador. Divide a la esfera celeste en dos hemisferios: superior, que contendrá todos los astros visibles de la esfera celeste, con altura positiva sobre el horizonte del lugar y del inferior, que contiene los astros no visibles desde ese determinado lugar, por debajo de la línea del horizonte. De la misma manera, en este sistema local, se pueden definir los **verticales de un lugar** como los planos que contienen la vertical

del lugar (círculo máximo intersección de dichos planos con la esfera celeste) y los **almicantarats** como los círculos menores resultantes de la intersección de la esfera celeste con planos paralelos al horizonte del lugar. Igualmente se define el **meridiano** como un círculo máximo que pasa por el eje del mundo **PP'** (como se muestra en la figura 4.4), en este segundo sistema local, que depende de la posición del observador, a cada lugar corresponderá un meridiano, determinado por eje del mundo y la línea **ZZ'** del lugar.

Este meridiano del lugar es fijo (ya que también lo son el eje del mundo y la vertical del lugar) y corta al plano del horizonte en una línea fundamental en Geodesia y Topografía, es la que marca la dirección del **norte verdadero**. Esta línea es la **meridiana** o línea **norte-sur**. La perpendicular a la línea meridiana, es la este-oeste, determinando así los puntos cardinales en cada lugar. Todos estos puntos están situados en el horizonte del lugar, en el N y en el S, siempre en la intersección del plano del horizonte con el meridiano del lugar.

La Tierra, en su movimiento de traslación alrededor del Sol, se mueve en el plano denominado plano de la eclíptica. Su intersección con la esfera celeste da lugar al círculo máximo denominado **Eclíptica**, como se muestra en la figura 4.5. La intersección de este plano con el del ecuador da lugar a dos puntos: **Aries** (γ) y **Libra** (Ω). El ángulo que forma el plano del ecuador con el plano Eclíptica se denomina **oblicuidad de la eclíptica** y es prácticamente fijo ($23^\circ 26'$), variando unos $48''$ por siglo. La línea perpendicular al plano de la eclíptica es el eje de la eclíptica $\pi\pi'$.

Los puntos Aries y Libra determinan los **equinoccios** terrestre, ya que cuando el Sol se encuentra en el punto Aries (~ 21 marzo), pasa del hemisferio Sur al Norte, comenzando en este la primavera y cuando se encuentra en el punto libra (~ 21

septiembre), da lugar al comienzo del otoño y el Sol pasa por el hemisferio Norte al Sur. En los puntos intermedios (**solsticios**), el Sol se encuentra en las alturas mínima y máxima respecto del ecuador. En el solsticio de verano, en el Norte (~ 21 junio) el Sol en el hemisferio norte se encuentra en su punto mas alto y en el de invierno (~ 21 diciembre), el Sol se encuentra en el punto mas bajo de todo el año al mediodía. Todos estos puntos determinan la duración del día y de la noche en ambos hemisferios (según la latitud del lugar).

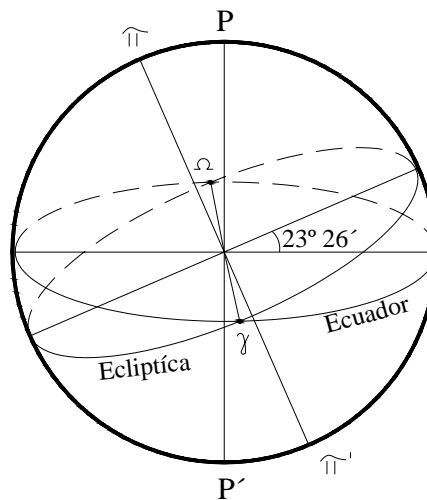


Figura 4.5 Elementos de la esfera celeste.

En función de los planos fundamentales que se adopten para la definición de coordenadas astronómicas se obtienen uno u otro tipo de coordenadas: Horizontales, Ecuatoriales y Eclíptica (planos del horizonte del lugar, Ecuador o Eclíptica respectivamente).

4.3 LOS SISTEMAS DE COORDENADAS EN ASTRONOMÍA.

La posición que un astro tiene en la esfera celeste va a quedar determinada por sus coordenadas, utilizándose diferentes sistemas según sea el plano de referencia adoptado. La utilidad de los diversos sistemas depende de varios factores, entre

ellos del instrumento utilizado en la observación (casi siempre coordenadas horizontales), de los datos del Anuario Astronómico que se utilice (ecuatorial o eclíptico) o según el objetivo final del análisis a efectuar. Por eso es necesario conocer las relaciones matemáticas entre estos sistemas y su utilización.

En todos los sistemas la constante es la materialización de las coordenadas de un punto por dos ángulos, al igual que la longitud y latitud en las Coordenadas Geográficas terrestres. La primera coordenada (longitud) define un ángulo medido sobre el plano de referencia (en este caso el Ecuador terrestre) a partir de un punto origen (Greenwich) y en sentido determinado (directo). La segunda componente o coordenada (latitud) define el ángulo medido desde ese plano de referencia hasta el punto considerado medido sobre el plano que contiene el centro del sistema y el punto (meridiano). Con esta analogía se pueden definir todos los Sistemas de Coordenadas en Astronomía.

4.3.1 Coordenadas Horizontales.

En este sistema de coordenadas el plano fundamental de referencia elegido es el horizonte del lugar (en la Tierra, plano tangente al lugar de observación o lo que es lo mismo, el plano perpendicular a la vertical en el punto considerado). La vertical del lugar prolongada corta la esfera celeste en dos puntos cenit (Z) y nadir (N).

En este sistema un astro de posición o posición en la esfera celeste queda determinado por dos coordenadas, acimut (A) y altura (h) como lo muestra la figura 4.6. El acimut A de un astro es el arco del plano del horizonte desde el punto Sur hasta el vertical del astro. El punto origen es el Sur (no el norte, como el acimut topográfico) y el sentido de avance es el retrógrado. El vertical de un lugar es el plano que conteniendo al cenit y al nadir pasa por el punto considerado.

La altura h del astro es el arco del vertical ZEN, contado desde el horizonte hacia el cenit (en el caso del astro sobre el horizonte) y hacia el nadir (para estrellas en el hemisferio sur).

En definitiva, h es la altura sobre el horizonte de un astro. Se comprenderá entonces que la coordenadas horizontales de un astro son particulares en un momento dado y en un lugar dado, ya que en ese mismo instante las coordenadas de ese mismo instante las coordenadas del mismo astro en otro punto de la tierra serán diferentes. Así mismo dependerán del instante de observación, ya que el astro, en su movimiento aparente por la esfera celeste, cambiara la posición con el tiempo. Con un teodolito estacionado en un punto, si se conoce la orientación de una determinada referencia o la dirección N-S, se puede medir directamente A , mientras que h será el ángulo el plano vertical sobre el horizonte, medido también con el instrumento.

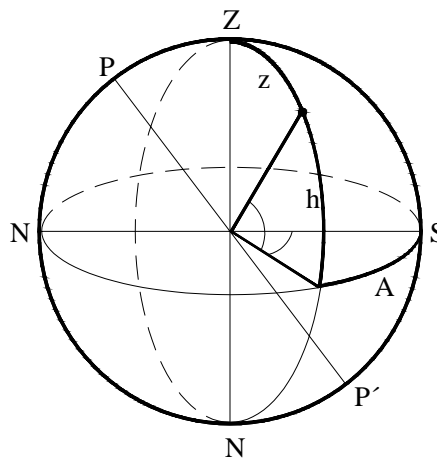


Figura 4.6 Coordenadas horizontales

El complemento a 90° de la altura se denomina distancia cenital z ($z = 90^\circ - h$), siendo útil porque los instrumentos cuyo origen de ángulos verticales esta en el cenit, proporcionan directamente esta medida.

El acimut siempre variara entre 0° y 360° , mientras que la altura estará entre -90° y 90° . Cuando un astro atraviesa el meridiano del lugar, su acimut será 0° (si esta en el Sur) o 180° (si esta en el norte). Cuando se encuentre sobre el primer vertical, su acimut será 90° o 270° .

4.3.2 Coordenadas ecuatoriales horarias.

En este segundo sistema de coordenadas se toma como plano fundamental el Ecuador, tomando en este como punto de referencia Q' la intersección del meridiano superior con el Ecuador, esto se ilustra en la figura 4.7 mostrada a continuación. Las coordenadas de un astro quedan materializadas por las coordenadas **ángulo horario** H y **declinación** δ . El ángulo horario es el arco medido sobre el ecuador en sentido retrógrado desde el punto Q' hasta el meridiano que pasa por la estrella. Estará siempre entre 0° y 360° o de 0 a 24 horas. La declinación será el arco de meridiano desde el Ecuador hasta el astro y estará entre 0° y 90° en el hemisferio norte y entre 0° y -90° en el sur.

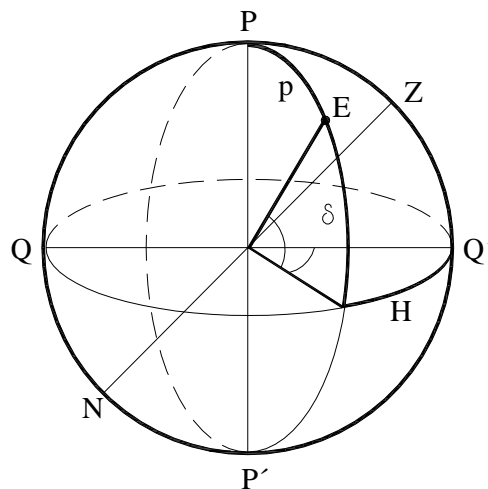


Figura 4.7 Coordenadas ecuatoriales horarias.

El complemento a 90° de la declinación se denomina distancia polar p ($p = 90^\circ - \delta$).

En cuanto al ángulo horario, a pesar de no ser fijo con el tiempo, conocido este en incierto instante, bastara sumar el tiempo transcurrido para saber H en otro determinado momento:

$$H_2 = H_1 + \Delta H$$

En cuanto a la variación de H con el lugar de observación, se puede inferir que para un mismo instante, H en otro lugar será la diferencia de longitudes geográficas de ambos lugares.

4.3.3 Coordenadas ecuatoriales absolutas.

El plano de referencia sigue siendo el Ecuador. Sin embargo, dentro de el, el punto fundamental ya no va a ser Q' (variable con espacio y tiempo), sino que será un punto fijo, que en el punto Aries (punto vernal o equinoccio de primavera). Este punto es por el que pasa el Sol cuando atraviesa el Ecuador (~ 21 marzo), siendo su declinación $\delta = 0$.

La posición de un astro en este sistema quedara determinada por la **ascensión recta** (α), y la **declinación** (δ), siendo esta la ultima posición la misma que en el sistema anterior, que mostramos en la figura 4.8. La ascensión recta es el arco sobre el Ecuador desde el punto γ hasta el meridiano de la estrella, en sentido directo o contrario a las agujas del reloj. De la misma forma se puede medir en unidades angulares o bien en horas, minutos y segundos. Así se tiene ya definido un sistema que no varia ni con el lugar de observación ni con el tiempo.

Anteriormente se ha definido Q' como la intersección del Ecuador con el meridiano del lugar y este punto es móvil con el tiempo. Se define el arco $\gamma Q'$ como **hora sidérea** (Θ), es decir, el ángulo horario H del punto Aries. Este concepto es fundamental en Astronomía, de tal forma que un día sidéreo empieza cuando el

meridiano de un punto pasa por el punto Aries, debido al movimiento de rotación de la Tierra.

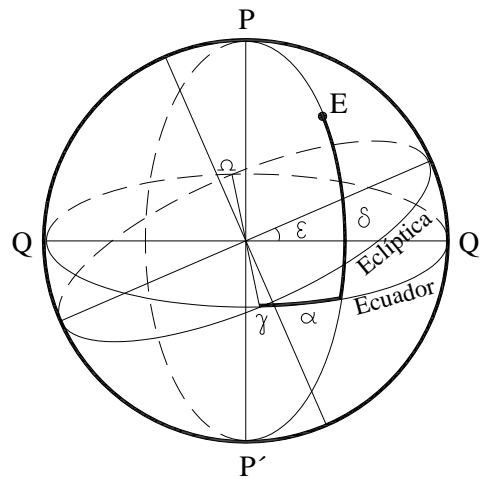


Figura 4.8 Coordenadas ecuatoriales absolutas.

Fácilmente se deduce que se pueden relacionar ambos sistemas, ya que:

$$\mathcal{G} = \alpha + H$$

y por tanto, $\alpha = \mathcal{G} - H$.

Es decir, para pasar de coordenadas ecuatoriales horarias o absolutas, basta con conocer las horas sidérea en el momento de la observación, o lo que es lo mismo, la relación entre hora sidérea y hora civil. En el Anuario del Observatorio Astronómico lo que se da es la hora sidérea de cada día a las 0^h de tiempo universal (T.U).

4.4 TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS.

Para la transformación de los diferentes sistemas de coordenadas basta con establecer relaciones y aplicar la formulas fundamentales de la trigonometría esférica al triángulo formado por los puntos P (polo norte), Z (cenit del lugar) y E (astro o estrella).

Los pasos lógicos serían la observación astronómica de una estrella en coordenadas horizontales, mientras que los datos tabulados del Anuario Astronómico son las coordenadas ecuatoriales absolutas (invariable con el tiempo y el lugar de observación para una estrella determinada).

4.4.1 Transformación de coordenadas horizontales en ecuatoriales horarias.

Considerando el triángulo esférico **PZE** (Polo-Zenit-Estrella), figura 4.9:

Aplicando las tres formulas de Bessel con la denominación de lados y ángulos expuesta en la figura:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

$$\sin a \cdot \sin B = \sin b \cdot \sin A$$

$$\sin a \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A$$

y sustituyendo ($\cos [180^\circ - A] = -\cos A$):

$$\sin \delta = \sin \varphi \cdot \sin h - \cos \varphi \cdot \cos h \cdot \cos A \Rightarrow \text{se obtiene } \delta$$

$$\cos \delta \cdot \sin H = \cos h \cdot \sin A$$

$$\cos \delta \cdot \cos H = \sin h \cdot \cos \varphi + \cos h \cdot \sin \varphi \cdot \cos A$$

dividiendo la segunda ecuación por la tercera quedara:

$$\tan H = \frac{\cos h \cdot \sin A}{\sin h \cdot \cos \varphi + \cos h \cdot \sin \varphi \cdot \cos A} \quad [4.4.1]$$

con lo que se obtiene H y δ en función de A, h y φ .

Para conocer según el signo de H si esta en los intervalos 0° - 180° o 180° - 360° :

$$0^\circ < A < 180^\circ \longrightarrow 0^\circ < H < 180^\circ$$

$$180^\circ < A < 360^\circ \longrightarrow 180^\circ < H < 360^\circ$$

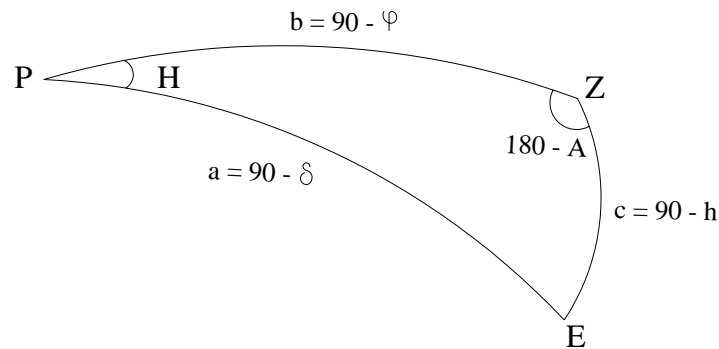


Figura 4.9 Coordenadas ecuatoriales absolutas.

4.4.2 Transformación de coordenadas ecuatoriales horaria en horizontales.

Consiste en obtener (A, h) a partir de (H, δ, φ) .

Considerando el mismo triángulo esférico PZE de la figura 4.10, pero con diferente denominación en cuanto a los lados y ángulos según la figura:

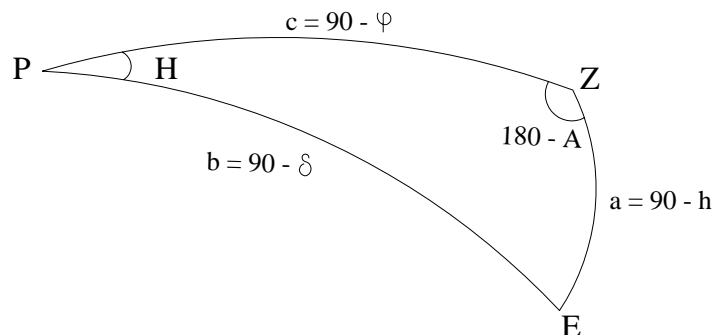


Figura 4.10 Triángulo de posición.

Sen h = sen φ · sen δ + cos φ · cos δ · cos H → se obtiene h

cos h · sen A = cos δ · sen H

cos h · cos A = - cos φ · sen δ + sen φ · cos δ · cos H

Dividiendo la segunda ecuación por la tercera se obtiene:

$$\tan A = \frac{\cos \delta \cdot \sin H}{\sin \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos H - \cos \varphi \cdot \sin \delta}$$

4.4.3 Transformación de coordenadas ecuatoriales horarias en coordenadas ecuatoriales absolutas y viceversa.

A partir de de conocimiento de la hora sidérea:

$$\theta = \alpha + H$$

que es la relación fundamental en Astronomía de Posición. Para ello será necesario el conocimiento de las relaciones entre hora civil y hora sidérea, a partir del conocimiento de la longitud geográfica del lugar de observación.

4.5 POSICIONES PARTICULARES DE LA ESTRELLA.

4.5.1 Máxima digresión.

Se denomina así a las posiciones de una estrella en las que el vertical de la misma es tangente al paralelo que describe (Fig. 4.11). La condición para que una estrella tangente máxima digresión es que $\delta > \varphi$.

En estas condiciones, el ángulo en E del triangulo PZE de la figura 4.12 es rectángulo, con:

$$a = PZ = 90^\circ - \varphi$$

$$b = ZE = 90^\circ - h$$

$$c = PE = 90^\circ - \delta$$

$$B = H$$

$$C = 180^\circ - A$$

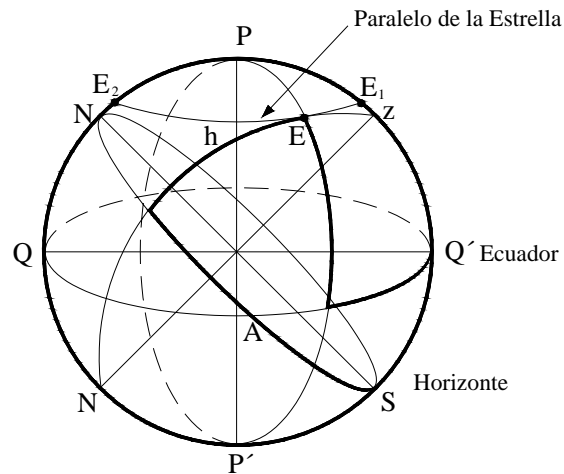


Figura 4.11 Máxima digresión.

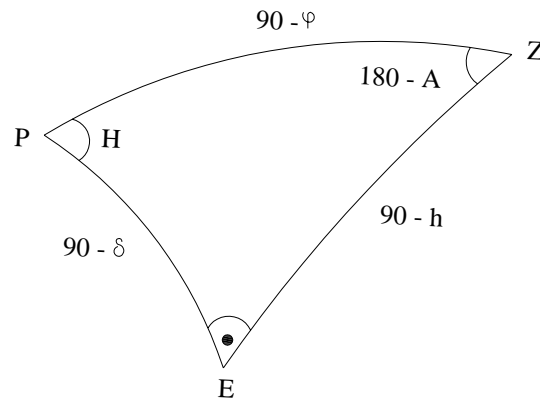


Figura 4.12 triángulo de posición en máxima digresión.

Estableciendo el pentágono de Neper correspondiente, figura 4.13:

Por lo cual, se obtiene fácilmente que:

$$\cos \delta = \sin A \cdot \cos \varphi$$

$$\cos H = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cotan \delta$$

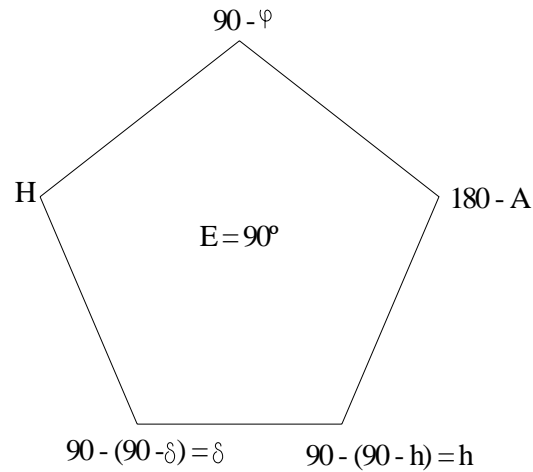


Figura 4.13 Pentágono de Neper en máxima digresión.

4.5.2.- Primer vertical.

El primer vertical es el plano que pasando por la recta ZN (cenit-nadir) es perpendicular al meridiano del lugar, figura 4.14. Para que una estrella atraviese el primer vertical, la condición que ha de darse es que $\delta < \varphi$, de tal forma que habrá dos pasos por el primer vertical, uno al este y el otro al oeste. Cuando la estrella está en una de esa dos posiciones, el acimut es 90° o 270° (este y oeste respectivamente), con lo cual el ángulo en Z es rectángulo.

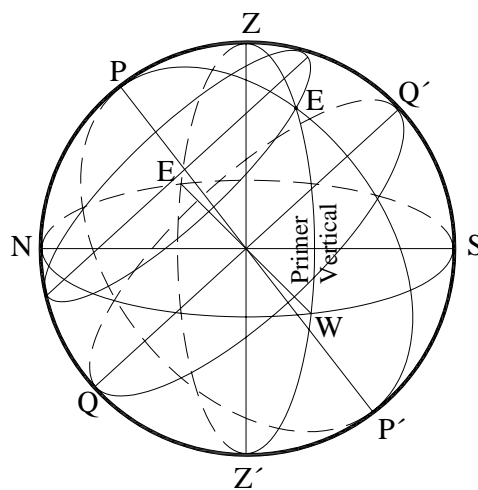


Figura 4.14 Primer vertical.

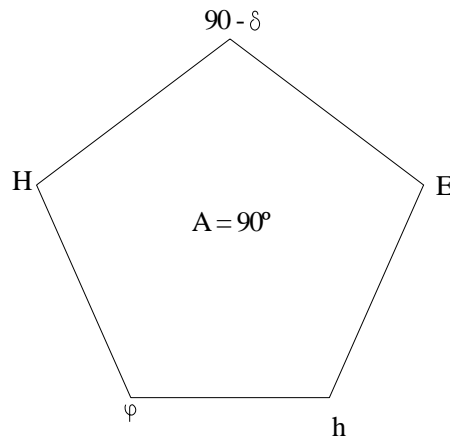


Figura 4.15 Pentágono en primer vertical.

De la misma forma que en el caso anterior, las formulas se simplifican y aplicando las formulas para el caso de triangulo rectángulo se pueden deducir las siguientes relaciones:

$$\text{Cos } \varphi = \text{cotan } H \cdot \text{cotan } h$$

$$\text{Sen } \delta = \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } h$$

$$\text{Cos } H = \text{tg } \delta \cdot \text{cotan } \varphi$$

En los pasos de la estrella por el primer vertical habrá dos posiciones correspondientes para el Angulo horario H , de tal forma que $H_2 = 360^\circ - H_1$.

4.5.3.- Orto y ocaso.

Se da cuando $h = 0$, llamándose orto cuando el astro aparece por el horizonte y ocaso cuando se oculta, figura 4.16. La condición para que un astro tenga orto y ocaso es que $\delta < 90^\circ - \varphi$ (para $\varphi > 0$).

En esas posiciones, el triangulo de posición PZE tiene un lado rectilatero, concretamente ZE, ya que $ZE = 90^\circ - h$, siendo $h = 0$.

Analizando el pentágono de Neper o bien aplicando directamente la primera formula de Bessel siendo:

$$a = ZE = 90^\circ - h$$

$$b = PE = 90^\circ - \delta$$

$$c = PZ = 90^\circ - \varphi$$

$$A = H$$

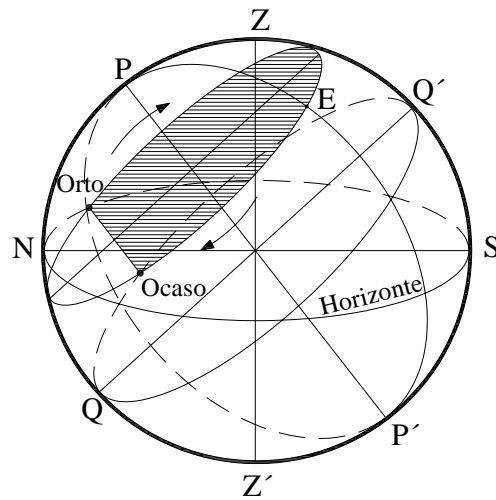


Figura 4.16 Orto y Ocaso.

se obtiene que:

$$\cos H = -\tan \delta \cdot \tan \varphi$$

Con el mismo triángulo anterior, aplicando:

$$\cos b = \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos B$$

Se obtiene la expresión para el acimut A.

$$\cos A = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi}$$

Las posiciones de orto y ocaso también son correspondientes, ya que:

$$A_1 + A_2 = 360^\circ$$

$$H_1 + H_2 = 360^\circ$$

Las posiciones de A y H entre 0° y 180° corresponde al ocaso, mientras que valores entre 180° y 360° corresponde al orto

4.5.4 Paso por el meridiano o culminación.

En el paso por el meridiano del lugar de un astro se puede dar cuatro casos posibles según la declinación del mismo y culmine al norte o al sur. Según la figura 4.17, los cuatro casos posibles son E_1 a E_4 .

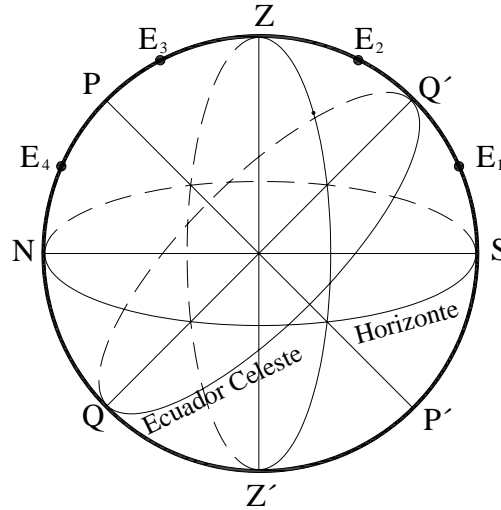


Figura 4.17 Pasos por el meridiano.

Considerando $\varphi = PN = ZQ'$, se tiene en las diferentes posiciones E_1 a E_4 :

$$PE_1 = PZ + ZE_1 \Rightarrow \varphi = 90^\circ - h + \delta$$

$$PE_2 = PZ + ZE_2 \Rightarrow \varphi = 90^\circ - h + \delta$$

$$PZ = PE_3 + ZE_3 \Rightarrow \varphi = \delta + h - 90^\circ$$

$$ZE_4 = PE_4 + PZ \Rightarrow \varphi = h - \delta + 90^\circ$$

CAPÍTULO V

FUNDAMENTOS DE LA GEODESIA ESPACIAL



5.1 INTRODUCCIÓN A LA GEODESIA ESPACIAL

La geodesia espacial se basa en la observación o recepción de señales, formadas por radiaciones del espectro electromagnético, procedentes de objetos que no estén físicamente ligados al suelo terrestre. Aun correspondiendo a la definición, no será considerada como la Astronomía tradicional con observación óptica de direcciones a estrellas galácticas.

La Geodesia Espacial, utiliza fundamentalmente los satélites artificiales, sus principales protagonistas. No obstante también han de incluirse en esta ciencia las técnicas de observación a globos en la atmósfera, a nuestro satélite artificial.

Hacia la mitad del siglo XX los geodestas se veían circunscritos a las masas continentales o insulares con la obvia limitación de la visibilidad directa entre puntos de una misma red. Raramente podían superarse en los más largos enlaces los 200 [Km], y eso usando vértices muy altos y visuales sin obstáculos; generalmente sobre el mar, difícilmente sobre la Tierra.

La observación angular a estrellas, cuyo origen se pierde en la noche de los tiempos,

había permitido posicionamientos absolutos desde que se empezó a disponer de una base de tiempos, sin la que no era obtenible la longitud (o la diferencia de longitudes entre dos estaciones), habiendo sido fácil la latitud, pero la evolución de la técnica permitió un aumento de la precisión en la Geodesia mayor que en la Astronomía.

Con relojes que garantizaran la centésima de segundo de tiempo y precisiones de décima de segundo sexagesimal de arco, la imprecisión era de algunos metros, sin contar con la errónea posición astronómica hecha en zona con desviaciones significativas de la vertical.

Las redes geodésicas observadas eran bastante más precisas, pero no era posible enlazar con igual precisión redes no intervisibles.

5.2 PRIMEROS SATÉLITES

En un simposium científico celebrado en Toronto a finales de septiembre de 1957, se presentó una comunicación sobre posibles aplicaciones geodésicas de hipotéticos satélites artificiales.

Luego de la reunión en Toronto, concretamente el 4 de octubre 1957, la URSS puso en órbita el primer satélite artificial de la Tierra: el Sputnik I.

El Sputnik I pesaba 83 [kg], emitió señales de radio durante tres semanas. Su órbita era bastante excéntrica, con altitudes entre 216 y 1136 [km]; tenía un período orbital de 96 minutos.

Y la historia de la Geodesia espacial comenzó, porque pronto pudieron observar que,

analizando el corrimiento Doppler de las señales radiodifundidas desde el Sputnik I y recibidas en estaciones de posición conocida, era posible establecer la órbita del satélite; una vez establecida, podía volverse la oración por pasiva y obtener la situación de un receptor en distinta localización, después de la recepción y análisis de las señales recibidas durante diferentes y suficientes pasos del satélite.

Este procedimiento, aplicado a emisiones no especialmente idóneas para los fines descritos, no ofrecía una elevada precisión, pero ponía de manifiesto la viabilidad de la aplicación. Posteriormente, esta técnica, ha sido una de las empleadas en muchos sistemas, especialmente con los satélites de la constelación TRANSIT.

5.3 GENERALIDADES SOBRE SATÉLITES

Antes de empezar con la descripción de los sistemas que han sido, o son operativos, es conveniente hacer unas puntualizaciones sobre los tipos de satélites, el planteamiento por satélites, y por ciertos aspectos de la propagación de las emisiones radioeléctricas.

A todos los sistemas de satélites, tras su etapa experimental, se les han ido buscando y encontrando aplicaciones, incluso diferentes de las originales, como posicionamiento, vigilancia, comunicaciones, meteorología, geodesia, astronomía, geofísica, teledetección, etc.

Esto también con los sistemas militares, que cuando son *desclasificados*, o sea, se divulga oficialmente información total o parcial sobre sus aspectos técnicos, la comunidad científica empieza a intentar usarlos.

Dentro de las Ciencias Geográficas se buscan aplicaciones, además de ser utilizada

en la Geodesia o Topografía posicional, a otros campos como: determinación de parámetros orbitales, movimiento polar (cambio de latitud), irregularidades de rotación de la Tierra (cambio de duración del tiempo), movimientos de la corteza (derivadas continentales, tectónicas de placas, control geodinámico), estudio del campo gravitatorio (mareas de todo tipo, anomalías gravimétricas, determinación de parámetros neopotenciales), etc, también a otras muy diversas que caen totalmente fuera de nuestras disciplinas.

5.3.1 Tipos de Satélites

Los satélites pueden dividirse en dos clases: pasivos y activos. Los pasivos carecen de cualquier mecanismo y de emisiones propias; solo pueden devolver la energía que en ellos incida, bien por simple reflexión o con prismas retrorreflectores. Los activos pueden tener luces pulsantes de alta intensidad, repetidores de microondas, transmisores radioeléctricos con modulaciones diversas, radioaltímetros, sensores remotos, etc.

También poseen el adecuado sistema de producción de energía, normalmente con placas fotovoltaicas o paneles solares; suelen tener baterías para almacenar la energía eléctrica y poder ser operativos cuando de la Tierra eclipse la radiación solar. Pueden disponer también de elementos para su control y maniobra (combustible, motores cohete, etc).

En textos técnicos escritos en ingles un satélite se denomina por la sigla *SV* (*Spacial Vehicle*).

5.3.2 Posicionamiento

Se debe advertir que el uso del verbo *posicionar* constituye un barbarismo, dado que

no está aún admitido en el léxico español, debiéndose emplear su sinónimo admitido *situar*. No obstante se lo utilizara en virtud de una pretendida licencia científica, dado su recurrente utilización en textos técnicos.

El problema del posicionamiento por satélites es siempre el mismo: se requiere obtener las condiciones respecto al origen, o vector *posición*. Para ello se debe conocer la situación del satélite respecto al origen, o vector *satélite*, y se obtiene, a partir de nuestras observaciones, el vector *observación* entre el satélite y nuestra estación. Resumiendo se debe conocer un vector y medir otro.

El vector satélite puede ser conocido si se dispone de las efemérides*, permitiendo calcular su posición en función del tiempo. Las efemérides han de ser facilitadas por los operadores de la constelación, tras hacer su seguimiento desde ciertas estaciones terrestres de posiciones conocidas.

Para navegación, el vector observación ha de ser continuamente recalculado en tiempo real o inmediato. Si la utilización es geodésica o para posicionamiento estático, sucesivas observaciones ofrecen redundancia; el cálculo ha de hacerse en tiempo diferido.

El problema siempre puede invertirse: conocido el vector posición y el vector observación puede determinarse el vector satélite, y en sucesivas observaciones, los parámetros orbitales, que es lo que se hace desde las estaciones de control.

Para expresar de una forma elemental: si se sabe donde están los satélites, se podrá situar la posición, además de situar los satélites (o determinar sus efemérides).

* Las efemérides son el conjunto de posiciones de los cuerpos celestes calculadas para diferentes instante separado uniformemente en el tiempo. Fuente: Enciclopedia Multimediana PlanetaDeAgodtini.

Como en cada proceso se pierde precisión, no es posible situar los satélites con la precisión necesaria para después utilizar las efemérides calculadas, si las posiciones de las estaciones de control no están establecidas con un rango superior, normalmente con el sistema SLR, o aun mejor, VLBI, más adelante serán descritos.

En general, cuando desde un punto se miden tres direcciones o distancias no coplanarias a satélites de posición conocida, se fija la situación del punto respecto a las de los satélites, las cuales, para ser conocidas, exigen un preciso control del tiempo, en función del cual se definen.

5.3.3 Propagación de Emisiones Radioeléctricas

Se debe comentar un aspecto común a todos los sistemas que empleen emisiones radioeléctricas. Una onda electromagnética que provenga del espacio debe atravesar tres zonas características antes de alcanzar un receptor estacionado sobre la superficie terrestre: el *vacío*, la *ionosfera* y la *troposfera*.

El *retardo* se define aquí como el incremento que sufre el tiempo de propagación de una señal electromagnética entre dos puntos al efectuarse el transito por un medio que no sea el vacío, en vez de hacerlo por el vacío.

Se debe a dos factores: la velocidad de propagación es menor y la trayectoria (si el medio no es isótropo) aumenta su longitud al curvarse por refracción y ser envolvente de la recta que une los puntos origen y destino de la señal.

También hay que considerar los efectos relativistas sufridos por la señal al propagarse entre dos puntos con diferentes gravedades y velocidades relativas. Se comentaran en el capítulo dedicado al GPS.

5.3.4 Vacío

En el vacío, el retardo es inexistente, siendo el tiempo de propagación perfectamente determinable al ser proporcional a la distancia en función de la velocidad de la luz, sea cual sea la frecuencia de la onda considerada.

5.3.5 Ionosfera

En la ionosfera, que esta entre 100 y 1000 km de altitud, las radiaciones solares, especialmente la ultravioleta, y otras radiaciones ionizan una porción de las moléculas gaseosas liberando electrones. El numero de electrones libres contenidos en 1 m^3 (Total electrón Content - TEC) puede oscilar entre 10^{16} y 10^{19} , según la radiación solar, las actividad de las marchas solares y otros fenómenos, como los geomagnéticos.

El retardo es proporcional al número total de electrones libres encontrados por la señal en su camino, y esta en función del cuadrado de longitud de onda, a igualdad de circunstancia. Varía para cada punto concreto de recensión según su longitud y la observación y momento de la observación.

El retardo ionosférico puede variar en el cenit entre 2 ns (0,6 m) y 50 ns (15 m) para frecuencia de la banda L (usada en el GPS), llegando hasta 2,5 el factor por inclinación de la proyectaría, y siendo hasta 5 veces mayor el efecto al mediodía que entre medianoche y el amanecer.

Puede usarse modelos ionosfericos (Klobuchar, 1986; Geckle and Feen, 1980) para establecer la distribución del TEC, pero tiene variaciones tan irregulares y poco predecibles que los modelos pueden tener errores del 50% con facilidad.

Para resolver el problema, en lo que atañe a recepción de señales que atraviesen la ionosfera, se emplea el artificio de utilizar dos frecuencias diferentes y razonablemente separadas dentro de la banda de trabajo. Como el retardo depende de la longitud de onda, y por tanto es distinto para cada frecuencia, podrán observar un retardo diferente entre ambas, tanto mayor cuanto mayor sea el retardo ionosférico sufrido, siendo por tanto este deducible, indirectamente, con precisión aceptable.

Esta técnica bifrecuencia se emplea en los sistemas VLBI, Doppler Transit y GPS, mas adelante descritos.

5.3.6 Troposfera

La última zona que produce retardo es la troposfera y otras regiones de la atmosferas superior. Aunque llegan hasta 80 km, solo en 40 km, más bajos se causan retardos significativos.

Este retardo equivale a incremento de camino de orden de 3 ns (1 m) en el cenit hasta 100 ns (30 m) a 5° de elevación (varia aproximadamente en función de la secante de la distancia cenital).

La atmósfera puede considerarse como una mezcla de dos gases ideales: aire seco y vapor de agua, por lo que hay dos efectos causantes de retardo troposférico: hasta poco mas de 10 km, la humedad, y hasta los 40 km, la temperatura del aire seco, cuyo efecto es considerablemente mayor, hasta el 90 % del total.

Aunque se considere la presión, sus variaciones son pequeñas y su gradiente vertical bien determinable. Por supuesto, también es preciso conocer la altitud de receptor, para saber cuanta troposfera hay por encima.

Sin embargo, aunque el retardo debido a la humedad es menor (un 10 % de total), no puede determinarse fácilmente mediante medida en superficie, como es posible hacerlo con el debido a la temperatura del componente seco, aire.

El gradiente térmico admite modelación con precisión aceptable, pero el vapor de agua en la atmósfera tiene una irregular distribución, no suficientemente controlable a partir de medidas en superficie. Aunque no se pueden emplear modelos (Saastamoinen, 1972; Hopfield, 1969; Goad and Goodman, 1974; Black, 1978; Robinson, 1986), cuando las precisiones exigidas son maximas, las mejores tecnicas es emplear radiomentros de vapor de agua.

Bandas	Frecuencias
HF	3-30 MHz
VHF	30-300 MHz
UHF	300-1000 MHz
L	1 - 2 GHz
S	2 – 4 GHz
C	4 – 8 GHz
X	8 – 12 GHz
Ku	12 – 18 GHz
K	18 – 27 GHz
Ka	27– 40 GHz
V	40 – 75 GHz
W	75– 110 GHz
mm	110 – 300 GHz

Tabla 5.1 Designaciones de bandas y frecuencias en las transmisiones vía satélite.

Los radiomentros de vapor de agua (Water Vapor Radiometers - WVRs) miden la radiación basal que se recibe desde el espacio en la dirección de la observación, entre

21 y 31 GHz. Estando la primera frecuencia incrementada por el contenido del vapor de agua y la segunda no, su comparación permite establecer con suficiente exactitud la cantidad de vapor de agua que exista en la dirección contemplada.

Los radiómetros de vapor de agua se emplean sistemáticamente en el sistema VLR en el sistema VLBI, más adelantado descrito, y raramente en otros.

Es notable que el retardo ionosférico, y el topográfico debido al vapor de agua, tan solo afectan significativamente a las emisiones de la banda radioeléctrica, siendo su efecto tanto menor cuanto mayor sea la frecuencia; puede virtualmente ignorarse para frecuencias visibles, como la del láser usado en SLR.

A título ilustrativo se incluye un cuadro Fig. 5.1 con las radiaciones electromagnéticas utilizables en Geodesia espacial.

5.4 SISTEMAS ACTUALES

Los sistemas actualmente operativos en nuestro ámbito científico son: SLR, VLBI, TRANSIT (llamado genéricamente Doppler) y GPS.

El SLR (Satellite Laser Ranging) es un sistema de medida de distancia absoluta por láser a satélites.

La VLBI (Very Long Baseline Interferometry) permite calcular, por medios interferométricos, la distancia entre los centros radioeléctricos de dos o más radiotelescopios que observen un mismo cuásar.

La constelación TRANSIT usa el método Doppler.

El GPS, puede trabajar en sistema Doppler, en medida directa de distancias absolutas (seudodistancias) o en comparación de fase de frecuencia de portadora. A continuación se describirá los métodos mas utilizados.

5.4.1 Sistema TRANSIT

Lo que en lenguaje geodésico se denomina genéricamente «Sistema DOPPLER» realmente es el sistema NNSS (Navy Navigation Satellite System) que utiliza los satélites norteamericanos de la constelación TRANSIT (aunque puede recibirse señales de otros satélites, como los GEOS) sobre los que se realizan mediciones de desplazamiento Doppler. El bloque ex-soviético tiene un sistema equivalente llamado TSICADA.

La constelación dispone de un mínimo de seis satélites activos, con un peso de solo 61 [kg], en orbitas polares casi circulares de 1100 [km] de altitud, por lo que el periodo es de 107 minutos, esto representa que en una estación terrestre pueden recibirse señales de un satélite cada hora y tres cuartos, durante los quince minutos que separan el orto del ocaso local si pasa por el cenit; menos tiempo si culmina a menos altura de horizonte.

Los satélites TRANSIT transmiten en dos portadoras, 150 y 400 [Mhz], para determinar y poder corregir el retardo ionosférica según sabemos. Para la corrección del troposférico se confía a registros meteorológicos hechos en la estación, y un modelo atmosférico. Sobre las portadoras se envía información por modulación sobre estados de tiempo de relojes, órbitas y otras.

El sistema funciona midiendo el desplazamiento o corrimiento Doppler (Doppler shift) que es la variación aparente en el valor de la frecuencia en función de la velocidad de acercamiento o alejamiento de la fuente emisora.

El efecto Doppler-Fizeau fue descubierto en el siglo XIX. Cuando la fuente emisora de un tren de ondas, sean ópticas, acústicas o radioeléctricas, disminuye su distancia a un observador, la frecuencia recibida es aparentemente mayor que la real. Si la fuente se aleja, la frecuencia es menor, y si la distancia permanece constante, la frecuencia coincide.

La fórmula,

$$\Delta F = \frac{V_r}{V_0}$$

relaciona la variación de la frecuencia ΔF con la velocidad radial V_r alejamiento o acercamiento respecto al observador de la fuente emisora, y la velocidad de propagación de la onda V_0 .

Los receptores para el sistema TRANSIT reciben durante un periodo o bloque la señal emitida por un satélite, sobre cuya frecuencia nominal, tras ser comparada con la del oscilador local, se establece una diferencia o *cuenta Doppler* (Figura 5.1).

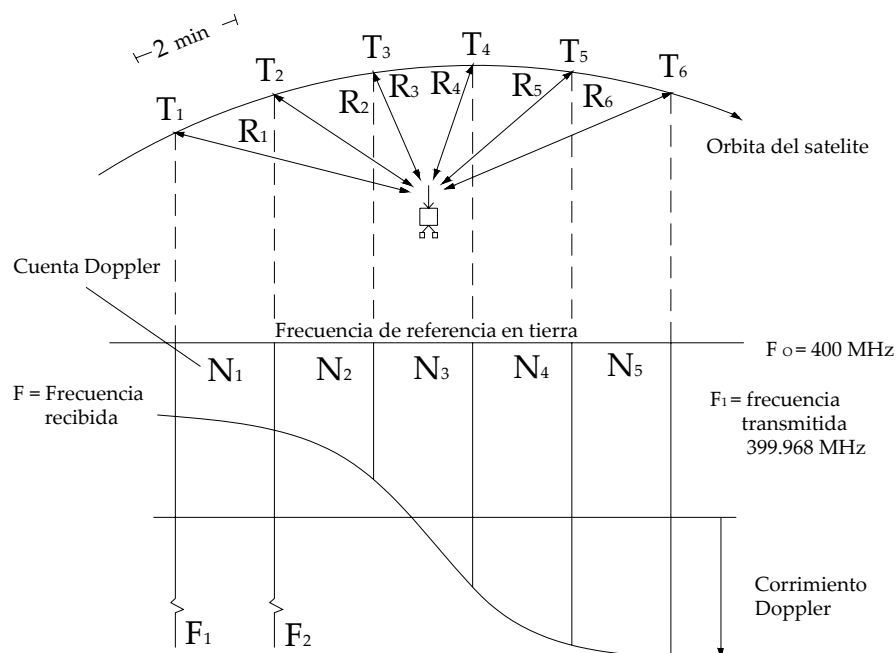


Figura 5.1 Cuenta Doppler

La diferencia de frecuencias entre dos cuentas Doppler permite calcular una diferencia concreta de distancia entre ambas posiciones del satélite y el receptor. Se conoce la diferencia de distancia, pero no la distancia en sí, lo que posiciona al observador en un hiperboloide de revolución con focos en las posiciones (conocidas por las efemérides transmitidas) del satélite en los dos momentos de observación.

Tras suficientes pasos, las soluciones convergen y la situación es calculable con precisiones bastante elevadas. Un paso de satélite ofrece de 10 a 15 mediciones útiles con intervalos de 30 [seg]. Se puede observar hasta 15 pasos aceptables cada día.

Desde luego, la situación de un punto aislado (single point positioning) puede tener errores de orden decamétrico, pero si el posicionamiento en dos puntos diferentes a la vez, donde dos receptores hacen registros simultáneos a los mismos satélites, como ciertos errores son comunes a ambos, la situación de ambos tendrá quizá 10 [m] de error absoluto por ejemplo: el posicionamiento relativo de uno respecto a otro, será mucho mejor, con precisiones del orden de 1 [m], porque hay una serie de errores que afectan por igual a ambos receptores sin perjudicar su situación relativa. Esta técnica se llama *translocación*.

Para el cálculo se obtiene la posición del satélite extrapolando en las efemérides transmitidas por el satélite con precisiones de 10 a 20 [m] (basadas en las observaciones desde las 4 estaciones de la red OPNET, en territorio estadounidense).

Aún puede mejorarse el cálculo usando a posteriori, en vez de la extrapolación citada, las efemérides precisas resultantes de la observación por la red TRANET de control (20 estaciones distribuidas por toda la Tierra), puestas a disposición de ciertos usuarios por el NSWC (Nacional Surface Weapons Center) con precisiones de 2 a 3 [m]. El posicionamiento relativo así calculado ofrece precisión de algunos decímetros.

Hay una técnica, llamada *arco corto* en la que se consideran como inóclitas en las ecuaciones de observación hasta 6 factores de corrección de los parámetros orbitales (si solo se consideran 3, se llama semi arco corto). Con ello se alcanza una precisión superior.

5.4.2 GPS

El GPS, fue desarrollado para mejorar el sistema militar TRANSIT en servicio civil desde 1967 y desde 1973 se empieza a desarrollar el proyecto de la constelación NAVSTAR (Navigation Satellite Timing and Ranging – Satélite de navegación, cronometría y distanciometría) y el 22 de febrero de 1978 se lanzó el primer satélite, ver esquema en la figura 5.2.

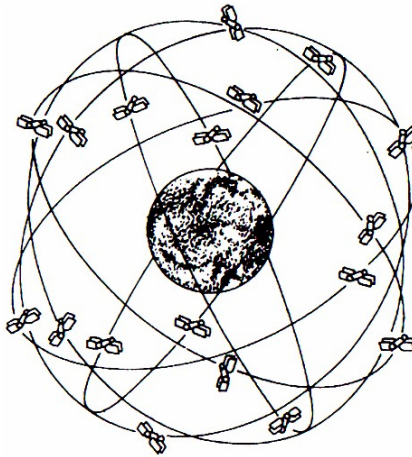


Fig. 5.2 Esquema de la constelación NAVSTAR

La responsabilidad del desarrollo, prueba y despliegue del sistema recae en la Joint Programm Office del US Air Force Space System Division, organismo militar estadounidense, por lo que el sistema es fundamentalmente militar.

El GPS es más que un simple sistema de navegación: con él se pueden hacer diferentes tipos de posicionamiento, del máximo interés en nuestras técnicas, por la elevada precisión alcanzable.

Los posicionamientos realizables con el GPS se pueden dividir en dos, según respecto a qué se quiera referir la (o las) posiciones halladas:

- Si las coordenadas se determinan respecto a un sistema de coordenadas previamente definido, el posicionamiento se llama *absoluto*.
- Si las coordenadas se determinan respecto a otro punto, que constituiría el origen o referencia de un sistema local de coordenadas, el posicionamiento se llama *relativo*.

También puede hacerse una clasificación según si el receptor se mueve o no.

- Si el receptor se mueve, el posicionamiento se llama *dinámico*.
- Si el receptor no se mueve, el posicionamiento se llama *estático*.

En trabajos geodésicos, la observación Doppler de las emisiones de los TRANSIT, durante días, ha sido sustituida por sólo alguna hora de recepción con el GPS.

La distanciometría geodésica de primer orden ya puede considerarse desplazada, aunque problemas de coste y operatividad han estado conteniendo su plena difusión en otras áreas. Hasta ahora el problema (cada vez menos importante) en Geodesia ha estado siendo solo de coste y de espera del momento propicio para la observación, dada la máxima precisión exigida.

En topografía ya se puede considerar comercialmente operativo.

5.5 SISTEMAS DE REFERENCIA GPS

Previo a la descripción de los sistemas de referencia utilizados en GPS, se definirá los siguientes conceptos.

5.5.1 Datum Geodésico

Esta constituido por una superficie de referencia geométricamente definida, habitualmente un elipsoide, y un punto llamado fundamental, en el que la vertical al elipsoide y al geoide (superficie equipotencial de cota cero o superficie de mares en reposo) sea común. De éste punto se especificara longitud, latitud y acimut de una dirección desde él establecida.

En dicho puntos las coordenadas geodésicas y astronómicas coinciden.

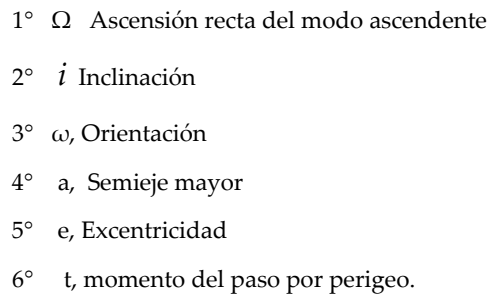
La altimetría en los sistemas de referencia clásicos se refiere al geoide, y en el sistema WGS84 se refiere al elipsoide.

5.5.2 Órbitas

Considerando como orbita ideal de un satélite alrededor de la Tierra, la trayectoria que este sigue en caída libre, si se cumplen las siguientes condiciones:

- a) La Tierra se considera como una masa puntual.
- b) La masa del satélite es despreciable con respecto a la Tierra.
- c) El satélite se mueve en el vacío
- d) No se considera la atracción gravitacional de terceros cuerpos (Sol, Luna u otros).

Con estas hipótesis se presenta el problema de los dos cuerpos celestes (movimiento Kepleriano), para resolver el problema de posicionamiento de un cuerpo en su órbita hacen falta siempre seis parámetros que definen una órbita ideal y el satélite en ella. Aunque pueden emplearse otros, los más comunes son los Keplerianos, cuyos elementos se muestran en la figura 5.3.



Con dos parámetros se fija en el espacio el plano orbital respecto al ecuatorial. Es forzosamente un plano que pasa por el centro de la Tierra en virtud de la primera ley de Keppler (la órbita es una elipse contenida en un plano; uno de sus focos coincide con el centro de masas):

137

2° Fija el ángulo del diedro formado por el ecuador y el plano orbital visto desde el nodo ascendente, lo que justifica que puede haber valores desde 0° hasta 180° . Se llama *inclinación* (i).

Sobre el plano así establecido se ha de situar la elipse de orbita. Por supuesto el centro de gravedad de la Tierra ocupa un foco, en virtud de la primera ley de Kepler.

3° La orientación de la elipse se presenta como el ángulo (ω) entre el nodo ascendente y el perigeo (punto en que el satélite esta más cerca de la Tierra) y se lo denomina *argumento del perigeo*.

4° y 5° Las dimensiones de la elipse se determinan en el *semieje mayor* (a) (o radio, en orbitas rigurosamente circulares) y la *excentricidad* e (en orbitas rigurosamente circulares).

6° El ultimo parámetro permite fijar el satélite en un punto concreto de la orbita en un momento dado, por ejemplo; el momento (t_0) del paso del satélite por el perigeo, o por el nodo ascendente.

A este planteamiento ideal hay que añadir más información para poder predecir la posición instantánea real del satélite, que es diferente de la teoría, calculada con los 6 parámetros básicos, por una serie de perturbaciones orbitales que alteran su trayectoria que son:

A) Anomalías gravitacionales originadas por:

- El efecto de terceros cuerpos, Luna, Sol, y residualmente y sin significación practica, otros planetas y cuerpos celestes.

- Irregularidades y variaciones del campo gravitatorio terrestre, consecuencia de su falta de homogeneidad y de los efectos de manera generados por la atracción conjunta lunisolar.

B) Fricción atmosférica: aunque ya a 1000 km de altitud la atmósfera es prácticamente inexistente, aun hay moléculas en moléculas en flujos libre que por razonamiento hacen degenerar la orbita. Los satélites en orbita baja (tipo 1000 km o menor) son claramente afectados. En general su efecto depende de la velocidad, altura, geometría y características superficiales del satélite, y de la densidad y temperatura atmosférica.

C) Presión de la radiación: su efecto, resultante de la diferencia entre la cantidad de radiación incidente y la reflejada, es directamente proporcional a la sección del satélite (o proyección en la dirección de la radiación), e inverso a su masa. Los satélites más sensibles a este efecto son los tipos globo, como ECO, de gran sección y baja masa.

En general, también depende de la orientación, intensidad y distribución especial y espectral de la radiación incidente y de las propiedades ópticas de la superficie. Las principales fuentes de radiación que generan presión en un satélite son: la solar directa, la solar reflejada por la Tierra y su atmósfera (albedo) y la térmica emitida por la Tierra y su atmósfera.

Todos ellos hace que, si se desea establecer la posición de un satélite con una gran precisión, las efemérides necesarias no puedan limitarse a las keplerianas (o alternativamente a solo 6 básicas).

Las efemérides (normalmente radiodifundidas por el propio satélite a sus usuarios) se actualizan cada determinado tiempo. Es evidente que si la actualización fuera continua bastarían las keplerianas. Así pues, para limitar los errores obtenidos al

calcular las posiciones de los satélites en un momento dado, la información orbital deberá ser tanto más copiosa cuanto más precisión se requiera o cuanto mas dilatado sea el periodo entre actualizaciones.

En el caso del GPS, por ejemplo, además de las 6 keplerianas básicas descritas (en lugar del semieje mayor se ofrece directamente su raíz cuadrada, que es la utilizada en el calculo), se complementan con otros 9 parámetros, concretamente (figura 5.4): diferencia del movimiento medio, razón del cambio en la ascensión recta, razón del cambio de la inclinación y las correcciones por desarrollo en serie senoidal y consenoidal de argumento de altitud, del radio orbital y de la inclinación y otros dos datos: antigüedad de la información *age* y anomalía media.

Esta transmisión se hace dos veces al día, pero en cuatro grupos sucesivamente validos para 4 horas, esto es, las efemiredes radiodifundidas cambian 6 veces al día. Es remarcable que el periodo de actualización ha tenido y tiene numerosos cambios y no puede considerarse como permanente.

El sistema soviético GLONASS, por ejemplo, se ofrece otra información diferente: tres coordenadas para fijar una posición del satélite, los tres componentes del vector velocidad y los tres de la aceleración o fuerza actuante en el satélite, la actualización se hace cada media hora.

Para establecer la situación del satélite, la extrapolación de 15 parámetros hasta 4 horas (GPS) ofrece precisión comparable que la de 7 parámetros hasta media hora (GLONASS). En cualquier caso, para poder cuantificar la precisión con que se calcula la situación del satélite, es necesario conocer al tiempo transcurrido (*age data*) desde la ultima actualización de efemeridades hasta el momento en que sea necesario extrapolar su situación.

Símbolo	Unidad	Parámetros
AODE	segundos	antigüedad de la información de efemérides
C_{rs}	metros	Amplitud de corrección armónica senoidal del radio orbital
Δn	π radianes/s	Diferencia del movimiento medio
M_0	π radianes	Anomalía media en el momento de referencia
C_{uc}	radianes	amplitud de la corrección armónica cosenoidal del argumento de la altitud
e	adimensional	Excentricidad (0,03)
C_{us}	radianes	Amplitud de la corrección armónica senoidal del argumento de la latitud.
$(A)^{1/2}$	metros ^{1/2}	Raíz cuadrada del semieje mayor
t_{oe}	segundos	Tiempo de referencia efemérides valor máximo 604 – 784
C_{ic}	π radianes	Amplitud de la corrección armónica cosenoidal del ángulo de inclinación.
Ω_0	π radianes	Ascensión recta en el momento de referencia
C_{is}	π radianes	Amplitud de la corrección armónica senoidal del ángulo de inclinación
i_0	π radianes	Ángulo de inclinación en el momento de referencia
C_{rc}	metros	Amplitud de la corrección armónica cosenoidal del radio orbital
ω	π radianes	Argumento del perigeo
OMEGADOT	π radianes/s	Razón del cambio en la ascensión recta
IDOT	π radianes/s	Razón del cambio en el ángulo de inclinación

Figura 5.4 Parámetros radiofundidos en el mensaje

Las diferencias transmitidas por los satélites permiten determinar su posición en su órbita alrededor de la Tierra en un sistema de referencia inercial.

El sistema de referencia inercial utilizado por el GPS se definió por la Asociación Internacional de Geodesia y la Unión de Astronomía Internacional de forma que, a partir del 1 de enero de 1984, su plano ecuatorial y su equinoccio son los correspondiente de la época 12h (Tiempo Dinámico Baricentrico) del día 1 de enero del 2000, de fecha juliana 2 451 545,0.

5.5.3. Coordenadas en el plano orbital

Se verá como se obtiene las coordenadas del satélite en su plano orbital (figura 5.5), en el caso ideal anteriormente descrito.

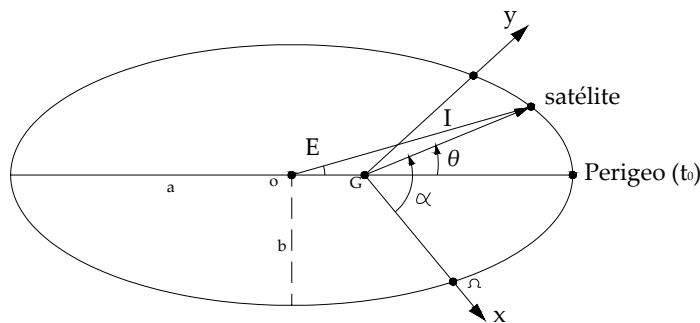


Figura 5.5 Plano orbital

Para ello, se considera la elipse, y sobre ella, un sistema cartesiano (x, y) cuyo origen es el geocentro, el eje x pasa por el nodo y el eje y es perpendicular a él:

1°. Calculando n a partir de a :

$$n = \sqrt{\frac{Gm}{a^3}} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

2° $M = n (t - t_0)$

3° Calculando: $E - e \sin E = M$

siendo E = anomalía excéntrica.

La ecuación se resuelve por aproximaciones sucesivas:

$$E_1 = M$$

$$E_2 = M + e \sin E_1$$

$$E_3 = M + e \operatorname{sen} E_2$$

Y así sucesivamente hasta que

$$E_n = M + e \operatorname{sen} E_{(n+1)}$$

4° Calculando a continuación (X_p , Y_p)

$$x_p = a(\cos E - e)$$

$$y_p = a\sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} E$$

$$x_p = r \cos \alpha$$

$$y_p = r \operatorname{sen} \alpha$$

siendo α = argumento de la latitud.

5.5.4. Coordenadas en sistema rectangular instantáneo

Este sistema viene definido por (figura 5.6):

Origen el geocentro

Plano fundamental: el Ecuador Instantáneo.

Eje X: la intersección del plano fundamental y el meridiano de Greenwich.

Eje Y: perpendicular al plano XZ.

5.5.5. Sistema WGS84

El sistema de referencia terrestre es el denominado WORLD GEODETIC SYSTEM 1984 (WGS 84), definido como sigue: el origen es el centro de la masas de la Tierra; el eje Z es paralelo ala dirección del polo CIO, polo medio, definido por el BIH; el eje X es la intersección del meridiano origen (Greenwich) y el plano del ecuador medio; El eje Y, ortogonal a los anteriores, crea una terna dextrorsum.

El sistema WGS 84 es un sistema de referencia construido a partir de diferentes datos u observaciones tales como: anomalía de la gravedad, desviaciones de la vertical,

observación a satélites TRANSIT por técnicas Doppler, observaciones láser a satélite SRL, observaciones VLBI, etc.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p & y_p & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \lambda & \operatorname{sen} \lambda & 0 \\ -\cos i \cdot \operatorname{sen} \lambda & \cos i \cdot \cos \lambda & \operatorname{sen} i \\ \operatorname{sen} i \cdot \operatorname{sen} \lambda & -\operatorname{sen} i \cdot \cos \lambda & \cos i \end{pmatrix}$$

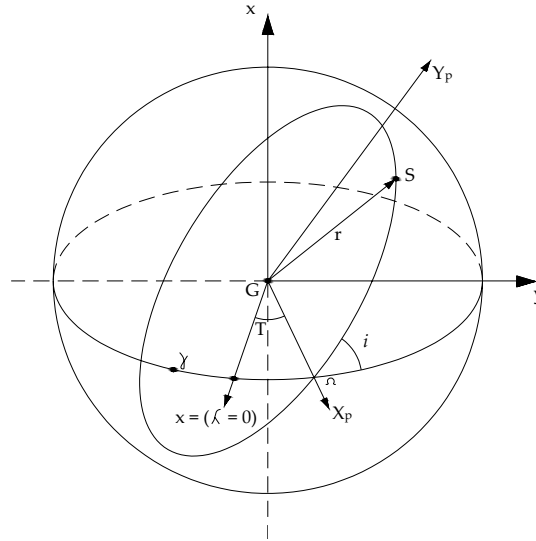


Figura 5.6 Sistema Rectangular Instantáneo

Los parámetros que definen el elipsoide de referencia en el sistema WGS 84 son:

$a = 6\,378\,137$ metros.

$\alpha = 0,003\,352\,810\,664\,74$ (aplanamiento).

$b = 356\,752,3$ metros.

$\omega = 7\,292\,115 \times 10^{-11}$ radianes/segundo (velocidad de rotación)

Para pasar del sistema de coordenadas rectangular instantáneo al WGS84, ha de conocerse la variación del Polo instantáneo respecto del Polo medio (figura 5.7); estos valores publicados por el BIII, se dan a través de sus componentes $x_p y_p$ (en segundos de arco).

$$\begin{pmatrix} y_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_p \\ 0 & 1 & -y_p \\ -x_p & y_p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Resumiendo: las relaciones entre WGS84 y los sistemas instantáneos (ITS) e inerciales (CCRS) son:

$$\text{CTRS} = (A) (B) (C) (D) (\text{CCRS})$$

Siendo: (A) = movimiento del polo

(B) = tiempo sidéreo.

(C) = nutación astronómica.

(D) = procesión astronómica.

Donde las matrices (B), (C) y (D) proporcionan el paso entre (CCRS) y el ITS

$$\text{ITS} = (B) (C) (D) (\text{CCRS})$$

$$(\text{CTRS}) = (A) \text{ITS}$$

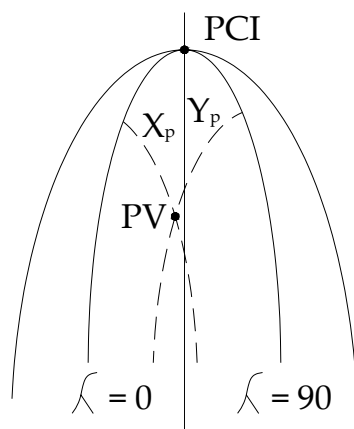


Figura. 5.7 Variación del polo

CAPÍTULO VI

PRINCIPIOS BÁSICOS DE FOTOGRAMETRÍA



6.1 DEFINICIÓN.

Fotogrametría es definida como la ciencia o arte de realizar mediciones a partir del análisis de imágenes registradas en una película o medio electrónico, a fin de determinar características métricas y geométricas de los objetos fotografiados, como por ejemplo: tamaño, forma y posición.

La Fotogrametría fue inventada en 1851 por Laussedat y ha continuado su desarrollo en los últimos 155 años. Con el transcurso del tiempo, el desarrollo de la Fotogrametría ha pasado a través de las fases de Fotogrametría de plancheta, Fotogrametría análoga, Fotogrametría analítica y recientemente ha entrado en la fase digital (Konecny 1994).

La aplicación tradicional, y la más grande, es la extracción de información topográfica; es decir, mapas topográficos de imágenes aéreas; sin embargo, las técnicas fotogramétricas también han sido aplicadas para procesar imágenes de

rango cercano, con el objeto de adquirir información topográfica y no topográfica de los objetos fotografiados.

Antes de la invención del aeroplano, las fotografías tomadas en el terreno se utilizaron para extraer las relaciones entre los objetos usando principios geométricos, esto ocurrió durante la fase de la Fotogrametría de plancheta.

En la Fotogrametría análoga, empezando con la medición estereoscópica en 1901, los instrumentos ópticos o mecánicos se utilizaron para reconstruir la geometría tridimensional de dos fotografías traslapadas, el principal producto de esta fase fueron los mapas topográficos.

En la Fotogrametría analítica, el computador reemplazó algunos componentes ópticos y mecánicos muy costosos, los instrumentos resultantes fueron híbridos análogo/digitales, la aerotriangulación analítica, los restituidores analíticos y los proyectores de ortofotos fueron los principales desarrollos durante esta fase. Los productos de la Fotogrametría analítica pueden ser mapas topográficos pero también pueden ser productos digitales como mapas digitales y DEMs (Digital Elevation Models).

La Fotogrametría digital es aplicada a imágenes digitales que son almacenadas y procesadas en un computador. Las imágenes digitales pueden ser escaneadas de fotografías convencionales o ser capturadas directamente mediante cámaras digitales.

Muchas tareas fotogramétricas pueden ser automatizadas en la fotogrametría digital, por ejemplo, extracción de DEMs y generación de ortofotos digitales.

La Fotogrametría digital es a veces llamada fotogrametría de copia blanda, los productos obtenidos están en formato digital, tales como mapas digitales, DEMs y ortofotos digitales que están grabados en medios magnéticos, de esta manera, ellos pueden ser fácilmente almacenados, administrados y aplicados por los usuarios, con el desarrollo de la Fotogrametría digital, las técnicas fotogramétricas se pueden integrar más fácilmente con la teledetección y los SIG (Sistema de Información Geográfica).

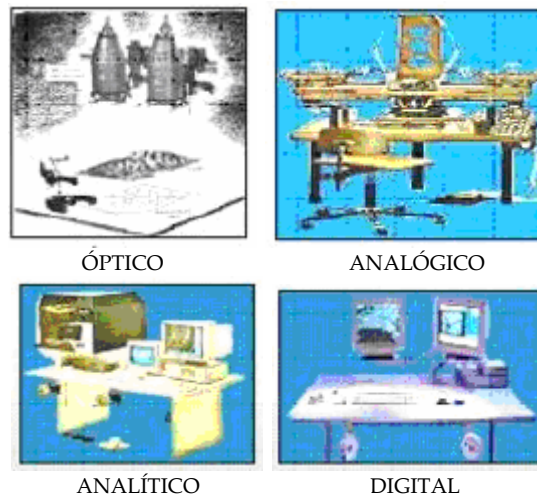


Figura (6.1) Etapas de la Fotogrametría

Los sistemas de Fotogrametría digital emplean software sofisticado para automatizar las tareas asociadas con la Fotogrametría convencional y, de esta manera, minimizan la interacción manual requerida para realizar operaciones fotogramétricas.

La Fotogrametría puede ser utilizada para medir e interpretar información de fotografías e imágenes. Algunas veces el proceso de medir información en fotografías e imágenes se considera fotogrametría métrica, tal como crear DEMs.

La interpretación de información de fotografías o imágenes se considera Fotogrametría interpretativa, tal como identificar y diferenciar distintos objetos.

Entonces podría decirse que mientras que en fotogrametría se estudia los aspectos métricos de las fotografías, en fotointerpretación se da especial interés al aspecto cualitativo de dichas fotos, fotointerpretación puede definirse como el arte de analizar imágenes fotográficas a fin de identificar elementos por reconocimiento y deducción.

Es evidente que entre la fotogrametría y fotointerpretación no existe una separación estricta, sino que por el contrario ambas están íntimamente ligadas y no puede hablarse de una sin incluir conceptos de la otra.

Entonces se puede decir que el objetivo principal de la fotogrametría es la confección de mapas topográficos mediante el empleo de fotografías aéreas o terrestres y el análisis cuantitativo y cualitativo de la imagen; sin embargo, la elaboración de mapas no es la única aplicación, ya que por métodos fotogramétricos es posible determinar las coordenadas X , Y , Z de puntos de control en el terreno (sustituyendo en parte los métodos topográficos convencionales por los de triangulación aérea), diseñar carreteras, canales y otras obras de ingeniería civil y una serie de aplicaciones no topográficas como estudio de deformaciones de estructuras, levantamientos de planos de frentes de edificios y monumentos para su conservación y restauración, etc.

La palabra Fotogrametría se deriva etimológicamente de las siguientes palabras griegas: “photos” que significa luz, “gramma” que significa lo que está dibujado o escrito y “metrón” que significa medir, el significado original, derivado de las raíces griegas sería entonces, medir gráficamente por medio de la luz.

Frecuentemente se divide la fotogrametría en diferentes especialidades o categorías de acuerdo al tipo de fotografía empleada o la forma en que es empleada, cuando las fotografías son tomadas desde un punto de la superficie terrestre se habla de

Fotogrametría terrestre, si las fotos son tomadas desde un avión, helicóptero o vehículo espacial, ya sean las fotografías verticales o inclinadas se habla de Fotogrametría aérea, la estereofotogrametría se refiere al análisis de pares de fotografías que cubren una zona común para realizar interpretaciones y medidas en visión estereoscópica, es decir por medio de instrumentos sencillos o por reconstrucción análoga de los haces de rayos perspectivos que formaron la fotografía se puede obtener una visión tridimensional del terreno.

En fotogrametría analítica se miden coordenadas planas (x, y) de puntos sobre cada una de las fotografías y por medio de relaciones matemáticas llamadas fórmulas básicas de transformación y generalmente mediante el empleo de computadores se reconstruye el modelo pudiéndose calcular las coordenadas espaciales (X, Y, Z) a partir de las coordenadas planas.

El mayor campo de aplicación de la fotogrametría se da en el área de topografía y mapificación, aunque constituye sólo una etapa del proceso total de mapificación, es sin lugar a dudas una de las principales, ya que consiste en el levantamiento de los detalles del terreno y su control por medio de triangulación espacial.

Cuando se toman fotografías aéreas de una zona, la imagen obtenida es similar a un mapa, sin embargo, desde el punto de vista cartográfico no se puede considerar como tal, debido a las deformaciones de la imagen.

Uno de los objetivos principales de la fotogrametría es elaborar mapas a partir de fotos, para lo cual es necesario conocer las diferencias entre fotografía y mapa, estas diferencias se deben a tres causas: sistemas de proyección, las características del terreno fotografiado y el equipo empleado para tomar fotografías.

6.1.1 Sistemas de Proyección.

El espacio geográfico, entendido como la superficie terrestre total, es un espacio curvo. Y es justamente en este punto donde surge el problema en cuestión traducido en las dos interrogaciones que siguen: ¿Es la tierra una esfera o un elipsoide? ¿Cómo representar un espacio curvo o elipsoidal en una superficie plana?

Sin embargo, dicho problema queda resuelto cuando las coordenadas rectangulares del plano, X e Y, se expresan en función de las coordenadas geográficas (latitud y longitud). Expresado con esta hipótesis se dice: es necesario establecer una correspondencia entre los puntos del elipsoide y los del plano. Este sistema de correspondencia se llama «sistema de proyección».

La palabra «proyección» incluye el concepto de traslado (o perspectiva) de un punto, a partir de un punto de vista con respecto a otro, situado en otra superficie llamada plano del cuadro o plano de proyección.

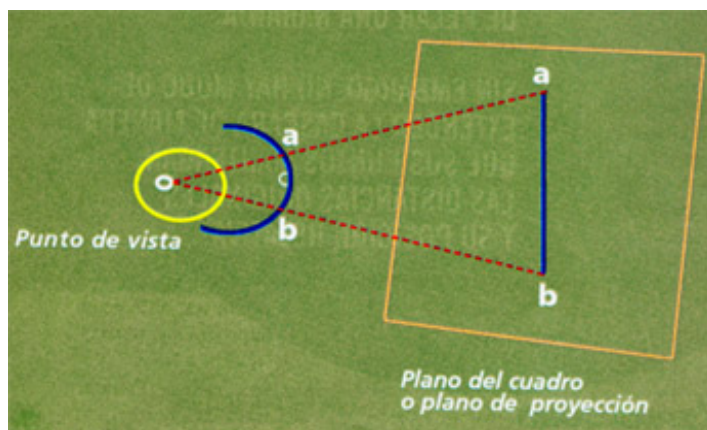


Figura (6.2) Proyección o perspectiva de un punto

La confección de mapas a escala pequeña (1/25.000 o menores) de grandes áreas requiere que la superficie de la tierra sea transformada primeramente por procedimientos geodésicos en una figura de revolución (elipsoide o esfera) la cual

podrá ser proyectada sobre una figura directamente desarrollable en una superficie plana (cilindro o cono) o simplemente por ecuaciones matemáticas de transformación que relacionen las coordenadas planas X e Y con la latitud y longitud. La elaboración de mapas topográficos de áreas relativamente pequeñas, permite resolver el problema en forma sencilla, suponiendo que en esas áreas la superficie terrestre es plana, en este caso todos los puntos son proyectados ortogonalmente sobre un plano medio del terreno.

La fotografía aérea, a diferencia de los dos casos anteriores, produce una imagen del terreno por proyección de todos los puntos que forman una imagen desde un punto central, teóricamente fijo. Se trata pues de una proyección central cuyas características geométricas y propiedades difieren considerablemente de los otros sistemas de proyección.

6.1.2 Características del terreno.

Si fuese posible tomar una fotografía exactamente vertical de un terreno plano horizontal con un equipo libre de distorsión, el resultado sería una imagen realmente idéntica al de una proyección ortogonal del terreno (mapa), sin embargo, ésta situación es únicamente teórica, en la práctica el fotogrametrista debe enfrentarse con los problemas de curvatura de la tierra y el relieve del terreno.

El efecto de la curvatura terrestre es importante solo para algunos problemas fotogramétricos, por ejemplo, cuando el área cubierta por la foto es muy extensa, ya sea en el caso de fotografías inclinadas o verticales de escala muy pequeña, o bien en el caso de determinar control fotogramétrico de una faja extensa de terreno por aerotriangulación.

En trabajos fotogramétricos en que se emplean fotografías de escala 1/40.000 o mayor, el área cubierta es pequeña y a efectos de su restitución, puede ser considerada plana.

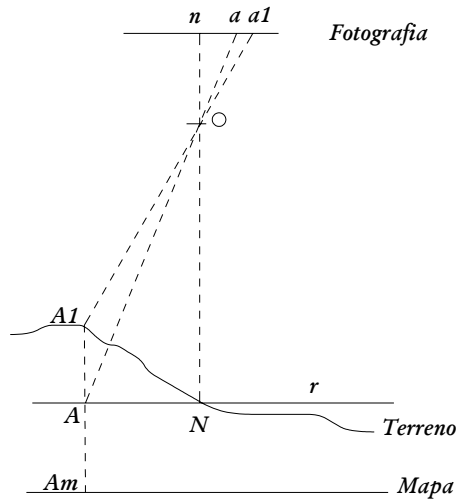


Figura (6.3) Comparación entre fotografía, terreno y mapa

El relieve del terreno causa el problema mayor, ya que produce un desplazamiento de la imagen de cada punto en la fotografía con respecto a un plano base o plano de referencia, sin embargo, este desplazamiento es también benéfico ya que permite calcular diferencias de altura entre puntos y dibujar curvas de nivel.

En la Fig. (6.3) puede observarse que dos puntos **A**, **A₁** que aparecen sobre una misma vertical tienen la misma representación en el mapa **Am** pero diferente posición en la fotografía, el desplazamiento **a a₁** que sufre el punto **A₁** en la fotografía con respecto al plano de referencia que pasa por el punto nadir **N** es función de la diferencia de altura del punto **A₁** con respecto a dicho plano de referencia **r**.

6.1.3 Equipo.

La tercera causa por la que se diferencia una fotografía y un mapa es debida al equipo empleado para tomar fotografías: avión, cámara y película.

Efectivamente, la geometría para obtención de la imagen de A_1 en la fotografía Fig. (6.3) se obtuvo suponiendo que la foto era exactamente vertical y que el objetivo era perfecto, en la práctica las dos suposiciones no son ciertas, la cámara nunca está en posición exactamente vertical ya que el avión cabecea o se inclina lateralmente.

La posición de la cámara con respecto al terreno tampoco es la deseada, generalmente los vientos desvían el avión de su posición proyectada de vuelo y la altura absoluta de vuelo no es constante.

En lo concerniente a la cámara misma, se ha supuesto que la foto es una proyección central, que todos los rayos pasan por un punto en un instante, y que la superficie de la película es plana, cuando en realidad el objetivo no es perfecto, presenta distorsiones que hacen que todos los rayos pasen por un mismo punto sino que son tangentes a una superficie cáustica desviándose de su posición teórica ideal.

Durante la exposición, la cámara se desplaza con respecto al terreno debido al movimiento del avión, de manera que ese tiempo de exposición hace que la proyección de puntos del terreno sobre la fotografía se obtenga a través de un centro perspectivo en movimiento, produciendo una pequeña deformación del punto proyectado.

6.2 DEFINICIÓN DE ELEMENTOS DE UNA FOTOGRAFÍA AÉREA.

Desde el punto de vista geométrico una fotografía aérea es una proyección central del terreno. En la Fig. (6.4) aparecen esquemáticamente representados por rectas, el terreno y el plano (negativo) de la fotografía, y por un punto el centro de proyección (O).

Cuando se habla de plano del negativo, generalmente se está refiriendo al plano de la fotografía, es decir, al plano donde se ha formado la imagen por exposición del terreno a través de un objetivo sobre una emulsión negativa (también es posible obtener una imagen positiva en el mismo plano empleando una película reversible para dispositivas).

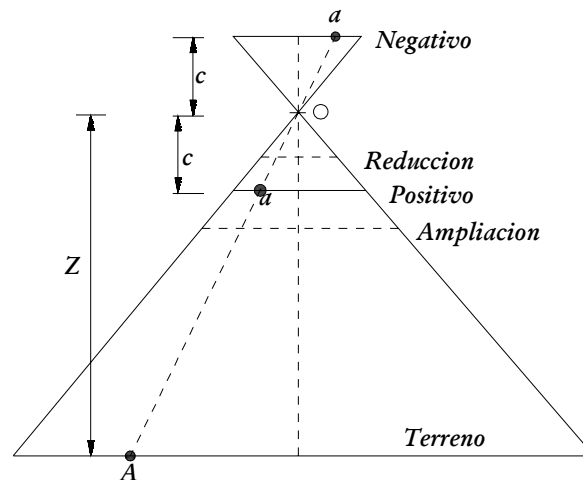


Figura (6.4) Definición de c y Z

- **Altura.** Es la distancia del centro de proyección (centro del objetivo) al plano del terreno y se representa por la letra " Z ".
- **Distancia principal.** Es la distancia del centro del objetivo al plano del negativo y se representa con la letra " c ".
- **Distancia focal.** El foco (imagen) de una lente se define como el punto sobre el eje principal donde se forma la imagen de un punto objeto ubicado sobre el eje en el infinito, La distancia focal es la distancia del foco al centro de la lente y se representa por la letra " f ".
- **Estación de exposición.** La posición que ocupa " O " en el espacio en el momento de la exposición recibe el nombre de estación.

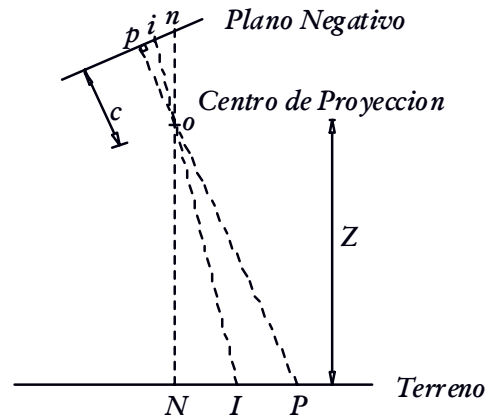


Figura (6.5) Definición de los puntos p, i, n

- **Punto nadir.** La intersección de la vertical que pasa por el centro de proyección con el plano negativo se llama nadir. Se representa con la letra “ n ” en la foto y “ N ” en el terreno.
- **Punto principal.** Es la proyección ortogonal del centro de proyección sobre el plano de la fotografía. Se le designa con la letra “ p ” en la foto y “ P ” en el terreno.
- **Isocentro.** Isocentro es el punto en que la bisectriz del ángulo determinado por la perpendicular al plano negativo y la vertical que pasan por el centro de proyección, corta al plano del negativo. Se indica con la letra “ i ” en la foto e “ I ” en el terreno.
- **Plano principal.** Es el plano vertical que contiene el eje óptico de la cámara.
- **Línea principal.** Es la intersección del plano de la fotografía con el plano principal (línea de máxima pendiente del plano de la fotografía).

- **Isolínea.** Es la línea del plano de la fotografía, perpendicular a la línea principal que pasa por el isocentro. Corresponde en la práctica a la intersección de una foto vertical y una inclinada, tomadas desde un mismo centro de proyección. En dicha línea las dos fotografías tienen la misma escala.
- **Línea de Vuelo.** Si las fotografías han sido tomadas con un recubrimiento longitudinal superior al 50 % será posible identificar el punto principal de cada foto en las fotografías adyacentes, La unión de pares sucesivos de puntos principales define la línea de vuelo, indicando la dirección del vuelo.

En cada fotografía se podrán determinar tres puntos (un punto principal y dos transferidos de las fotos adyacentes) que se encuentran sobre la línea de vuelo la cual no necesariamente será una recta. Si la línea efectiva de vuelo fue una curva, al unir sucesivamente los puntos principales, se obtiene una poligonal.

- **Ejes.** Cuando se habla de ejes sobre una fotografía, convencionalmente el eje **X** se refiere a la dirección de la línea de vuelo, el eje **Y** a la dirección de perpendicular sobre el plano de la foto y el eje **Z** al eje perpendicular a ambos.
- **Formato.** Es el marco o recuadro que limita la imagen fotográfica. Generalmente este formato es de forma cuadrada (23 X 23 cm. ó 18 X 18 cm.) o de forma rectangular.
- **Campo angular.** Es el ángulo en el vértice del tono de luz que atraviesa para formar la imagen, se mide sobre la diagonal del formato.
- **Ampliación y reducción.** La fotografía original es obtenida a una escala $1/f$ dada por la relación e/z . Del negativo original se puede obtener una copia positiva por copia de contacto o bien proyectando el negativo a una distancia

igual a "c"; si se desea una reducción se debe proyectar a una distancia inferior a la distancia principal y si se desea una ampliación debe aumentarse la distancia de proyección.

6.3 DEFORMACIONES GEOMÉTRICAS DE LAS FOTOGRAFÍAS

Se denominan deformaciones geométricas de las fotografías a un grupo de desplazamientos o imperfecciones que afectan la calidad de la imagen desde el punto de vista cuantitativo, influyendo por consiguiente en las mediciones que sobre las fotos se pretendan hacer.

Las deformaciones que se estudian a continuación son: desplazamiento debido al relieve, desplazamiento debido a la inclinación de la fotografía y distorsión.

6.3.1 Desplazamiento debido al relieve

Suponiendo que desde un punto "O" en el espacio se ha tomado una fotografía exactamente vertical Fig. (6.6) de un terreno plano horizontal (perfil de terreno I) un punto A_1 de dicho plano tendrá su correspondiente en el punto a_1 de la fotografía.

Si el terreno no es plano, si no que presenta diferencias de relieve como aparece en el perfil de terreno 2 y el punto A_1 no se encuentra sobre el plano de referencia si no en la posición A , a dicho punto A le corresponderá a como imagen en la fotografía.

La distancia a a_1 , es decir la distancia entre la imagen (a) de un punto del terreno y la imagen que tendría el mismo punto si se encontrara sobre el plano de referencia (a_1) se define como desplazamiento radial debido al relieve (Δr) del punto A con respecto al plano de referencia r .

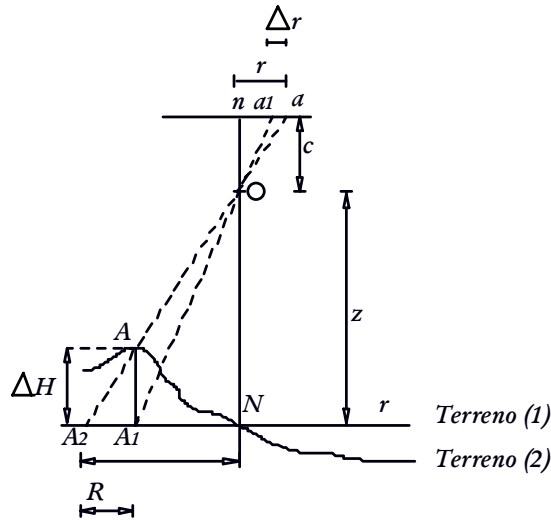


Figura (6.6) Desplazamiento debido al relieve

Aplicando el teorema de Thales (paralelas cortadas por un haz de rectas determinan segmentos proporcionales) se obtiene la relación:

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta R}{R} \quad [6.3.1]$$

Por semejanza de los triángulos A_2A_1A y A_2NO se deduce la relación

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta H}{Z} \quad [6.3.2]$$

Y finalmente de las siguientes [6.3.1] y [6.3.2] se deduce que

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta H}{Z} \quad [6.3.3]$$

Formula del desplazamiento debido al relieve en una foto

$$\Delta r = \frac{\Delta H}{Z} \cdot r \quad [6.3.4]$$

De la formula anterior puede deducirse que el desplazamiento debido al relieve Δr :

- a) Crece radialmente a partir del punto nadir proporcionalmente al valor r .
- b) Es directamente proporcional a la diferencia de altura ΔH con respecto al plano de referencia.
- c) Inversamente proporcional a la altura de vuelo Z sobre el plano de referencia.

La formula [6.3.4] puede ser aplicada para calcular el desplazamiento debido al relieve que puede aparecer en una determinada fotografía o inversamente para calcular la altura de vuelo y la escala de la foto.

El valor de r se mide sobre la fotografía en (mm.), Δr se mide por medio de una lupa milimetrada (1/10 mm.) y los valores de Z y ΔH se expresan en metros. El mayor inconveniente es que para poder medir Δr los puntos cuya diferencia de altura se desea calcular deben de estar sobre una misma vertical, de manera que solo se podrá aplicar la fórmula para calcular por ejemplo: altura de árboles, edificios, o similares.

6.3.2 Desplazamiento debido a la inclinación de la fotografía

Como se indico anteriormente, si se toma una fotografía exactamente vertical de un terreno plano Fig. (6.7) los puntos nadir n_1 , isocentro i_1 y principal p_1 coincidirán en uno solo y la imagen del punto A del terreno aparecerá en la posición a_1 . Si la fotografía se gira en un ángulo “ i ” alrededor del punto “ O ”, sobre la fotografía inclinada aparecerán los puntos n_2 , i_2 , y p_2 en diferente posición y la imagen del punto A del terreno aparecerá en la posición a_2 .

El punto i_2 representa en el corte de la Fig. (6.7) una recta común a la fotografía vertical y a la foto inclinada. Dicha línea recibe el nombre de isolínea ya que representa la misma línea del terreno y es común a la foto inclinada y a la vertical

(igual escala). Esta línea común a las dos fotos puede corresponder a una línea recta en el terreno si éste es plano, o una línea curva si el terreno es ondulado.

El desplazamiento debido a la inclinación es radial a partir del punto isocentro, sin embargo, ese desplazamiento no sigue una relación lineal como el caso del desplazamiento debido al relieve sino que es nulo para puntos sobre la isolínea, es positivo para puntos que se encuentran a un lado de dicha línea y negativo para puntos al otro lado.

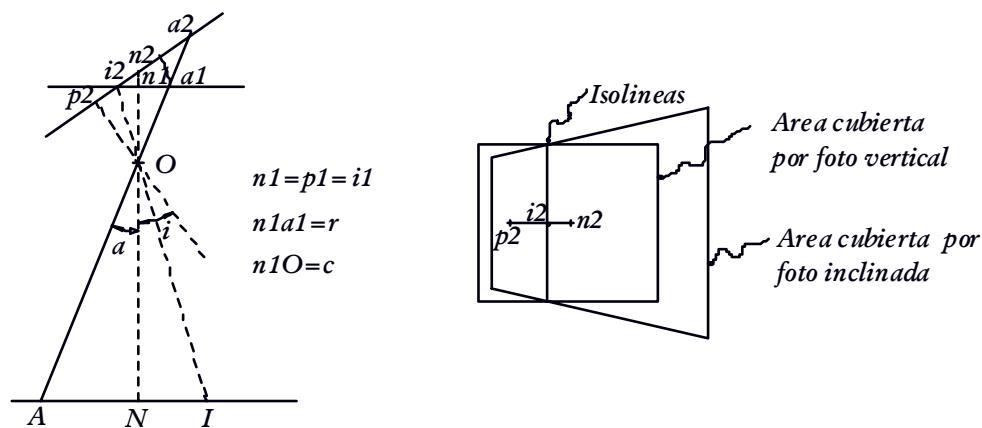


Figura (6.7) Desplazamiento debido a la inclinación de la fotografía

El desplazamiento radial máximo calculado para puntos sobre una perpendicular a la isolínea y que pase por el isocentro, en el lado de los desplazamientos positivos es Fig. (6.7)

- Δr_m = desplazamiento radial máximo
 i = ángulo de inclinación de la fotografía
 r = $p_1 a_1$ = distancia radial al punto principal sobre la foto vertical

$$\operatorname{tg} a = \frac{r}{c} \quad [6.3.5]$$

$$\Delta r_m = i_1 a_2 - i_2 a_1 = (p_2 a_2 - p_2 i_2) - (i_2 n_1 + n_1 a_1) \quad [6.3.6]$$

$$p_2 a_2 = c \cdot \operatorname{tg}(i + a) \quad [6.3.7]$$

$$p_2 i_2 = c \cdot \operatorname{tg} i / 2 \quad [6.3.8]$$

$$i_2 n_2 = c \cdot \operatorname{tg} i / 2 \quad [6.3.9]$$

$$n_1 a_1 = c \cdot \operatorname{tg} a \quad [6.3.10]$$

Desplazamiento radial máximo Δr_m

$$\Delta r_m = c [\operatorname{tg}(a + i) - 2 \operatorname{tg} i / 2 - \operatorname{tg} a] \quad [6.3.11]$$

Cuando el punto se encuentra sobre cualquier otra línea, la variación será además función del complemento del ángulo que forma la recta radial al punto (trazada desde el isocentro) con la isolínea.

6.3.3 Distorsión.

El objetivo de una cámara aérea es una lente compuesta, afectada por imperfecciones que reducen la calidad de la imagen, tanto desde el punto de vista cualitativo (aberración esférica, coma, astigmatismo, curvatura de campo y aberración cromática), como cuantitativo (distorsión). El error de distorsión afecta la posición de los detalles en la imagen pero no su calidad.

Si se supone la fotografía un punto **A** tomada desde el centro de proyección **O**, Fig. (6.8) la imagen teórica de **A** debe aparecer en la fotografía en la posición **a**, siendo **Aa** una línea recta. En la práctica no sucede así ya que el rayo **AO**, al atravesar el objetivo, sufre una desviación conocida con el nombre de distorsión y la imagen de **A** se desplaza a la posición **a₁**.

Este error de distorsión puede descomponerse en dos direcciones perpendiculares, una dirección radial a partir del punto principal que corresponde a la distorsión

radial (aa_1) y una perpendicular a esta dirección conocida como distorsión tangencial (aa_2)

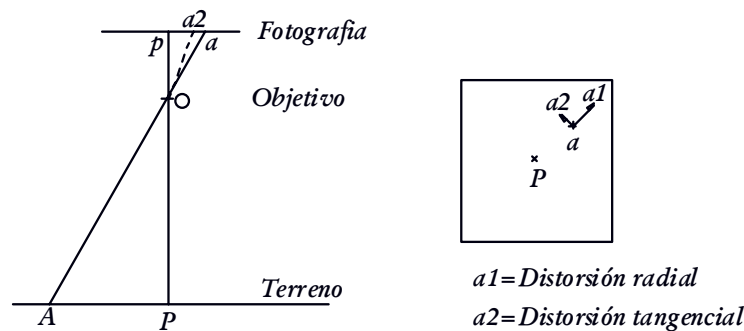


Figura (6.8) Desplazamiento debido a la inclinación de la fotografía

El error de distorsión radial que desplaza un punto de su posición ideal en la fotografía, radialmente a partir del punto principal puede ser controlado parcialmente por el diseñador del objetivo y en general se trata de hacerlo tan pequeño como sea posible.

La distorsión tangencial es independiente del diseño de la lente y se produce por un centraje imperfecto de sus elementos, es decir, que es producido por un error en el proceso de manufactura.

La magnitud que puede alcanzar el error de distorsión tangencial, en comparación con el de distorsión radial es tan pequeña que generalmente no es tomada en cuenta y solo se corrige en trabajos analíticos de alta precisión.

6.4 CLASIFICACIÓN DE FOTOGRAFÍAS AÉREAS.

- **Clasificación en función del campo angular del objetivo.** De acuerdo al valor del campo del objetivo con que se toman las fotografías, éstas podrán ser clasificadas en normales, granangulares o supergranangulares según que el campo sea de 60° , 90° ó 120° .

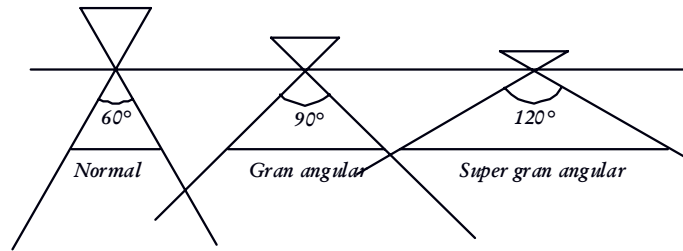


Figura (6.9) Desplazamiento debido a la inclinación de la fotografía

- **Clasificación en función de la inclinación del eje de la cámara.** De acuerdo a la desviación del eje de la cámara con respecto a la vertical, las fotografías aéreas podrán clasificarse en verticales, inclinadas y muy inclinadas.

Se dice que una fotografía es vertical cuando la inclinación es inferior a $+3^\circ$, una fotografía es inclinada cuando el ángulo de inclinación es superior a 3° pero no aparece la línea de horizonte en la fotografía, se subdividen a su vez en oblicuas y convergentes. Cuando el horizonte aparece en la imagen la fotografía se dice que es muy inclinada. En el caso particular en que el eje de la cámara es horizontal (90° con la vertical) la fotografía se llama terrestre.

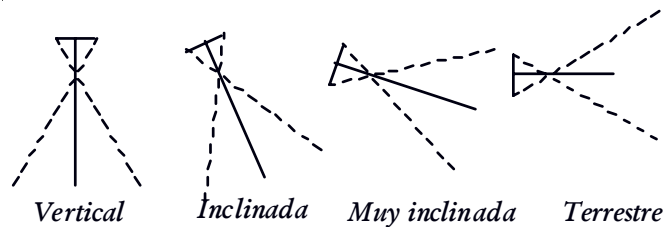


Figura (6.10) Clasificación de fotografías en función de la inclinación del eje de la cámara

6.5 ESCALA DE FOTOGRAFÍAS.

La escala de una fotografía está determinada por la relación entre una distancia **NA** medida en el terreno y su correspondiente **na** medida en la fotografía.

$$\frac{1}{E} = \frac{na}{NA} \quad [6.5.1]$$

Comparando los triángulos semejantes **Ona** y **ONA** de la Fig. (6.11) puede deducirse que

$$\frac{1}{E} = \frac{na}{NA} = \frac{c}{Z} \quad [6.5.2]$$

Por lo que también se pueden definir la escala de fotografías aéreas como la relación entre la distancia principal y la altura de vuelo **Z** sobre el terreno.

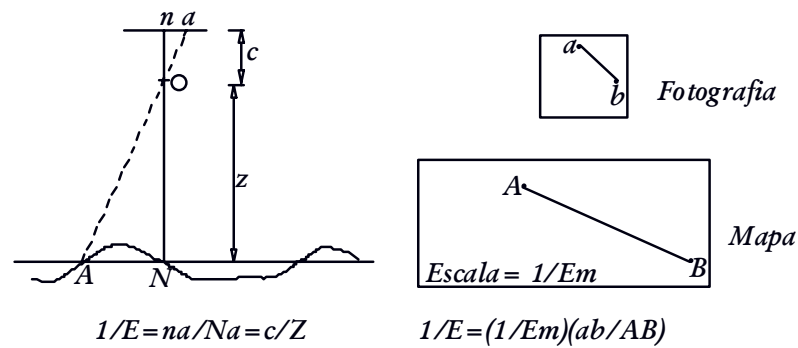


Figura (6.11) Escala de fotografías aéreas

Los datos necesarios para calcular la escala por éste método **c** y **Z** aparecen impresos en la fotografía; sin embargo, la altura de vuelo se refiere normalmente a la altura absoluta de vuelo (sobre el nivel del mar) de manera que para hallar la altura de vuelo efectiva sobre el terreno será necesario restarle la altura media del terreno (**Hm**).

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{Z_{abs} - Hm} \quad [6.5.3]$$

La escala de una fotografía $1/E$ también puede ser calculada comparando una distancia medida en la foto **ab** y su correspondiente **AB** medida sobre un mapa de escala conocida $1/Em$, pero debe recordarse que la medición de distancias realizadas sobre las fotos, estará afectada por el desplazamiento debido al relieve (si los puntos cuya distancia se mide no están sobre un mismo plano).

$$\frac{1}{E} = \left(\frac{1}{Em} \right) \cdot \left(\frac{ab}{AB} \right) \quad [6.5.4]$$

De acuerdo a las expresiones [6.5.2] Y [6.5.3] resulta que a cada plano de referencia corresponderá una escala diferente, por eso, al referirse a la escala de una foto es conveniente hablar de escala media.

6.6 MEDICIÓN DE DISTANCIAS Y ÁREAS SOBRE FOTOS AÉREAS.

El problema de calcular distancias (rectas o curvas) y áreas (triángulos, cuadriláteros o polígonos), en base a fotografías aéreas puede resolverse en forma satisfactoria si se toman en cuenta los siguientes factores: corrección de los puntos de línea o área, cálculo de la escala media y cálculo de la distancia o área.

6.6.1 Corrección de los puntos que definen la línea o área.

De las tres deformaciones geométricas estudiadas para fotografías aéreas, en el caso de cámaras aéreas modernas y vuelos correctamente realizados, los errores de inclinación y distorsión serán realmente despreciables.

Cabe únicamente corregir el desplazamiento debido al relieve de acuerdo a la precisión deseada. En general, cuando las diferencias relativas de altura son inferiores al 1% de la altura de vuelo Z no es necesario corregir el desplazamiento debido al relieve.

Si estas diferencias relativas de altura son mayores, habrá que corregir radialmente a partir del punto nadir, el desplazamiento debido al relieve r calculado mediante la expresión [6.3.4]

$$\Delta r = \frac{\Delta H}{Z} \cdot r$$

O mediante la expresión:

$$\Delta r = \frac{\Delta Par}{Pr + \Delta Par} \cdot r \quad [6.6.1]$$

La, Lr = Lecturas con la barra de paralelaje para los puntos **A** y **R**

En que:

ΔPar = $La - Lr$ = diferencia de paralelaje

Pr = $p'_1 p''_2 - r' r''$ = paralelaje absoluto del punto **R**

R = distancia radial medida en la foto

6.6.2 Cálculo de la escala media.

En base a los datos disponibles y al plano de referencia empleado para corregir el desplazamiento debido al relieve, se calcula la escala de las fotos para el desplazamiento de referencia (o una escala media) $1/E$ utilizando las fórmulas [6.5.1] a [6.5.4]. Como resultado de estas dos etapas deben tenerse todos los puntos dibujados a una misma escala y conocer en la forma más exacta posible dicha escala.

6.6.3 Cálculo de distancias y áreas.

- **Cálculo de distancias**

La distancia o longitud **L** en el terreno es:

$$L = l \cdot E \quad [6.6.2]$$

En que:

l = Sumatoria de longitudes con regla o curvimetro sobre la foto

E = Módulo escalar de la escala de la foto

- **Cálculo de áreas**

El área **A** calculada a escala de terreno es:

$$A = Af \cdot E^2 \quad [6.6.3]$$

En que:

Af = área calculada a escala de la foto (mm^2) o (m^2)

E = módulo escalar de la escala de la foto

El valor de Af se puede calcular de diversas maneras:

- Como sumatoria de figuras geométricas

$$Af = \sum \text{ de figuras geométricas (triángulos, trapecios, etc.) } [6.6.4]$$

- Utilizando una red de puntos

$$Af = N \cdot d^2 \quad [6.6.5]$$

En que:

N = número de puntos

d = distancia entre pares de puntos consecutivos (mm)

- Utilizando un papel milimetrado

$$Af = NM \quad [6.6.8]$$

En que:

NM = número de mm^2 que caben en dicha área

- Empleando el planímetro polar

$$Af = Lec \cdot K \quad [6.6.9]$$

En que:

Lec = lectura obtenida en el planímetro

K = factor de conversión para reducir la lectura a mm^2

- Empleando las coordenadas planas de los vértices de un polígono

Se miden sobre un papel milimetrado las coordenadas (X,Y) correspondientes a los **n** vértices del polígono (agregando al final las coordenadas del primer punto como punto n+1). Se calcula el área mediante una de las siguientes fórmulas:

$$Af = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (X_i - X_{i+1}) * (Y_i + Y_{i+1}) \quad [6.6.10]$$

$$Af = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (X_i * Y_{i+1} - X_{i+1} * Y_i) \quad [6.6.11]$$

6.7 ELEMENTOS GEOMÉTRICOS DE LA VISIÓN BINOCULAR

Cuando se observa un punto **M** Fig. (6.12) ubicado en el espacio (sobre el plano medio de la cabeza) los músculos de cada ojo hacen girar el globo ocular alrededor de su centro de rotación dirigiendo los ejes hacia el punto **M**. En ese momento se forman las imágenes de dicho punto en **m₁** y **m₂** en el centro de las fóveas correspondientes.

Siendo **O₁** y **O₂** los centros ópticos de los ojos, “**d**” la distancia interpupilar (o base ocular), y **D** la distancia de observación al punto **M**, el ángulo de convergencia “**a**” (o ángulo paraláctico), expresado en radianes será:

$$a = \frac{d}{D} \quad [6.7.1]$$

A cada distancia de observación corresponde un ángulo de convergencia diferente y por experiencia del observador, es posible tener idea de la distancia a que se encuentra un objeto en base al valor del ángulo “**a**”.

Al mismo tiempo que los músculos motores convergen los ejes hacia el objeto observado, las fibras musculares de la zona ciliar dan al cristalino la curvatura requerida para acomodar a la distancia D (enfoque del objeto).

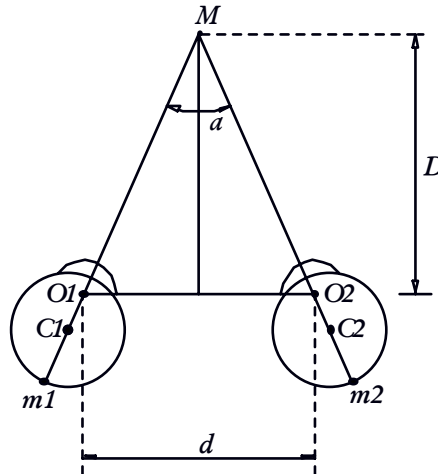


Figura (6.12) Elementos de visión binocular

Todos los músculos trabajan en forma simultánea, es decir, que realizan la acomodación y convergencia al mismo tiempo para un determinado objeto, sin embargo es posible separar las dos funciones para ser realizadas independientemente. El ángulo “ a ” permite tener idea de la distancia a que se encuentra un objeto y por consiguiente de su relieve, sin embargo debido a las pequeñas variaciones de dicho ángulo no es posible apreciar el relieve con precisión. Es necesario un segundo elemento de apreciación perspectiva que complemente la información suministrada por el ángulo de convergencia.

Si se observa por ejemplo una pirámide de base cuadrada Fig. (6.13) con el eje ubicado en el plano medio de la cabeza del observador se obtendrá dos perspectivas diferentes P_1 y P_2 . Cada ojo recibe una sola de estas imágenes y la dualidad de impresión constituye un nuevo elemento de apreciación de relieve.

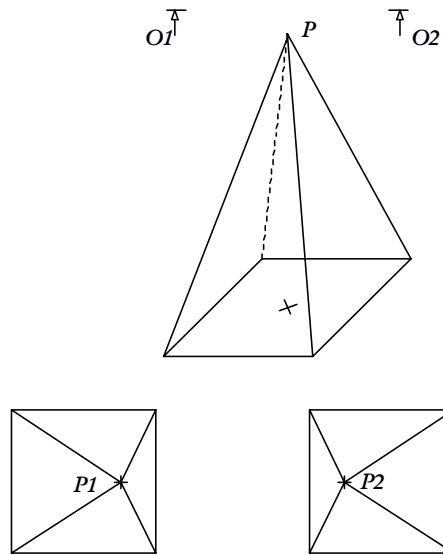


Figura (6.13) Observación de una pirámide de base cuadrada desde dos puntos diferentes.

Podría preguntarse por qué no se ven dos imágenes de un objeto, si éste es observado con dos ojos, la respuesta es sencilla, la imagen del punto **M** en cada retina (**m₁** y **m₂**) envía al cerebro las impresiones luminosas recibidas y la experiencia nos enseña que el punto **M** no es doble sino simple ya que existe una reacción entre las fibras nerviosas que transmiten el flujo de energía luminosa de puntos correspondientes, es decir puntos observados bajo un mismo ángulo de convergencia, que hace que la imagen formada sea simple.

6.8 REQUISITOS PARA LA OBSERVACIÓN ESTEREOSCÓPICA DE FOTOGRAFÍAS.

En visión binocular normal a través de enfoque y convergencia, cada ojo envía al cerebro una imagen diferente de un mismo objeto que por haber sido formado en puntos correspondientes de la fovea produce la imagen del objeto simple.

En visión binocular artificial, se emplean dos fotografías tomadas desde puntos diferentes, cada una es observada monocularmente (por ejemplo la foto izquierda

con el ojo izquierdo y la derecha con el ojo derecho) llegando al cerebro dos imágenes diferentes de un mismo objeto, produciendo una imagen tridimensional.

En dichas imágenes deber ser posible la acomodación y la convergencia en forma similar a como ocurre en el caso de visión binocular normal por lo cual las fotografías deben satisfacer las siguientes condiciones:

- **La relación B/Z debe estar comprendida entre 0.02 y 2.**

Si dicha relación es superior a 2 las imágenes serán muy diferentes y resultara casi imposible formar una sola imagen tridimensional con ellas. Por el contrario si la relación es inferior a 0.02 significa que entre las imágenes no existe diferencia apreciable y la visión tridimensional será difícil. Los límites establecidos son arbitrarios. La relación $B/Z=0.6$ es el valor mas utilizado.

- **La diferencia de escalas entre las fotografías debe ser inferior a $\pm 15\%$.**

Fotografías con diferencias inferiores a 10% fácilmente pueden ser observadas en tercera dimensión pero para valores superiores, las diferencias en tamaño de las imágenes son demasiado grandes.

- **Los ejes de la cámara, en el momento en que se tomaron las fotos, deben pertenecer al mismo plano.**

En fotografías inclinadas (oblicuas o convergentes) los ejes deben cortarse en el espacio y en el caso de fotografías verticales, como los ejes son verticales y por consiguiente paralelos, siempre pertenecerán a un plano.

6.9 TEORÍA EPIPOLAR.

Por medio de la teoría epipolar se explica la forma como debe ser colocado un par de fotografías a fin de utilizar estereoscopios en los cuales las fotografías se colocan planas sobre una mesa.

En las figuras (6.14a y 6.14b) se consideran dos fotografías inclinadas que han sido tomadas desde dos puntos O_1 y O_2 .

La primera figura representa en un corte esquemático los centros de proyección O_1 y O_2 , los planos positivos P_1 y P_2 de las fotografías y el terreno.

La segunda figura representa en perspectiva la misma situación pero se ha invertido la figura a fin de visualizar mejor los elementos que aparecen en los planos P_1 y P_2

La línea que une los centros perspectivos O_1 y O_2 se llama eje epipolar. El eje epipolar corta a los planos positivos en dos puntos K_1 y K_2 que reciben el nombre de epipolos.

Los planos definidos por el eje epipolar O_1 y O_2 y por un punto cualquiera del terreno R se llaman planos epipolares O_1O_2R .

Las líneas de intersección de los planos epipolares con los planos positivos de las fotografías reciben el nombre de líneas epipolares, por ejemplo K_1r_1 y K_2r_2 siendo r_1 y r_2 las imágenes del punto R del terreno en las fotografías.

Cuando se hace variar el punto R del terreno, por ejemplo a la posición Q se observará que las líneas epipolares forman un haz de rectas con centro en K_1 y K_2 .

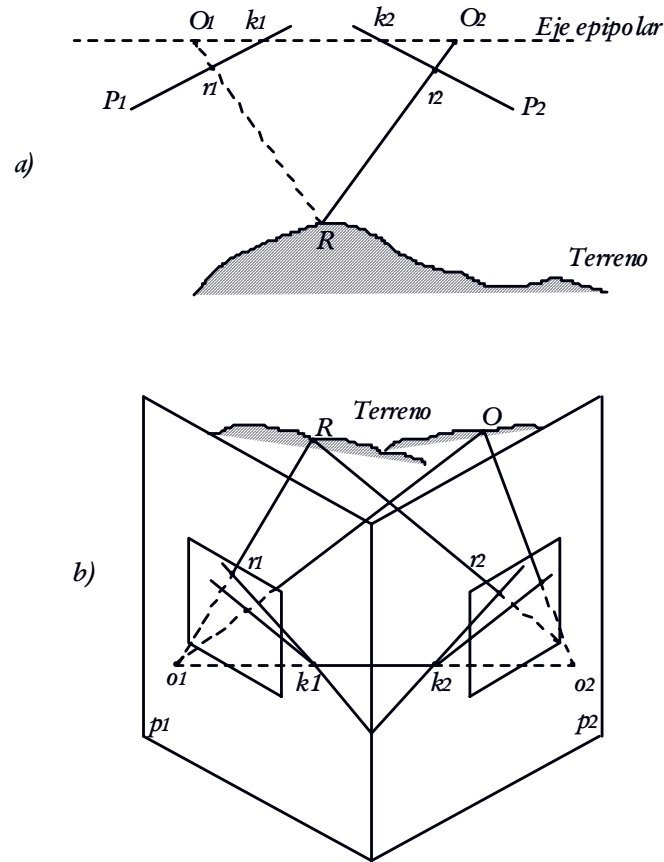


Figura (6.14) Definición de eje epipolar, epipolos y líneas epipolares

- a) Corte
- b) Perspectiva

En visión estereoscópica normal, el punto R del terreno es observado según un plano epipolar O_1O_2R . En visión estereoscópica artificial el punto R del terreno no ha sido reemplazado por las imágenes de R en las fotografías r_1 y r_2 y para hacer la observación según planos epipolares los puntos $O_1 O_2 r_1$ y r_2 deben pertenecer a un plano.

En la Fig. (6.14b) puede observarse que los puntos $O_1 O_2 R$ determinan un plano, y que ha dicho plano pertenecen también los puntos K_1, K_2, r_1 y r_2 , es decir que la condición que los puntos $O_1 O_2 r_1$ y r_2 pertenecen a un plano puede sustituirse por la

condición que el eje epipolar $O_1 O_2$ y las líneas epipolares $K_1 r_1$ y $K_2 r_2$ pertenezcan a un plano.

Esta condición puede ser satisfecha si:

1. Se da a las dos fotografías la misma posición relativa que tenían en el momento de la exposición.
2. Si las fotografías deben colocarse sobre una mesa para ser observadas bajo un estereoscópico, las líneas epipolares $K_1 r_1$ y $K_2 r_2$ deben colocarse sobre la misma recta y que dicha recta sea además paralela al eje epipolar $O_1 O_2$ (base ocular)

Geométricamente puede decirse que si las líneas epipolares coinciden en una misma recta sobre el plano de la mesa, como el eje epipolar (o base ocular) es una recta paralela al plano de la mesa, la condición necesaria y suficiente para que ambas rectas pertenezcan a un plano es que sean paralelas. Fig. (6.15).

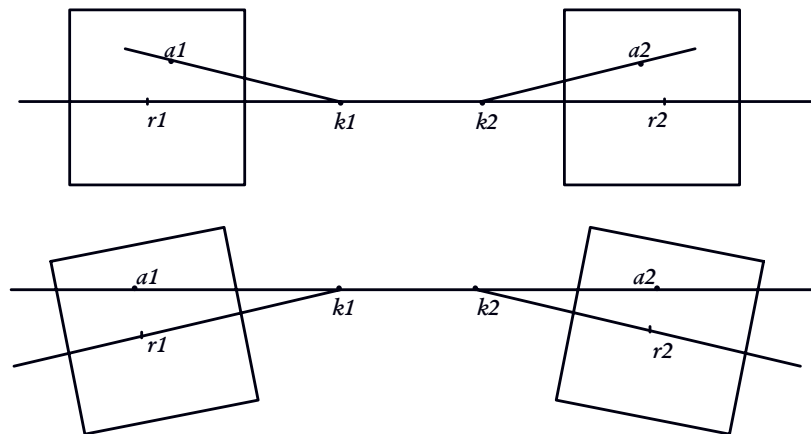


Figura (6.15) Fotografías inclinadas orientadas para la observación estereoscópica de puntos R y A, respectivamente

Para observar estereoscópicamente el punto **R** será necesario ubicar las líneas epipolares $K_1 r_1$ y $K_2 r_2$ sobre una misma recta y que dicha recta sea paralela a la base del estereoscópico.

Cuando se cambia el punto **R**, por otro punto **A**, cambiarán las líneas epipolares y será necesario girar las fotografías a fin de mantener la misma condición. Fig. (6.15)

Para el caso de las fotografías verticales el problema se simplifica. Si se considera un par de fotos verticales Fig. (6.16) se observará que el eje epipolar es paralelo al plano de las fotografías y que por consiguiente el epipolo es un punto impropio de la fotografía definido por la dirección de vuelo K_{∞} tiene la dirección de la línea de vuelo.

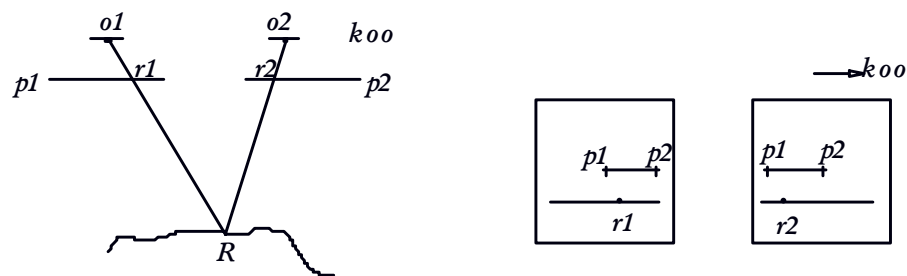


Figura (6.16) Observación estereoscópica de fotografías verticales

Si por r_1 y r_2 se trazan las líneas epipolares, podrá observarse que dichas líneas forman un haz de rectas paralelas a la línea de vuelo, por consiguiente cuando se trata de fotografiar verticales, si se colocan las líneas de vuelo sobre una misma recta, automáticamente se tendrán todas las líneas epipolares coincidiendo sobre rectas, para la observación de fotografías verticales bastará colocar el estereoscopio paralelo a la línea de vuelo y desplazarlo paralelo a si mismo, de esta forma la base siempre será paralela a las líneas epipolares y la observación se realizará según planos epipolares.

6.10 MÉTODOS PARA OBSERVACIÓN ESTEREOSCÓPICA DE FOTOGRAFÍAS.

La observación de un par estereoscópico de fotografías puede realizarse de tres maneras:

- **Observación con ejes cruzados.**

Consiste en mirar con el ojo derecho la fotografía izquierda y con el ojo izquierdo la fotografía derecha. Fig. (6.17)

La acomodación y convergencia son realizados en diferentes puntos, por lo tanto este sistema produce mucha fatiga, ya que ambas funciones deben ser realizadas en forma independiente.

- **Observación con ejes convergentes.**

Es el método normal de observación y el más descansado. Como las dos imágenes deben estar superpuestas será necesario hacer la observación por medio de filtros para que cada ojo reciba una imagen. Los sistemas más empleados son: Anaglifo, que emplea filtros de colores complementarios (verde y rojo); luz polarizada (con filtros que polarizan en dos direcciones perpendiculares) y luz (alternadores) que emplea obturadores giratorios los cuales permiten la observación alternada de las imágenes izquierda y derecha. Cada ojo observa una sola imagen. Fig. (6.17).

- **Observación con ejes paralelos.**

El método en general produce cansancio ya que los ejes de los ojos convergen en el infinito, mientras que la acomodación tiene lugar a una distancia finita. Para que acomodación y convergencia se realicen en el mismo punto, se agregan lentes y se colocan las fotografías a una distancia igual a la distancia focal; de esta manera acomodación y convergencia tiene lugar en el infinito.

De acuerdo a lo anterior, se han diseñado dos tipos principales de estereoscopios; el estereoscopio de bolsillo y el estereoscopio de espejos, en los cuales la observación se hace según ejes paralelos.

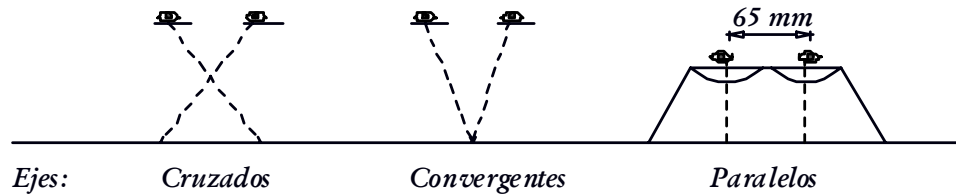


Figura (6.17) Métodos para observación estereoscópica de fotografías

6.11 PARALELAJE Y MARCA FLOTANTE.

6.11.1 Principio de la Marca Flotante.

Si al observar un par estereoscópico de fotografías se colocan marcas idénticas (o complementarias) sobre puntos homólogos de las fotos, las dos marcas de medida se verán fusionadas en una sola marca flotante, aparentemente formando parte de la imagen y a la misma altura que la zona que lo rodea.

Moviendo las marcas artificiales, una respecto a la otra, en dirección paralela a la línea de vuelo (para fotografías verticales de una misma faja) se verá que la marca flotante sube o baja con respecto al terreno.

En la Fig. (6.18) puede observarse que cuando las marcas de medida están en las posiciones m' y m'' la marca flotante aparece en las posición M , pero si m' se desplaza hacia la izquierda hasta la posición m_1 en punto M descenderá hasta la posición M_1 . A un desplazamiento ΔX en dirección X (paralela a la línea de vuelo) de las marcas de medida, corresponde una diferencia de altura ΔH de la marca flotante.

Basándose en este principio es posible medir por medio de un barra de paralelaje diferencias ΔX y utilizando la fórmula de paralelaje se calculan diferencias de altura ΔH .

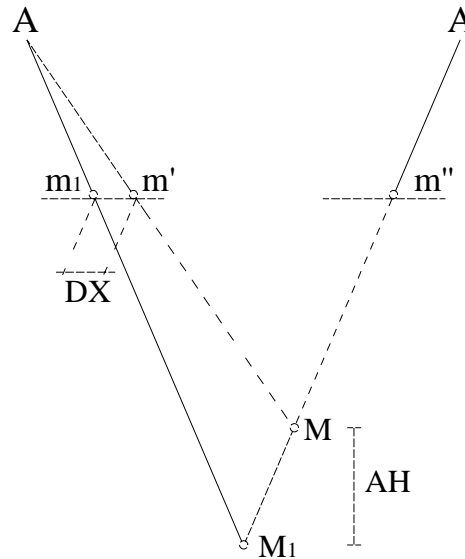


Figura (6.18) Principio de la marca flotante

Los tipos de marcas flotantes correspondientemente empleadas son: marcas idénticas (círculos, cruces, etc.), marcas complementarias (semicírculos), y marcas tridimensionales.

Las marcas pueden ser grabadas sobre el material transparente (vidrio o plástico) para ser colocadas sobre puntos homólogos de las fotografías o bien proyectadas óptimamente (por ejemplo: estereoscopio Hilger y Watts con medición óptica de paralelajes).

6.11.2 Paralelaje

Paralelaje esteresocópica o paralelaje absoluta es el cambio en posición de la imagen de un mismo punto en dos fotografías, producido por el cambio de posición de la cámara.

Si desde dos puntos O_1 y O_2 Fig. (6.19) se toman fotografías de un punto A ubicado sobre la perpendicular a la recta determinada por los puntos principales P_1 y P_2 por el punto P_2 se obtendrán las imágenes a' y a'' del punto A .

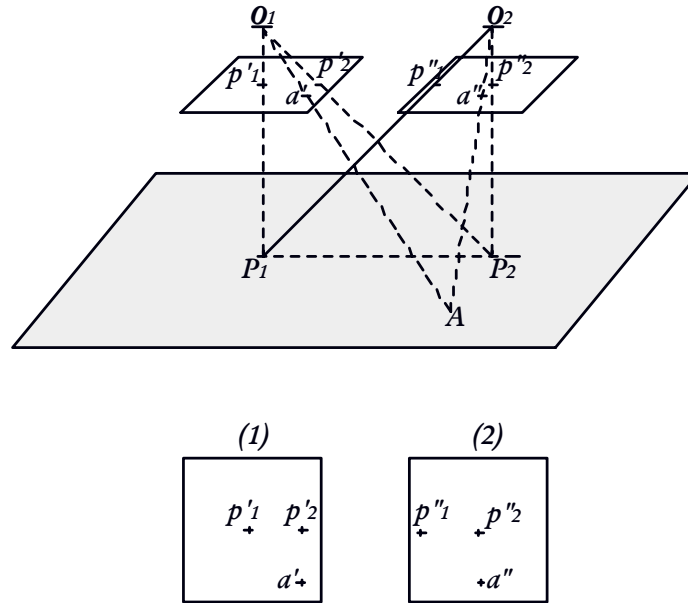


Figura (6.19) Definición de paralelaje absoluta

El punto a' aparece en la parte derecha de la fotografía (1), pero su homólogo a'' aparece en el centro de la fotografía (2). El desplazamiento que presentan estos puntos con respecto a los puntos principales es el paralelaje estereoscópica (P) y puede ser calculada, de acuerdo a la definición, mediante la relación:

$$P_a = p'_1 p''_2 - a' a'' \quad [6.11.1]$$

El paralelaje del punto principal de la foto izquierda es:

$Pp_1 = p'_1 p''_2 - p'_1 p''_1 = p''_1 p''_2$ = base de la fotografía derecha y en forma similar se puede calcular al paralelaje absoluta del punto principal de la foto derecha obteniendo:

$$Pp_2 = p'_1 p''_2 - p'_2 p''_2 = p'_1 p'_2$$
 = base de la fotografía izquierda.

Para calcular con precisión la paralelaje absoluta de un punto se deben orientar las fotografías y luego hallar la diferencia entre valores $p'_1p''_2$ y $a'a''$ medidos con una precisión de medio milímetro. Si se desea emplear solo un valor aproximado de dicha paralelaje es posible utilizar el valor de la base de una de las fotografías.

Antes de explicar el cálculo de diferencias de altura a partir de valores de paralelaje, es necesario relacionar primeramente la paralelaje absoluta definida anteriormente con la posición altimétrica de puntos en el espacio.

Para hallar una primera relación gráfica se fotografía una pirámide Fig. (6.20) de base cuadrada **ABCD** y vértice **T** desde dos puntos **O₁** y **O₂** situados sobre un plano de la pirámide y equidistantes de **T**. Al proyectar los vértices **ABCDT** de la pirámide desde el centro de proyección **O₁** se obtiene los puntos **a', b', c', d'** y **t'** en la fotografía y al rebatir dicho plano se verá que los puntos **a', b', c'** y **d'** forman un cuadrado y que el vértice **t'** se encuentra sobre la mediatriz del lado **a' d'** pero desplazado hacia la derecha del centro.

En forma similar, al proyectar la pirámide desde **O₂** se obtendrán los puntos **a'', b'', c'', d''** y **t''** en que **t''** está desplazado hacia la izquierda.

A efectos de medir paralelajes absolutas se incluyen también en el gráfico los puntos principales $p'_1p''_2$.

De acuerdo a la formula para el cálculo de paralelajes absolutas, siendo las distancias $a'a''=b'b''=c'c''=d'd''$ se deduce que las paralelajes de los cuatro puntos de la base son iguales $P_a=P_b=P_c=P_d$.

Como conclusión puede afirmarse que puntos que se encuentran a igual altura tiene la misma paralelaje absoluta.

La distancia $t't''$ es inferior a $a'a''$ o sea que P_a es menor que P_t , es decir que a puntos más altos corresponde una paralelaje absoluto mayor.

$$P_a = P_b = P_c = P_d < P_t$$

En la Figura (6.20) aparecen las fotografías representando las imágenes de la pirámide en su posición original, produciéndose la imagen estereoscópica dibujada a la izquierda.

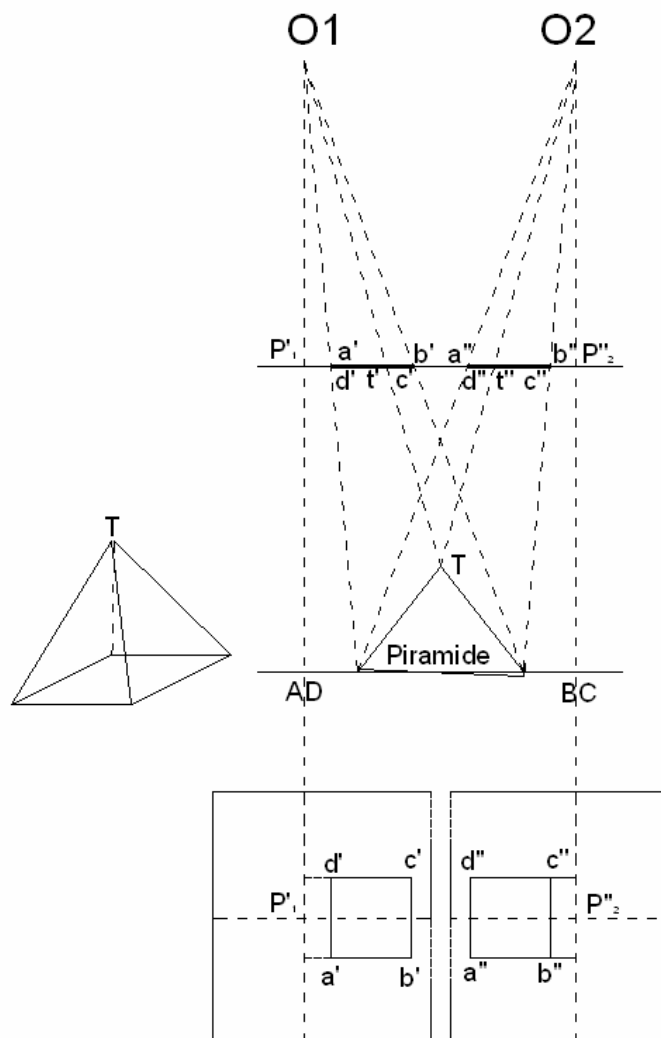


Figura (6.20) Proyección de la pirámide ABCDT desde los centros de proyección O_1 y O_2

Si las fotografías son giradas 90° (en sentido horario) Fig. (6.21) como t' y t'' se encuentran en el centro de las respectivas figuras, la componente en dirección X (dirección de la línea de vuelo) de la distancia $t't''$ será igual a las distancias $a'a''=b'b''=c'c''=d'd''$ y las paralelajes absolutos de los cinco puntos serán iguales $P_a=P_b=P_c=P_d=P_t$, es decir que los cinco puntos se encuentran en un mismo plano y se verá una imagen plana. (éste caso es puramente teórico y presenta el inconveniente de la paralelaje P_y). En la práctica correspondería a observar estereoscópicamente dos fotografías idénticas.

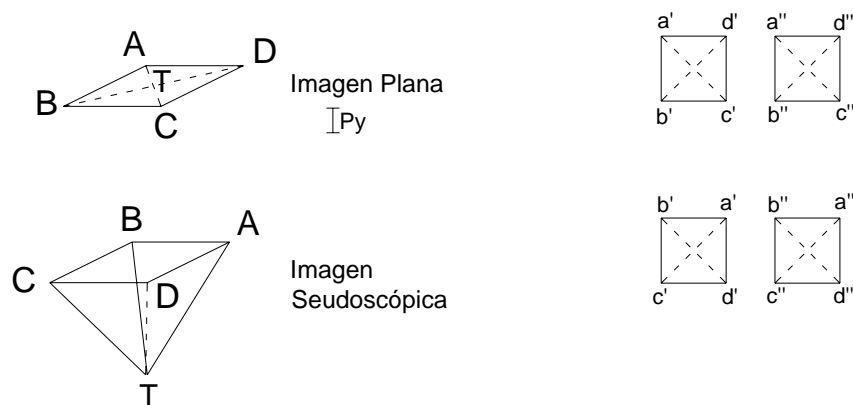


Figura (6.21) Imagen plana e imagen seudoscópica

Aplicando a la figura anterior un nuevo giro de 90° en sentido horario la distancia $t't''$ resultante, será mayor que $a'a''$ en cuyo caso se cumplirá la relación:

$$P_a = P_b = P_c = P_d > P_t$$

La imagen se verá invertida (visión seudoscópica) y el vértice aparecerá más bajo que la base de la pirámide.

En la primera parte de la Fig. (6.21) corresponderá al caso teórico de observar estereoscópicamente dos fotografías iguales y no tiene ninguna utilidad práctica. El segundo caso de las Fig. (6.21) puede resultar útil, por ejemplo, para dibujar drenajes

o líneas divisorias de aguas, ya que la invertir el orden de las fotografías se obtendrá una imagenseudoscópica en la que los ríos correrán por las partes altas del terreno y las divisorias de aguas se verán como valles.

6.11.3 Diferencia de paralelaje.

Se demostró gráficamente que puntos de igual altura tienen el mismo valor de paralelaje absoluta y que a mayor altura corresponde una paralelaje mayor.

Se define la deferencia de paralelaje entre dos puntos **A** y **R** como la diferencia entre sus paralelajes absolutas.

$$\Delta Par = Pa - Pr = (p'_1 p''_2 - a' a'') - (p'_1 p''_2 - r' r'') = r' r'' - a' a'' \quad [6.11.2]$$

La diferencia de paralelaje entre dos puntos puede ser calculada de acuerdo a la expresión [6.11.2] mediante la diferencia entre la distancia entre dos puntos homólogos. Estas distancias pueden ser medidas directamente con una regla, pero como se verá posteriormente, es necesario medir esta diferencia de paralelajes con gran precisión (centésimas de milímetro) a fin de calcular mediante la fórmula de paralelaje, la diferencia de altura correspondiente a los puntos **A** y **R**.

6.11.4 Barra de Paralelaje.

Para calcular la diferencia de distancias entre pares de puntos homólogos, se emplea una barra de paralelaje, constituida por dos cristales (en los que están grabadas las marcas de medida) unidos por un soporte metálico de longitud variable y un tornillo micrométrico. Fig. (6.22)

La barra de paralelaje se emplea en combinación con un estereoscopio de espejos para calcular la diferencia de distancias entre pares de puntos homólogos. El tornillo situado a la izquierda de la barra permite ajustar la distancia entre las marcas de medida a la base del estereoscopio y mediante el tornillo micrométrico de la derecha se desplaza una marca respecto a otra con movimiento lento, hasta que la marca flotante se observe a la misma altura que el terreno (el movimiento de la marca flotante siempre debe ser descendente).

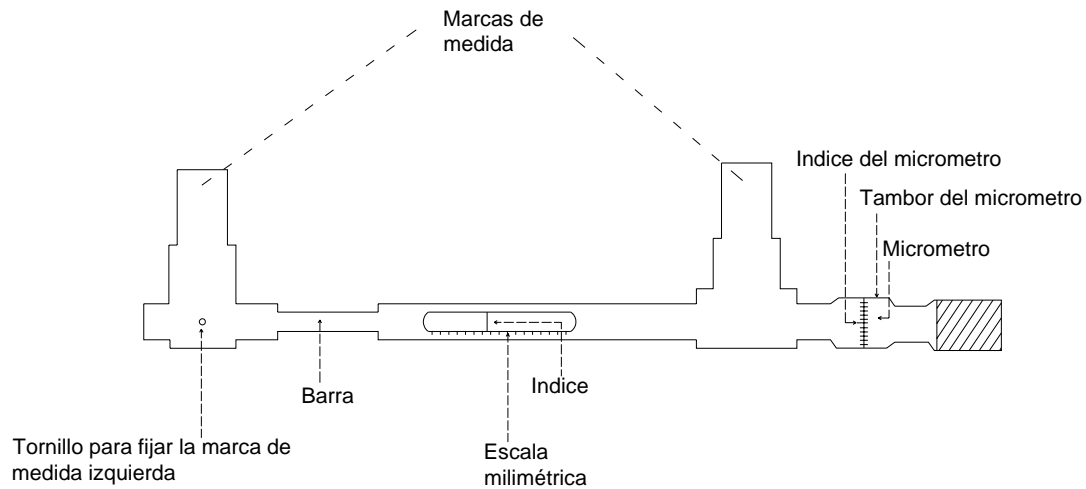


Figura (6.22) Esquema de una barra de paralelaje

En el momento que la marca flotante parece tocar el terreno se hace la lectura de la escala graduada (milímetros en la escala y 1/100 de mm. en el micrómetro).

La mayoría de las barras emplea un esclava invertida en que la lectura que se efectúa para un punto A está relacionada con la distancia $a'a''$ mediante la relación

$$L_a = K - a'a'' \quad [6.11.3]$$

Siendo K una constante de la barra que varía al cambiar la posición del tornillo de la izquierda de la barra.

Para un punto **R** se tendrá en forma similar:

$$Lr = K - r' r'' \quad [6.11.4]$$

Sustituyendo los valores de $a_1 a_2$ y $r_1 r_2$ despejados de [6.11.3] y [6.11.4] en la ecuación [6.11.5] se tendrá:

$$\Delta Par = r' r'' - a' a'' = (k - Lr) - (k - La) = La - Lr \quad [6.11.5]$$

Es decir, que la diferencia de paralelaje sobre entre dos puntos **A** y **R** es la diferencia entre sus respectivas lecturas de paralelaje tomadas de la barra.

Para trabajar con diferencias de paralelaje sobre estereogramas puede emplearse una cuña de paralelaje, consistente en una hoja de material transparente que tiene grabadas una serie de marcas de medida en forma de cuña, con indicaciones de las distancias respectivas.

Una cuña de paralelaje puede ser también utilizada para medir diferencias de paralelaje en fotografías aéreas, para calcular diferencias de altura. La cuña de paralelaje se basa en el principio de la marca flotante y está formada por dos líneas divergentes de puntos, dibujados sobre material transparente.

Cada par de puntos correspondientes se encuentra a una determinada distancia y al colocarlos sobre las fotografías se observa como una recta (sucesión de puntos) inclinada.

La cuña se orienta sobre las fotografías, generalmente cortadas para formar un estereograma y deslizando de manera que los pares de puntos homólogos se mantengan paralelos a la misma altura del punto deseado, para leer sobre la escala correspondiente la separación o distancia entre dichos puntos.

Como se dijo anteriormente, la cuña se emplea para leer paralelajes sobre estereogramas, es decir, fotografías cortadas para ser observadas en tercera dimensión bajo estereoscopios de bolsillo.

La lectura de paralelaje generalmente no está invertida, o sea que mide directamente la distancia entre puntos homólogos, por lo que debe de calcularse:

$$\Delta Par = Lr - La$$

Para aplicar la formula del paralelaje.

La formula de paralelaje es la relación matemática que permite calcular diferencias de altura a partir de diferencias de paralelaje y viceversa.

Suponiendo que se desea calcular la diferencia de altura entre dos puntos **A** y **R** será necesario tomar uno de ellos como referencia (por ejemplo el punto **R**) y calcular la diferencia de la altura del punto **A** con respecto a **R**.

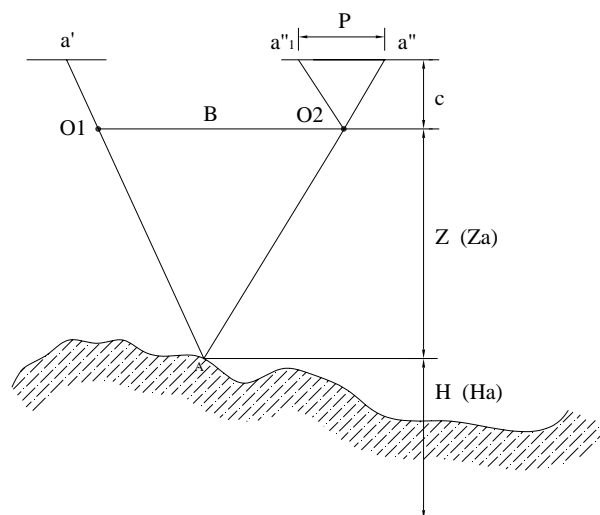


Figura (6.23) Relación entre P, B, c y Z

Desde los centros de proyección O_1 y O_2 Fig. (6.23) ubicados sobre una misma línea de vuelo se toman con la misma cámara dos fotografías verticales del punto A , obteniendo a' y a'' . Por O_2 se traza una recta paralela a O_1A determinado el punto a''_1 correspondiente a a' si las fotografías (1) y (2) se colocarán una sobre otra con los puntos principales en coincidencia.

La distancia a''_1a'' será la paralelaje absoluta (P) del punto A .

Relacionando las bases y las alturas de los triángulos semejantes $O_1 O_2 A$ y $a''_1a'' O_2$, se tendrá

$$\frac{Z}{c} = \frac{B}{P} \therefore Z = \frac{B \cdot c}{P} \quad [6.11.6]$$

En el cual B y c son constantes para un par estereoscópico, pero Z y P varían en función del punto A del terreno.

Escribiendo la ecuación [6.11.6] para los puntos A y R se tendrá:

$$Z_r = \frac{B \cdot c}{P_r} \quad \text{y} \quad Z_a = \frac{B \cdot c}{P_a} \quad [6.11.7]$$

Si se desea calcular la diferencia de altura entre los puntos A y R .

$$\Delta H_{ar} = H_a - H_r = -(Z_a - Z_r) = Z_r - Z_a$$

Sustituyendo los valores obtenidos en [6.11.7]

$$\Delta H_{ar} = \frac{B \cdot c}{P_r} - \frac{B \cdot c}{P_a} = B \cdot c \cdot \left[\frac{P_a - P_r}{P_r \cdot P_a} \right] = \frac{B \cdot c}{P_r} \cdot \left[\frac{P_a - P_r}{P_a} \right] \quad [6.11.8]$$

Se define $\Delta Par = Pa - Pr$ y se sustituye este valor en el numerador y denominador de [6.11.8]

$$\frac{B.c}{Pr} = Zr \quad \Delta Par = Pa - Pr \quad y \quad Pa = Pr + \Delta Par$$

Obteniendo:

$$\Delta Har = \frac{Zr}{Pr + \Delta Par} \cdot \Delta Par \quad [6.11.9]$$

En que:

Zr altura de vuelo sobre le punto de referencia (expresada en m.)

Si no se conoce exactamente Zr se puede emplear

$$Zm = c \cdot Em$$

$$Zm = Aabs - Hm$$

$$P_r = p'_1 p''_2 - r' r''$$

Paralelaje absoluta del punto de referencia (expresada en mm. con ½ mm. de precisión)

Si no se conoce Pr exactamente se puede emplear como valor aproximado, la base medida en una de las fotos o la base calculada en función del tamaño de la foto (s) y el recubrimiento longitudinal (u).

$$b = s \cdot (1 - u)$$

$$\Delta Par = La - Lr$$

Diferencia de las lecturas de paralelaje (en mm. con precisión de 1/100 mm.)

Estas lecturas La y Lr se deben medir con una barra o cuña de paralelaje con lectura invertida. Si el instrumento para lectura de paralelaje es de lectura directa deberá calcularse:

$$\Delta Par = Lr - La$$

También se puede expresar la diferencia de paralelaje ΔPar en función de la diferencia de altura.

$$\Delta Par = \frac{Pr}{Zr + \Delta Har} \cdot \Delta Har \quad [6.11.10]$$

Las fórmulas [6.11.9] y [6.11.10] presentan el inconveniente de no ser lineales (por el sumando del denominador). Cuando el terreno no presenta grandes diferencias de nivel o cuando no interesa mucho la precisión, pueden eliminarse dichos sumandos del denominador, obteniendo las siguientes fórmulas aproximadas:

$$\Delta Har = \frac{Zr}{Pr} \cdot \Delta Par \quad [6.11.11]$$

$$\Delta Par = \frac{Pr}{Zr} \cdot \Delta Har \quad [6.11.12]$$

6.11.5 Ejemplos para el cálculo de diferencias de alturas.

1) Calcular la diferencia de altura entre dos puntos **A** y **R** sabiendo que:

$$\begin{array}{ll} s = 0.23 \text{ m.} & La = 15.23 \text{ mm.} \\ 1/E = 1/20.000 & Lr = 14.42 \text{ mm.} \\ C = 0.152 \text{ m.} & u = 60\% \end{array}$$

Para aplicar la fórmula de paralelaje es necesario conocer:

Zr Como se conoce la altura de vuelo exacta sobre el punto **R** es posible utilizar la altura media de vuelo.

$$Zm = c \cdot Em = 0.152 \times 20.000 = 3040 \text{ m.}$$

Pr Debe calcularse midiendo $p'ip''$ y $r'r''$ en la foto.

Como se desconocen estos valores se calcula también un valor aproximado de **Pr** : $b = s \cdot (1-u) = 0.23 (1-0.6) = 92 \text{ mm.}$

$$\Delta Par = Lr - La = 15.23 - 14.42 = 0.81 \text{ mm.}$$

$$\Delta Har = \frac{Zr}{Pr + \Delta Par} \cdot \Delta Par = \frac{3040}{(92 + 0.81)} \times 0.81 = 26.53 \text{ m.}$$

- 2) Con los mismos datos del problema anterior aplicar la fórmula aproximada

$$\Delta Har = \frac{Zr}{Pr} \cdot \Delta Par = \frac{3040}{92} \times 0.81 = 26.76 \text{ m.}$$

Cuando mayor es el valor de ΔPar , mayor es el error cometido empleando la fórmula aproximada.

- 3) A un punto **R** de altura $H_r=1300$ m. le corresponde una lectura de paralelaje $L_r=12.57$ mm. Calcular la lectura de paralelaje correspondiente a un punto **A** cuya altura es $H_a=1320$ m., sabiendo que $Z_r=3000$ m. y $Pr=88$ mm.

Se calcula $\Delta Har = 1320 - 1300 = + 20 \text{ m.}$

$$\Delta Par = \frac{Pr}{Zr + \Delta Har} \cdot \Delta Har = \frac{88}{(3000 - 20)} \times 20 = 0.59 \text{ mm.}$$

$$La = Lr + \Delta Par = 12.57 + 0.59 = 13.16 \text{ mm.}$$

- 4) Calcular la diferencia de altura entre dos puntos **A** y **R** conociendo los siguientes datos:

$$Z_r = 2700 \text{ m.}$$

$$Pr = 88 \text{ mm.}$$

$$La = 15.47 \text{ mm.}$$

$$Lr = 13.47 \text{ mm.}$$

$$\Delta H_{ar} = \frac{Z_r}{Pr + \Delta P_{ar}} \cdot \Delta P_{ar} = \frac{2700}{(88 + 2)} \times 2 = 60 \text{ m.}$$

- 5) Con los datos del problema anterior calcular la misma diferencia tomando el punto **A** como punto de referencia.

Se debe aplicar la fórmula de paralelaje, tomando **A** como punto de referencia.

$$\Delta H_{ra} = \frac{Z_a}{Pa + \Delta P_{ra}} \cdot \Delta P_{ra}$$

Siendo $\Delta P_{ra} = L_r - L_a$

$$Z_a = Z_r - \Delta H_{ar} = 2700 - 60 = 2640 \text{ m.}$$

$$\Delta P_{ar} = P_a - P_r \quad \therefore P_a = P_r + \Delta P_{ar} = 88 + 2 = 90 \text{ mm.}$$

$$\Delta P_{ra} = L_r - L_a = 13.47 - 15.47 = -2 \text{ mm.}$$

$$\Delta H_{ra} = \frac{Z_a}{Pa + \Delta P_{ra}} \cdot \Delta P_{ra} = \frac{2640}{90 + (-2)} \times (-2) = -60 \text{ m.}$$

6.12 MEDICIÓN Y ESTIMACIÓN DE PENDIENTES

El ángulo de máxima inclinación de un plano o pendiente puede ser obtenido a partir de fotografías aéreas por dos procedimientos: medición y estimación.

En los métodos de medición el procedimiento consiste en hallar la distancia horizontal entre los puntos que determinan la máxima pendiente y su diferencia de altura.

La distancia horizontal no puede ser leída directamente de la fotografía por estar afectada por el desplazamiento debido al relieve y el error de inclinación, y la diferencia de altura debe ser deducida en base a mediciones en la foto y parámetros tales como altura de vuelo y paralelaje absoluta.

Si se desea calcular la pendiente determinada por dos puntos, será suficiente aplicar algunos de los procedimientos que se describen a continuación, pero si se trata de calcular el ángulo de máxima pendiente de un plano habrá que escoger un punto en la parte alta de la pendiente y varios en la parte baja a fin de deducir el valor del ángulo máximo.

Los procedimientos para medición de pendiente se pueden clasificar en:

- a) Gráficos, si la distancia horizontal remide gráficamente y se calcula numéricamente la diferencia (método de Porshnyakov)
- b) Semigráfico, si la distancia horizontal se mide gráficamente y se calcula numéricamente la diferencia de altura (método de Stellanwerf).
- c) Numérico cuando las dos distancias son calculadas numéricamente, o bien se emplean nomogramas que permiten resolver directamente el valor de la pendiente (método ITC-Zorn)

En los métodos de estimación de pendientes, el procedimiento es diferente ya que en general se estiman pendientes por comparación con otras conocidas, es decir que se hace una estimación por comparación directa de la pendiente.

En dicha comparación, tiene una gran influencia la exageración vertical o exageración estereoscópica ya que en general las pendientes se observan más

pronunciadas que en la realidad, debiendo ser corregidas por un factor de exageración.

En el método Mekel se compara la pendiente con una superficie cuya inclinación se hace variar hasta que coincida con la pendiente del terreno observada en el estereoscopio.

El método de Fischer compara la pendiente con una serie de pirámides (y pirámides truncadas) cuya pendiente real es calculada en función de la exageración vertical del par de fotografías empleadas y del observador.

6.12.1 Método semigráfico para medición de pendientes – Stellingwerf

Este método, conocido también bajo el nombre de Método de Stellingwerf consiste en medir gráficamente la distancia horizontal entre dos puntos cuya pendiente se desea conocer y calcular su diferencia de altura utilizando la fórmula de paralelaje.

Para calcular la pendiente de un plano se escogen dos puntos **A** y **R** que representen dicha pendiente, es decir que el terreno que los une sea aproximadamente plano para que la pendiente calculada corresponda a la realidad.

Utilizando un par estereoscópico que comprenda dicha pendiente se trata de hallar la distancia horizontal **d** y la diferencia de altura ΔH Fig. (6.24)

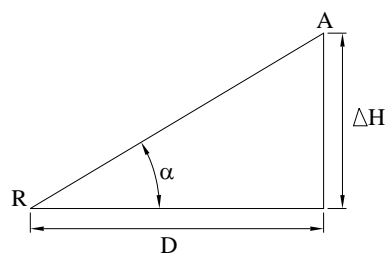


Figura (6.24) Medición de la pendiente α entre **A** y **R**

- **Calculo gráfico de la distancia d**

Estando los puntos **A** y **R** a diferente nivel, resulta evidente que el desplazamiento debido al relieve será diferente y por consiguiente su distancia no puede ser medida directamente en las fotos. Los puntos pueden estar también afectados por el desplazamiento producido por la inclinación de las fotografías, sin embargo este error no será corregido, considerando que se está trabajando con fotografías verticales cuya inclinación es inferior a $\pm 3^\circ$.

Par corregir el desplazamiento debido al relieve se emplea la propiedad de dicho desplazamiento de ser radial a partir del punto nadir (o punto principal, si la fotografía es vertical).

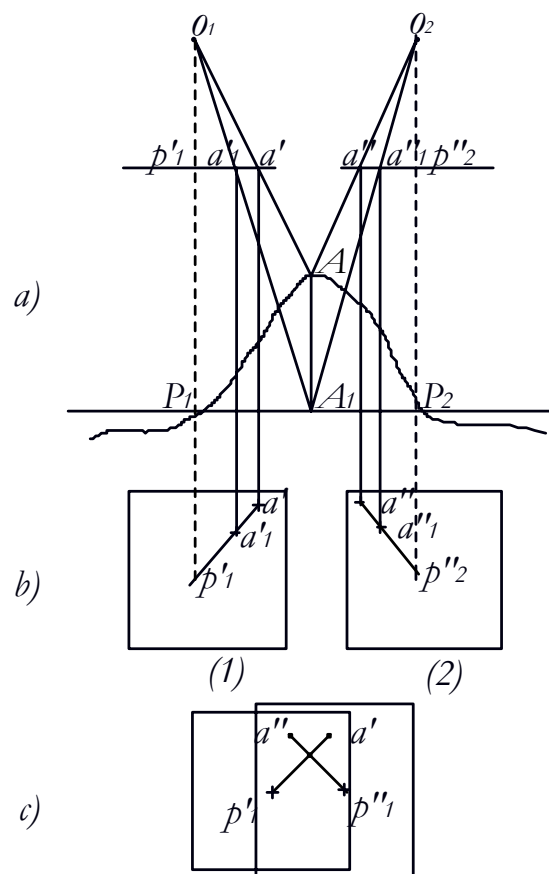


Figura (6.25) Principio para la corrección del desplazamiento debido al relieve

En la figura (6.25) un punto es fotografiado desde dos puntos O_1 y O_2 obteniéndose las imágenes a' y a'' con respecto al plano de referencia r , el punto A ha sufrido desplazamientos debido al relieve $a'_1 a'$ y $a''_1 a''$ en las fotografías, siendo a'_1 y a''_1 las imágenes de A_1 , correspondiente de A sobre el plano de referencia.

Suponiendo que los puntos principales p_1 y p_2 se encuentran sobre el plano de referencia, si se hacen coincidir las fotografías (1) y (2) poniendo las líneas de vuelo en coincidencia, se observará que los puntos a'_1 y a''_1 no coinciden en un solo punto sino que están radialmente desplazados. La intersección de las rectas $a'p'_1$ y $a''p''_2$ proporciona la posición planimétrica del punto A en ambas fotografías (a'_1 y a''_1).

En la practica se conocen los puntos principales y las imágenes a'_1 y a''_1 del punto A , basta con trazar las rectas indicadas anteriormente para hallar la posición planimétrica correcta del punto.

Basándose en este principio para hallar la distancia entre dos puntos A y R cuya pendiente se desea conocer puede emplearse el siguiente procedimiento:

- a) Se marcan los puntos principales de cada fotografía y se transfieren a las fotos adyacentes.
- b) Se marcan los puntos A (a' y a'') y R (r' y r'') en cada fotografía.
- c) Desde el punto principal p'_1 se trazan rectas radiales que pasen por a' y r' .
- d) Por r' se traza una recta perpendicular a la línea de vuelo $p'_1 p'_2$.

- e) Desde el punto principal p''_2 de la foto derecha se trazan radiales a los puntos a'' y r'' y se marca la línea de vuelo.
- f) Sobre un trozo de papel transparente se calcan las cuatro líneas dibujadas sobre la foto izquierda.
- g) Se coloca el papel transparente sobre la foto derecha de manera que las rectas que definen las líneas de vuelo coincidan y además que el punto r'' se encuentre sobre la recta que pasa por r' y es perpendicular a la línea de vuelo $p'_1 p''_2$.

En ese momento se trazan sobre el papel transparente las rectas dibujadas en la foto derecha.

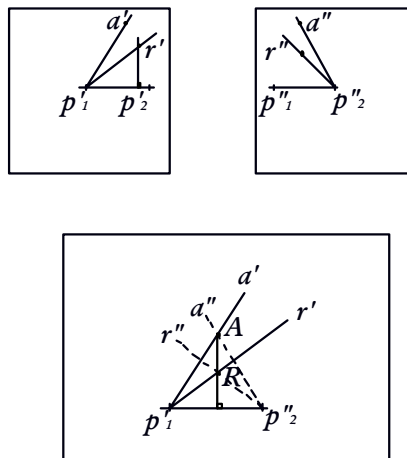


Figura (6.26) Principio para la corrección gráfica del desplazamiento debido al relieve

La intersección de las rectas $p'_1 a'$ y $p''_2 a''$ dará la posición planimétrica correcta del punto **A**, reducida al plano de referencia que pasa por el punto **R**.

En forma similar, la intersección de las rectas $p'_1 r'$ y $p''_2 r''$ define el punto **R**. La distancia **AR** medida sobre el papel transparente corresponde a la distancia entre los puntos **A** y **R** a la escala del plano que pasa por **R**.

Para reducir esta distancia a unidades de terreno es necesario multiplicarla por el módulo escalar (E_r) correspondiente a la escala ($1/E_r$) del plano que pasa por **R**.

La perpendicular por r' a la línea de vuelo se traza para facilitar la construcción gráfica cuando las fotos son inclinadas, en cuyo caso las distancias de r' y r'' a sus respectivas líneas de vuelo son diferentes.

- **Calculo de la distancia ΔH**

La diferencia de altura entre los puntos **A** y **R** se calcula mediante la fórmula de paralelaje, debiéndose conocer los valores de Z_r , P_r y ΔP_r (ó L_a y L_r) para obtener la diferencia de altura en metros a escala del terreno.

- **Calculo de la pendiente.**

Con los datos obtenidos anteriormente se puede dibujar la pendiente, multiplicando o dividiendo los valores anteriores por un factor de escala a efectos que obtener el dibujo en la forma deseada.

También es posible calcular directamente la pendiente ya que:

$$Pendiente\ AR = \arctg \frac{\Delta H}{D} \quad [6.12.1]$$

Siendo la diferencia de altura

$$\Delta H = \frac{Z_r}{P_r + \Delta P} \cdot \Delta P = \frac{c.E}{P_r + \Delta P} \cdot \Delta P \quad [6.12.2]$$

Y D la distancia **AR** del terreno

$$D = d.E \quad [6.12.3]$$

Siendo d la distancia AR medida sobre las fotos y E el módulo escalar, sustituyendo las expresiones [6.12.2] y [6.12.3] en la ecuación [6.12.1] y simplificando el valor de E se obtiene:

$$Pendiente\ AR = \arctg \frac{c}{d} \cdot \left(\frac{\Delta P}{Pr + \Delta P} \right) \quad [6.12.4]$$

6.12.2 Estimación de pendientes

La estimación de pendientes se realiza por comparación de figuras tridimensionales (por ejemplo: pirámides o planos móviles cuya pendiente es conocida) con la pendiente del terreno observada bajo un estereoscopio de espejos.

Esta estimación de pendientes por comparación está afectada por la exageración estereoscópica que deforma las pendientes, debiéndose corregirlas en función de la exageración vertical.

El modelo tridimensional observado a través de un estereoscopio para el análisis de un par de fotografías, es en general diferente del terreno real fotografiado, el relieve aparece deformado como consecuencia de la diferencia entre la escala planimétrica y la escala altimétrica del modelo observado.

La exageración vertical o exageración estereoscópica (E_v) se define como la relación existente entre la escala vertical y la escala planimétrica a las que se observa el modelo.

Dicho valor es de gran importancia para la estimación de pendientes o buzamientos geológicos y para el estudio del espesor de capas geológicas ya que permite establecer la relación existente entre la pendiente observada en el modelo estereoscópico p Fig. (6.27) y el valor real de la pendiente del terreno q .

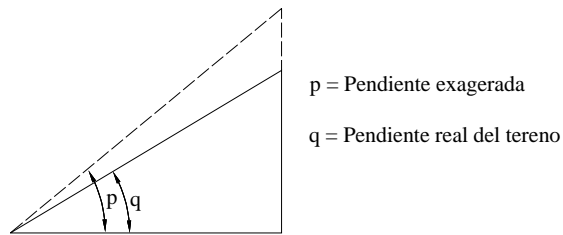


Figura (6.27) Comparación entre pendiente real q y pendiente exagerada p

6.13 FOTOGRAMETRÍA DIGITAL.

La historia de la Fotogrametría se puede dividir en cuatro etapas marcadas por descubrimientos que produjeron importantes cambios en la forma de trabajar: Prehistoria (s.XVI hasta finales s. XIX), Fotogrametría Analógica (principios s.XX hasta 1960), Fotogrametría Analítica (1960-1990), Fotogrametría Digital (1990 a la actualidad).

Dejando a un lado la primera etapa en la que se producen las primeras pruebas y marcada por el descubrimiento de conocimientos necesarios para la metodología fotogramétrica, se pueden distinguir básicamente tres etapas: Fotogrametría Analógica, Fotogrametría Analítica y Fotogrametría Digital.

Al respecto es importante tener en cuenta el ritmo de evolución de la Fotogrametría, así mientras que la Analógica se extendió durante 60 años y aún está muy difundida debido a la inercia de los sistemas productivos y al elevado nivel de productividad que han logrado los sistemas informatizados dotados de operadores muy experimentados; la Analítica sólo ha tenido 30 años y quizá ahora comienza su declive, como lo marca el hecho de que en los últimos diez años el número de equipos que han aparecido en el mercado ha sido muy limitado, siendo incluso retirados de comercialización por un elevado número de casas comerciales.

También es necesario señalar que el paso de Fotogrametría Analógica a la Analítica únicamente supuso una evolución en el modo de trabajar apoyada por la aparición de los sistemas informáticos, obteniendo mejores rendimientos y precisiones al sustituir la analogía mecánica por los cálculos matemáticos, el paso de la Fotogrametría Analítica a la Digital supone un cambio radical en cuanto a la instrumentación, al proceso fotogramétrico y en cuanto a los resultados por los que se ha dicho que se trata de una revolución tecnológica.

Así se puede indicar que la Fotogrametría Digital es la aplicación de las técnicas fotogramétricas a imágenes de formato digital, proporcionando una serie de productos que hasta ahora eran difíciles de producir.

6.13.1 Imagen Digital.

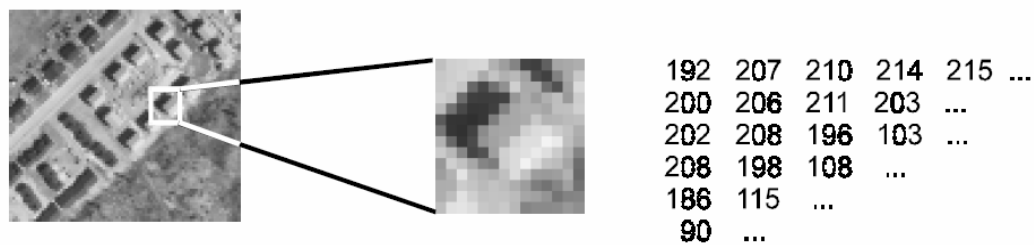


Figura (6.28) *izq.* Fragmento de una fotografía aérea en formato digital
Centro. Ampliación de un elemento de la imagen (casa)
Der. Representación numérica de los primeros píxeles de la zona ampliada

Una imagen digital es una función $F(x,y)$ donde x e y representan unas coordenadas y el valor $F(x,y)$ es proporcional a la transmitancia o reflectividad de la luz, que se reconoce por el nivel de color gris de la misma en el punto considerado Fig.(6.28).

Al proceso de obtención de imágenes digitales se le denomina digitalización y consiste en la descomposición de la imagen real en una matriz discreta de puntos de

un determinado tamaño, donde cada elemento recibe un valor proporcional a su nivel de color Fig.(6.29)

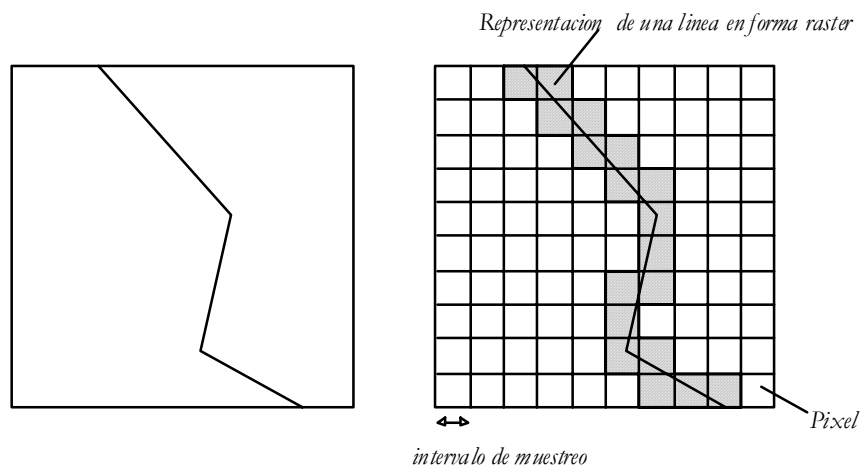


Figura (6.29) izq. Imagen analógica der. Representación de la misma tras el proceso de digitalización.

6.13.2 Ventajas E Inconvenientes De La Utilización De Imágenes En Formato Digital En Fotogrametría.

Las ventajas e inconvenientes de la Fotogrametría Digital frente a otras metodologías fotogramétricas tales como la Fotogrametría Analógica y la Fotogrametría Analítica, son función de las características propias del tipo de imágenes que se emplean, por tanto, las ventajas e inconvenientes están directamente ligados con los correspondientes a la utilización de imágenes digitales.

Ventajas:

Las imágenes digitales, por su soporte de almacenamiento carecen de los problemas derivados de la estabilidad dimensional que afecta a las imágenes analógicas cuando se modifican las condiciones medioambientales de su almacenamiento. Por otro lado, al no requerir la manipulación directa a la hora de ser utilizadas se elimina el deterioro producido por esta causa.

Las imágenes digitales permiten una fácil duplicación y transmisión siendo únicamente necesario disponer de medios informáticos apropiados.

Las características de la imagen tales como el brillo y contraste pueden ser modificadas mediante el empleo de técnicas de análisis de imágenes, con el objetivo de mejorar la calidad visual de la misma y así favorece la interpretación o bien para poner de manifiesto algún tipo de característica de la imagen.

Los productos derivados de la Fotogrametría Digital son obtenidos en formato digital por lo que son fácilmente integrables en entornos tipo CAD o SIG.

Debido a las características de las imágenes empleadas se eliminan gran parte de los elementos de mayor coste de los sistemas analógicos (ópticas y sistemas mecánicos de precisión), disminuyendo de una forma considerable los gastos de mantenimiento. Además la precisión no está ligada al diseño constructivo de equipo sino a los programas empleados.

La utilización de imágenes digitales permite la automatización parcial del proceso lo que conlleva un aumento del rendimiento, así mismo permite el trabajo en tiempo real o casi real.

Inconvenientes:

Se trata de una técnica de muy reciente aparición, por lo que en muchos aspectos aún puede estar inmadura.

Los procesos derivados de la necesidad de un proceso de digitalización. Los sistemas de digitalización aún son muy caros.

La necesidad de almacenamiento que es muy elevada para los niveles de precisión equivalente a los procesos fotogramétricos analíticos, así una imagen en blanco y negro de 23x23 cm. digitalizada a una resolución expresada como tamaño de pixel de 15 μm ocupa un espacio de disco superior a los 200 Mb (256 tonos de gris) esta cifra se multiplicará por 3 si el almacenamiento se realiza en color real (16.7 millones de colores). Es importante tener en cuenta que un proyecto se manejan un número considerable de imágenes por lo que los volúmenes de almacenamiento requeridos son importantes.

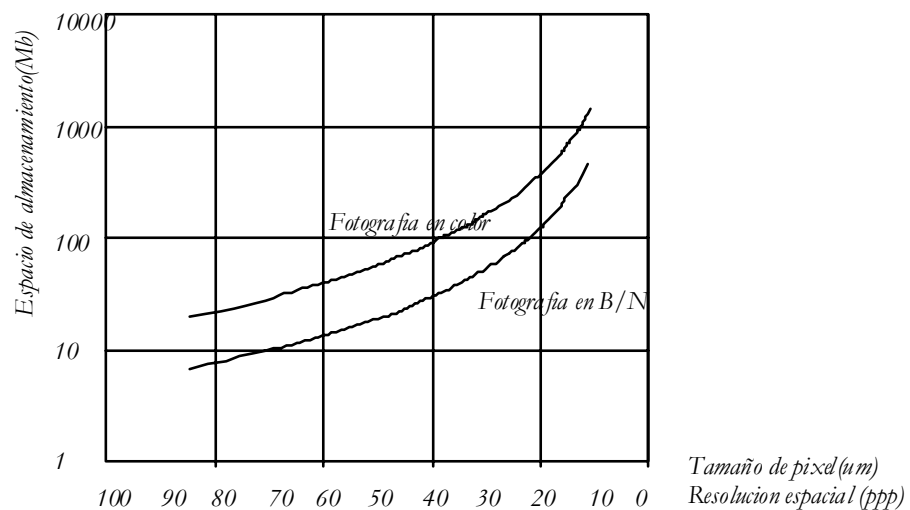


Figura (6.30) Relación entre la resolución espacial y el espacio requerido para el almacenamiento de una fotografía de formato 23x23 cm.

6.13.3 Sistemas Fotogramétricos Digitales.

Las primeras definiciones de Sistemas Fotogramétricos Digitales (Digital Photogrammetric System –DPS–) y de Estaciones Fotogramétricas Digitales (digital Photogrammetric Workstation –DPWS–) datan de principios de la década de los 80. En 1988, el grupo de trabajo II/III (Sistemas para el Procesamiento y Análisis de Datos) de la Asociación Internacional de Fotogrametría y Teledetección (ISPRS) define un Sistema Fotogramétrico Digital como el conjunto de hardware y software cuyo objetivo es la generación de productos fotogramétricos a partir de imágenes

digitales mediante técnicas manuales y automatizadas. Estos productos pueden ser utilizados directamente o bien ser la fuente de información de entrada para un Sistema de Información Geográfica (SIG) o un Sistema de Diseño Asistido (CAD).

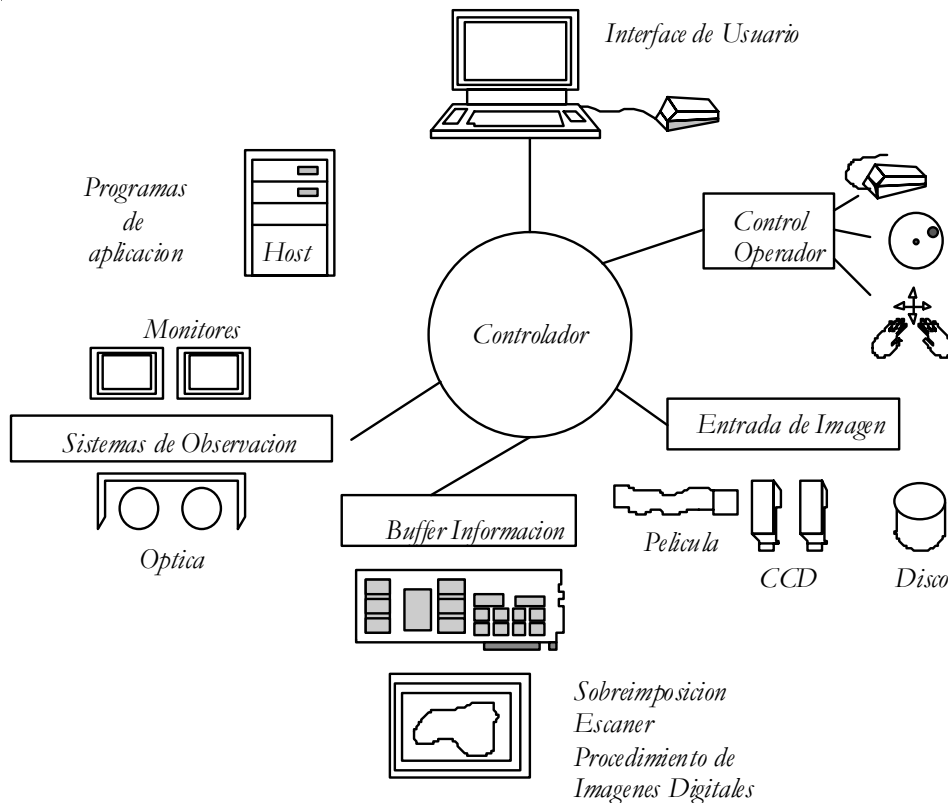


Figura (6.31) Elementos constituyentes de un sistema fotogramétrico digital

El sistema fotogramétrico digital incluye todos los elementos necesarios tanto a nivel de software como de hardware para obtener los productos fotogramétricos a partir de las imágenes digitales, incluyendo también sistemas de captura de imágenes (interfaces de conexión con cámaras digitales o sistemas de digitalización de imágenes en formato analógico -escaner-) así como sistemas de impresión final (filmadoras, trazadores gráficos, impresoras de imágenes, etc.).

El elemento fundamental del sistema fotogramétrico digital es la estación fotogramétrica digital, *Digital Photogrametric Workstation* (conocido también como

restituidor digital, si bien este nombre no es adecuado puesto que sólo hace referencia a una de las tareas de la estación, el proceso de restitución)

La tendencia actual de diseño de los sistemas fotogramétricos digitales es la utilización de una concepción modular ofreciendo grandes posibilidades para la expansión del sistema tanto a nivel de software como de hardware. Además, cada vez es más frecuente la utilización de hardware estándar, dentro de las posibilidades debido a las características particulares de este tipo de sistemas, para conseguir por un lado, la compatibilidad con otros sistemas, facilitar las tareas de mantenimiento y la reducción de costes de los equipos.

Las peculiaridades más importantes de un restituidor fotogramétrico se encuentran en la interfaz con el usuario; necesidad de visión estereoscópica, obtención de coordenadas en tiempo real, precisión de medida a nivel de subpixel.

6.13.4 Aplicaciones

Aerotriangulación.

La aerotriangulación es un buen ejemplo para demostrar el potencial de los sistemas digitales para la automatización del proceso fotogramétrico. Tradicionalmente, la aerotriangulación comenzaba con la preparación de los fotogramas realizando la selección de un considerable número de puntos que aparecieran en tantos fotogramas como fuera posible. Tras esta etapa de preparación, los puntos seleccionados eran transferidos a todos los fotogramas, dependiendo en gran medida la calidad de los resultados de localidad de esta transferencia de puntos. Sólo después de que los puntos eran transferidos y claramente identificados en todos los fotogramas era posible comenzar el proceso de medida.

En los sistemas digitales la transferencia de los puntos se realiza de una forma automática mediante procesos de correlación de imágenes (*múltiple image matching*). Esta automatización permite aumentar considerablemente el número de puntos utilizados en la aerotriangulación, así se pasa del número típico de 9 a 50, e incluso, 100 puntos por lo que se incrementa considerablemente el volumen de los resultados.

Generación Automática de MDE.

Una de las tareas en las que los sistemas digitales se muestran como más interesantes es la generación automática de MDE, siendo ésta una de las líneas de investigación que más esfuerzo han registrado en los últimos años y que, aunque siguen persistiendo ciertos problemas (líneas de ruptura de pendiente, oclusiones, zonas de bajo contraste, etc.) se pueden considerar los resultados como aceptables.

El procedimiento de trabajo consiste en la generación autónoma (sin intervención del operador) del MDE, éste posteriormente será revisado y editado por un operador humano, lo que reduce parcialmente el ahorro, tanto en tiempo como en dinero, de la generación automática del mismo.

Producción de Ortofotografías Digitales.

En estos últimos años se ha observado un fuerte incremento en la demanda de ortofotografías. La generación de ortofotografías se simplifica considerablemente en el entorno digital, así el MDE empleado para la rectificación diferencial de la imagen es el derivado automáticamente que se puede considerar como bastante preciso en especial si se obtiene a partir de fotogramas de pequeña escala y el proceso se limita a eliminar los posibles

desplazamientos debido al relieve y a la inclinación del fotograma. Otros productos relacionados directamente y que sólo es posible su obtención en un entorno digital son las vistas en perspectivas así como las perspectivas animadas.

6.13.5 Etapas de Generación de una Ortofotografía Digital.

El proceso de obtención de una ortofotografía se puede dividir en tres etapas: la introducción de información de partida, la manipulación y la salida y almacenamiento de resultados.

Datos de entrada.

El dato fundamental de entrada lo constituye la fotografía en formato digital, cuya escala va a determinar la escala posible de la ortofotografía final y que viene determinada por la distancia focal de la cámara empleada para la toma y la altura de vuelo respecto al terreno en el momento del disparo.

La imagen original en formato analógico deberá ser digitalizada utilizando en escáner fotogramétrico de alta precisión geométrica y radiométrica.

Además es necesario la información relativa a las características de la cámara que está contenida en el certificado de calibración de la misma; las reseñas y coordenadas de los puntos de apoyo, y el modelo digital imprescindible para la corrección del desplazamiento debido al relieve y que puede ser generado o bien utilizar uno preexistente siempre que tenga una calidad adecuada.

Manipulación.

La primera transformación geométrica necesaria consiste en la orientación de los fotogramas para conocer la posición y orientación de la cámara en el momento de la toma, requisito indispensable para la aplicación del método de rectificación diferencial que se basa en las conocidas expresiones de colinealidad. Estas transformaciones geométricas a aplicar se aplican en cinco pasos.

Orientación interna

Orientación externa

Rectificación diferencial

Cálculo de las posiciones píxel en los puntos de la malla

Remuestreo de la imagen para obtener las posiciones intermedias.

Además será necesaria la aplicación de transformaciones radiométricas de tipo global y/o local cuyo objetivo fundamental será la obtención de un ortofotograma con un tono continuo y que permita el empalme con otros ortofotogramas para dar lugar a un mosaico con unas adecuadas características radiométricas en cuanto a contraste.

Salida de resultados y Almacenamiento.

En esta etapa debemos enfrentarnos ante el problema más grave de la Fotogrametría Digital que será el almacenamiento de los resultados y la salida de los mismos en formato analógico.

Con respecto a la salida es necesario adecuar el tipo y la resolución de los periféricos a la calidad de la imagen generada. En lo referente al

almacenamiento, la mejor recomendación consiste en la utilización de formatos de almacenamiento estándar (por ejemplo, TIFF o GeoTIFF) con una suficiente metainformación y sobre soportes estándar (CDROM).

Además es necesario tener en cuenta que la Fotogrametría Digital permite combinar los resultados obtenidos (básicamente Ortofotografía y Modelo Digital del Terreno) para la generación de productos secundarios de gran interés para el estudio visual del terreno como las perspectivas fotorrealistas y las animaciones.

6.14 CÁMARAS AÉREAS.

Cámaras aéreas son cámaras diseñadas especialmente para tomar fotografías desde aviones, globos, helicópteros o desde vehículos espaciales. Realizan las mismas funciones que una cámara terrestre pero sus requisitos son diferentes.

La cámara terrestre permanece estacionaria durante el momento de exposición y el objeto fotografiado en general es fijo. El tiempo de exposición puede ser relativamente alto, lo cual permite el empleo de emulsiones lentas de grano fino. Solo en el caso de fotografiar objetos en movimiento, por ejemplo vehículos o modelos hidráulicos, se requieren tiempos cortos de exposición.

Las cámaras aéreas se mueven durante la exposición, por lo que requieren tiempos de exposición cortos, con obturadores de gran eficiencia y emulsiones de alta velocidad. Como estas fotografías son tomadas en rápida sucesión, el intervalo mínimo entre exposiciones debe ser pequeño y los almacenes deben tener gran capacidad a fin de reducir el número de veces que se debe recargar la cámara en vuelo.

La cámara aérea es un instrumento que recoge la información básica, necesariamente para todo el proceso posterior de fotogrametría y fotointerpretación. La imagen obtenida debe ser de óptima calidad tanto cualitativamente como cuantitativamente.

6.14.1 Clasificación de Cámaras aéreas.

La clasificación de cámaras aéreas puede ser hecha tomando como criterio de clasificación diferentes elementos; sin embargo, las clasificaciones logradas no son exclusivas y algunas resultan ser simplemente subdivisiones de otras más generales.

Los criterios empleados para clasificar las cámaras aéreas son:

- a) **Clasificación de cámaras en función de su tipo o formato.-** De acuerdo a este criterio se clasifican en cámaras con formato y cámaras sin formato. Las primeras son aquella en que un cierto recuadro generalmente en forma rectangular o cuadrada limita la imagen expuesta, puede considerarse instantánea. Las cámaras sin formato son aquellas en que la imagen se registra en forma continua sobre una faja, por integración de rectángulos transversales angostos.
- b) **Clasificación de las cámaras de formato en función del campo angular del objeto.-** Se pueden dividir en: cámaras normales (campo angular es menor de 75°), cámaras granangulares (campo angular comprendido entre 75° y 100°) y cámaras supergranangulares (campo angular de mas de 100°).
- c) **Clasificación de cámaras en función del uso.-** El uso o finalidad principal en la cual son empleadas las imágenes obtenidas con cámaras aéreas, constituye otro criterio para su clasificación. Y puede mencionarse tres grupos: cámaras de reconocimiento, cámaras métricas y cámaras especiales.

- d) **Clasificación en función de la inclinación del eje de la cámara.-** Utilizadas en proyectos especiales y en fotointerpretación. Se puede diferenciar tres tipos: cámaras para fotografías verticales, fotografías inclinadas y cámaras para fotogrametría terrestre.
- e) **Clasificación en función del material base empleado para la fotografía.-** De acuerdo a este criterio se puede clasificarlas en: cámaras que emplean placas y cámaras que emplean películas.

6.14.2 Características y componentes de las cámaras aéreas.

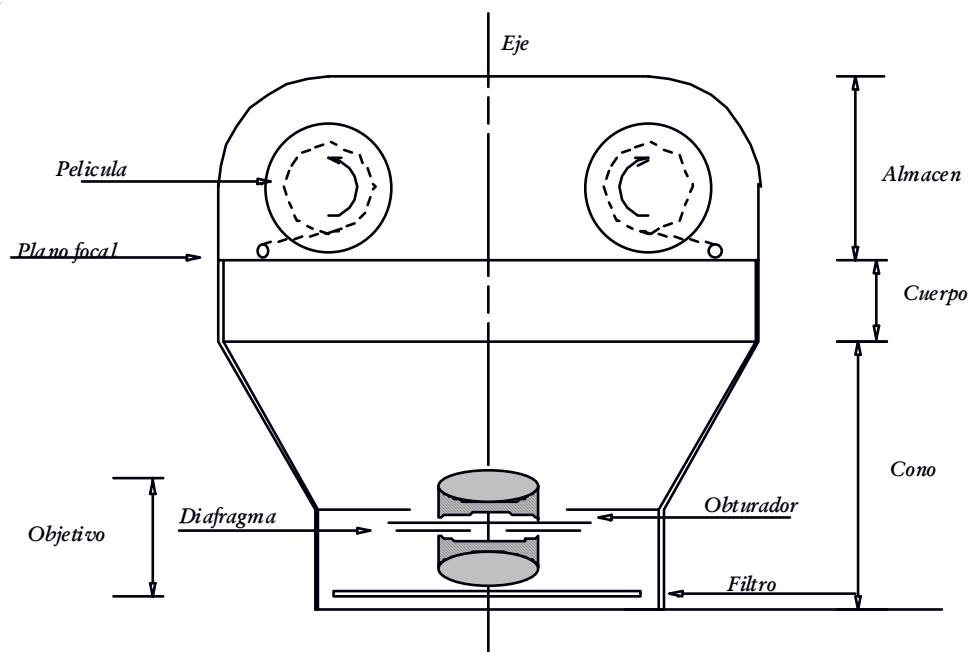


Figura (6.32) Esquema de una cámara aérea

Un gran porcentaje de las cámaras actualmente en uso para reconocimiento o mapeo son cámaras de formato, aunque diseñadas para propósitos diferentes, ambas están básicamente constituidas por los mismos componentes.

- Cono (objetivo, obturador, diafragma y cono interno)

- Almacén (para película o placas, expuesta y virgen)
- Cuerpo (incluyendo el sistema de funcionamiento)
- Equipo accesorio (sistema de suspensión, controles de la cámara, instrumentos auxiliares, anteojo de observación, etc.)

6.15 INSTRUMENTOS FOTOGRAMÉTRICOS APROXIMADOS.

Bajo el nombre de Instrumentos fotogramétricos aproximados se reúne un grupo de instrumentos fotogramétricos en que las deformaciones geométricas de las fotografías (o del modelo) son corregidas sólo en forma parcial o aproximada.

Por su bajo costo, su simplicidad en el manejo y sus características especiales son comúnmente utilizados en trabajos de interpretación, ya sea para la elaboración de un mapa base, con aquellos instrumentos que permiten la restitución altimétrica, o bien para pasar la interpretación realizada sobre fotografías a un mapa, utilizando puntos de control obtenidos directamente en el campo o por medio de una triangulación aérea o radial.

6.15.1 Clasificación de Instrumentos aproximados.

Las deformaciones geométricas que sufren las fotografías aéreas como consecuencia de: relieve (incluyendo curvatura terrestre), inclinación, distorsión. Cuando se orienta un par estereoscópico de fotografías bajo un estereoscopio o cualquier otro instrumento basado en el mismo principio, las fotos se colocan planas sobre una mesa, el desplazamiento debido al relieve (P_x) es el que permitirá observar el modelo en tercera dimensión, mientras que las otras dos deformaciones deformarán el modelo observado.

El error de distorsión, comparado en magnitud con los otros, es tan pequeño que desde el punto de vista del grupo de instrumentos que se va a estudiar en este

capítulo, puede considerarse completamente despreciable, ya que los errores cometidos por los otros factores son de mayor magnitud.

De acuerdo a la deformación geométrica que corrija y a la deformación residual del modelo se pueden clasificar los instrumentos aproximados en cuatro grandes grupos:

- a) **Instrumentos estereoscópicos para dibujo y cambio de escala.-** Son instrumentos para la observación tridimensional de pares estereoscópicos, que permiten pasar la información de las fotografías al mapa base sin corregir ninguna de las deformaciones, es decir que el mapa producido es copia de una de las fotografías y únicamente se puede cambiar la escala. Entre algunos que sirven para dibujo se pueden mencionar al Estereopreto (Zeiss-Oberkochen) y el Estereopantómetro (Zeiss-Jena), entre los instrumentos para cambio de escala están el Proyector Kail M-5, el Proyector vertical Caesar Saltzman-CPS 23-70 A y el Map-O-Graph 55 de Art-O-Graph.
- b) **Rectificadores aproximados.-** Como su nombre lo indica, son instrumentos que corrigen el error debido a la inclinación de las fotografías basándose en puntos de control de coordenadas planimétricas conocidas. Entre los mas utilizados podemos mencionar al Sketchmaster (Zeiss-Oberkochen), el Sketchmaster (Keuffel y Esser), el Stereosketch (Hilger y Watts) y el Pantógrafo óptico (Keuffel y Esser).
- c) **Instrumentos que corrigen el desplazamiento debido al relieve.-** Los instrumentos de este grupo se basan en el principio de la triangulación radial para corregir el error producido por el relieve, ubicando cada punto por intersección de rectas radiales a partir de los puntos nadires (en la práctica se toman puntos principales). Entre los mas destacados se puede mencionar: el

Restituidor radial lineal (Higler y Watts) y el Restituidor radial planimétrico (B. Kail).

- d) **Instrumentos aproximados de tercer orden.**- Son instrumentos en que el sistema de proyección empleado no es exacto o las deformaciones del modelo se corrigen en forma lineal, inclusive la deformación del modelo debido a φ que en realidad es de segundo orden, debido a esta corrección incompleta los instrumentos no son exactos, salvo el caso teórico en que no haya errores debidos a la inclinación. Se puede mencionar a: el Estereotopo (Zeiss-Oberkochen), el Estereomicrometro (Santoni), el Stereoflex (Som) y Restituidor estereoscópico KEK (King, Elliot, Kail).

CAPITULO VII

PLANEACIÓN Y EVALUACIÓN DE VUELOS



7.1 SÍMBOLOS.

Los símbolos utilizados en las fórmulas de planeación de vuelos corrientemente empleados en fotogrametría son derivados del correspondiente nombre en inglés, considerando que casi toda la literatura moderna en fotogrametría está escrita en inglés, aquí también serán empleados los mismos términos, resumidos a continuación:

s	Tamaño de la fotografía (lado)
S	Tamaño del área fotografiada (longitud
f	Distancia focal
c	Distancia principal
h	Altura del terreno
u	Recubrimiento longitudinal (%)
v	Recubrimiento lateral (%)
Z	Altura de vuelo
b	Base de la fotografía
B	Base en el aire
A	Distancia del avión con respecto al terreno

GS	Velocidad del avión con respecto al terreno
E	Módulo de escala
te	Tiempo de exposición
I	Intervalo entre exposiciones
MIF	Movimiento de la imagen en la fotografía

7.2 RELACIONES Y FORMULAS.

Cuando el terreno a fotografiar es plano y horizontal, será suficiente calcular la altura de vuelo, la separación entre líneas y el intervalo de exposición una sola vez, y esas mismas condiciones se aplicarán a toda la zona.

La dificultad práctica surge cuando el terreno es ondulado o montañoso, ya que en tal caso la escala de la imagen fotográfica no es la misma para todas las fotografías ni es constante dentro de una misma exposición, y los recubrimientos y la relación base altura variarán de un tar estereoscópico a otro.

Por esta razón es necesario definir un plano “**r**” como cota de referencia (nivel medio del terreno), un plano alto “**a**” correspondiente a los puntos más altos del terreno y un plano “**b**” correspondiente a los puntos más bajos.

Todos los cálculos podrán ser hechos para el plano de referencia “**r**” verificando que para los planos “**a**” y “**b**” se cumplen las condiciones mínimas (y/o máximas) de recubrimientos, escalas, etc.

La figura (7.1) representa esquemáticamente los planos que pueden ser utilizados:

“ r ”	Plano de referencia (nivel medio del terreno)
“ a ”	Plano definido por los puntos más altos

- “b” Plano definido por los puntos más bajos
- “o” Nivel de referencia para medición de alturas h (por ejemplo nivel medio del mar)
- “i” Cota correspondiente a un punto genérico del terreno

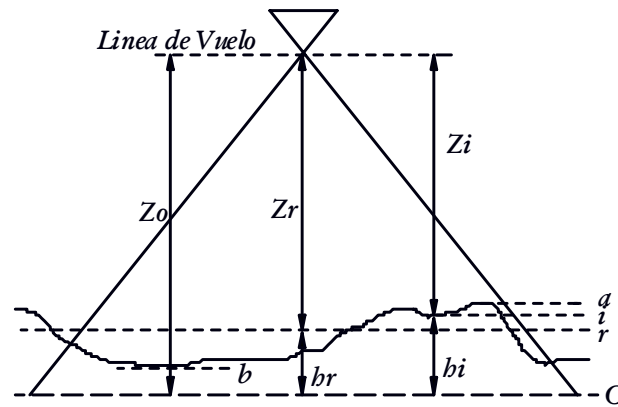


Figura (7.1) Definición de planos de referencia

Las fórmulas que se estudian a continuación son generales, y sustituyendo el subíndice “i” por “o”, “b”, “a”, o “r” se obtendrán los valores correspondientes a los planos respectivos.

Por ejemplo:

$$\text{Escala} = \frac{I}{E_i} \quad [7.2.1]$$

$$\text{Escala media} = \frac{I}{E_r} \therefore E_r = \frac{Z_r}{c} = \frac{Z_o - hr}{c}$$

$$\text{Escala más pequeña} = \frac{I}{E_b}$$

$$\text{Escala mayor} = \frac{I}{E_a}$$

Las siguientes fórmulas se derivan directamente de la Fig. (7.1)

Lado de la foto (terreno)	$S_i = s \cdot E_i$	[7.2.2]
---------------------------	---------------------	---------

Altura de vuelo	$Z_i = E_i \cdot c$	[7.2.3]
-----------------	---------------------	---------

Separación entre líneas de vuelo	$A_i = s \cdot E_i \cdot (1-v_i)$	[7.2.4]
----------------------------------	-----------------------------------	---------

Base en el aire	$B_i = s \cdot E_i \cdot (1-u_i)$	[7.2.5]
-----------------	-----------------------------------	---------

Área fotografiada	$S_i^2 = (s \cdot E_i)^2$	[7.2.6]
-------------------	---------------------------	---------

Recubrimiento lateral	$v_i = 1 - \frac{A_i}{s \cdot E_i}$	[7.2.7]
-----------------------	-------------------------------------	---------

Intervalo de exposición	$I = \frac{B_i}{GS}$	[7.2.8]
-------------------------	----------------------	---------

7.2.1 Número de fotografías por línea de vuelo (NFLV).

El número teórico de fotografías por línea de vuelo se obtiene dividiendo la longitud de ésta por la base en el aire. Al número de fotografías obtenido habrá que agregarle las fotos que generalmente se toman al principio y al final de cada línea de vuelo con el fin de que la cámara ya se encuentre funcionando normalmente cuando se toman las fotografías de la zona de interés.

$$NFLV = \frac{\text{Longitud línea de vuelo}}{\text{Base en el aire}} + 1 \quad [7.2.9]$$

7.2.2 Número de líneas de vuelo (NLV).

El número de líneas de vuelo se calcula considerando las diferentes separaciones entre líneas de vuelo (A) ajustadas al plan de vuelo de la región.

Si el terreno es plano

$$NLV = \frac{\text{Ancho del terreno a fotografiar } r - S}{A} + 1 \quad [7.2.10]$$

7.2.3 Número total de fotografías (NTF).

Se obtiene sumando el número de fotografías calculado para cada línea de vuelo.

$$NTF = \sum (N^{\circ} \text{ de fotos de cada faja}) \quad [7.2.11]$$

También es posible calcular el número total aproximado de fotografías dividiendo la superficie de la zona por el área neta ganada por fotografías, pero el resultado obtenido es menor que el número real de fotografías necesarias.

$$NTF = \frac{\text{Área total terreno}}{\text{Área neta}} \quad [7.2.12]$$

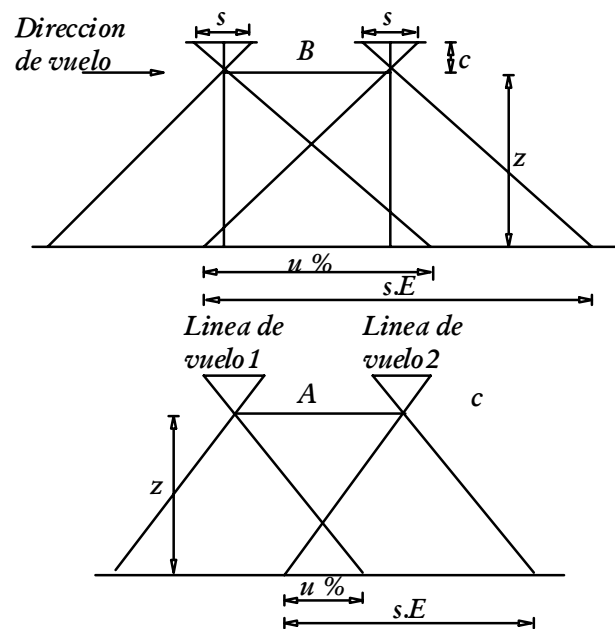


Figura (7.2) Recubrimiento longitudinal (u) y lateral (v)

7.2.4 Superficie fotografiada.

Se calcula para uno de los planos anteriormente mencionados.

$$S_i^2 = (s \cdot E_i)^2 \quad [7.2.13]$$

7.2.5 Área neta ganada por fotografía (AN).

Es la superficie de terreno fotografiada por primera vez con cada nueva fotografía
Fig. (7.4)

$$AN = \text{Área neta} = s^2 \cdot E_i^2 (1 - u_i) \cdot (1 - v_i) \quad [7.2.14]$$

Igual que en el caso anterior el área neta ganada por fotografía debe ser calculada para un cierto plano.

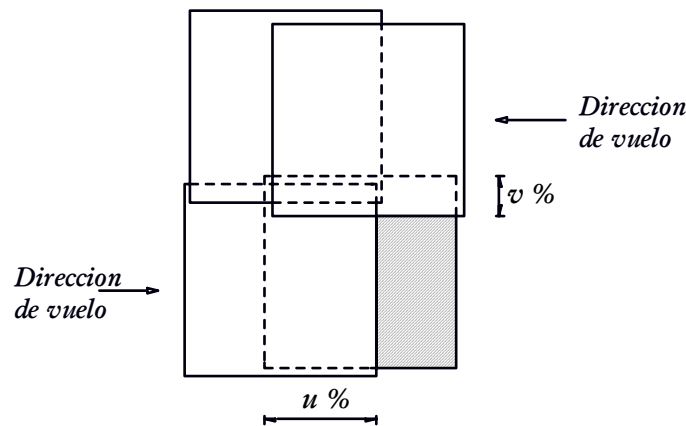


Figura (7.3) Área neta ganada por fotografía

7.3 PLANEACIÓN DE VUELOS.

Cuando se desea diseñar un vuelo será necesario entregar previamente a las personas encargadas la información básica que servirá para desarrollar los cálculos.

7.3.1 Datos

- a) Descripción de la zona
 - Limites y características topográficas

- b) Cámara aérea
 - Tipo
 - Objetivo
 - Distancia principal
 - Diafragma
 - Tiempos de exposición
 - Formato
 - Capacidad (película o placas)
 - Ciclo
- c) Avión - Tipo y marca
 - Velocidad crucero
 - Velocidad mínima
 - Techo
 - Autonomía de vuelo
 - Tripulación
- d) Película - Marca
 - Sensibilidad
 - Espesor de la película
 - Longitud del rollo
 - Filtro
- e) Características de las fotografías
 - Escala $\frac{I}{E_i}$
 - Recubrimiento longitudinal (u)
 - Recubrimiento lateral (v)
 - Época del año preferida
 - Hora del día deseada
 - Tiempo de exposición (te)

7.3.2 Cálculos.

El informe para la realización de la misión deberá ser presentado sobre un mapa topográfico, fotomosaico (o esquema de la zona) conteniendo la siguiente información:

- a) Área a fotografiar (Área)

Puede ser calculada gráficamente sobre un mapa o fotomosaico

- b) Longitud del lado de la foto (S)

Se calcula la longitud correspondiente sobre el terreno (S) y sobre el mapa

- c) Área cubierta por cada fotografía (S^2)

- d) Altura de vuelo sobre el terreno (Z)

- e) Base en el aire (B)

- f) Separación entre líneas de vuelo (A)

- g) Área neta ganada por fotografía (Área neta)

- h) Relación base altura (B/Z)

Se obtiene dividiendo la base en el aire por la altura de vuelo relativa

- i) Movimiento de la imagen en la foto (MIF)

$$MIF = \frac{GS \text{ km./h}}{3600} \times t \text{ e (seg.)} \times \frac{1}{E} \times (10)^6 = xxx(\text{mm.})$$

j) Intervalo entre exposiciones (I)

k) Dirección de las líneas de vuelo (rumbo)

El rumbo puede ser escogido siguiendo uno de los siguientes criterios:

1. Se escoge siempre una dirección fija, por ejemplo N-S ó E-W a efecto de empatar fácilmente vuelos de zonas adyacentes
2. Se escoge el rumbo paralelo a las curvas de nivel predominantes reduciendo así las variaciones de escala entre fotos de una misma faja

l) Ubicación de las líneas de vuelo

Con el rumbo escogido debe indicarse gráficamente la posición de las líneas de vuelo necesarias para cubrir la zona

m) Número de líneas de vuelo (NLV)

o) Longitud de las líneas de vuelo (L)

Cuando las líneas de vuelo han sido ubicadas sobre el mapa topográfico es posible medir gráficamente la longitud de cada línea

p) Número total de fotografías (NTF)

Se puede calcular por dos procedimientos:

1. Calculando el número de fotografías por líneas de vuelo y luego sumando las fotografías necesarias para cada línea, el número de fotografías requerido por línea de vuelo se calcula dividiendo la longitud de cada línea por el valor de la base, a este número es necesario agregarle por lo menos unas 4 ó 6 fotografías extra
2. El número mínimo de fotografías necesario para cubrir una zona se obtiene dividiendo el área de la zona por el área neta ganada por fotografía

- q) Altura de vuelo relativa y absoluta para cada línea de vuelo (Z_{rel} y Z_{abs})

La altura relativa (referida al terreno), se calcula con la expresión $ECU??$ Y si a la altura de vuelo relativa se le agrega la altura media del terreno se obtiene la altura de vuelo absoluta

- r) Tiempo de vuelo para tomar fotografías (TF)

Se calcula dividiendo la longitud total de vuelo (sumatoria de longitudes de líneas individuales) por la velocidad del avión empleada para tomar fotografías, agregando 5 minutos (o más según la precisión requerida en la navegación) por cada cambio de línea de vuelo

- s) Tiempo de vuelo al aeropuerto más próximo (TA)

Este dato es útil para reabastecimiento del avión, se obtiene dividiendo la distancia de la zona al aeropuerto, por la velocidad crucero

- t) Tiempo total de vuelo (TTV)

En la suma de TF y TA, según que este valor sea mayor o igual que la autonomía de vuelo del avión había que hacer uno o más viajes para reabastecimiento

NOTA: Terminados los cálculos, es necesario verificar que las condiciones de recubrimiento mínimo se satisfagan para las partes más altas para que no queden áreas sin cubrir. En caso de ser necesario pueden desplazarse las líneas de vuelo o cambiar su altura para ajustarse a las especificaciones

- u) Sobre un mapa topográfico (mosaico de fotografías o esquema) de la zona a escala pequeña se indican las líneas de vuelo y la respectiva altura absoluta de vuelo

EJEMPLO:

DATOS:

Área	Se desea cubrir una zona de 30 x 50 cm indicada sobre un mapa topográfico de escala 1/25.000. Altura media del terreno: 2.000 m.
Cámara	WILD RC8 Objetivo Aviogón Universal $c = 152.24$ mm. Diafragmas 5, 6, 8, 11, 16, 22 Tiempo de exposición 1/100 a 1/700 (continuo) Formato (228 mm. x 228 mm.) 23 cm.
Avión	Aero Commander (2 motores) Velocidad crucero 300 km./h Autonomía de vuelo 2.500 km.
Película	Kodak Plus X Aerographic Filtro Wratten N° 12 (amarillo) Rollo de 60 m.
Fotografía	Escala I/E = 1/10.000 Recubrimiento longitud $u = 60\%$ Recubrimiento lateral $v = 20\%$

CÁLCULOS:

a) Área a fotografiar (Área)

El área está definida en una plancha topográfica de escala 1/25.000

Es de forma rectangular 30 cm. x 50 cm. (EW)

$$\text{Área} = 0.30 \times 0.50 \times (25.000)^2 = 7.500 \text{ km.} \times 12.5000 \text{ km.} = 93.75 \text{ km}^2.$$

b) Longitud del lado de la foto (S)

$$S_{\text{terreno}} = s \cdot E = 0.23 \times 10.000 = 2.300 \text{ m.}$$

$$S_{\text{mapa}} = 0.23 \times 10.000/25.000 = 0.092 \text{ m.}$$

- c) Área cubierta por cada fotografía (S^2)

$$S^2 = s^2 \cdot E^2 = (0.23)^2 \times (10.000)^2 = 5.29 \text{ km}^2.$$

- d) Altura de vuelo sobre el terreno (Z)

$$Z = c \cdot E = 0.15224 \times 10.000 = 1522.40 \text{ m.}$$

- e) Base en el aire (B)

$$B = s \cdot E \cdot (1-u) = 0.23 \times 10.000 \times (1-0.60) = 920 \text{ m.}$$

- f) Separación entre líneas de vuelo (A)

$$A = s \cdot E \cdot (1-v) = 0.23 \times 10.000 \times (1-0.20) = 1840 \text{ m.}$$

- g) Área neta ganada por fotografía (Área neta)

$$\text{Área neta} = s^2 \cdot E^2 \cdot (1-u) \cdot (1-v) = 1.6928 \text{ km}^2.$$

- h) Relación base altura (B/Z)

$$B / Z = 920 / 1.522 = 0.6$$

- i) Movimiento de la imagen en la fotografía para $t_e = 1/400 \text{ seg.}$

$$\text{MIF} = \frac{\text{GS km./h}}{3600} \times t_e (\text{seg.}) \times \frac{1}{E} \times (10)^6 = \text{xxx}(\text{mm.})$$

$$\text{MIF} = \frac{300 \text{ km./h}}{3600} \times \frac{1}{400} \text{ seg.} \times \frac{1}{10.000} \times (10)^6 = 0.021 \text{ mm.}$$

- j) Intervalo entre exposiciones (I)

$$I = \frac{B}{\text{GS}} = \frac{920 \text{ m.}}{300 \text{ km./h}} = 11 \text{ seg.}$$

k) Rumbo escondo gráficamente (NS)

$$\text{Rumbo} = N - S$$

l) Ubicación de las líneas de vuelo

m) Número de líneas de vuelo (NLV)

$$\text{NLV} = \frac{\text{Ancho} - S}{A} + 1 = \frac{(12.5 - 2.3) \text{ km.}}{1.84 \text{ km.}} + 1 = 6.5 \approx 7$$

$$\text{Control } (\text{NLV} - 1) \cdot A + A \geq \text{Ancho}$$

$$6 \times 1.840 + 2.300 = 13.340 > 12.500 \text{ km.}$$

$$\text{Se calcula } \frac{12.500 - 11.040}{2} = 0.73 \text{ km. para centrar las líneas de vuelo}$$

o) Longitud de las líneas de vuelo (L)

$$L_{\text{mapa}} = 0.30 \text{ m.}$$

$$L_{\text{terreno}} = 7.500 \text{ km.}$$

p) Número total de fotografías (NTF)

$$1. \text{ N}^\circ \text{ de fotos por línea de vuelo } \frac{L}{B} + 1 = \frac{7.500}{0.920} + 1 = 9.15 \approx 10 \text{ fotos}$$

$$\text{Número total de fotos (10 + 5 extra)} = 15 \times 7 = 105 \text{ fotos}$$

$$2. \text{ Número de fotos} = \frac{\text{AREA}}{\text{Area neta}} = \frac{93.75 \text{ km}^2}{1.6928 \text{ km}^2} = 56 \text{ fotos}$$

q) Altura de vuelo (Z)

$$Z_{\text{rel}} = 1525 \text{ m.}$$

$$Z_{\text{abs}} = 1525 + 2000 = 3525 \text{ m.}$$

- r) Tiempo de vuelo para tomar fotografías (TF)

$$\text{Tiempo} = \frac{\text{Long. de vuelo}}{\text{Velocidad}} = \frac{7 \times 12.5 \text{ km.}}{300 \text{ km./h}} = 17.5 \text{ minutos}$$

$$\text{Tiempo para vueltas} = 6 \times 5 \text{ m.} = 30 \text{ minutos}$$

$$\text{TF} = 50 \text{ minutos (aprox.)}$$

- s) Tiempo de vuelo al aeropuerto más próximo (TA)

$$\text{TA} = 30 \text{ min.}$$

- t) Tiempo total estimado de vuelo (TTE)

$$\text{TTE} = \text{TF} + 2 \cdot \text{TA} \approx 50 \text{ min.} + 2 \times 30 \text{ min.} = 110 \text{ min.} \approx 2 \text{ h.}$$

7.4 CONTROL DE PLAN DE VUELO.

Si se dispone de un mapa topográfico, al finalizar el diseño del vuelo es necesario verificar si se cumplirán las especificaciones de escala y recubrimiento lateral en fajas, para lo cual se debe controlar:

- **Variación de escala en una foto.** Se escoge dentro del plan de vuelo y sobre el mapa topográfico, la zona de pendientes más fuertes y se estima cual podrá ser para una foto de esa zona la altura máxima, mínima y media del terreno.

Conociendo el valor de la altura de vuelo (Z_{abs}) y la distancia principal ($c=152.24 \text{ mm.}$) se calcula las escalas correspondientes a los tres planos.

Es interesante realizar esta operación, ya que un cambio excesivo de escala puede significar una variación de altura del terreno que se encuentre fuera de los límites del rango de Z del restituidor, lo cual obligaría a restituir modelos por partes.

Altura de terreno h		Z_{abs} (m.)	Altura de vuelo sobre el terreno	Escala	
Máx	2.200 m.	3.525	1.325 m.	Máx	1/8.700
Med	2.000 m.	3.525	1.525 m.	Med	1/10.000
Min	1.800 m.	3.525	1.725 m.	Min	1/11.300

Tabla (7.1) Calculo de la variación de escalas en una foto o faja

- **Variación de escala en una faja.** Se escoge la línea de vuelo proyectada que corresponda a mayores diferencias de nivel del terreno y para la faja cubierta se estiman en el mapa topográfico los valores de la altura de terreno máxima, media y mínima, aplicando un procedimiento similar indicado en la Tabla (7.1) Se calculan las escalas máxima, mínima y media.

Este control de la variación de escala (o variación de la altura de vuelo sobre el terreno) debe ejecutarse cuando se desea realizar un fotomosaico o una aerotriangulación por el método de fajas, para determinar (en función de la variación de Z) el procedimiento a utilizar.

- **Recubrimiento entre fajas.** Utilizando el mapa topográfico se escogen aquellas fajas contiguas que presenten la mayor diferencia de altura de terreno en la zona de recubrimiento común a ambas.

Se estima sobre el mapa la altura máxima, media y mínima y se calcula la altura de vuelo sobre terreno para cada uno de los tres niveles, luego se calcula S mediante la fórmula [7.2.2] Y el recubrimiento lateral " v " utilizando la fórmula [7.2.7]

Si los recubrimientos no se encuentran dentro de los límites establecidos, será necesario acercar (o alejar), subir o bajar las líneas de vuelo para satisfacer las especificaciones.

Mediante este control se verifica, antes de realizar el vuelo, que toda la zona será cubierta estereoscópicamente evitando luego, el costoso inconveniente de tener que realizar vuelos cortos complementarios que aumentan innecesariamente el número de modelos a triangular, ajustar y/o restituir.

Las verificaciones anteriores pueden realizarse para las zonas de condiciones topográficas más adversas y de acuerdo a los resultados obtenidos se podrá variar el diseño del vuelo o aún cambiar los límites establecidos en las especificaciones.

7.5 EVALUACIÓN DEL VUELO.

Luego de finalizar la toma de fotografías es necesario revelar y copiar los negativos para hacer una evaluación de la misión a fin de conocer si se han cumplido las especificaciones tanto en el aspecto métrico como en la calidad de imagen.

7.5.1 GEOMETRÍA DEL VUELO.

Utilizando las copias sobre papel se arman las fajas para controlar:

- a) Recubrimiento longitudinal (máximo, mínimo, promedio) %
- b) Recubrimiento lateral (máximo, mínimo, promedio) %

- c) Desviación horizontal o angular, debido a la desviación de la línea de vuelo o giro de la cámara, puede producirse uno de estos errores, en ambos casos puede medirse el valor angular del giro (X°) y el corrimiento en dirección perpendicular a la línea de vuelo (mm.)
- d) Escala (máxima, mínima y media)
- e) Inclinação relativa y absoluta, para controlar la desviación es necesario orientar un modelo en un restituidor y orientarlo
- f) Puntos principales, se observa si han quedado cubiertos por nubes o sobre agua
- g) Sistema de vacío, se observa el indicador para saber si la película estaba plana en el momento de hacer la exposición
- h) Nubes y sombras, utilizando una red de puntos (5 mm.) se estima el porcentaje de área de la foto cubierto por nubes o sombras
- i) Bloque, si se trata de restitución o triangulación de un bloque de fotografías debe analizarse el conjunto de fotos para proporcionar valores totales para el grupo de fotos
- j) Registros auxiliares, debe controlarse la exposición de estos elementos informativos

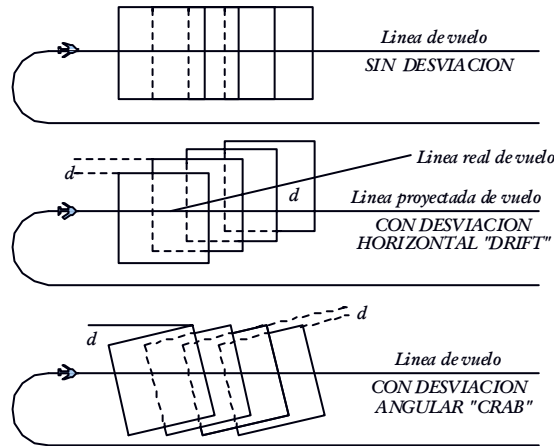


Figura (7.4) Desviación angular y horizontal de fotos aéreas

7.5.2 ANÁLISIS CUALITATIVO DE NEGATIVOS Y/O FOTOGRAFÍAS.

En primer lugar debe estudiarse el negativo para controlar su calidad y en base a los resultados obtenidos se estudian las copias positivas (sobre papel o diapositivas)

- **Densidad.** Por medio de un densitómetro se miden las densidades obtenidas (máx. y min.) y los valores requeridos para calcular el valor de gamma obtenido y compararlo con los valores establecidos en las especificaciones
- **Estabilidad dimensional.** Por medio de un comparador se pueden medir con precisión, las deformaciones sufridas por una fotografía
- **Proceso de revelado.** Un observador experimentado podrá informar, luego de un rápido análisis visual de las imágenes, si las etapas de exposición y secado se han realizado satisfactoriamente o no.
- **Otros defectos.** Como consecuencia de errores instrumentales y humanos cometidos al tomar la foto, revelarla o copiarla aparecen generalmente una serie de defectos (manchas, líneas, variaciones de tono, falta de nitidez, etc.)

que deben ser analizados, en el informe se incluye el tipo de error encontrado, el número de faja y foto en que aparece y una explicación de su posible causa

Para completar el informe de evaluación se agrega un resumen indicando el material recibido:

- Foto índice
- Negativos originales
- Copias (papel, diapositivas, contacto o ampliación)
- Porcentajes aceptados y rechazados
- Causas principales del rechazo

PRINCIPIOS DE FOTOINTERPRETACIÓN TOPOGRÁFICA



Las técnicas de foto lectura se refieren al reconocimiento e identificación de objetos (edificios, caminos, límites de predios, vegetación, etc.) y su posición relativa. El foto

lector utiliza la fotografía aérea como un mapa base detallado y toda la información la obtiene por lectura directa de las fotos, por lo cual es de suma importancia la experiencia y conocimientos previos de la persona.

El análisis de fotografías aéreas se define como el proceso de separar y analizar las partes que componen un todo y establecer su interrelación, con el fin de identificar el elemento estudiado en base a las características de sus componentes individuales, en el análisis de fotografías se llega también a algunas conclusiones cuantitativas o semicuantitativas por el estudio del tamaño y otras características métricas directamente visibles en la fotografía, así por ejemplo, además de identificar un camino, éste puede ser clasificado de acuerdo a su tipo, ancho y capacidad.

La fotointerpretación comprende los procesos anteriores, pero además incluye un estudio detallado de los elementos que aparecen en las fotografías a fin de llegar a una correcta evaluación de los mismos, mediante un estudio deductivo o inductivo. Deducción debe entenderse aquí como el estudio que de lo general lleva a lo particular basándose en evidencias convergentes, mientras que en el método inductivo de lo particular se llega a lo general.

Para poder llevar a cabo uno de estos procesos de deducción o inducción, es de fundamental importancia que el foto intérprete tenga un buen nivel de referencia, es decir, que sus conocimientos teóricos, sus experiencias personales tanto en el campo como en el análisis de fotografías le permitan obtener rápidamente conclusiones bien fundamentadas en el campo de su especialidad.

8.2 CARACTERÍSTICAS DE LA IMAGEN FOTOGRÁFICA.

Desde el punto de vista métrico, la imagen fotográfica está afectada por las deformaciones geométricas, desplazamiento debido al relieve, desplazamiento

debido a deformaciones menores como por ejemplo: cambios dimensionales por tensión o variación de la temperatura, humedad, irregularidades de la superficie, estructura de la emulsión, etc.

Cualitativamente la imagen debe ser estudiada bajo los siguientes aspectos:

- **Nitidez.** Que es función de:
 - a) Las características del objetivo
 - b) El enfoque del sistema
 - c) El movimiento de la imagen (producto por vibraciones o tiempo de exposición prolongado)
 - d) Características del material fotográfico (poder de resolución, valor de gamma, revelado, etc.)

- **Contraste.** Que es función de:
 - a) Iluminación solar y condiciones atmosféricas en el momento de tomar la foto
 - b) La reflectividad del objeto y sus alrededores
 - c) La refracción por niebla atmosférica
 - d) Sensibilidad espectral de la emulsión (pancromática, infrarroja, etc.)
 - e) Transmisión espectral del filtro (y del objetivo)
 - f) Proceso de revelado del negativo
 - g) Proceso de copiado y revelado del positivo

- **Escala.** Que es función de:
 - a) El valor de distancia principal de la cámara
 - b) La altura de vuelo sobre el terreno

A los elementos anteriores es necesario agregar la escala de la fotografía, ya, que es uno de los factores principales que faculta o dificulta la identificación (por lectura o por análisis) de elementos de la fotografía.

Cuando se emplea un estereoscopio para observar un par estereoscópico en tercera dimensión, a los elementos anteriores será necesario agregarle la exageración estereoscópica, que deforma la imagen observada del terreno, introduciendo un cambio de la escala vertical con relación a la escala horizontal.

8.3 ELEMENTOS PARA EL ANÁLISIS DE FOTOGRAFÍAS.

La fotografía aérea en blanco y negro representa el terreno en diferentes tonalidades de gris, desde el punto de vista que no es común al observador y a una escala generalmente reducida.

Es necesario considerar una serie de elementos que en forma directa o indirecta, y analizados en conjunto, ayudan al foto intérprete a identificar los elementos de su interés.

8.3.1 Tamaño.

El tamaño del objeto observado, puede ser una gran ayuda para su plena identificación, dos elementos diferentes pueden aparecer en la imagen fotográfica muy parecidos, sin embargo, la diferencia en tamaño puede ser el factor decisivo para su identificación.

El tamaño se refiere a las tres dimensiones de un cuerpo, de manera que además de medir las coordenadas planas se podrá medir la altura, por ejemplo, utilizando la

barra de paralelaje, las sombras pueden ser también muy útiles para estimar el tamaño de un objeto.

8.3.2 Forma.

La forma de los objetos, observada en una fotografía aérea tampoco es la que el observador está acostumbrado a ver y por eso es necesario adquirir experiencia mediante el estudio de muchos pares de fotografías para aprender a ver los objetos desde un punto de vista diferente, la forma contribuye a delimitar la clase a que pertenece un objeto y en muchos casos permite su clara e inequívoca identificación.

Por ejemplo una carretera y una vía férrea pueden parecer muy similares en una fotografía, sin embargo, por las características especiales de pendientes y curvas de la vía férrea, ésta puede ser fácilmente diferenciada.

En el estudio de una zona industrial, el análisis del tipo de estructura (forma de techo, chimeneas, ventilación, sistema de iluminación) pueden conducir a la identificación de un tipo de fábrica y en algunos casos hasta es posible estimar su capacidad de producción.

8.3.3 Tono y Color.

El color contribuye positivamente en fotografías aéreas en colores a la identificación de objetos y su influencia es mucho mayor que la diferenciación de tonos de gris correspondientes a una fotografía en blanco y negro, para un foto intérprete experimentado, la imagen en colores tendrá muy pocas ventajas sobre la imagen en blanco y negro, ya que con su experiencia y haciendo abstracción de los colores podrá obtener de ésta, prácticamente la misma información que obtendría de una imagen en colores.

Para utilizar correctamente las diferencias en tonalidad de las fotografías es necesario conocer los factores que tiene influencia sobre estos tonos.

Un mismo objeto, por ejemplo un río, puede aparecer en una parte de la fotografía completamente negro, mientras que en otra parte de la misma foto puede aparecer de color blanco, como consecuencia de la diferente reflectividad del agua (contenido de elementos en suspensión o sedimentos) o debido al ángulo de incidencia de los rayos solares.

En forma similar dos objetos diferentes, por ejemplo, un pequeño lago y un tanque metálico pueden parecer ambos en idénticos tonos de gris, por reflejar la misma cantidad de radiaciones luminosas.

El ingeniero agrónomo emplea las diferentes tonalidades para diferenciar tipos de suelos, el geólogo para diferenciar estructuras geológicas y tipos de rocas y el forestal para identificar especies o grupos de especies, sin embargo no todo cambio de tonalidad implica necesariamente un cambio en las características del objetivo observado, un mismo tipo de suelo puede aparecer bajo varias tonalidades en una misma foto dependiendo por ejemplo del grado de humedad.

La experiencia del foto intérprete es de suma importancia para evitar errores debidos a factores secundarios, la sensibilidad de la emulsión y la transmisión del filtro empleado, también determinan la tonalidad que se produce en la fotografía.

Finalmente es necesario recordar que variando el proceso de revelado, es posible modificar las tonalidades de la fotografía, con lo cual queda demostrado que la diferente tonalidad, nunca debe ser el único factor determinante de la identificación de un objeto.

La densidad del tono de gris puede ser medida en un densitómetro o microdensitómetro y representada numéricamente a efectos de automatizar el proceso de fotointerpretación, sin embargo, debido a los múltiples factores que la determinan no resulta un procedimiento práctico, a menos que se comparen simultáneamente imágenes multiespectrales de una misma zona.

8.3.4 Textura.

La textura puede ser definida como la distribución de tonos que representa un conjunto de unidades que son demasiado pequeñas para ser identificadas individualmente, en una fotografía.

El tamaño de los objetos que determinan la textura, varia con la escala de la fotografía y en algunos casos, puede ser elemento suficiente para la identificación de objetos.

En fotografías de escala grande de zonas boscosas, las hojas son demasiado pequeñas para poder ser diferenciadas unas de otras, sin embargo, contribuyen a darle una textura especial a cada copa individual. En fotografías de escala pequeña, tomadas sobre zonas boscosas, toda la copa será el elemento que define la textura del bosque. Los términos más comunes para referirse al tipo de textura son: lisa, áspera, granular, lanosa, moteada, etc.

8.3.5 Patrón.

El patrón se refiere a la agrupación ordenada de ciertos elementos con características especiales, el drenaje, los cultivos, la vegetación y el uso de tierra pueden presentar ciertos patrones o tipos, que permiten deducir o inferir una serie de elementos o

características no directamente visibles en las fotografías. El tipo, densidad y forma del drenaje pueden ser un indicativo muy claro del tipo de terreno o roca.

8.4 CLAVES DE INTERPRETACIÓN.

Una clave de fotointerpretación está constituida por fotografías individuales o pares estereoscópicos en los cuales se muestran claramente ciertas características de un objeto que se desea identificar y que permiten al observador organizar la información, conduciéndolo a la correcta identificación de objetos desconocidos.

Por ejemplo, una especie de árboles de un determinado bosque puede aparecer en fotografías de cierta escala con una textura o forma muy característica. Un estereograma de dicho tipo de árboles puede ser muy útil para la identificación del mismo tipo de árbol en otra parte del bosque.

El empleo de claves puede ser útil en la identificación de objetos, ya sea por selección o por eliminación, es decir, buscando un elemento similar al de la clave o bien descartando aquellos que no se parecen. Las claves son también muy útiles para uniformizar el trabajo de grupo, realizado por varios fotointérpretes en una misma zona.

8.5 PREPARACIÓN DE LAS FOTOGRAFÍAS PARA SU FOTointerpretación.

Las principales etapas para la preparación de fotografías para su interpretación son:

- a) Marcar puntos principales y líneas de vuelo
- b) Marcar líneas de empate para fotointerpretación

Estas líneas limitan el área de la fotografía dentro de la cual se va a realizar la fotointerpretación:

1. Si el terreno es plano podrá hacerse la interpretación en fotografías alternas, por ejemplo, en fotos pares e impares, en este caso las líneas de empate estarán constituidas por perpendiculares a las líneas de vuelo levantadas por los puntos principales transferidos. Fig. (8.1)

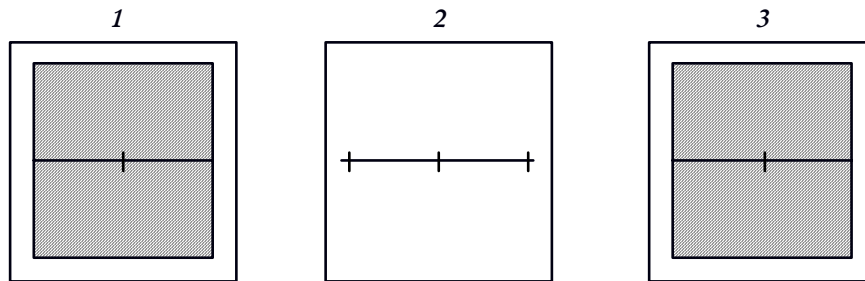


Figura (8.1) Área donde se debe interpretar en fotografías de terreno plano

2. Si se trata de terreno montañoso, será necesario emplear todas las fotografías utilizando las mediatrices de las líneas de vuelo como líneas de empate. Fig. (8.2)

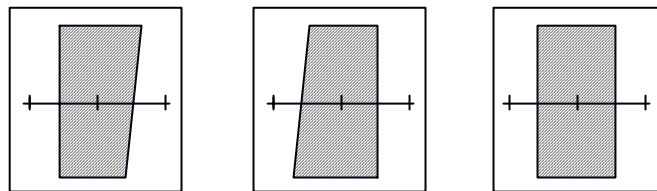


Figura (8.2) Área donde se debe interpretar en fotografías de terreno montañoso

Hacia la parte superior e inferior de las fotos deben trazarse rectas en la parte media del recubrimiento común con las fotografías de fajas adyacentes.

- c) Se orientan las fotografías para ser observadas en estereoscopios de espejo, tratando que las sombras que aparecen en la imagen caigan hacia el observador.
- d) Se procede a interpretar las fotografías:
El dibujo puede realizarse:
- Directamente sobre las fotografías, utilizando lápices de grasa especiales
 - Sobre un papel transparente, en cuyo caso será necesario dibujar las marcas fiduciales, los puntos principales y el número de la fotografía para su posterior identificación.

8.6 INTERPRETACIÓN TOPOGRÁFICA.

La finalidad de una interpretación topográfica es analizar estereoscópicamente pares de fotografías aéreas con el objeto de reconocer e identificar los principales accidentes topográficos naturales y artificiales para posteriormente elaborar un mapa.

De acuerdo a las características de la información deseada podrá tratarse de un levantamiento topográfico general, semi detallado o detallado según la escala y la densidad de detalles que se desea consignar.

En un levantamiento general, la escala de las fotografías es pequeña 1/50.000 o menor y la información que se desea, es únicamente aquella que permita representar las características principales del terreno, sobre mapas a escala 1/50.000, 1/100.000 o menor, con intervalos de curvas de nivel de curvas de nivel de 50 m. o menores.

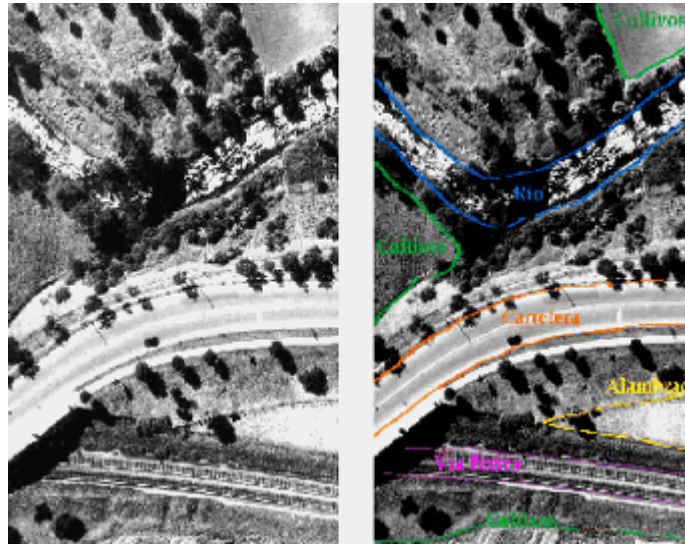


Figura (8.3) Interpretaciones características del terreno

En un levantamiento semi detallado generalmente se emplean fotografías de escala media ($1/10.000$ a $1/40.000$) y por tratarse de una escala mayor, se pueden incluir muchos detalles del terreno e incluso se puede intensificar la representación altimétrica del terreno utilizando un intervalo de curvas de nivel mucho más pequeño (por ejemplo 25 a 5 m.) para producir mapas de escala $1/25.000$ a $1/5.000$.

Con fines generalmente especiales, en zonas donde el valor de la tierra es muy alto o donde simplemente se requiere información muy detallada con miras a la elaboración de proyectos de ingeniería muy detallados, se pueden elaborar levantamientos topográficos detallados utilizando fotografías de escala grande ($1/1.000$ a $1/10.000$) donde prácticamente se representan todos los elementos visibles en las fotografías, sobre mapas de escala $1/100$ a $1/5.000$ con curvas de nivel cada 0.50 a 5 m.

Para la elaboración de un mapa topográfico o un mapa base de interpretación (es decir, un mapa topográfico generalizado que sirva de base para la elaboración de un mapa temático; geológico, geomorfológico, forestal, etc.) en general se aconseja que antes de colocar las diapositivas o fotografías en el instrumento fotogramétrico, las

fotografías sean objeto de un cuidadoso examen y que una interpretación topográfica sea realizada para que el operador conozca de antemano la morfología del terreno y los elementos que debe restituir.

Cualquiera que sea el nivel de información, la precisión o el instrumento utilizado para elaborar el mapa, se recomienda elaborar previamente una fotointerpretación teniendo en cuenta los siguientes aspectos.

- **Estudio general de las fotografías.** Antes de comenzar con la fotointerpretación de los pares individuales se debe estudiar la zona en conjunto con el objeto de definir la leyenda a utilizar, es decir, el tipo de información que se desea representar y la forma como será dibujada de acuerdo a la escala de las fotografías y del mapa final.
- **Definición de una leyenda.** De acuerdo al análisis indicado en el párrafo anterior, se establece una leyenda en la cual se indican los elementos que deben ser representados y cuales serán los símbolos empleados.
- **Preparación para la interpretación de pares individuales.** Cada par estereoscópico de fotografías se orienta para ser observado bajo un estereoscopio de espejos y sobre la fotografía derecha se coloca un papel transparente de buena calidad sobre el que se dibuja el recuadro dentro del cual se realizará la interpretación, anotando además: la posición de puntos principales y líneas de vuelo, si es posible se indica la posición de las marcas fiduciales, la identificación de las fotografías (vuelo y número de las fotos)

En caso de utilizar directamente la fotografía, únicamente es necesario marcar la zona de la foto donde se va a realizar la interpretación.

- **Interpretación de pares individuales.** De acuerdo a la leyenda establecida y a los símbolos escogidos se procede a dibujar: vías de comunicación, construcciones, límites, uso de la tierra, drenaje, puntos de control, altimetría y otros elementos.

8.6.1 Vías de comunicación

Estos elementos aparecen en fotografías aéreas como bandas de diferentes anchos y de tonos que pueden variar desde blanco a negro dependiendo del material base que lo compone

- **Carreteras, caminos, senderos, autopistas.** Las carreteras deberán clasificarse teniendo en cuenta su importancia, ancho y material del pavimento (hormigón, asfalto, grava, etc.), a medida que decrece la importancia del camino, se va reduciendo el ancho, el pavimento es de peor calidad o las especificaciones geométricas son menos estrictas y los cruces son más sencillos; en general los caminos se diferencian de las líneas férreas por tener mayor ancho, curvas más cerradas, pendientes más pronunciadas, puentes más anchos, cruces de nivel y conexiones con otras vías o estacionamiento para conductores.
- **Vías férreas.** Las vías férreas son generalmente angostas, presentan tramos rectos muy prolongados, cruces a desnivel, curvas muy abiertas y su color depende fundamentalmente del tipo de piedra que constituye la base sobre la cual se apoyan los durmientes, sólo en fotografías de escala muy grande pueden observarse los durmientes, en terreno montañoso abundan los túneles y los rellenos.
- **Puentes, túneles, viaductos.** Los puentes son fácilmente localizables a lo largo de vías de comunicación sobre cruces de ríos, arroyos, o canales; presentan un

cambio en la imagen debido a la estructura metálica o de concreto, y por su altura arrojan sombra (si la foto no es tomada a medio día) y en los accesos presentan zonas prolongadas de relleno.

En túneles, la vía parece penetrar en la montaña y luego se vuelve a observar que continúa, a veces pueden distinguirse las bocas de entrada y salida, dependiendo de la escala de las fotos y los contrastes que presenten; al igual que los puentes, los viaductos presentan gran diferencia de nivel con el terreno circundante, no hay rellenos en la zona y la sombra arrojada es también prolongada.

- **Canales.** Los canales aparecen también como estrechas bandas cuyo tono depende de la pureza del agua y su reflexión; en terreno plano la banda es recta y en terreno montañoso sigue las curvas de nivel, son cruzadas generalmente por puentes de carreteras o vías férreas y la pendiente es sumamente pequeña.
- **Líneas de alta tensión, oleoductos, acueductos, gaseoductos, etc.** Las líneas de alta tensión, oleoductos y elementos similares en general son difíciles de observar directamente sobre las fotografías, especialmente cuando la escala es pequeña, sin embargo, por la presencia de torres o estaciones de bombo puede reconstruirse la línea.

8.6.2 Construcciones

- Edificios residenciales
- Edificios públicos (escuelas, aeropuertos, monumentos, plazas)
- Construcciones industriales (fábricas, galpones)
- Otros (iglesias, molinos, etc.)

Las construcciones son fáciles de identificar sobre fotografías aéreas, por su forma, su altura, su color generalmente blanco con techos oscuros y por la sombra arrojada.

Las casas o instalaciones de campo pequeñas pueden identificarse por caminos o senderos que llegan hasta la construcción.

En zonas industriales se caracterizan por construcciones bajas, con techos de varias aguas (iluminación) chimeneas, tanques de agua y zonas de estacionamiento amplias o zonas para carga y descarga de materia prima y productos elaborados. En algunos casos las características bien definidas de un cierto tipo de industria permite su plena identificación en fotos aéreas.

En zonas urbanas, las fotografías de escala grande permiten la completa identificación de las unidades o zonas residenciales con sus escuelas, parques y edificios públicos o templos religiosos caracterizados por sus torres.

8.6.3 Límites

- Límites naturales
- Límites de parcelas naturales
- Límites de predios urbanos

Los límites de elementos naturales como lagos y ríos aparecen muy bien marcados en las fotografías aéreas, especialmente si se trata de emulsiones infrarrojas, pero los límites de parcelas por tener un carácter eminentemente legal no son directamente identificables en las fotos.

Las líneas de alambrado, muros de piedra o barro en general están encerradas en una franja de terreno de varios metros de ancho en la cual no se cultiva y por

consiguiente son fáciles de identificar, sin embargo, no todo cambio de patrón o tono en la fotografía corresponde a un límite de propiedad, en general es necesario poseer la documentación legal correspondiente (título de propiedad, descripción del predio, etc.) para su identificación o bien recorrer el campo para identificar plenamente los vértices y límites en las fotos.

En áreas urbanas, la delimitación de predios es más sencilla debido a los cambios de las construcciones, sin embargo, se requieren fotografías de escala muy grande para poder proceder a una delimitación precisa, aún en estos casos, un control de campo es indispensable para verificar los límites de la propiedad.

8.6.4 Uso actual de la tierra

En cada caso particular será necesario estudiar los usos de tierra correspondientes, para establecer la leyenda apropiada, la cual podrá incluir algunos de los siguientes elementos: bosques, áreas cultivadas, cultivos especiales, huertas, frutales, pantanos, afloramientos rocosos, pastos, etc.

Para la diferenciación de estos elementos, es de fundamental importancia considerar la época del año o estación en que se han tomado las fotografías.

Los bosques aparecen como áreas oscuras de contornos irregulares, aún en los casos de bosques artificiales, la densidad del follaje debe ser considerada en relación al tipo de vegetación y a la estación.

Las áreas cultivadas se presentan en general en tono gris y su intensidad varia con el grado de humedad del suelo, las huellas o marcas dejadas por el arado o líneas de siembra con características.

Las huertas de árboles frutales, igual que los viñedos, se caracterizan por las líneas de árboles regularmente espaciados, igual tipo, igual tamaño y altura de copa.

Los pantanos se presentan en zonas planas, muy mal drenadas, con vegetación característica, el tono depende de las características del agua y del reflejo que éste produce en función de la inclinación de los rayos solares.

Los afloramientos rocosos en general se presentan de color claro, con pendientes pronunciadas, poca vegetación y formas angulares, dependiendo del tipo de roca.

Los pastos se caracterizan por su tono uniforme, baja altura, la presencia de animales (observables de escala grande) y cambios de tonos por variación de la humedad del suelo.

8.6.5 Drenaje

Ríos, arroyos, cañadas, canales, lagos, diques, embalses. El estudio del drenaje es de gran importancia en fotointerpretación porque los patrones identificados y sus características de densidad y frecuencia pueden ser utilizados como criterios para identificación de fenómenos geológicos, geomorfológicos o hidrológicos de gran importancia para el estudio u diseño de obras civiles.

Según Lueder, el patrón de drenaje superficial es el modelo de distribución de drenaje superficial y drenaje poco profundo que cubre un área, los principales factores que determinan las características del drenaje son: el clima (lluvias, humedad, temperatura, etc.), vegetación, pendiente topográfica y características del terreno (material, permeabilidad, etc.)

De acuerdo al mismo autor, el drenaje puede ser caracterizado por:

- Grado de uniformidad u homogeneidad del patrón debido a las características físicas del material.
- La densidad (D) se define como la relación o cociente entre la longitud total del drenaje y el área drenada, siendo por consiguiente una medida de la permeabilidad del terreno.
- La frecuencia se define como la relación entre el número de caminos de drenaje y la superficie del área drenada.
- El grado de control se refiere a la orientación del patrón y proporciona información sobre geología estructural, movimientos tectónicos, etc.
- La angulosidad se refiere a los cambios de dirección que aparecen en los caminos que componen un patrón y proporciona información sobre materiales, fallas ocultas y estructuras subterráneas.
- El ángulo que forma una corriente secundaria al desembocar en una corriente principal es un indicativo del tipo de material y puede servir para descubrir estructuras ocultas.
- Los tipos de drenaje se subdividen en tres: patrones erosionales formados por procesos de erosión (por ejemplo: dendrítico, paralelo, radial, anular, rectangular, etc.), patrones de disposición formados por procesos de sedimentación (por ejemplo: trenzado, recto, meándrico, reticular, etc.), patrones especiales desarrollados en regiones con drenaje especial (por ejemplo: patrón de montículos, desordenado, sumidero, etc.)

Todas las características anteriores deben ser estudiadas cuidadosamente, antes de proceder a dibujar un drenaje con el fin de hacer resaltar aquellas características más importantes, que podrían ser de gran utilidad en estudios posteriores. Por ejemplo, en combinaciones con el tipo de vegetación, la permeabilidad del terreno y su pendiente, se calcularán las secciones de desagüe para el diseño de alcantarillas y puentes.

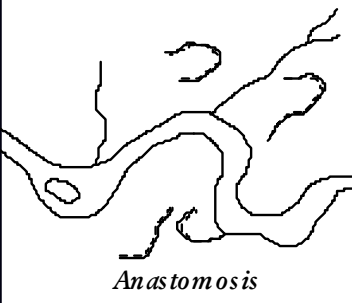
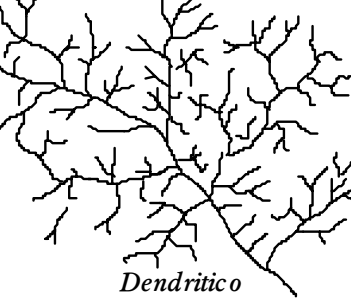
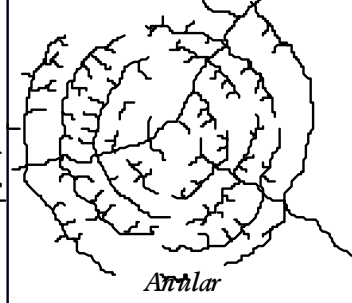
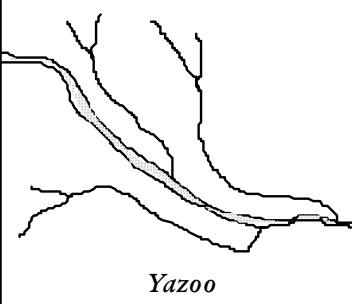
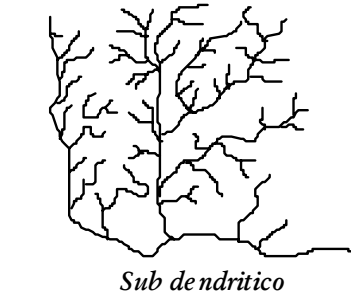
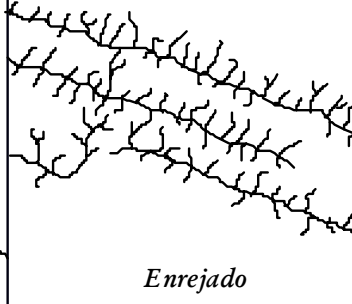
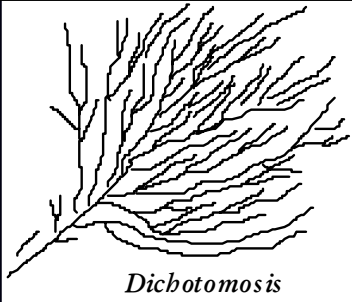
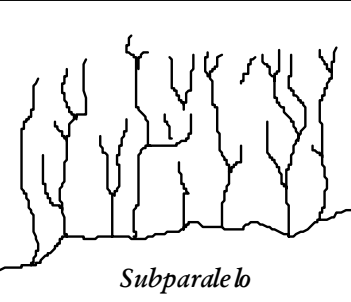
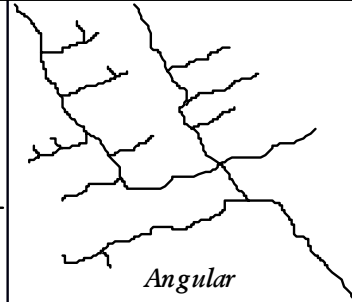
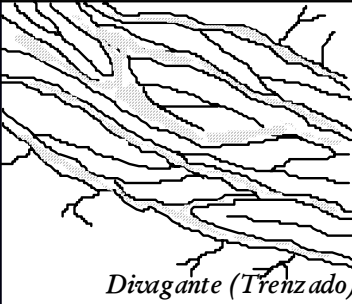
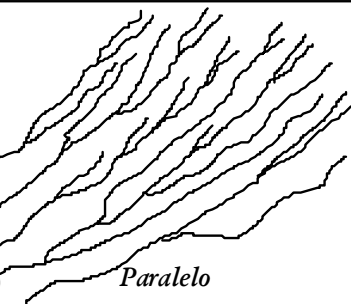
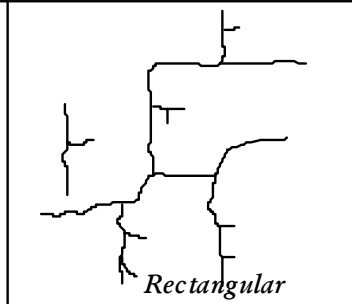
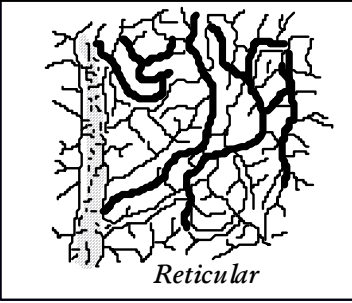
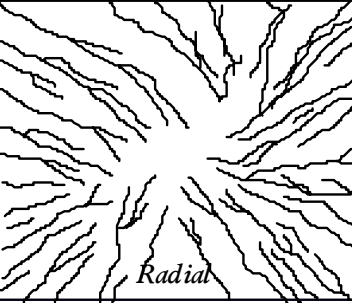
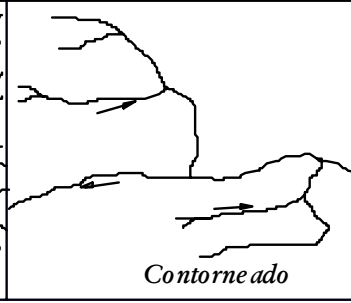
<i>Terrenos Aluviales</i>	<i>Zonas de Erosion</i>	
	<i>Desarrollo Libre</i>	<i>Influencia Estructural</i>
 <i>Anastomosis</i>	 <i>Dendritico</i>	 <i>Anular</i>
 <i>Yazoo</i>	 <i>Sub dendritico</i>	 <i>Enrejado</i>
 <i>Dichotomosis</i>	 <i>Subparalelo</i>	 <i>Angular</i>
 <i>Divergente (Trenzado)</i>	 <i>Paralelo</i>	 <i>Rectangular</i>
 <i>Reticular</i>	 <i>Radial</i>	 <i>Contorneado</i>

Figura (8.4) Principales redes de Drenaje

8.6.6 Puntos de control

- Control planimétrico
- Control altimétrico

Es conveniente marcar sobre las fotografías aéreas los puntos que servirán de apoyo, tanto altimétrico como planimétrico en el proceso de elaboración del mapa, los puntos podrán ser preseñalados, en cuyo caso aparecerá una marca (cruz, triángulo, etc.) muy notable en la foto o bien habrá que utilizar la descripción de campo para su identificación en la foto, si se trata de un punto natural o artificial no señalado; los puntos artificiales marcados con un PUG o SNAP-Marker, aparecerán en las diapositivas perfectamente marcados por un disco transparente.

8.6.7 Altimetría

- Curvas de nivel
- Altura de puntos
- Curvas de forma

La información altimétrica correspondiente a un área podrá estar representada por: curvas de nivel o curvas de forma según que el modelo pueda ser orientado absolutamente o no.

Si se dispone de un mínimo de tres puntos de control bien distribuidos y si el instrumento utilizado lo permite, el modelo podrá ser orientado absolutamente y se dibujarán curvas de nivel cuyo intervalo será función de:

- Escala y calidad de las fotografías (altura de vuelo)
- Precisión del instrumento

- Pendiente topográfica
- Altura y densidad de la vegetación que cubre el terreno

En el caso de terreno plano, el dibujo de curvas de nivel resulta sumamente complicado y en algunos casos se prefiere la altura de puntos individuales a lo largo de una retícula.

Si no se dispone de puntos de control o el instrumento no permite orientar absolutamente el terreno, el fotogrametrista sólo podrá dibujar curvas de forma que reflejen de la mejor forma posible las principales características morfológicas del terreno.

Estas curvas pueden considerarse curvas de nivel aproximadas ya que en general representan muy bien la forma del terreno pero no unen puntos de igual cota.

Al dibujar las curvas de nivel o curvas de forma se debe tener mucho cuidado de interpretar correctamente el tipo de terreno sobre el cual se está dibujando ya que las curvas son una expresión morfológica de los tipos de roca, y aunque es casi imposible establecer las características individuales de cada roca, se pueden dar las características de cada tipo:

- Rocas ígneas, son generalmente resistentes a la erosión, que se caracterizan por su homogeneidad, una disección gruesa y rectangular y una red de drenaje dendritico (rectangular) debido a la presencia de diaclasas.
- Rocas sedimentarias, debido a la resistencia de sus capas, el relieve y el drenaje son de gran importancia, en las capas horizontales se desarrollan preferiblemente patrones dendriticos mientras que en zonas con pendientes fuertes se desarrollan patrones paralelos.

La estratificación y alineación de las crestas son características de estas rocas, salvo el caso de calizas caracterizadas por una topografía de disolución y fenómenos de Karst

Las rocas permeables de este grupo (areniscas) forman pendientes fuertes y muestran un relieve regular, las rocas de baja permeabilidad (esquistos) se caracterizan por pendientes suaves, un drenaje denso y colinas bajas (terreno ondulado).

- Rocas metamórficas, el metamorfismo aumenta en general la resistencia de las rocas a la erosión por lo cual resulta más difícil su diferenciación por el sistema de drenaje, sin embargo, es posible establecer ciertas diferencias en base al carácter húmedo o seco de las zonas de estudio. Los perfiles característicos del drenaje (u, v, etc.) también deben ser correctamente interpretados, para que las curvas no pierdan su valor interpretativo.

8.6.8 Otros elementos

Bajo este título general, se incluye una serie de elementos especiales que pueden aparecer en una determinada zona, ya sea por sus características especiales o por su importancia en estudios posteriores. Por ejemplo: minas, canteras de materiales de construcción, zonas de inestabilidad, etc.

Control de campo, nomenclatura y revisión, al finalizar el trabajo de interpretación o restitución, deberá agregarse al mapa la nomenclatura correspondiente y todo el mapa deberá ser sometido a una cuidadosa revisión de campo, para resolver las dudas que se presentaron durante la interpretación y para confirmar que toda la información es correcta.

Es interesante anotar que muchas veces la información hidrológica correspondiente a extensas zonas de terreno tiene poca utilidad práctica debido a que las fotografías de las cuales se tomó la información, fueron tomadas en diferentes épocas y por consiguiente bajo diferentes niveles de agua.

8.7 PRINCIPALES CAMPOS DE APLICACIÓN DE FOTINTERPRETACIÓN EN INGENIERÍA

Las principales aplicaciones de la fotointerpretación en el campo de la ingeniería son en estudios de:

- Drenaje
- Geomorfología
- Geología
- Materiales de construcción
- Erosión
- Deslizamientos
- ubicación de vías de comunicación (carreteras, vías férreas, canales de irrigación, líneas de alta tensión)
- Localización de presas
- Estudios de tráfico
- Hidráulica
- Regulación de aguas
- Estudios costeros
- Puertos
- Planeación urbana y rural
- Uso de tierra planeación de trabajos topográficos y geodésicos, elaboración de mapas topográficos generales y temáticos, estudios de áreas urbanas, catastro (urbano, sub urbano y rural).

8.8 ESTEREOGRAMAS, ESTEREOTRIPLETES, MULTIPLETES Y FOTOMOSAICOS.

En muchos trabajos de fotointerpretación o fotogrametría puede resultar muy interesante acompañar la descripción de un cierto tipo de fenómeno o punto de control que aparece en un par estereoscópico de fotografías, con una simple construcción fotográfica que permita a cualquier observador, la visión tridimensional de la zona de interés, mediante el empleo de un estereoscopio de bolsillo.

8.8.1 ESTEREOGRAMAS.

Mediante una construcción muy sencilla, se pegan yuxtapuestas dos fotografías estereoscópicas de forma rectangular de 65 mm. De ancho que permitan ver la zona común en tercera dimensión.

El procedimiento a seguir es muy sencillo y sólo se requieren dos fotos estereoscópicas Fig. (8.5)

1. Se marcan las líneas de vuelo de cada foto.
2. Se levanta sobre la línea de vuelo de una de las fotos un rectángulo de 65 mm. De ancho hacia ambos lados de la línea de vuelo.
3. Se transfiere el rectángulo marcado en una foto a la otra.
4. Se orientan correctamente los dos rectángulos y se pegan de manera que:
 - a) Conserven la misma posición relativa que tenían en la faja.
 - b) Las líneas de vuelo queden sobre una misma recta.
5. Si es necesario se pueden cortar los dos rectángulos mediante paralelas equidistantes a la línea de vuelo a fin de obtener realmente un rectángulo.

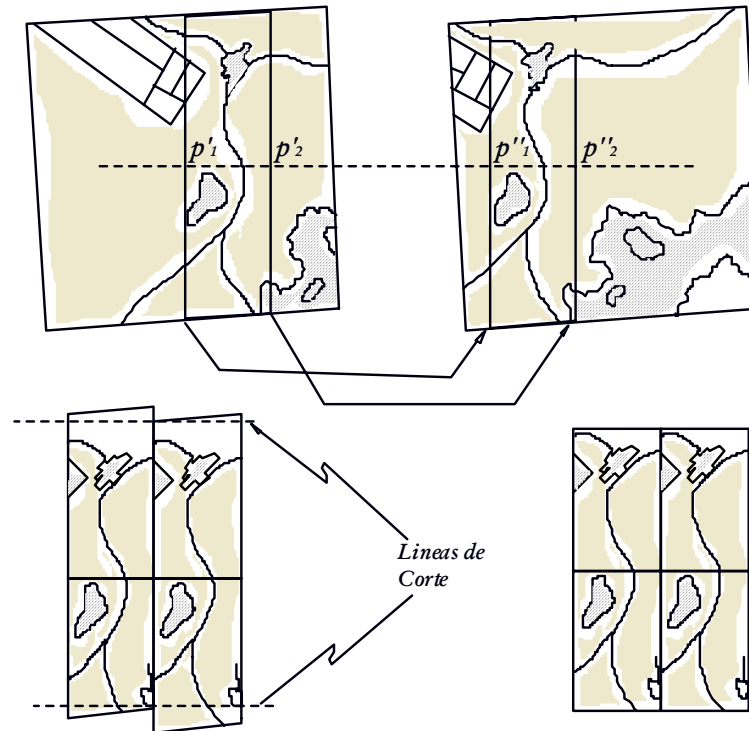


Figura (8.5) Construcción de un estereograma

Mediante una solución de este tipo se pueden incluir en informes, publicaciones o archivos, información tridimensional sobre ciertos fenómenos notables.

8.8.2 ESTEREOTRIPLETES.

El estereotriplete corresponde a una construcción similar desarrollada para la faja central de 13 cm. de una foto aérea, en que cada mitad es observada en tercera dimensión mediante la adición de un rectángulo de 6.5 cm. a cada lado.

El estereotriplete se arma utilizando tres fotos consecutivas y siguiendo el procedimiento que se detalla a continuación. Fig. (8.6)

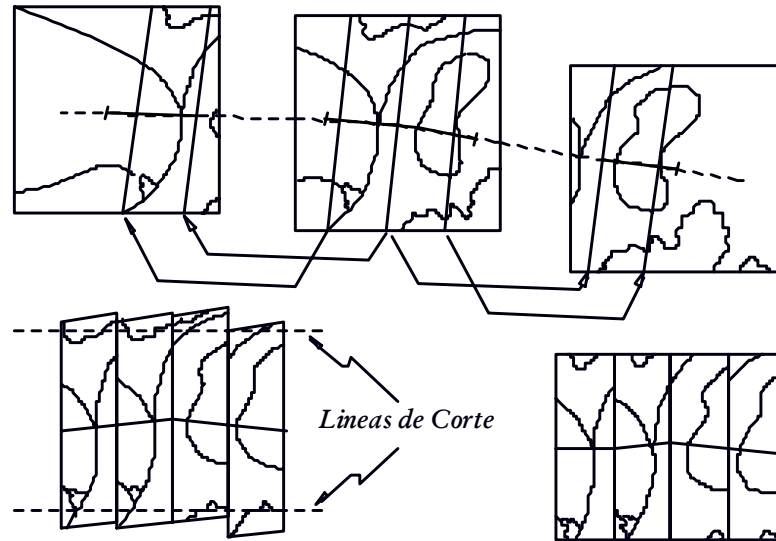


Figura (8.6) Construcción de un estereotriplete

1. Se marcan puntos principales y líneas de vuelo.
2. Si los segmentos que representan la línea de vuelo sobre la foto central no están sobre una misma recta se escoge una recta media. Perpendicular a dicha línea se marcan dos rectángulos contiguos de 65 mm. de ancho cada uno, generalmente estos rectángulos se dibujan a izquierda y derecha del punto principal de la foto.
3. Se transfiere el rectángulo izquierdo a la foto izquierda y el derecho a la foto derecha, recortándose los diferentes rectángulos.
4. Se pega sobre una hoja de cartulina el rectángulo sacado de la foto central y a sus respectivos lados se apegan los rectángulos pequeños de manera que:
 - a) Los rectángulos queden en el mismo orden en que aparecen en las fotos.
 - b) Las líneas de vuelo media, queden sobre una misma recta.

8.8.3 MULTIPLETES.

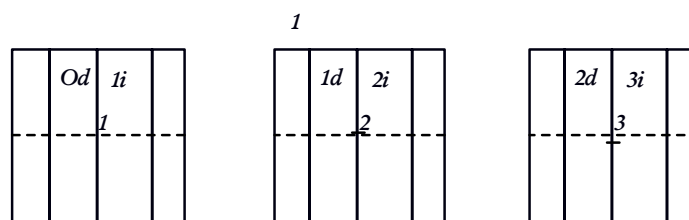
La construcción anterior puede ser aplicada en forma sistemática para permitir la observación de una pequeña faja de fotografías.

El procedimiento a seguir comprende las siguientes etapas:

1. Se marcan los puntos principales y las líneas de vuelo sobre las fotos de la faja.
2. Se transfieren las líneas de vuelo sobre una hoja de papel y transparente y se sustituye la línea real de vuelo por una línea media.
3. Sobre esa línea de vuelo media se marcan sucesivamente rectángulos de 65 mm. De ancho perpendiculares a dicha línea y a ambos lados.
4. Estos rectángulos son traspasados a las respectivas fotos y recortados, cada rectángulo pertenece a dos fotos por lo cual se identifican con la letra i (si pertenece a la foto izquierda) y d (si pertenece a la foto derecha).
5. Todos los rectángulos (i) se pegan en orden creciente de los números y con la línea media de vuelo sobre una misma recta.
6. Las partes derechas (d) se pegan en un solo lado (a fin de permitir un movimiento tipo bisagra) de cada una de las partes derechas. Cada parte deberá quedar colocada en correcto orden, por ejemplo:

Partes móviles:	0d	1d	2d	3d	4d	5d	
Partes fijas:	0i	1i	2i	3i	4i	5i	6i

Colocando las respectivas partes en posición horizontal se podrían observar (0i-0d) - (1i-1d) y así sucesivamente, en tercera dimensión. Si el tamaño de las fotos es de 23 cm. (la base será de 92 mm.) y la aplicación de este método se hace muy difícil para más de 4 fotos, por lo cual no resultará práctico.



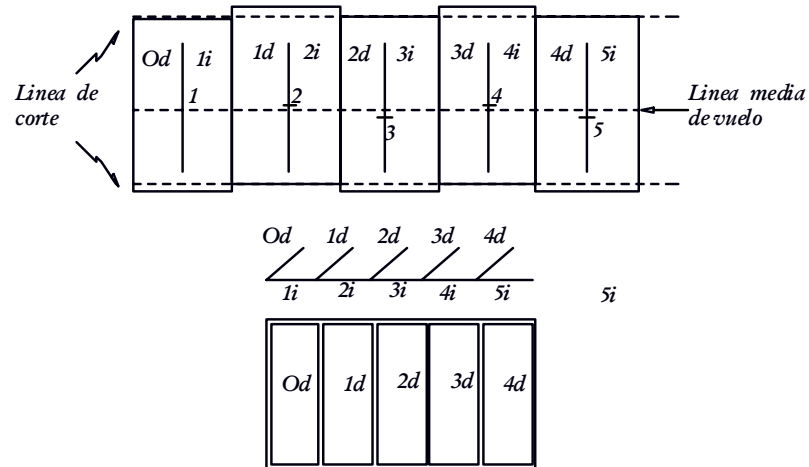


Figura (8.7) Construcción de un multiplete

8.8.4 FOTOMOSAICOS.

Bajo el nombre común de pictomapas se agrupa un gran número de productos fotográficos derivados, cuyo objeto es sustituir los mapas convencionales por medio de soluciones que a veces pueden resultar rápidas y económicas. Un fotomosaico es sencillamente el ensamblaje de un grupo de fotos continuas pertenecientes a una o varias fajas contiguas

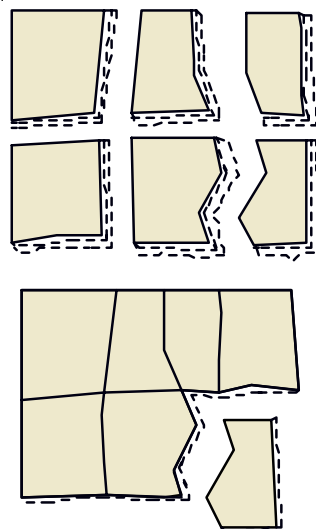


Figura (8.8) Construcción de un fotomosaico

De acuerdo al tipo de foto empleado, a las correcciones que se le introduzcan y a la densidad de puntos de control utilizados en el ensamblaje se tendrá diferentes tipos de fotomosaicos:

- **Mosaico no controlado.** Se emplean fotos aéreas a su escala natural (amplias o reducidas) pero sin ningún tipo de correcciones. La unión entre fotos se realizan teniendo en cuenta solo los detalles y no se utilizan puntos de control para ajustar o dar escala, el resultado es lógicamente rudimentario pues no se han corregido las deformaciones geométricas de las fotos ni la escala, pero su costo es bajo y su elaboración es muy rápida.
- **Mosaico semicontrolado.** Si además de tener en cuenta los detalles de las fotos para su ensamblaje, se emplean también algunos puntos de control de coordenadas conocidas, el fotomosaico obtenido será semi-controlado, en este tipo de fotomosaico se pueden agregar ejes coordenados y los errores relativos quedan parcialmente controlados y limitados por los puntos de control, por ejemplo, podrían usarse puntos de control cada dos fotografías, limitando los errores relativos a distancias cortas, estos errores serán consecuencia de las deformaciones geométricas de las fotos, del ensamblaje de las fotos y del ajuste de las fotos al control, el error absoluto está controlado por los puntos de control disponibles.
- **Fotomosaico controlado.** Cada fotografía del mosaico es rectificadas o sea que se utilizan (4 puntos de control) para el ajuste de escala y para la corrección del error debido a la inclinación, el ensamblaje de estas fotos rectificadas y con escala ajustada se realiza teniendo en cuenta los mismos puntos de control empleados para su ajuste y los detalles de las fotos, en consecuencia, el único error que no es corregido es el desplazamiento debido al relieve o sea que

desde el punto de vista teórico el fotomosaico controlado de una zona plana es realmente un foto-plano.

Los fotomosaicos mencionados anteriormente podrían ensamblarse con: fotos alternas (terreno plano), utilizando todas las fotos (terreno quebrado). Si el terreno es plano, el desplazamiento al relieve es casi nulo y por eso podrían utilizarse fotos alternas de cada faja (1, 3, 5, 7 etc.) eliminando por ejemplo las fotos pares con el objeto de ensamblar el menor número posible de fotos.

Si el terreno es montañoso, al utilizarse fotos alternas podrían encontrarse diferencias muy grandes producidas por el relieve, para evitar ese inconveniente deben emplearse todas las fotos, escogiendo únicamente la parte central en que los desplazamientos debido al relieve son más pequeños (por tener menor valor de la distancia radial r).

- **Mosaico de ortofotos.** Mediante un procedimiento sencillo de rectificación diferencial es posible corregir todas las deformaciones geométricas de una foto en un ortoprojector.

Utilizando tres puntos de control de coordenadas (X , Y , H) conocidas, el ortoprojector puede rectificar diferencialmente cada foto corrigiendo el desplazamiento debido al relieve, la escala y el error de inclinación. Teóricamente el resultado de vista práctico, el desplazamiento debido al relieve, es corregido para un plano medio del terreno, quedando sin corregir el desplazamiento debido al relieve producido por elementos verticales (árboles, edificios, o cortes verticales del terreno muy pronunciados).

Cualquiera que sea el tipo de mosaico que se desee ensamblar deben tenerse en cuenta los siguientes elementos:

1. Prepare todo el mosaico con fotos y puntos de control y elabore un esquema del fotomosaico final.
2. Indique en cada foto (original rectificada u ortofoto) la línea donde va a realizar el empate, dejando siempre un pequeño margen de 2 mm. en una de las fotos, los criterios para marcar la línea son en base a coincidencias de detalles, ajuste de tonos de gris y ajuste de escala o control de puntos.
3. Recorte las fotos y humedézcalas antes de pegar a fin de poder ajustar pequeñas diferencias.
4. Pegue las fotos sobre madera o tela también humedecida.
5. Deje secar y complete la imagen agregando: Título, número de fotos, escala, recuadro, cuadrícula de coordenadas, nombre del Instituto, fecha, etc.

8.8.5 FOTOMOSAICO DE FAJAS DE FOTOGRAFÍAS PARA ESTUDIOS DE INGENIERÍA.

En muchos estudios referentes a fajas lineales de terreno como carreteras, canales, vías férreas, líneas de distribución de energía, etc., y cualquiera que sea el nivel o etapa del estudio (anteproyecto, diseño, mantenimiento, revisión, etc.), resulta de gran interés elaborar un fotomosaico de una o varias fajas de fotografías continuas que puedan plegarse en forma de libro de bolsillo.

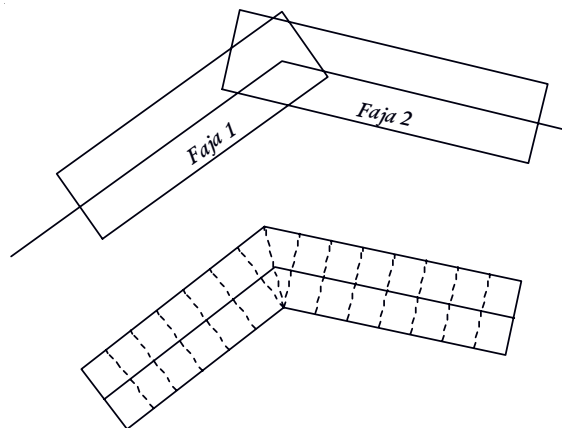


Figura (8.9) Construcción de un mosaico de fajas de fotografías

En este mosaico podrá anotarse el número de orden de las fotos o fajas consecutivas a fin de encontrar fácilmente el modelo tridimensional correspondiente a cada parte del mosaico, pero sobre todo podrán hacerse las anotaciones en el mismo mosaico como si se tratara de una libreta de campo.

El procedimiento general comprende las siguientes etapas:

1. Armar el primer par de fajas consecutivas (éstas pueden estar alineadas o formando un ángulo de quiebre).
2. Marcar puntos principales y líneas de vuelos.
3. Transferir las líneas de vuelo a un papel transparente sustituyendo la línea real de vuelo, por una línea media para cada faja de fotos.
4. Calcule el valor medio de la base de las fotos (por ejemplo 10 cm. ó 12 cm.).
5. Trace la bisectriz del ángulo formado por las dos líneas de vuelo y marque a partir de dicha bisectriz (hipotenusa) dos triángulos rectángulos idénticos, uno a cada lado, con un lado perpendicular a la línea de vuelo y otro paralelo.
6. Marque sobre las líneas medias de vuelo segmentos cada 10 ó 12 cm. y construya sobre esas distancias rectángulos. Transfiera los rectángulos (y el triángulo) correspondiente a cada línea de vuelo a las fotos correspondientes. Recorte las fotos y péguelas sobre una tira de tela del mismo ancho a fin de poder plegar el mosaico en forma de libro.

CAPÍTULO IX

CARTOGRAFÍA



9.1 PROYECCIONES CARTOGRÁFICAS

9.1.1 Generalidades.

Debido a la necesidad que tiene el hombre de conocer la configuración de la Tierra y los accidentes geográficos que en ella existen, surge la necesidad de su representación, de esta forma aparece la ciencia denominada Cartografía.

Cualquier lugar del cielo o de la Tierra está determinado por unas coordenadas únicas respecto de un sistema de referencia que le distingue de los demás. La dificultad que existe para la representación de estos puntos, es que la Tierra no puede representarse sobre un plano sin que sufra deformaciones. A pesar de ello se intentará que la representación conserve el mayor número de propiedades métricas, que al no poderse dar todas simultáneamente, se elegirán en función de la utilidad que se vaya a dar a la carta o al mapa.

Debido a la imposibilidad de materializar la superficie real de la Tierra por una expresión matemática, su estudio se realiza adoptando distintas superficies de

aproximación. El *geoide* es la primera considerada, representada por los mares y océanos en calma supuestos prolongados por debajo de los continentes. Esta superficie es en cada punto normal a la dirección de la gravedad. La expresión matemática que lo define es muy compleja para utilizarla en Cartografía como superficie de referencia. Por ello y para simplificar el problema se utiliza el elipsoide, que es una superficie próxima al geoide.

A lo largo de los años este elipsoide ha ido sufriendo modificaciones en los parámetros que lo definen, buscando aquel que más se aproximara al geoide. En particular los dos últimos utilizados en la Cartografía son el *Struve* y el de *Hayford*, este último adoptado internacionalmente en la actualidad.

Aún así, trabajar con el elipsoide presenta en muchos casos serias dificultades, utilizándose, para simplificar los cálculos, la esfera, como segunda superficie de aproximación.

La Cartografía es, por tanto, la ciencia que estudia la representación plana de la esfera o del elipsoide, tratando de obtener por el cálculo las coordenadas de los puntos del plano correspondientes a los situados en dichas superficies.

Las ecuaciones de las dos superficies, esfera y elipsoide, indican que no pueden ser desarrolladas sobre un plano. Por ello, la necesidad de la Cartografía. Según definición internacionalmente adoptada, *proyección* es la correspondencia matemática biunívoca entre los puntos de una esfera o elipsoide y sus transformados en un plano. Esta correspondencia se expresa en función de las coordenadas geográficas, longitud y latitud de cada punto del elipsoide y se traducen en el plano en coordenadas cartesianas. La correspondencia será, por tanto, puntual y biunívoca entre los puntos del plano y del elipsoide, y está definida por las expresiones matemáticas

$$x = f(\lambda, \phi)$$

[9.1.1]

$$y = g(\lambda, \phi)$$

$$\lambda = F(x, y)$$

[9.1.2]

$$\phi = G(x, y)$$

La formulación de estas funciones f , g , F , G , definen las propiedades de la representación elegida y darán el medio para establecer la correspondencia entre puntos homólogos.

Naturalmente, existirán infinitas relaciones y por tanto, el numero de proyecciones a utilizar será prácticamente ilimitado.*

➤ Escala

Se considera dos puntos A y B del elipsoide y sus homólogos a y b en el plano.

Denominando por definición *escala de la representación* a la relación siguiente:

$$e = \frac{ab}{AB}$$

donde \widehat{AB} y \overline{ab} designan la longitud de la geodésica que une sobre el elipsoide los dos puntos y sobre el plano respectivamente.

➤ Unidades empleadas en Cartografía

Tanto para las aplicaciones geodésicas como astronómicas, será frecuente el empleo de la división sexagesimal, por la ventaja que ofrece su relación con la rotación de la

* El elipsoide es la superficie que se utilizará para todos los cálculos, particularizándola en la esfera, cuando esta sea mas aconsejable para el problema que en cada caso se estudie.

Tierra y, como consecuencia, con el problema del tiempo, ya que una rotación o giro de la Tierra de 360° , corresponde a un tiempo de 24 horas.

9.2 DESARROLLO CILÍNDRICO

9.2.1 Desarrollo Cilíndrico Esférico

El estudio de los desarrollos cilíndricos directos tiene como fundamento la consideración de un cilindro tangente a una esfera a lo largo de su ecuador, estableciendo entre los puntos de ambas superficies una correspondiente biunívoca.

Desarrollando a continuación el cilindro, se obtiene una representación en la que los meridianos estarán *siempre representados por recta paralela entre si*, y cuya distancia es proporcional a la correspondiente diferencia de longitud. Los paralelos son rectas normales a las anteriores y, por tanto, también *paralelas entre si*. Según la forma en que se establezca la correspondencia entre los puntos de la esfera y de los cilindro, se obtendrá distintos tipos de desarrollo.

9.2.2. Desarrollo Cilíndrico de equivalente de Lambert

Definido el cilindro tangente a la Tierra a lo largo del Ecuador (Fig. 9.1), se considera sobre él las intersecciones de los planos de los meridianos y los paralelos. Estas intersecciones definirán, después de desarrollado el cilindro, los meridianos y los paralelos de la representación.

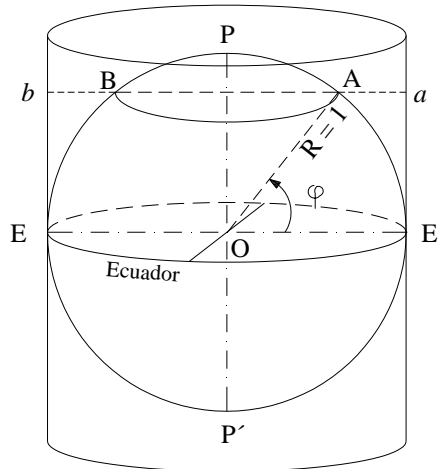


Figura 9.1 Cilindro tangente a la Tierra.

De la figura se deduce que:

$$E'a = \text{sen}\varphi$$

y, por tanto, los meridianos y paralelos vendrán representados por la recta de ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= \text{sen}\varphi \end{aligned} \quad [9.2.1]$$

(en el supuesto de Tierra esférica y de radio $R = 1$).

Se demostrará que este desarrollo conserva las áreas, es decir, es equivalente.

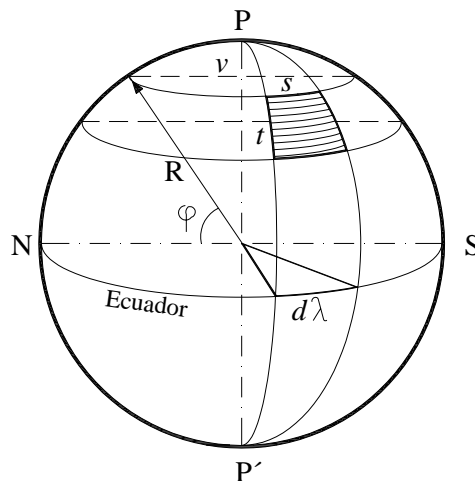


Figura 9.2 a Tierra esférica elementos.

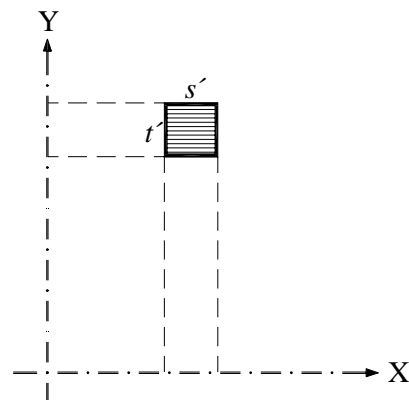


Figura 9.2 b Área diferencial sobre el plano.

En efecto, se considerara elementos diferenciales (Fig. 9.2 a), siendo s y t dos arcos limitados en la esfera por dos meridianos y dos paralelos. Se puede escribir que;

$$s = \cos \varphi d\lambda$$

$$t = d\varphi$$

El área de elemento diferencial sobre la esfera será

$$S = \cos \varphi d\lambda d\varphi$$

sobre el plano se obtendrá los elementos correspondientes s' , t' , diferenciando [9.2.1]

$$s' = dx = d\lambda$$

$$t' = dy = \cos \varphi d\varphi$$

luego el área de elemento diferencial en el plano será (Fig. 9.2 b)

$$S' = dx \cdot dy = \cos \varphi \cdot d\lambda \cdot d\varphi$$

por lo que $S = S'$, quedando demostrado que el desarrollo es *equivalente*; lo que se comprobaba después, utilizando el elipse de Tissot.

El Ecuador es automecoico, y es evidente que las deformaciones lineales aumentan con la latitud (Fig. 9.3).

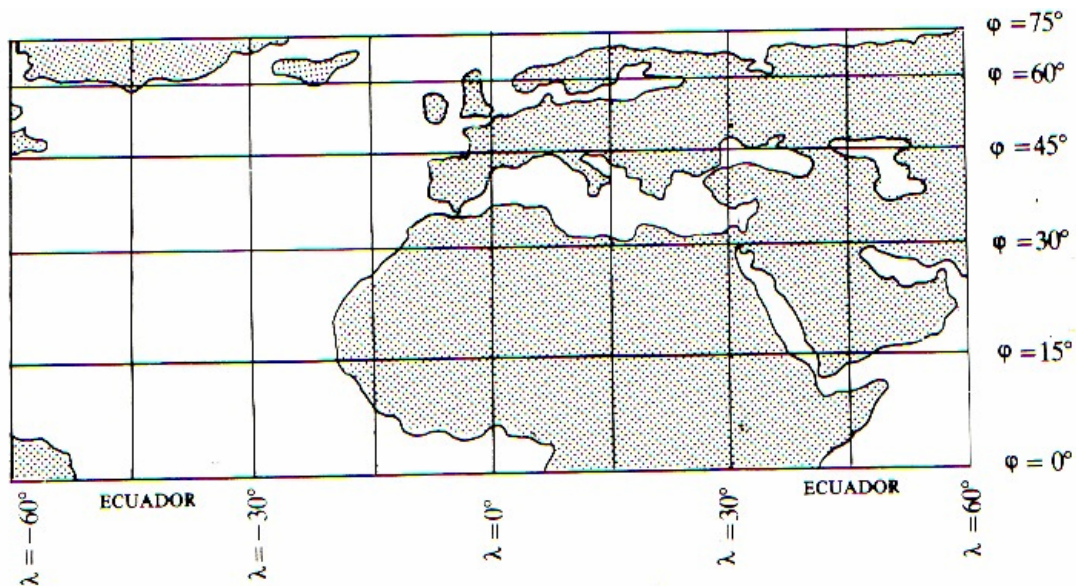


Figura 9.3 Ecuador automecoico.

9.2.3 Desarrollo Cilíndrico con meridianos Automecoicos

Considerando el mismo cilindro tangente a lo largo del ecuador. A los puntos de cada meridiano les haremos corresponder, como en el caso anterior, los de la generatriz del cilindro, pero para situar un punto M de latitud φ se lo hará llevando (Fig. 9.5) sobre la generatriz una distancia Em igual ala longitud del arco de meridiano EM. Al desarrollar el cilindro, se obtendrá una red de meridianos y paralelos en los que los meridianos son las mismas rectas del sistema anterior, pero los paralelos, si bien sigue siendo rectas paralelas entre si, su distancia no es la misma que allí. En este nuevo sistema, dos paralelos equidistantes en la Tierra, equidistan en la carta.

Las ecuaciones de los meridianos y paralelos (Fig. 9.5) son;

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= \varphi \end{aligned} \quad [9.2.2]$$

Las deformaciones, aumentaran al alejarse del Ecuador, por lo que, y como ocurre en otro desarrollo que se estudiara a continuación, la carta se hace inservible a partir de una cierta latitud.

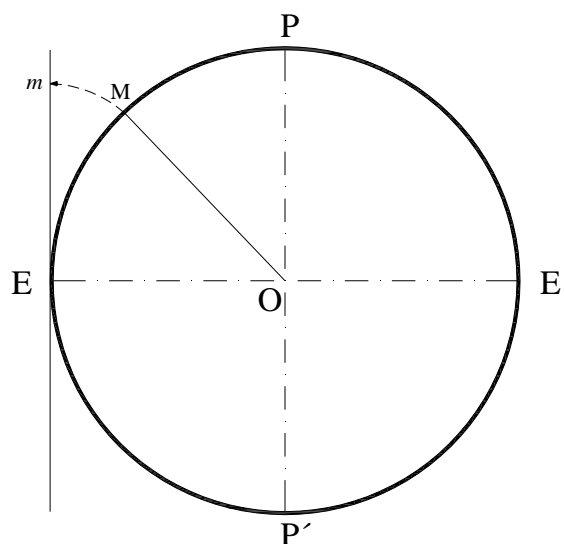


Figura 9.4 Cilindro tangente a lo largo del ecuador.

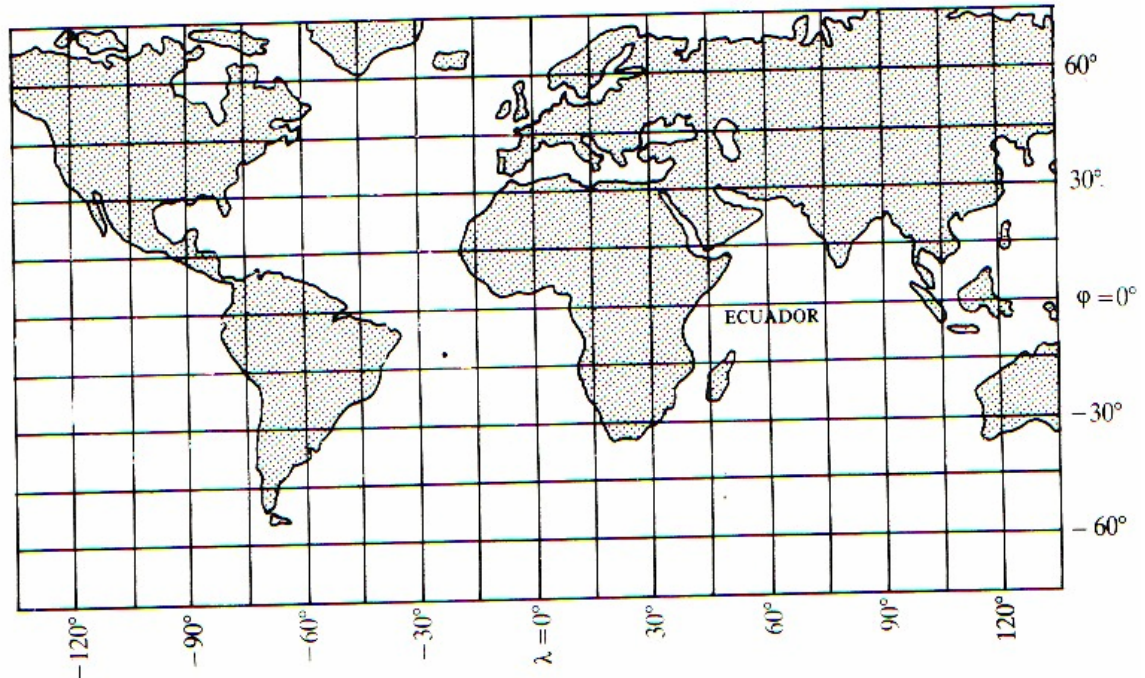


Figura 9.5 Meridianos y paralelos.

9.2.4 Desarrollo Cilíndrico Conforme (Carta de Mercator)

Como en todos los desarrollos cilíndricos, en éste los meridianos y paralelos vienen representados por rectas paralelas entre sí, pero aquí *con la condición de ser conforme la representación*.

El inventor de esta proyección fue el cartógrafo holandés Gerhard Kremer (1512 – 1594), más conocido por su nombre latino Mercator, que la utilizó por primera vez en un mapamundi publicado en 1569. En esta proyección se alteran las superficies y las distancias, siendo el sistema más usado en navegación por las ventajas que posee.

El fundamento de este desarrollo es la alteración de la distancia entre los paralelos, de modo que las deformaciones en el sentido de la latitud sean iguales a las deformaciones existentes en el sentido de la longitud. Considerando para su estudio parejas de puntos AD, BC...

(Fig. 9.6) sobre la esfera, situados en los meridianos de S y T, teniendo cada pareja la misma latitud.

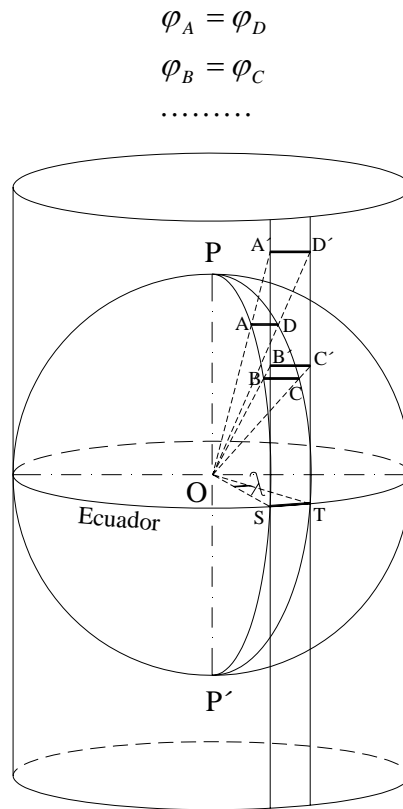


Figura 9.6 Proyecciones en el cilindro.

Al proyectar cada pareja de punto desde es centro de la esfera O, se obtiene los correspondiente arcos de paralelos sobre el cilindro, que sean siempre iguales

$$A'D'=B'C'.....=ST$$

siendo ST el arco de Ecuador que será la única línea automecoica. Así pues, a arcos de paralelo que van disminuyendo al moverse hacia el polo

$$ST > BC > AD >$$

en el desarrollo de Mercator les corresponde un valor constante, por lo que se esta produciendo una dilatación cuyo valor se calculará.

Suponiendo la Tierra esférica de radio R, deduciendo de la figura 9.6 que;

$$ST = R \cdot \lambda \quad (\text{siendo } \lambda \text{ la diferencia de longitudes en radianes})$$

y

$$AD = R \cdot \cos \varphi_A \cdot \lambda = ST \cos \varphi_A = A'D' \cos \varphi_A$$

luego

$$A'D' = \frac{AD}{\cos \varphi_A} = AD \sec \varphi_A$$

este factor $\sec \varphi_A$ corresponderá al coeficiente de deformación lineal sobre el paralelo, variando desde *uno cuando* $\varphi_0 = 0$ hasta ∞ en el polo, en que $\varphi = 90^\circ$. Para que el desarrollo simplemente se modificara la separación entre los paralelos para lograr que el coeficiente de deformación lineal a lo largo del meridiano h sea el mismo que a lo largo del paralelo k . Conseguido esto, se conservará la proporcionalidad entre los elementos diferenciales correspondientes, y los ángulos en la esfera y en el plano serán iguales. De la misma figura 9.6 se deduce;

$$k = \frac{B'C'}{BC} = \frac{Rd\lambda}{R \cos \varphi \cdot d\lambda}$$

$$h = \frac{A'B'}{AB} = \frac{dy}{Rd\varphi}$$

siendo dy la separación que debe existir entre los paralelos correspondientes.

Igualando $h = k$ se tiene:

$$\frac{Rd\lambda}{R \cos \varphi \cdot d\lambda} = \frac{dy}{Rd\varphi}$$

de donde con $R = 1$, queda deducido:

$$dy = \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$$

Por, tanto la separación $A'B'$ de los paralelos en el mapa se obtendrá multiplicando la diferencia de latitud $d\varphi$ por el coeficiente.

$$\frac{1}{\cos \varphi} = \sec \varphi$$

En el Ecuador

$$\varphi = 0^\circ \quad ; \quad \sec \varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad S'T' = ST$$

en el polo

$$\varphi = 90^\circ \quad ; \quad \sec \varphi = \infty$$

es decir, en el polo la separación teórica de los paralelos sería infinita. Por tanto, la distancia entre paralelos, por ejemplo, de grado en grado, va aumentando y a partir de los 70° la carta se hace inservible.

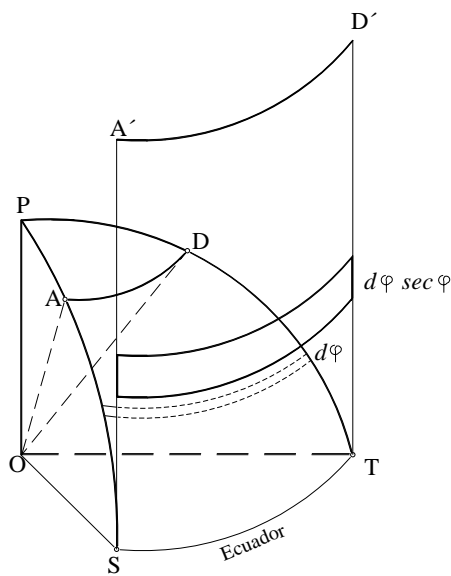


Figura 9.7 Paralelo de latitud φ

9.2.5 Longitud y acimut de la loxodrómica

Se llama *loxodrómica* a la línea sobre la superficie terrestre que corta todos los meridianos bajo un mismo ángulo.

Puesto que en la carta de Mercator los meridianos son rectas paralelas entre si, es evidente que la loxodrómica, al considerarla en un desarrollo conforme, vendrá representada por una línea recta.

Es importante el estudio de su longitud y de su acimut, dada la utilidad que tiene en la proyección Mercator.

i) Cálculo de la Longitud l (aproximada)

Se tiene que considerar para el estudio elementos diferenciales. Del triángulo ABD (figura 9.8), el lado BD sería igual a $\Delta\varphi$, ya que se considera que D es la intersección del paralelo de A con el meridiano de B y por tanto rectángulo en D.

Aunque esta consideración no sea rigurosamente cierta, podemos escribir que;

$$\frac{\text{sen } l}{\text{sen } 90^\circ} \approx \frac{\text{sen } \Delta\varphi}{\text{sen}(90^\circ - z)}$$

de donde

$$l = \Delta\varphi \cdot \sec z$$

y para obtener la longitud lineal bastara multiplicar por el radio

$$l = R \cdot \Delta\varphi \cdot \sec z \quad [9.2.3]$$

en esta expresión del valor de la longitud de la loxodrómica, aparece el acimut z , cuya expresión se calculara a continuación.

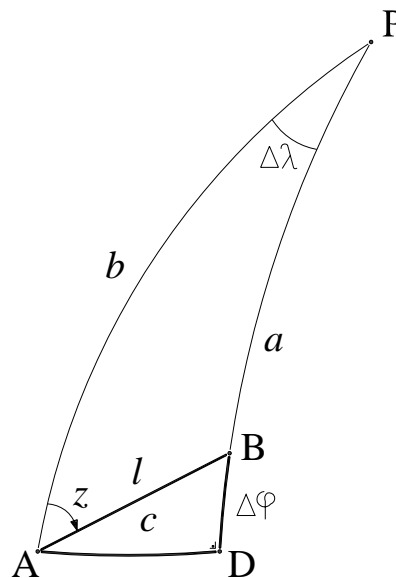


Figura 9.8 Longitud.

ii) Cálculo del acimut z (aproximado)

Se inicia a partir de la relación de senos;

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } z} = \frac{\text{sen } l}{\text{sen } \Delta\lambda} \quad \text{sen } z = \frac{\text{sen } a \cdot \text{sen } \Delta\lambda}{\text{sen } l}$$

sustituyendo [9.2.3], suponiendo $R = 1$ y elementos diferenciales

$$\text{sen } z = \frac{\text{sen } a \cdot \text{sen } \Delta\lambda}{\Delta\varphi \cdot \sec z} = \frac{\text{sen}(90 - \varphi_B) \cdot \text{sen} \Delta\lambda}{\Delta\varphi \cdot \sec z}$$

de donde

$$\begin{aligned} \text{tg } z &= \frac{\text{sen } z}{\cos z} \\ \text{tg } z &= \frac{\cos \varphi_B \cdot \Delta\lambda}{\Delta\varphi} \end{aligned}$$

Expresión que se calculara sustituyendo φ_B por la latitud media de A y B

$$\text{tg } z = \frac{\Delta\lambda \cdot \cos \varphi_M}{\Delta\varphi} \quad [9.2.4]$$

Con esta expresión se obtendrá un valor aproximado, dadas las sustituciones que se ha introducido. Por ello, dado que la proyección Mercator es conforme, es más riguroso obtener este z a partir de las coordenadas planas de ambos puntos

$$\text{tg } z = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Ejemplo

Es interesante hacer una aplicación práctica de esta proyección de Mercator, dada la importancia que en la actualidad tiene en la navegación, tanto marítima como aérea.

Considerando dos lugares de coordenadas conocidas, Miami y Madrid (figura 9.9)

$$\begin{aligned} \text{MIAMI} = M_1 & \begin{cases} \lambda = -80^\circ 18' \\ \varphi = 25^\circ 46' \end{cases} & \text{Madrid} = M_2 & \begin{cases} \lambda = -3^\circ 41' \\ \varphi = 40^\circ 24' \end{cases} \end{aligned}$$

Aproximadas al minuto de arco, y sobre el puesto de la Tierra esférica. Se calculara la longitud y acimut de la ortodrómica y de la loxodrómica que les une.

La ortodrómica corresponde al círculo máximo que une los dos puntos, o dicho de otra forma, es el camino mas corto. La loxodrómica tiene a su favor la constancia de su rumbo. Un avión que mantenga dicho rumbo, llegara al punto de destino recorriendo la loxodrómica.

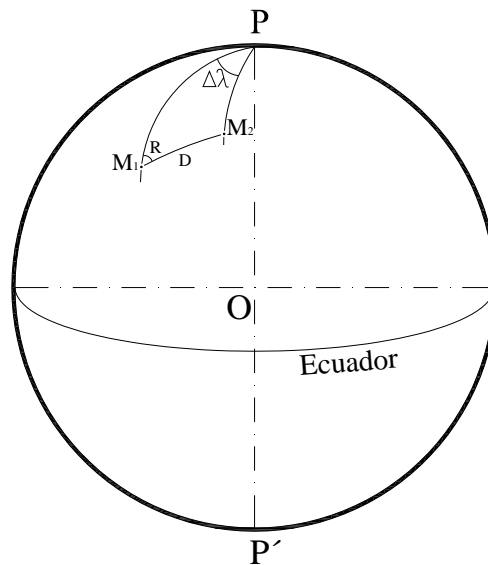


Figura 9.9 Coordenadas conocidas.

En vuelos cortos, la loxodrómica es el camino ideal y es el que siempre sigue el piloto. En vuelos largos suele dividirse la ortodrómica en tramos de unos 500 a 1.000 [Km.] y dentro de cada uno se siguen loxodrómicas.

El problema en cuestión es el cálculo de la distancia y rumbo a seguir por el avión en la ortodrómica que une Miami-Madrid, estriba en la resolución del triangulo esférico $PM_1 M_2$ (figura 9.9), siendo

$$\left. \begin{array}{l} PM_1 = 64^{\circ}14' \\ PM_2 = 49^{\circ}36' \end{array} \right| P = 76^{\circ}37'$$

Con la primera formula de Bessel

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

se obtiene sin dificultad $D = 63^{\circ}51'55''$, distancia que en millas marinas equivaldría (1 milla \approx 1 minuto) a 3.831,91 millas, y en kilómetros, suponiendo un radio de la Tierra de 6.370 km, la distancia sería de 7.100,36 km.

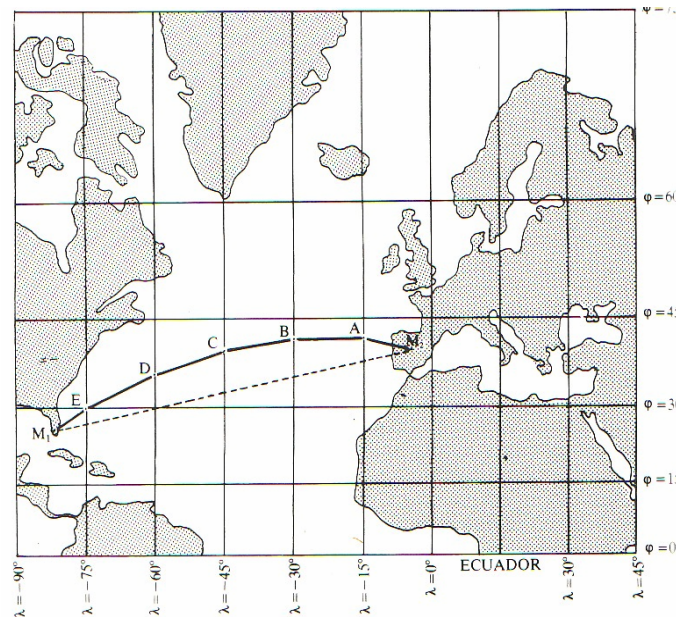


Figura 9.10 Dibujo en proyección Mercator.

Utilizando la segunda formula de Bessel, aplicada al triangulo PM_1M_2 , daría el rumbo de salida del avión.

$$R = 55^{\circ}36'42''$$

En el dibujo en proyección Mercator (Fig. 9.10) la ortodrómica, que une los puntos Miami-Madrid, queda definida, en primera aproximación, por los puntos M_1 , E, D, C, B, A, M_2 de longitudes respectivas $3^{\circ}41'$, 15° , 30° , 45° , 60° , 75° y $80^{\circ}18'$ oeste.

En el cuadro siguiente se ha calculado la distancia de los puntos intermedios, mediante la resolución del correspondiente triangulo esférico y la ordenada en milímetros de dichos puntos, el factor de reducción de escala 50,26.

PUNTOS	λ	φ	Y (mm)
A	—15°	41°44′	40,35
B	—30°	41°46′	40,40
C	—45°	39°48′	38,10
D	—60°	35°37′	33,50
E	—75°	28°50′	26,40

En la misma figura se ha dibujado la línea recta que une los puntos Miami Madrid y que representa la loxodrómica.

Aplicando las formulas [9.2.3] y [9.2.4] se obtiene:

Distancia en Millas M_1, M_2 3. 950,53

Acimut de la Loxodrómica..... 77° 09′ 32″

Ya se ha dicho que no es correcto utilizar dichas formulas, a no ser que sean distancias cortas. Por ello, se aplicara las distancias formuladas a los tramos

$$M_1 E . E D . D C . C B . B A . A M_2$$

obteniendo

tramos				
	Distancia	Rumbos	Distancia	Rumbos
$M_1 E$	625,539	55°36′	625,67	56°55′
ED	1.596,270	58°02′	1.598,88	61°51′
DC	1.396,734	66°05′	1.398,84	70°34′
CB	1.279,858	75°18′	1.281,58	80°10′
BA	1.242,551	85°08′	1.244,13	90°10′
$A M_2$	959,411	95°09′	960,14	98°53′
	7.100,363		7.109,24	

Por ello, el vuelo teórico que llevaría el avión sería por tramo de *loxodrómica a lo largo de la ortodrómica*

$$M_1 E D C B A M_2$$

En cada vértice de esta poligonal o itinerario deberá el avión ir girando el rumbo, para tomar sucesivamente los que figuran en la última columna del último cuadro. Como se puede comprobar, la suma de la distancia que correría el avión sería de 7.109 km, que prácticamente es igual al vuelo por el círculo máximo, daba una longitud de 7.100 km.

9.3 DESARROLLO CILÍNDRICO DE MERCATOR (TIERRA ELIPSÓIDICA).

Al considerar la Tierra esférica en este desarrollo (capítulo anterior), se obtiene las condiciones de conformidad dilatando la separación entre los paralelos, lo cual lleva a la obtención de la fórmula [9.2.4].

La conformidad se obtiene imponiendo la condición de que la anamorfosis fuese igual en paralelos y meridianos, ya que de esta forma había proporcionalidad entre los elementos diferenciales en ambas superficies.

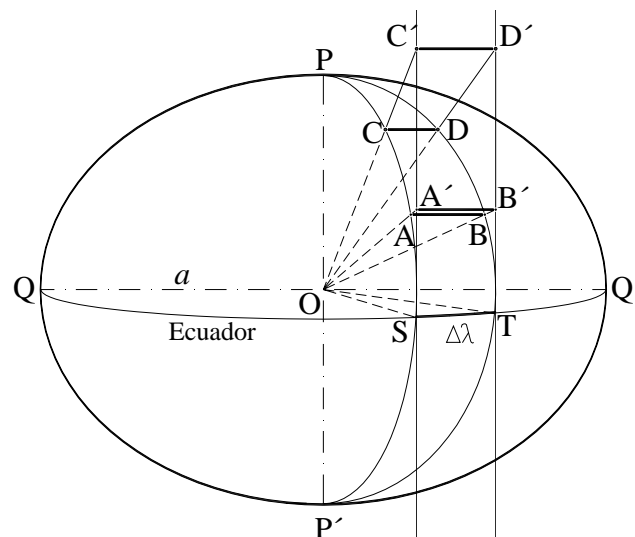


Figura 9.11 Elipsoide desarrollo cilíndrico.

Cuando la Tierra pasa ha considerarse como un elipsoide, el imponer la igualdad entre ambas anamorfosis, lleva a escribir (Fig. 9.11)

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

Sustituyendo valores en la expresión anterior y llamado a al semieje mayor del elipsoide, se puede escribir:

$$\frac{N \cos \varphi \cdot d\lambda}{\rho \cdot d\varphi} = \frac{a \cdot d\lambda}{dy}$$

de donde

$$dy = a \frac{\rho \cdot d\varphi}{N \cos \varphi}$$

Sustituyendo en esta expresión los valores de N y ρ se escribe:

$$dy = \frac{a \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi}{\frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \cos \varphi} = \frac{a(1-e^2) d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} = a d\Phi \quad [9.3.1]$$

Tiene que recordarse que Φ es la llamada *latitud isométrica de Mercator* (aunque rigurosamente no crece en general con y) y tenía por expresión:

$$d\Phi = \frac{\rho d\varphi}{N \cos \varphi}$$

Para integrar la expresión [9.3.1], se la descompondrá previamente en fracciones simples, quedando

$$dy = a \left[\frac{d\varphi}{\cos \varphi} - \frac{e}{2} \left(\frac{e \cos \varphi}{1 + e \sin \varphi} + \frac{e \cos \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right) d\varphi \right]$$

La primera integral ya se calculó cuando se suponía la Tierra esférica; las correspondientes a los dos siguientes términos son inmediatas, de donde

$$y = a \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{e}{2} \ln \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right] \quad [9.3.2]$$

Como la ecuación de los meridianos es $x = a \cdot \lambda$, se tiene, en definitiva, las dos ecuaciones siguiente de este desarrollo Mercator con Tierra elipsoide

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \lambda \\ y &= a \left\{ \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{1 - e \operatorname{sen} \varphi}{1 + e \operatorname{sen} \varphi} \right)^{1/2e} \right] \right\} \end{aligned} \quad [9.3.3]$$

En algún problema suele considerarse $a = 1$, con lo que las formulas se simplifican.

Es claro que de estas formulas se deduce la correspondiente a Tierra esférica, ya que entonces la excentricidad es $e = 0$ y además se supone que $R = 1$, obteniendo la formula [9.3.3].

9.4 DESARROLLOS CILÍNDRICOS TRANSVERSOS (TIERRA ESFÉRICA)

En el desarrollo cilíndrico transverso, el eje del cilindro (en lugar de coincidir con el eje de la tierra) esta situado en el Ecuador y, por tanto, este será tangente a la esfera terrestre a lo largo de un meridiano. Se estudiara, en primer lugar, el *desarrollo transverso conforme de Gauss* con Tierra esférica, por ser el que dará lugar a la proyección U.T.M. (Universal Transversa Mercator), la cual será estudiada detenidamente en el siguiente capitulo, considerando la Tierra elipsóidica.

9.4.1 Desarrollo cilíndrico transverso conforme de Gauss

Su estudio sigue un razonamiento similar al utilizado en Mercator. Considerando sobre la esfera (Fig.9.12) la red del círculo máximo que pasan por los puntos E y E', que se denominara *falsos meridianos*, así como los círculos menores, cuyos planos son normales al eje del cilindro, denominados *falsos paralelos*.

Queda así definido en la esfera un sistema de círculo máximo y círculos menores, análogos a los meridianos, y paralelos terrestre, sin mas diferencia que los puntos E y E' desempeña aquí el papel de los polos terrestre. Por tanto, el eje del cilindro esta situado el plano del Ecuador.

A un punto M de la esfera, cuyas coordenadas geográficas son λ y φ , le corresponderá en este sistema unas coordenadas;

$Z = g O m$ (diedro formado por el Ecuador y el falso meridiano de M)

$H = m M$ (arco de falso meridiano)

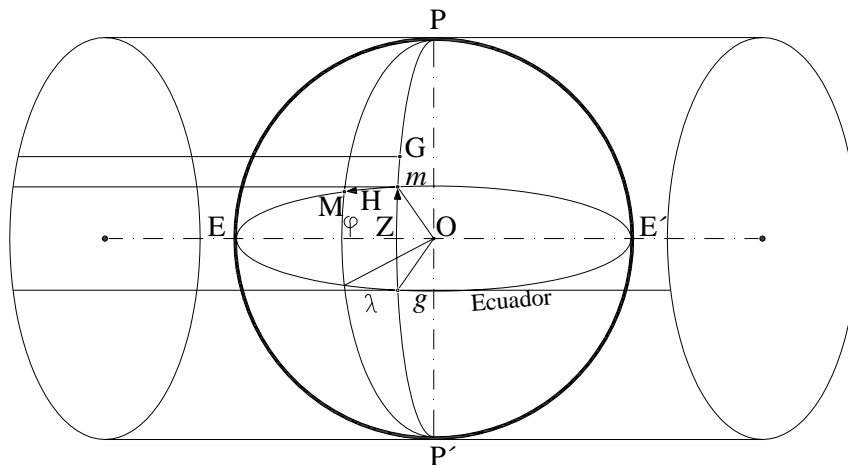


Figura 9.12 Coordenadas conocidas.

A estas coordenadas Z y H se las conoce como coordenadas de Cassini-Soldner que son análogas a la longitud y a la latitud geográfica. El ángulo Z esta contado a partir del Ecuador terrestre, que desempeña ahora el papel del meridiano central, y la distancia H, a partir del meridiano de tangencia que se supone para este caso corresponden al de Greenwich.

En cuanto se conozca los valore de Z y H, se hará una introducción en el caso de

Mercator, ya que para conseguir que el desarrollo sea conforme, bastara considerar las expresiones siguientes (análogas a las [9.2.2])

$$x = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{H}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad [9.4.1]$$

$$y = Z$$

con lo que se ha dilatado el valor de H, consiguiendo que el coeficiente de anamorfosis sobre el falso paralelo sea igual que correspondiente en el falso meridiano. Es decir, que al igual que ocurría en Mercator, a arcos de falso de paralelos AB, CD, etc. (cada vez mas pequeño) (Fig. 9.13), corresponde en el cilindro arcos A'B' siempre iguales. Por ello a la distancia H que se tiene sobre cada falso meridiano, se las dilata con la formula anterior que proporciona el correspondiente valor de la x en la proyección, igual a $\overline{mM'}$.

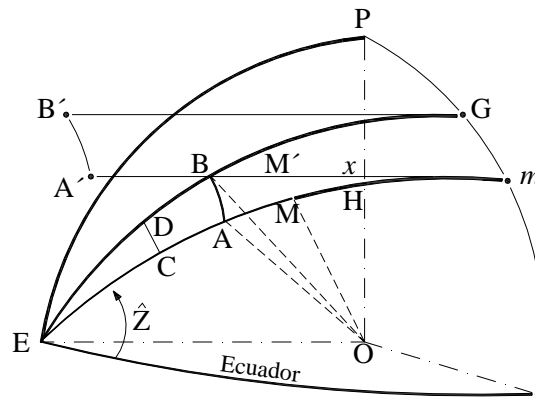


Figura 9.13 Arcos falsos paralelos.

El problema pues, se reduce a calcular los valores de H y Z, en función de las coordenadas geográficas λ y φ .

Para ello, se tiene en cuenta el triangulo esférico PEM de la figura 9.12, cuyos elementos valen

$$MP = 90^\circ - \varphi$$

$$EP = 90^\circ$$

$$EM = 90^\circ - H$$

$$P = 90^\circ - \lambda$$

$$E = 90^\circ - Z$$

Partiendo de las formulas de Bessel y sustituyendo convenientemente en ellas los valores anteriores, se llega a las expresiones:

$$\text{sen } \varphi = \cos H \text{ sen } Z$$

$$\cos \varphi \text{ sen } \lambda = \text{sen } H$$

$$\cos \varphi \cos \lambda = \cos H \cos Z$$

dividiendo la primera y la tercera ecuación se obtiene:

$$\text{tg } Z = \text{tg } \varphi \cdot \sec \lambda \quad [9.4.2]$$

asumiendo la segunda ecuación

$$\text{sen } H = \text{sen } \lambda \cdot \cos \varphi \quad [9.4.3]$$

proporcionaran los valores de Z y H en función de λ y φ y con ellas las coordenadas en este desarrollo de Gauss mediante las expresiones [9.4.1].

Es evidente que este sistema de representación, rigurosamente conforme como se comprobará después, será el adecuado para representar países o zonas alargadas en el sentido del meridiano, pero es también evidente que las representaciones se deformaran al separarse del meridiano central (el de tangencia del cilindro).

Este sistema fue recomendado en la asamblea celebrada en Edimburgo en 1936 por la unión Geodésica y Geofísica Internacional para la cartografía de los países africanos entre los $\pm 36^\circ$ de latitud, suponiendo la Tierra dividida en 60 husos de 6° de longitud.

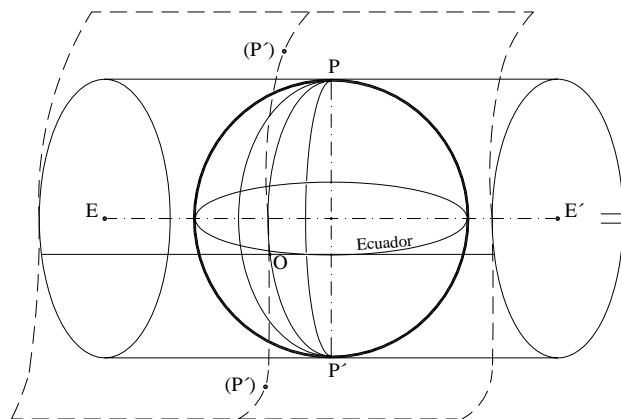


Figura 9.14 a Desarrollo cilíndrico.

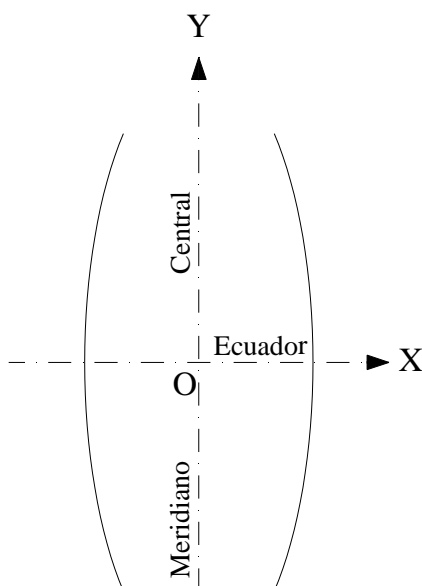


Figura 9.14 b Desarrollo cilíndrico.

En la figura 9.14 *a* y *b*, se observa como se obtiene la representación del desarrollo cilíndrico. Para ello se corta por una generatriz posterior del cilindro y se abre, adaptándolo a un plano, en el que se tiene los correspondientes ejes X e Y, correspondiente al Ecuador y al meridiano central. Los restantes meridianos y paralelos se representan por dos familias de curvas trascendental y ortogonal entre si.

9.5 LA PROYECCIÓN U.T.M

El gran interés que tiene la proyección *Universal Transversa Mercator* (U.T.M) en los últimos años, hace que su estudio se lo realice de forma más detallada que las anteriores, sobre todo por sus amplias aplicaciones. Adoptada internacionalmente, tiene su fundamento en el desarrollo cilíndrico de Gauss, estudiado en el capítulo anterior.

En esta proyección considera la Tierra como un elipsoide de revolución tangente interiormente a un cilindro, cuyo eje esta situado en el plano del Ecuador. El elipsoide de referencia elegido es el de Hayford.

El problema, que tenía una solución geométrica clara cuando se consideraba la Tierra esférica, ha de tratarse ahora analíticamente. Las formulas obtenidas para su aplicación son validas para todo el mundo, pues empleando husos de 6° de amplitud, se representa la totalidad del globo en 60 husos iguales, por lo que, lógicamente, una vez obtenidas para uno de ellos, serán las mismas que deberían utilizarse en todos. Los husos se enumeran del 1 al 60 a partir del meridiano de 180° de longitud respecto del de Greenwich, figura 9.15

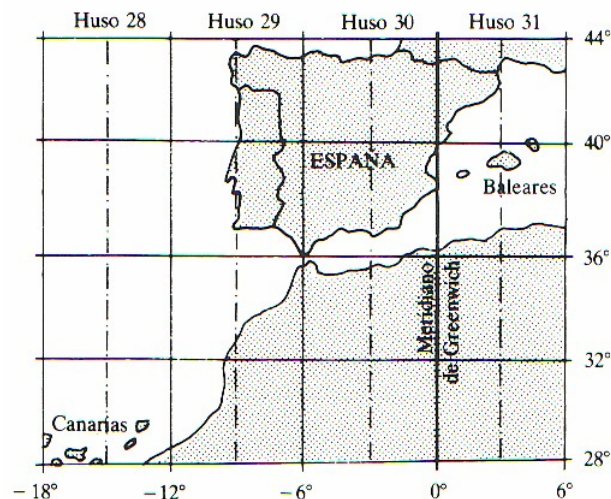


Figura 9.15 Enumeración de los husos.

La proyección U.T.M es conforme, siendo el meridiano central de cada huso automecoico y representado según en línea recta. La utilidad que tiene esta proyección por su conformidad como aplicación a problemas geodésicos, la hace recomendable para la representación de casi todos los países del globo, exceptuándose aquellas zonas situadas a $\pm 80^\circ$ de latitud, en la que debe complementarse con la estereografía.

9.5.1 Fundamento Matemático.

El fundamento matemático de la proyección U.T.M. es muy complejo, en este capítulo se estudiará lo concerniente para su utilización práctica. Las condiciones que se impone en esta proyección son:

1. La proyección será conforme.
2. El meridiano central ha de ser automecoico.
3. El ecuador y el meridiano central de cada huso se representaran por líneas rectas.
4. El origen de coordenadas en la proyección será en la correspondiente a la intersección del Ecuador y el meridiano central del huso.

Se demuestra por la *teoría de funciones* de variable compleja, que toda función de la forma

$$y + ix = F(\phi + i\lambda) \quad [9.5.1]$$

es conforme. Sin embargo, se aclara que no se va a utilizar números complejos, sino que se desarrollara la función anterior en serie, respecto a la potencia de λ , separando los términos reales que se igualara a la y y los imaginarios, que se igualara a la x . Tal como se indico antes se impondrá la condición de que el eje de ordenadas del sistema corresponde al meridiano central del huso, siendo el origen el Ecuador, e imponiéndose además que este meridiano sea automecoico. Al imponerse estas condiciones, será necesario que para $\lambda = 0$ se deba obtener para la x un valor $x = 0$, para la y una función que solo depende de la latitud.

Se sabe que la longitud de un arco de elipse meridiana, comprendido entre el Ecuador y una latitud ϕ , viene dado por la integral

$$y = \int_0^\phi \rho d\phi$$

puesto que un elemento infinitesimal del meridiano vale

$$dy = \rho \cdot d\varphi = N \cos \varphi \cdot d\Phi \quad [9.5.2]$$

Luego se repite que para $\lambda = 0$, que corresponde a puntos situados sobre el meridiano central, sus coordenadas transformadas serán de la forma;

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \int_0^\varphi \rho d\varphi = F(\phi) \end{aligned} \quad [9.5.3]$$

mas, concretamente al meridiano central se le da una coordenada $X = 500.000$ m y para la Y se da al Ecuador un valor de $10.000.000$ [m] para los puntos situado debajo del mismo y 0 [m] para los puntos situados sobre el.

Como resumen de lo que se vio anteriormente, se tiene que, se cumplen las cuatro condiciones impuesta a la proyección. Al utilizar la función [9.5.1], *se impone la conformidad, y al satisfacerse [9.5.3] se impone que el meridiano central se transforma en el eje de las Y y además automecoico.* Al Ecuador, para el que $\varphi = 0$, le corresponderá el eje de la X , cuya transformada será una recta.

Vértice	Coordenadas geodésicas		Coordenadas U.T.M	
	λ	φ	X (m)	Y (m)
Carboneras.....	3°35'53".050 W	39°32'15",235	448.611,149	4.377.788,602
Bolos.....	3°26'38",500 W	39°29'27",379	461.816,178	4.371.427,267

9.5.2 Transformación de Coordenadas.

Para la transformación de coordenadas, tanto en el problema directo como inverso, existen formula cuya deducción no es tema de este proyecto de grado. Sin embargo, es interesante que a partir de las mismas y de sus valores tabulados realizar algunas aplicaciones prácticas de su utilización.

El problema concreto se circunscribe a obtener en función de las coordenadas geodésicas λ, φ (correspondiente al elipsoide) las coordenadas planas en la proyección U.T.M., así como el problema inverso.

El empleo de estas formulas resuelve además todo el problema, como se dijo anteriormente del transporte de coordenadas en el elipsoide, ya que bastara transformar las coordenadas geodésicas del vértice de partida en U.T.M., y en esta proyección calcular las coordenadas planas del vértice buscado, para volviendo a aplicar las formulas de la transformación inversa, pasar nuevamente al elipsoide. Lo que allí era un problema muy penoso, aquí se simplifica enormemente.

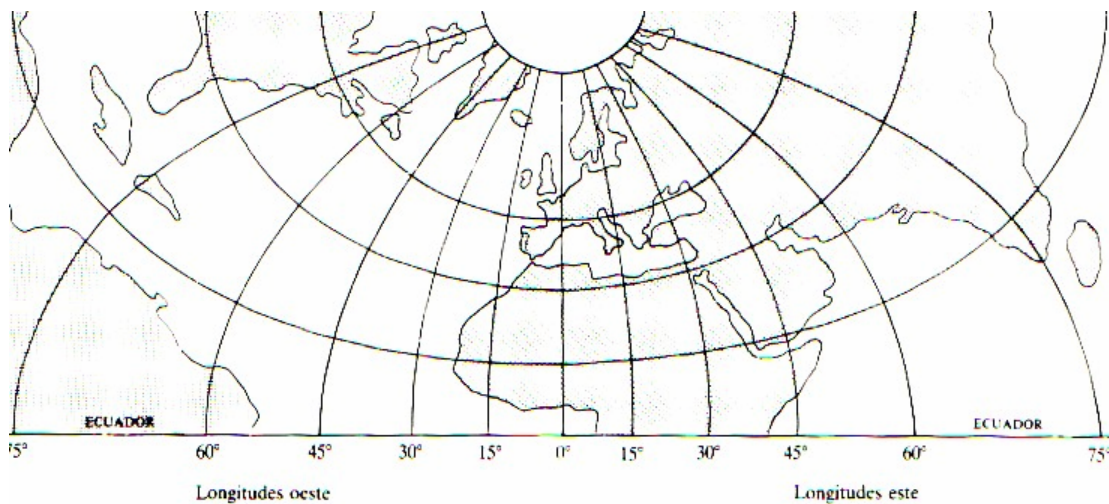


Figura 9.16 Representación en proyección U.T.M.

Se termina el capítulo dando en la figura 9.16 una representación, en la proyección U.T.M de una zona de la superficie terrestre comprendida en el Ecuador y el polo y los meridianos de longitud $\lambda = + 90^\circ$ y $\lambda = - 90^\circ$. Observando, por consiguiente, al ser conforme la proyección, como los meridianos y paralelos constituyentes en un conjunto de curvas ortogonales.

CAPÍTULO X

MANEJO PRÁCTICO DE LA CARTA GEOGRÁFICA



10.1 INFORMACIÓN MARGINAL Y SÍMBOLOS

10.1.1 **Introducción.**

Antes de usar cualquier equipo, el operario consciente debe leer las instrucciones que aparecen en el folleto del fabricante. Este principio también rige en el uso de los mapas. En este caso, las instrucciones aparecen en los márgenes exteriores y se le conoce como información marginal. En vista que no todos los mapas son iguales es preciso que, al usar un mapa distinto, se examine cuidadosamente la información marginal.

En un mapa topográfico plegado, dibujado a gran escala (1: 50.000). Los números con círculos indican la información marginal con lo que debe estar familiarizado el usuario del mapa y corresponden a las explicaciones enumeradas a continuación:

(1) Nombre de serie y escala.- El nombre de la serie de mapa se encuentra en el margen superior izquierdo. Una serie de mapa, usualmente comprende un grupo de mapas similares, dibujados a la misma escala, sobre la misma línea o forma de hoja, diseñado para cubrir una región geográfica en particular. Puede ser también un

grupo de mapas con un propósito común, tal como los mapas militares de ciudad. A la serie se le da el nombre de la zona (área) mas sobresaliente. La escala es una fracción representativa que muestra la relación entre la distancia en el mapa y la distancia correspondiente en la superficie de la tierra. Por ejemplo, la escala 1:50.000 indica que una unidad de medida en el mapa es igual a 50.000 unidades de la misma unidad de medida en el terreno.

(2) Número de serie.- Este aparece en el margen superior derecho y en el margen inferior izquierdo. Es un sistema de referencia que se expresa ya sea como un número de cuatro cifras (1125) o una letra seguida de tres o cuatro cifras (M661; T7110), que expresan lo siguiente:

Ejemplo 1

- 1 – Área Continental
- 5 – Grupo al que pertenece la escala.
- 2 – Área subregional.
- 5 – Edición

Ejemplo 2

- M – Área regional.
- 6 – Grupo al que pertenece la escala.
- 6 – Área subregional.
- 1 – Edición.

- El primer elemento de un número de serie puede ser: un número o una letra. Si es un número este indica una serie continental y si es letra se refiere a un área regional.
- El segundo elemento es siempre un numero e indica el grupo a que pertenece la escala del mapa. Ejemplo; el numero 5 indica que la hoja pertenece a la escala 1:250.000; el numero 6 a la escala 1: 100.000; el numero 7 a la escala 1:50.000 y el numero 8 a la escala 1:25.000.

- El tercer elemento es siempre un número que indica una sub división del primer elemento (sub regional).
- El cuarto elemento indica la edición que tiene la misma escala y abarcadura del área.
- Puede aparecer un quinto elemento para indicar las características del Mapa, así tenemos que la letra "P" indica un mapa de relieve plástico.

(3) Número de la edición.- Se le encuentra en el margen superior y en margen inferior izquierdo. Representa la antigüedad del mapa con relación a otras ediciones del mismo mapa y también la empresa cartográfica responsable de su impresión. La edición más reciente tendrá el número mayor. EDICION 3 - IGM o EDICION 1 - IAGS indica que esta es la tercera edición preparada por el Servicio Cartográfico del Ejército. Los números de edición corren consecutivamente; se supone que un mapa que tenga un número más alto que otro, contiene información mas reciente que la misma versión del mapa que tenga un número de edición mas bajo. La publicación de un número de edición más alto es autoridad suficientemente para declarar fuera de uso a las ediciones previas de dicho mapa.

(4) Escalas gráficas.- Se encuentran ubicadas en el centro del margen inferior. Son reglas que se usan para calcular con base conocida en el mapa la distancia en el terreno. Los mapas tienen tres escalas graficas o mas, cada cual en una unidad de medidas diferentes.

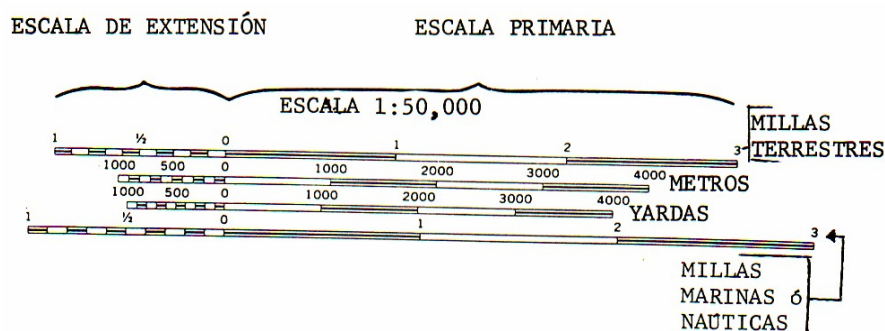


Figura 10.1 Escala Gráfica casilla de referencia.

(5) Nota de proyección.- Se refiere al sistema de proyección, que es la base sobre la cual se traza el mapa. En los mapas militares, esta base es del tipo “conforme”, es decir el área pequeña en la superficie de la tierra retiene su verdadera forma en la proyección, la medida del ángulo conserva aproximadamente su verdadero valor y la escala es la misma en todas las direcciones desde un mismo punto. La proyección se identifica en el mapa por medio de una nota que aparece en el margen inferior.

- Entre las latitudes 80° sur y 84° norte, los mapas a escala mayores de 1:500.000 se trazan con base en el sistema de proyección transversal de Mercator. La nota lee como sigue:

TRANSVERSE MERCATOR PROJECTION

- Entre las latitudes 80° sur y 84° norte, los mapas a la escala de 1:500.000 y menores se trazan con base en un sistema de líneas paralelas que se conoce como sistema de proyección conocida de tipo conforme de Lambert. La nota lee como sigue:

LAMBERT CONFORMAL CONIC

PROJECTION

STANDARD PARALLELS 36° 40' N AND 39° 20' N

- Los mapas de las regiones polares (al sur de la latitud 80° sur y al norte de la latitud 84° norte) a la escala de 1:1.000.000 y mayores, se trazan con base en el sistema de proyección estereográfico polar. La nota lee como sigue:

POLAR STEREOGRAPHIC PROJECTION

- Otros mapas especiales y para propósito generales, sea cual sea su escala, se trazan con base en otros sistemas de proyección seleccionados individualmente a fin de que concuerden con el uso que se le propone dar al mapa. La proyección seleccionada deberá figurar en una nota en el margen inferior en el mapa.

(6) Nota de cuadrícula.- Esta nota, que se encuentra ubicada en el centro del margen inferior del mapa, proporciona información relativa al sistema de cuadrícula que sea usa, al intervalo de las líneas de cuadrícula y a la cantidad de dígitos que se han omitido de los valores de la cuadrícula. Cuando se considere apropiado, se podrá incluir informaciones sobre el traslapo y cualquier sistema cuadrícula secundario que aparezca en el mapa.

ESFEROIDE INTERNACIONAL

CUADRICULA1000 [m] UTM. ZONA 20 LINEAS (negras numeradas)

1000 [m] 21 (trazos números azules)

(7) Casilla de referencia de cuadrícula.- Esta casilla contiene la información necesaria para dar referencia de cuadrícula en el mapa.

DESIGNACION DE ZONA DE CUADRICULA		PARA DAR UNA REFERENCIA EN ESTA HOJA A LOS 100 M. MAS CERCANOS		
<p>20K</p> <p>IDENTIFICACION DEL CUADRADO DE 100.000 METROS</p> <div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 100px; margin: 10px auto; text-align: center; line-height: 100px;">LD</div>		PUNTO UTILIZADO COMO EJEMPLO: ESCUELAS TEJAS		
<p>NO DEBE TOMARSE EN CUENTA las cifras en TIPO PEQUEÑO de cualquier numero cuadricular dichos numeros son para determinar los valores completos de las coordenadas. Utilicemos SOLAMENTE los numeros del TIPO GRANDE v.g:</p> <p style="text-align: center;">78 <u>80</u> 000</p>		1. Leanse las letras que identifiquen el cuadrado de 1 00.000 m. dentro del cuadrado que se encuentra el punto.	LD	
		2. Localicese la línea VERTICAL de la cuadrícula situada inmediatamente a la izquierda del punto y leanse las cifras de TIPO GRANDE correspondientes a ella, ya sea en el margen superior, en el inferior o sobre la misma línea: Estimemos los decimos (del intervalo de cuadrícula) entre la línea mencionada y el punto:	27	8
		3. Localicese la línea HORIZONTAL de la cuadrícula situada inmediatamente DEBAJO del punto y leanse las cifras de TIPO GRANDE correspondiente a ella, las cuales se pueden ver en el margen izquierdo, en el derecho, o sobre la línea misma: Estimense los decimos entre (del intervalo de cuadrícula) entre la línea mencionada y el punto:		84 9
EJEMPLO DE REFERENCIA:		LD278849		
Si la informacion abarca una zona mayor de 18°, antepongase a la referencia anterior la designacion de la zona de cuadrícula, v.g:		20KLD278849		

Figura 10.2 casilla de referencia

(8) Leyenda.- La leyenda aparece en el margen inferior izquierdo. Ilustra e identifica los símbolos topográficos que se usan para representar los rasgos de los puntos característicos que mas se destacan en el mapa. Los símbolos no son siempre iguales en todos los mapas. Para evitar cualquier probabilidad de cometer equivocaciones en

la identificación de los símbolos, se debe leer siempre la leyenda cuando se vaya a interpretar un mapa.

POBLACIONES		
De mas de 25.000 habitantes	_____	LA PAZ
De 12.000 a 25.000 hab.	_____	QUILLACOLLO
De 5.000 a 12.000 hab	_____	LLALLAGUA
De 100 a 800 edificios.	_____	Viacha
De 40 a 100 edif.	_____	Mecapaca
De 6 a 40 edif.	_____	Achocalla
Menos de 6 edificios		
CAMINOS		
Transitable todo el año	_____	
Afirmado, solido, dos vías	=====	
Revest.o suelto o ligero, dos vías	=====	
afirmado solido, una vía	=====	
Revestimiento suelto, ligero una vía	=====	
Transitable en tiempo bueno, seco	=====	
Revestimiento suelto	=====	
Rodera, vereda	-----	
Puente	-----	
FERROCARRILES		
Vía sencilla, trocha normal ancha	+++++	
Vía sencilla, trocha estrecha	+++++	
LIMITES		
Nacional	-----	
Departamental	-----	
Provincial	-----	
Linea transitoria de energia		-----
Iglesia. Esc. Mina	_____	⛪ ⛪ >
Molino, bomba de viento, Molino de agua.	_____	⋈ ⋈ *
Control horizontal cota fija	_____	SM 2792
Elevaciones fotogrametricas	_____	• 3478 • 3478
Bosque, monte, matorral.		_____
Tholar, yaretal, sup. rocosa.	_____	_____
Hierba tropical, totoral.	_____	_____
Huerto cañaveral	_____	_____
Arena, salar.	_____	_____
Rio intermitente.		_____
Lago intermitente.	_____	_____
Terreno inundable.	_____	_____
Cienega, bofedal	_____	_____
Pozo manantial	_____	_____
Rapidos, cataratas grandes	_____	_____
Rapidos, cataratas pequeñas	_____	_____
Muelle	_____	_____
Represa de mamposteria	_____	_____
Rio seco o aluvion	_____	_____

Figura 10.3 Signos convencionales

(9) Diagrama de declinación.- Este diagrama figura en el margen inferior de los mapas a escalas mayores e indica las relaciones angulares entre el norte verdadero o geográfico, el norte de cuadrícula y el norte magnético. En los mapas a escala de 1:250.000, esta información se da en una nota que aparece en el margen inferior.

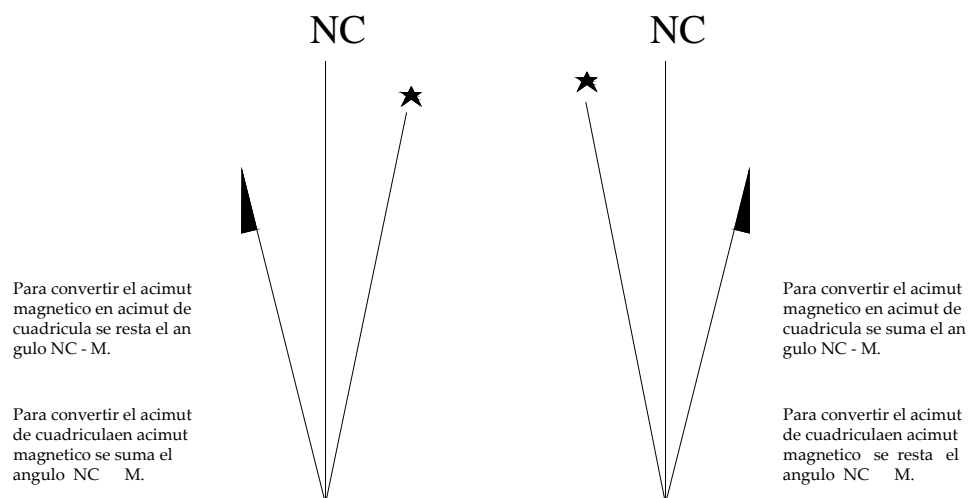


Figura 10.4 Diagrama de declinación

(10) Pie de imprenta.- El pie de imprenta se encuentra en el margen inferior derecho e identifica al impresor y da la fecha de impresión. La fecha de impresión no debe ser usada como base para determinar cuando se obtuvo la información que aparece en el mapa, ejemplo:

CONTROL POR	IGM e IAGS
PREPARADO POR	IGM e IAGS
COMPILACION	Año 1970
FOTOGRAFIAS	Año 1971

(11) Equidistancia (curvas de nivel).- La equidistancia entre las curvas de nivel aparece en centro del margen inferior. Señala la distancia vertical entre curvas de niveles consecutiva en el mapa. Cuando se usan curvas complementarias, se indica la separación:

CURVAS DE NIVEL CON INTERVALOS DE 20 MTS.
 SUPLEMENTARIAS A 10 MTS.

(12) Notas y escalas especiales.-En ciertas condiciones, se puede incluir en la información marginal notas o escalas especiales que le puedan servir de ayuda al usuario del mapa. A continuación se dan ciertos ejemplos:

(a) Glosario.- Explicación de términos técnicos a una traducción de los términos en mapas de áreas de países extranjeros cuyo idioma no es el ingles.

GLOSARIO (AYMARA)

RIO	Jahuirá	CERRO	Kollu
QUEBRADA	Khova	LOMA	Pata
LAGUNA	Kota	ROCA	Kharka
AGUA	Uma	ABRA	Apacheta
SALAR	Khollpa	CASA	Uta
VIENTO	Huaira	PIEDRA	Khala

- (b) Clasificación.- Ciertos mapas precisan una nota en la que se indica la clasificación de seguridad. Esta debe figurar en los márgenes superiores e inferiores.
- (c) Escala – transportador.- Esta escala puede figurar en el margen superior de ciertos mapas. Se la usa para trazar en el diagrama de declinación entre el norte magnético y el norte de cuadrícula para el mapa en cuestión; este diagrama, a su vez, se usa para orientar el mapa con la ayuda de una brújula.
- (d) Diagrama de abarcadura.- En los mapas trazados a escala de 1:100.000 y mayores, se puede usar un diagrama de abarcadura. Normalmente aparece en el margen inferior o derecho e indica los métodos utilizados en la impresión y en la brújula del mapa, las fechas de las fotografías y la veracidad o precisión de las fuentes de origen. En los mapas escala de 1:250.000, aparece un diagrama de seguridad en vez de un diagrama de abarcadura.
- (e) Guía de altura.- En los mapas trazados a escalas de 1:100.000 y mayores, un diagrama en el margen inferior derecho del mapa muestra una representación en miniatura del terreno por medio de la banda de altura, alturas de comprobación y características principales de avenamiento. La guía de altura ayuda a reconocer rápidamente las configuraciones del terreno ya que se hacen más patentes la altura máxima y mínima del mismo.
- (f) Notas especiales.- Una nota especial de observación que da información general que se refiere específicamente al área que cubre el mapa. Por ejemplo: los campos de arroz por lo general sufren inundaciones; sin embargo, puede estar seco durante la época de sequía.

10.1.2 Símbolos y colores que se usan en los mapas topográficos

Un mapa tiene como finalidad dar una descripción gráfica de un área de la superficie de la tierra con los rasgos característicos pertinentes en sus posiciones correctas. Idealmente, todos los rasgos característicos de una región se deben

representar en el mapa en su proporción, posición y formas verdaderas. Esto, sin embargo, no es posible ya que muchos de los rasgos característicos no serían de importancia y la representación de otros, debido a su tamaño, resultaría microscópica. En consecuencia, el cartógrafo se ha visto obligado a usar símbolos para representar y destacar las características naturales y artificiales de la superficie de la tierra. Estos símbolos deben tener la mas estrecha semejanza posible con las verdaderas características y como son en realidad, vista desde un ángulo superior (véanse las figuras 10.5 *a* y 10.5 *b*).



Figura 10.5 *a* Área vista desde una posición en el terreno.

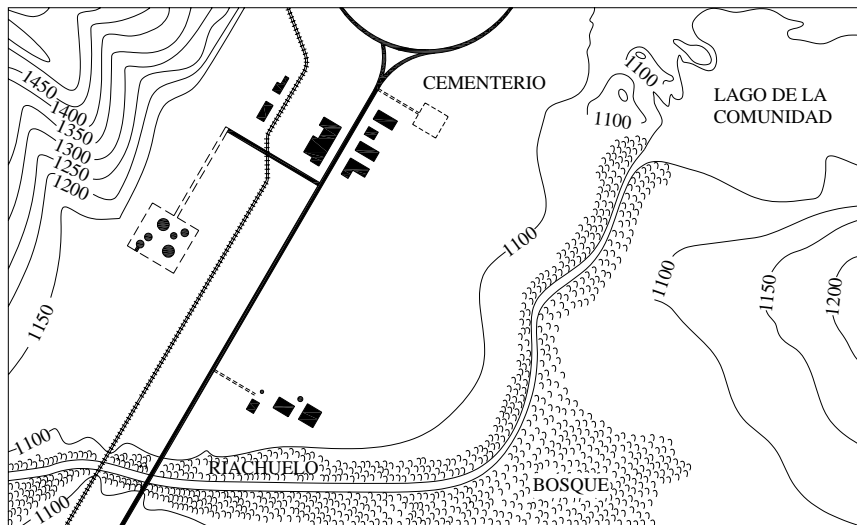


Figura 10.5 *b* Mapa de la misma área que se muestra en la figura 10.5 *a*

Los símbolos topográficos usualmente se imprimen en diferentes colores a fin de darle una apariencia más natural y facilitar la identificación de los rasgos

característicos en el mapa mediante el contraste. Cada color identifica una característica distinta. Los colores varían según los diferentes tipos de mapas, sin embargo, en un mapa topográfico corriente dibujado a gran escala, los colores que se usan y las características que cada cual representa son:

- Negro para la mayoría de las características culturales o artificiales.
- Azul para las características hidrográficas tales como lagos, ríos y pantanos.
- Verde para la vegetación tales como los bosques, los huertos y las viñas.
- Castaños para todas las características del relieve tales como las curvas de nivel.
- Rojo para las carreteras principales, las zonas urbanizadas y los rasgos característicos especiales.
- Ocasionalmente se puede usar otros colores para mostrar información especial. En estos casos, por regla general, indicara en la información marginal lo que representan los mismos. Por ejemplo, en las graficas de operaciones conjuntas los símbolos aeronáuticos e información relacionada para las operaciones aeroterrestres figuran en un color morado.

En la confección de un mapa, todo debe reducir de su tamaño natural al tamaño en que se debe aparecer en el mapa. Esto precisa para fines de claridad, que se exageren algunos de los símbolos. Siempre que sea posible, esto se debe hacer de manera que el centro del símbolo permanezca en su verdadera posición. Una excepción seria la necesidad de mover algún rasgo característico de su verdadera posición debido a lo exagerado de la representación de un camino principal contiguo, para guardar la posición relativa entre ambos.

10.1.3 Abreviaturas Topográficas

Las abreviaturas al igual que los símbolos topográficos, son parte integrante de las cartas y deben ser conocidas por el usuario, las mas usuales son:

Cmpto.	Campamento
Cplla.	Capilla
Cem.	Cementerio
C°	Cerro
Ecía.	Estancia
Esc.	Escuela
F.C.	Ferrocarril
Hda.	Hacienda
Igl.	Iglesia
Km.	Kilómetro
Lagna.	Laguna
LP.	La Paz
Qda.	Quebrada
Snia.	Serranía
Est.	Estación

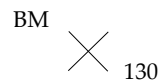
10.1.4 Detalle de Clasificación

A continuación se muestran los detalles de clasificación más empleados junto a sus símbolos correspondientes.

Detalle de clasificación

Símbolo

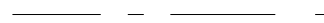
PUNTO DE NIVELACION



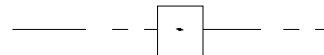
LIMITE INTERNACIONAL



LIMITE DEPARTAMENTAL



HITO



OBRAS PÚBLICAS E INDUSTRIAS

Detalle de clasificación

Símbolo

TANQUE GASOLINA, PETROLEO,
GAS AGUA, ETC.



POZOS PETROLEROS, GAS, ETC.



PISCINA



OLEODUCTO, GASEODUCTO



OLEODUCTO, GASEODUCTO
SUBTERRANEO



MINA

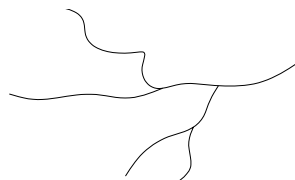


HIDROGRAFIA

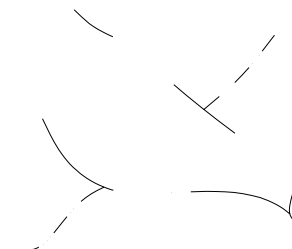
Detalle de clasificación

Símbolo

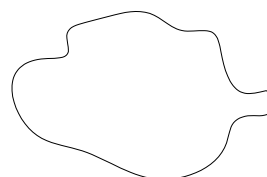
CORRIENTE PERENNE



CORRIENTE INTERMITENTE



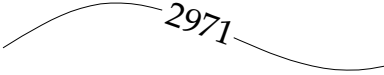
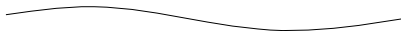
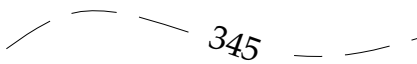
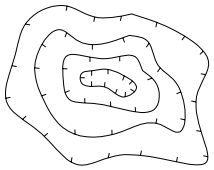
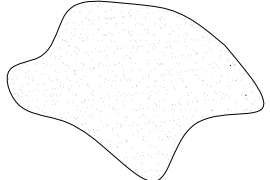
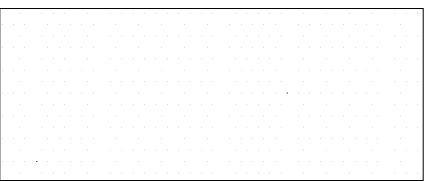
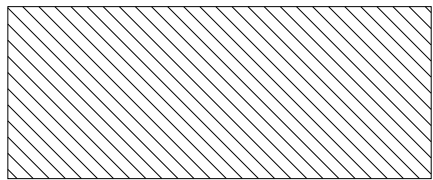
LAGO O CHARCO PERENNE

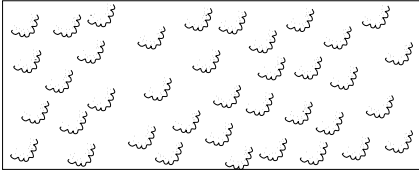
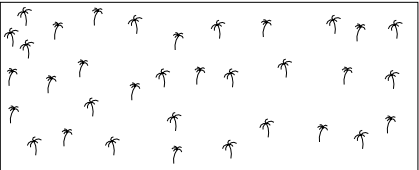
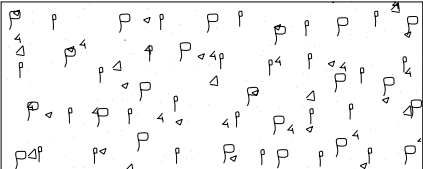
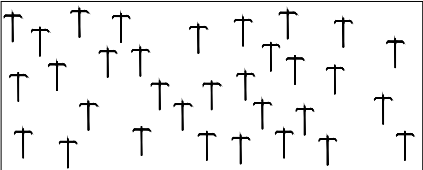
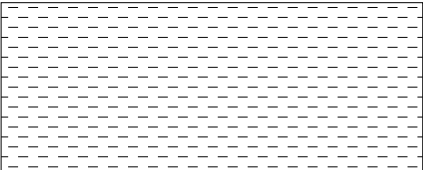
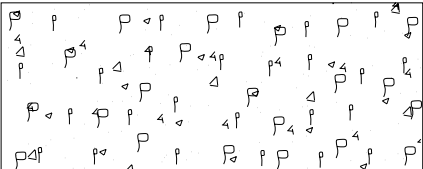


ACUEDUCTO

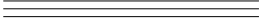









ELEMENTOS HIPSOGRAFICOS

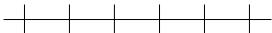
<u>Detalle de clasificación</u>	<u>Símbolo</u>
CURVA DE NIVEL INDICE	
CURVA DE NIVEL INTERMEDIA	
CURVA DE NIVEL SUPLEMENTARIA	
DEPRESION	
ARENALES	
AREA CULTIVADA	
LAGO INTERMITENTE	

<u>Detalle de clasificación</u>	<u>Símbolo</u>
MONTE ALTO	
PALMERAS	
TOLARES	
CAÑA DE AZUCAR	
TERRENO INUNDADO	
YARETAL	

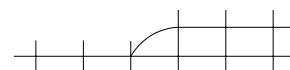
ELEMENTOS CULTURALES

<u>Detalle de clasificación</u>	<u>Símbolo</u>
AUTOPISTA.	<div>4 VIAS</div> 
TRANSITABLE TODO EL AÑO, AFIRMADO SOLIDO DOS O MAS VIAS.	
TRANSITABLE TODO EL AÑO, REVESTIMIENTO SUELTO O LIGERO, DOS O MAS VIAS.	
TRANSITABLE TODO EL AÑO, AFIRMADO SOLIDO, UNA VIA.	
TRANSITABLE TODO EL AÑO, REVESTIMIENTO SUELTO O LIGERO, UNA VIA.	
TRANSITABLE EN TIEMPO BUENO O SECO, REVESTIMIENTO SUELTO.	
RODERA	
VEREDA O SENDERO	

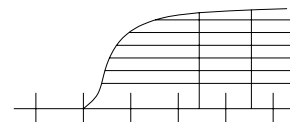
FERROCARRILES Y ELEMENTOS RELACIONADOS

<u>Detalle de clasificación</u>	<u>Símbolo</u>
VIA SENCILLA, TROCHA NORMAL O ANCHA.	

DESVIADERO, TROCHA NORMAL
 O ANCHA.



PATIO FERROVIARIO



ESTACION FERROVIARIA

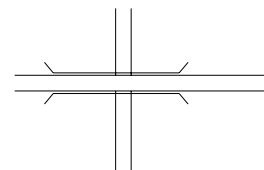


FERROCARRILES Y ELEMENTOS RELACIONADOS

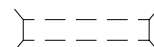
Detalle de clasificación

Símbolo

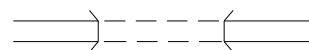
PASO ELEVADO, CARRETERA,
 DOS O MAS VIAS



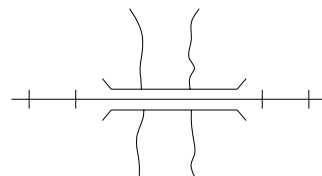
TUNEL FERROVIARIO



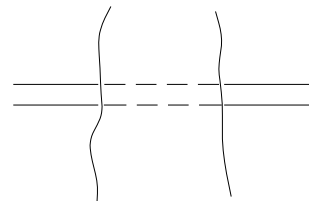
TUNEL CON CARRETERA



PUENTE DE FERROCARRIL



VADO



LINEA TELEFONICA O TELEGRAFICA



EDIFICIOS Y LUGARES POBLADOS

<u>Detalle de clasificación</u>	<u>Símbolo</u>
ZONAS URBANIZADAS	
EDIFICIO	
ESCUELA	
IGLESIA	
CEMENTERIO	
CAMPOS DEPORTIVOS	
PUNTO DE CONTROL, MARCA TERRESTRE	

10.2 CUADRICULAS

10.2.1 Manera de identificar direcciones

La calle Ecuador y avenida Oquendo proporciona ubicación en la ciudad. Este es un procedimiento que la mayoría de nosotros hemos usado una u otra vez al dar una dirección. Este método resulta conveniente en una ciudad cuyas calles estén debidamente señaladas con su respectivo nombre o en áreas con características del

terreno bien conocidas, pero no es adecuado para dar direcciones en las regiones en vías de desarrollo o en relaciones poco conocidas del mundo. En tal caso se hace necesario disponer de algún medio para identificar de una manera uniforme y precisa las proporciones de los objetos. Hay varios métodos para hacer esta identificación, mas debido a la exactitud que se requiere a la mayoría de los propósitos en general, el método que se use debe satisfacer, por lo menos, las siguientes condiciones:

- No debe ser necesario tener conocimiento previo de la región.
- Debe aplicarse a grandes extensiones de terreno.
- No debe basarse en puntos característicos del terreno.
- Debe poder adaptarse a todas las escalas del mapa.
- Debe ser sencillo y de fácil uso para los usuarios.

10.2.2 Coordenadas Geográficas

Uno de los métodos sistemáticos antiguos de localización esta basado en un sistema de coordenadas geográficas. El dibujo de un juego de círculos (anillos) alrededor del globo que corran de este a oeste (paralelos al ecuador) y otra serie de círculos que corran de norte a sur perpendicular al ecuador y formen ángulos rectos y converjan los polos, forma una red de líneas mediante la cual se puede localizar cualquier punto a la superficie de la Tierra. La distancia que hay desde un punto terrestre al norte o al sur hasta el ecuador se conoce como su latitud. Los círculos del globo terrestre paralelo al ecuador se conocen como paralelos de latitud o sencillamente como paralelos. Las líneas de latitud corren de este a oeste, sin embargo, la distancia hacia el norte o el sur se mide entre estas. (Fig. 10.6 y 10.7). A los anillos en la otra serie de círculos del globo terrestre que forman ángulos rectos con la línea de latitud y pasan por los polos, se les conoce como meridiano de longitud o sencillamente como meridianos. El meridiano que se toma como origen para medir o contar la

longitud se conoce como el primer meridiano. El primer meridiano del sistema que nosotros usamos pasa a través de Greenwich, (Fig. 10.8), para una tabla de otros primeros meridianos). La distancia hacia el este o el oeste desde un primer meridiano hasta un punto dado se conoce como su longitud. Las líneas de longitud (meridiano) corren de norte a sur, sin embargo, las distancia hacia el este o el oeste se mide entre estas (Fig. 10.6 y 10.7).

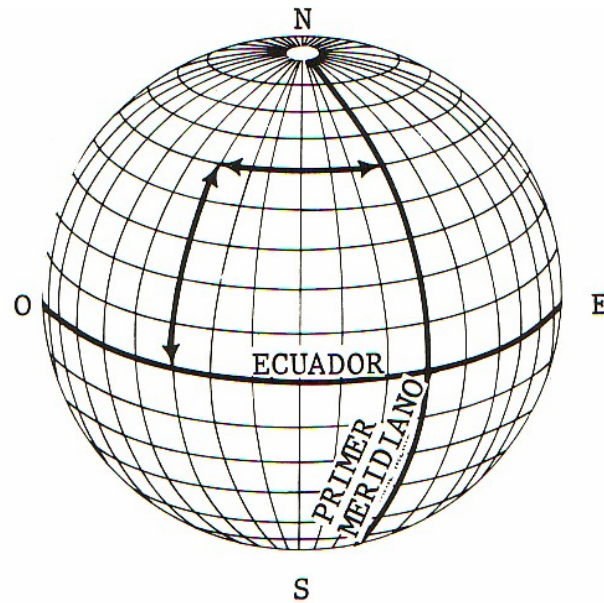


Figura 10.6 Líneas de referencia.

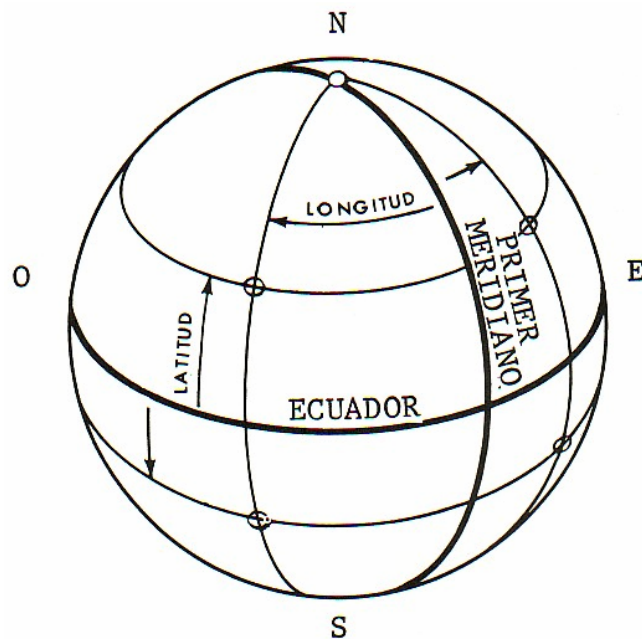
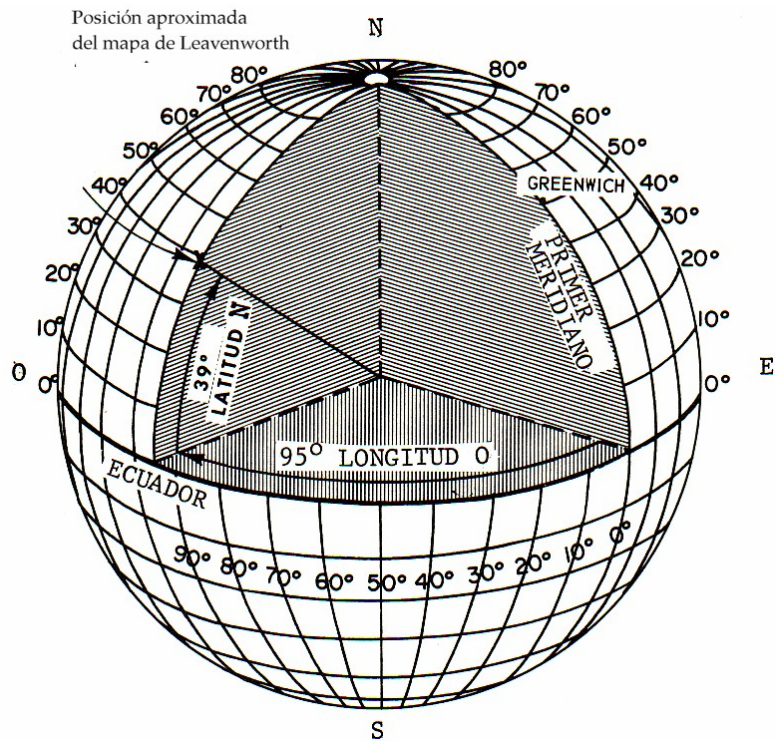


Figura 10.7 Localización de la posición.

Las coordenadas geográficas se expresan como unidades de medida angular. Cada círculo está dividido en 360 grados, cada grado en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos. El grado se simboliza con $^{\circ}$, el minuto con $'$ y el segundo con $''$. Partiendo del ecuador, los paralelos de latitud se numeran de 0° a 90° tanto hacia el norte como hacia el sur. Los extremos son el polo norte que tiene una latitud norte de 90° y el polo sur que tiene una latitud sur de 90° . La latitud puede tener el mismo valor numérico al norte o al sur del ecuador. Partiendo del 0° en el primer meridiano, la longitud se mide tanto al este como al oeste alrededor del mundo. Las líneas al este del primer meridiano se numeran desde 0° hasta medir 180° y se las conoce como longitud este; las líneas al oeste del primer meridiano se enumeran desde 0° hasta 180° y se les conoce como longitud oeste. Siempre se debe especificar este u oeste al dar la dirección. La línea directamente opuesta al primer meridiano, por lo tanto, puede tener un valor de 180° tanto al este como al oeste. Los valores de las coordenadas geográficas, estando en unidades de medida angular, significaran más si se les compara con las unidades de medida con la cual estemos más familiarizados.

En cualquier punto de la tierra la distancia en el terreno cubierta por 1 grado de latitud es de aproximadamente 111 kilómetros (69 millas); un segundo es igual aproximadamente 30 metros (100 pies). La distancia en el terreno cubierta por 1° grado de longitud en el ecuador es aproximadamente 111 kilómetros (69 millas), mas esta decrece a medida que uno se aproxima a los polos hasta llegar a cero. Por ejemplo, un segundo de longitud representa poco más o menos de 30 metros (100 pies) en el ecuador, pero a la latitud de Washington, D. C., 1° segundo de longitud equivale a aproximadamente 24 metros (78 pies). En la figura 10.8 se ilustran la latitud y la longitud.



PRIMEROS MERIDIANOS EXTRANJEROS

(Basados en la longitud Greenwich)

	°	'	''	
Ámsterdam, Holanda	4	53	01	E
Atenas, Grecia	23	42	59	E
Batavia, (Yakarta), Indonesia	106	48	28	E
Berna, Suiza	7	26	22	E
Brúcelas, Bélgica	4	22	06	E
Copenhague, Dinamarca	12	34	40	E
Yakarta, véase Batavia				
Hierro, Islas Canarias	17	39	46	E
Helsinki, Finlandia	24	57	17	E
Estambul, Turquía	28	58	50	E

Lisboa, Portugal -----	9	07	55	0
Madrid, España -----	3	41	15	0
Oslo, Noruega -----	10	43	23	E
Paris, Francia -----	2	20	14	E
Pulkovo, Unión de republicas Socialistas				
Soviéticas -----	30	19	39	E
Roma, Italia -----	12	27	08	E
Estocolmo, Suecia -----	18	03	30	E
Tirana, Albania -----	19	46	45	E

Tabla de primeros meridianos

10.2.3 La Cuadrícula Universal Transversal de Mercator.

La Cuadrícula Universal Transversal de Mercator (en adelante, Cuadrícula Universal de Mercator (CUM) esta diseñada para uso mundial entre la latitud 80° N. Como su nombre sugiere, esta sobrepuesta a la proyección Transversal de Mercator. La cuadrícula divide el globo terrestre en 60 zonas de 6° de ancho, cuyo origen es la intersección del ecuador con el meridiano central (véase la figura 10.9). Las cuadrículas es idéntica en las 60 zonas. Al meridano central y al ecuador se les asignan valores numéricos básicos (en metros). Luego se construye la cuadrícula como un trazado de líneas dibujadas a intervalos regulares y paralelas a estas dos líneas básicas. La asignación de un valor numérico a cada línea de cuadrícula, que represente su distancia desde el punto de origen, facilita enormemente el problema de la localización de cualquier punto. Por lo general, parecería ser lógico el asignar un valor de 0 a las dos líneas bases y medir hacia fuera desde ellas.

Esto sin embargo, haría innecesario el uso de la letra N (norte), S (sur), E (este), u O (oeste) para identificar la dirección o que todos los puntos al ecuador o al este del

meridiano central tengan valores negativos (-). Este inconveniente se ha eliminado al asignarle “valores falsos” a las líneas básicas de manera que todos los puntos dentro de cada una de las zonas tengan valores positivos.

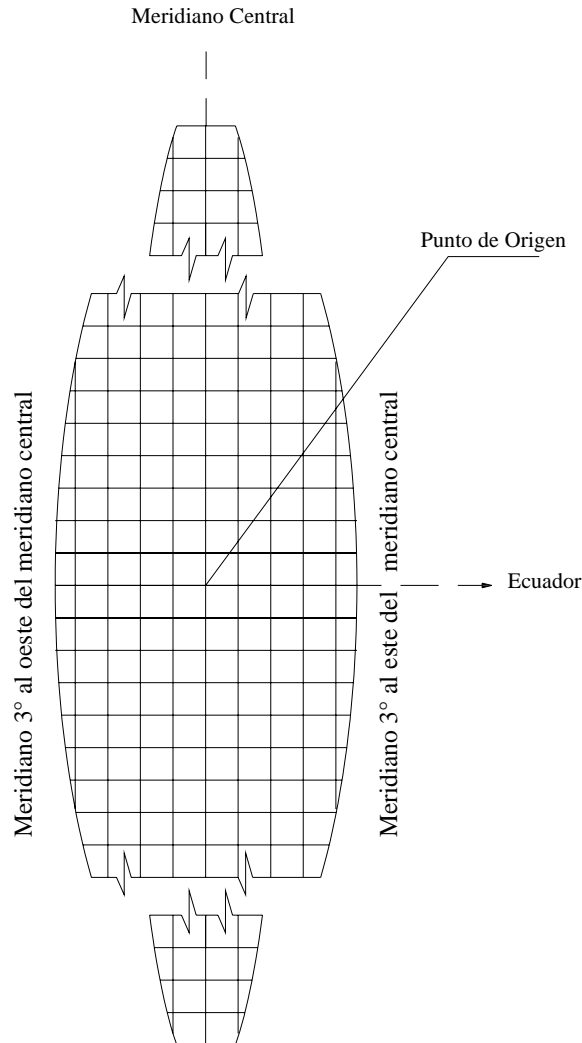


Figura 10.9 Una zona de cuadrícula de la Cuadrícula Universal de Mercator.

Las distancias se deben medir siempre hacia la DERECHA y hacia ARRIBA, o sea hacia el este y el norte, según el lector mire hacia el mapa. Estas lecturas se conocen como “desviaciones falsas hacia el este” y “desviaciones falsas hacia el norte”. El valor de desviaciones falsas hacia el este que se le asigna al meridiano central es de 500.000 metros y el valor de desviación falsa hacia el norte para el ecuador es de 0 metros para las medidas en hemisferio sur (Fig. 10.10).

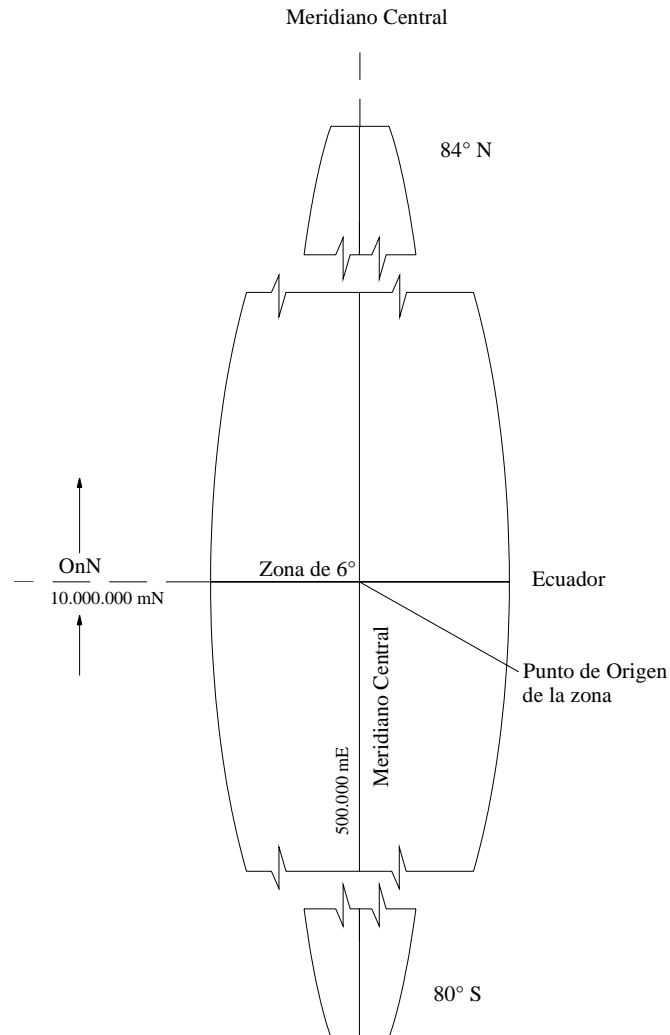


Figura 10.10 Desviaciones falsas hacia el este y hacia el norte para una zona de cuadrícula.

10.3 ESCALA Y DISTANCIAS

10.3.1 Importancia

Un mapa es una representación grafica de una porción de la superficie de la Tierra, trazada de manera que guarde una relación uniforme y proporcional. Esta relación entre una distancia en el mapa y la distancia correspondiente sobre la Tierra se conoce como la escala del mapa. La escala de un mapa permite determinar con precisión la distancia en el terreno, sirviéndose de dicho mapa para hacer el cálculo.

La determinación de la distancia es un factor importante en el planeamiento y en la ejecución de cualquier obra civil.

10.3.2 Fracción Representativa (FR)

La escala de un mapa representa la relación numérica de semejanza entre una distancia horizontal (longitud de una línea) en el plano (mapa) y la distancia correspondiente sobre el terreno. Usualmente se la representa como una fracción y se le conoce como la fracción representativa (FR). En la distancia en el mapa, la fracción representativa siempre se da como 1. No depende de unidad de medida alguna. Una fracción representativa de $1 / 50.000$ o $1:50.000$ indique que una (1) unidad de medida en el mapa equivale a 50.000 de la misma unidad de medida sobre la superficie del terreno.

La distancia sobre la superficie terrestre entre dos puntos se puede determinar midiendo entre los puntos en el mapa y multiplicando la medición del mapa por el denominador de la FR.

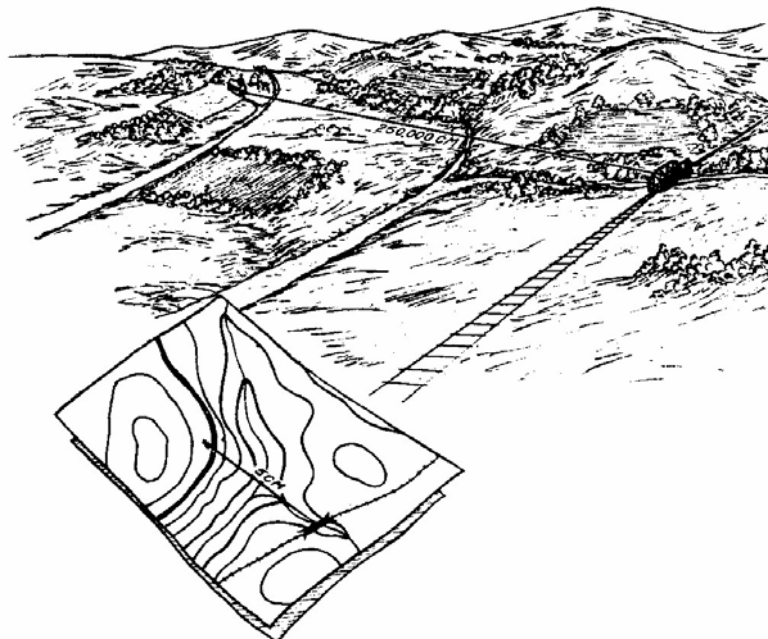


Figura 10.11 Relación entre la distancia en el plano y la distancia en el terreno.

Ejemplo:

$$FR = 1:50.000 \text{ o } \frac{1}{50.000} \quad \text{Distancia en el mapa} = 5 \text{ unidades}$$

$$5 \times 50.000 = 250.000 \text{ unidades de distancia en el terreno (figura 10.11).}$$

Puede representarse la situación de que un mapa o un bosquejo no tenga una FR. En tal caso hay que decidir cuál es la FR a fin de poder determinar la distancia representada en dicho mapa. Hay dos maneras de hacer esto:

➤ Comparación con la distancia en el terreno.

- Mida la distancia entre dos puntos en el mapa (DM).
- Determine la distancia horizontal entre los mismos dos puntos en el terreno (DT).
- Emplee la formula para encontrar la FR; se debe tener presente que la FR debe estar en la forma general:

$$FR = \frac{1}{x} = \frac{DM}{DT}$$

- Tanto la distancia en el plano (DM) como la distancia en el terreno (DT) debe estar en la misma unidad de medida y la DM debe ser reducida a 1.

$$DM = 4,32 \text{ centímetros}$$

$$DT = 2,16 \text{ kilómetro (216.000 centímetro).}$$

$$FR = \frac{1}{X} = \frac{4,32}{216.000} \text{ o } 4,32X = 216.000$$

$$X = 50.000;$$

$$\text{Por lo tanto: } FR = \frac{1}{50.000} \text{ o } 1:50.000$$

➤ Comparación con otro mapa de la misma región que tenga un FR.

- Seleccione dos puntos en el mapa que no tengan una FR. Mida la distancia entre estos dos puntos (DM).
- Localice los mismos dos puntos en el mapa con la FR. Mida la distancia entre estos dos puntos y determine la distancia terrestre usando la FR, la cual debe ser la misma para ambos mapas.
- Use esta distancia terrestre y la distancia en el mapa (DM) del primer mapa para calcular la FR por medio de la formula.

$$FR = \frac{1}{X} = \frac{DM}{DT}$$

- De vez en cuando será necesario determinar la distancia en el terreno conocida y la FR:

$$DM = \frac{DT}{\text{DENOMINADOR de la FR}}$$

Distancia en el terreno = 2.200 metros

FR = 1:50.000

DM = 0 0,044 de metros x 100 (centímetro en metros)

= 4,4 centímetros en el mapa

- Cuando se utiliza un mapa para determinar la distancia en el terreno, la escala del mapa influye en la exactitud. Mientras menor sea la escala, menor será la exactitud de la medida ya que algunos de los rasgos característicos en el mapa tienen que ser exagerados para que se les pueda identificar prontamente.

10.3.3 Escalas Gráficas

En la mayoría de los mapas, también se puede determinar la distancia en el terreno mediante otro método, la escala grafica. Esta es una regla impresa en el mapa que permite medir la distancias tal cual si fuera la verdadera distancias en terreno

Comenzando a la derecha del cero, las unidades marcadas son unidades de medidas completas. Esta parte se conoce como la escala primaria. La parte a la izquierda del cero (0) se divide en decimos de unidad y se le conoce como la escala de extinción. La mayoría de los mapas tienen tres escalas gráficas o más, cada una de las cuales se usa para medir la distancia en una unidad de medida diferente (Fig. 10.12).

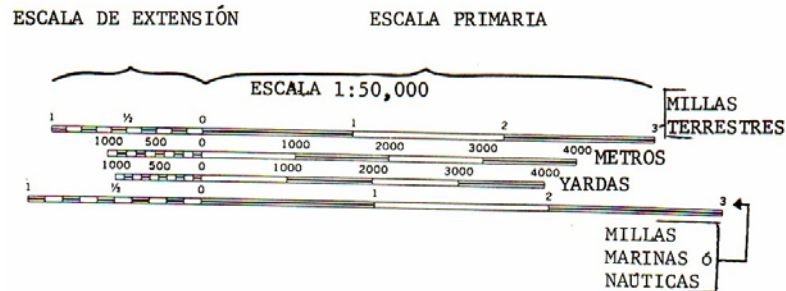


Figura 10.12 Escala gráfica.

10.4 ALTURA Y RELIEVE

10.4.1 Introducción

El conocimiento de los símbolos, las cuadrículas, la escala y la distancia en un mapa nos facilita la identificación de dos puntos, su localización, la toma de mediciones entre ellos y la determinación del tiempo que tomaría un recorrido entre ellos. No obstante se debe tomar en cuenta la posibilidad de que surjan irregularidades tales como un: acantilado de 300 [m] entre dichos puntos. Por lo tanto, también es importante que el usuario del mapa adquiera destreza en la identificación de las irregularidades y la figuración de las masas en la superficie terrestre y que pueda determinar la altura y la diferencia en elevación de toda característica del terreno.

- Plano de nivel.- El plano horizontal que sirve de referencia para la medición de las medidas verticales en el terreno. Este suele ser para la mayoría de los mapas al nivel medio o al nivel promedio del mar.

- Altura.- La elevación del terreno o sea la distancia vertical sobre o bajo nivel del mar u otro plano de referencia.
- Relieve.- Es la representación de la forma (el contorno) y la variación en la altura de la superficie del suelo (o sea la configuración del terreno).

La altura de los puntos y el relieve del terreno de un área influyen en el movimiento y en el despliegue de las unidades ya que limita las rutas por las que ellas puedan pasar, la rapidez con que puedan desplazarse y facilita o dificulta el despliegue de maquinaria a una región.

10.4.2 Curvas de nivel

Existen varias maneras de identificar la altura y de representar el relieve en los mapas. El sistema más corriente es el de las curvas de nivel. Estas son curvas que representan líneas terrestres imaginarias en las que todos los puntos están en un mismo nivel. Otra forma de representar el relieve son: el sombreado por trazos, el relieve sombreado, el entintado hipsométrico y las líneas de configuración.

Las curvas de nivel indican una distancia vertical sobre o bajo el nivel medio del mar u otro plano de referencia. Tomando como punto inicial al nivel del mar, que normalmente es la curva del nivel cero, cada curva representa una altura sobre el mismo. La distancia vertical entre cada dos curvas de nivel consecutivas se conoce como la equidistancia. El valor numérico de la equidistancia se da en la información marginal. En la mayoría de los mapas, estas curvas se representan en color castaño. Partiendo de la curva cero (0), cada quinta curva se traza mas gruesa. Esto es lo que se conoce como curvas índices o maestras. En algún sitio a lo largo de ellas se interrumpe las líneas y se da su altura. Las curvas de nivel que quedan dentro de las

curvas índices se conocen como curvas intermedias, estas se trazan con una línea más tenue que la que se usa para las curvas índices y, por lo general, no se las acota.

El uso de las curvas de nivel en un mapa nos ayuda a encontrar la altura de cualquier punto mediante:

- La determinación de la equidistancia del mapa a base de información marginal y la consideración tanto de la cantidad como de la unidad de medida.
 - La determinación de la curva de nivel numerada (u otra altura dada) mas próxima al punto de la altura que se busca.
 - La determinación de la dirección de la pendiente desde la curva de nivel numerada al punto que se desea.
 - El calculo de la cantidad de curvas de nivel que se debe atravesar para ir desde la línea numerada al punto deseado y la consideración de la dirección, en sentido ascendente o descendente. La cantidad de las líneas que se atraviesan multiplicada por la equidistancia es la distancia sobre o bajo el valor de partida.
- Si el punto se encuentra sobre una curva de nivel, su altura será de la curva de nivel.
 - Para ciertos propósitos, es necesario que un punto este ubicado entre curvas de nivel, se puede calcular la altura dentro de un grado de exactitud igual a la mitad de equidistancia. Todo punto que este a menos de una cuarta parte de la distancia entre las líneas se considera que está a la misma línea que la línea de nivel. Todo punto que este comprendido entre una cuarta ($1/4$) parte y tres cuartas ($3/4$) partes de la distancia desde la línea de menor valor (Fig. 10.13). Si

se desea obtener una determinación más precisa de la altura o de estar las curvas de nivel muy separadas, la altura del punto se puede calcular al grado de exactitud que se desee mediante el proceso de interpolación.

- Para calcular la altura de la parte superior de una colina que no figura en el mapa, sume la mitad de la equidistancia a la curva de nivel que muestre la altura máxima alrededor de la colina.
- Para calcular la profundidad de una depresión, reste la mitad de la equidistancia de la curva de nivel que muestre la profundidad mínima alrededor de la depresión.

En los mapas donde las curvas de nivel índices e intermedias, no muestren la altura y el relieve con la exactitud que se pueda necesitar, se pueden usar curvas intercaladas. Estas son líneas interrumpidas de color castaño que usualmente se trazan a un intervalo igual a la mitad de la equidistancia de las demás curvas del mapa. En la información marginal hay una información que indica la equidistancia que se usa. Se las usa exactamente de la misma manera que las curvas de nivel continuas.

Puede que en algunos mapas las curvas de nivel no llenen los requisitos de exactitud, mas son suficientemente precisos, en lo que representa a valor numérico y a intervalo, como para que se las muestre como curva de nivel en vez de simple líneas de configuración. En tales casos la configuración se considera como aproximada y se muestra por medio de un símbolo dibujado con líneas interrumpidas; el valor de la altura se da a intervalos a lo largo de las líneas más gruesas (curvas índice). La información marginal acerca de las curvas de nivel identifica estas curvas como curvas de nivel aproximadas.

Además de las curvas de nivel, en los mapas se usan cotas de referencias y alturas acotadas para indicar puntos de alturas conocidas. Las cotas o puntos topográficos de referencia, que son las más precisas de las dos, son las marcas que usualmente se simbolizan con una "X" y en ello se indican las alturas, por ejemplo, X BM 124. El valor de la altura que se muestra en color negro se refiere al centro de la "X". Las alturas acotadas que se muestran en el color castaño aparecen, por lo general, en los empalmes de caminos en las cimas de las colinas y en otras características sobresalientes del terreno. El símbolo o signo Δ se usa para determinar una referencia planimétrica precisa. Cuando una cota o un punto topográfico de referencia y referencia planimétrica estén localizados en los mismos puntos, se usa el símbolo CR (cota de referencia).

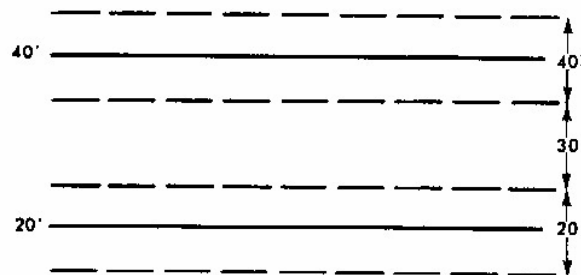


Figura 10.13 Cálculos de la elevación entre curvas de nivel.

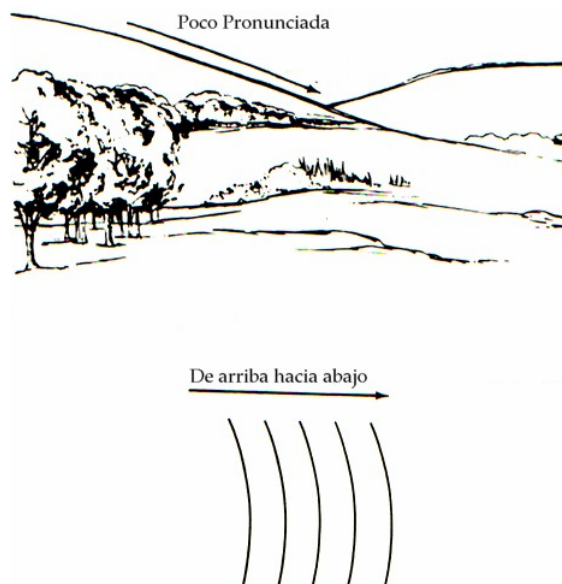


Figura 10.14 Pendiente uniforme poco pronunciada.

Las distancias entre las curvas de nivel muestran el relieve.

- Las curvas de nivel igualmente espaciadas, de mayor separación entre si, indican una pendiente poco pronunciada y uniforme (véase la figura 10.14).
- Las curvas de nivel igualmente espaciadas, de menor separación entre si, indican pendiente uniforme empinada. Mientras mas próximas entre si, mas empinada la pendiente (véase la figura 10.15).

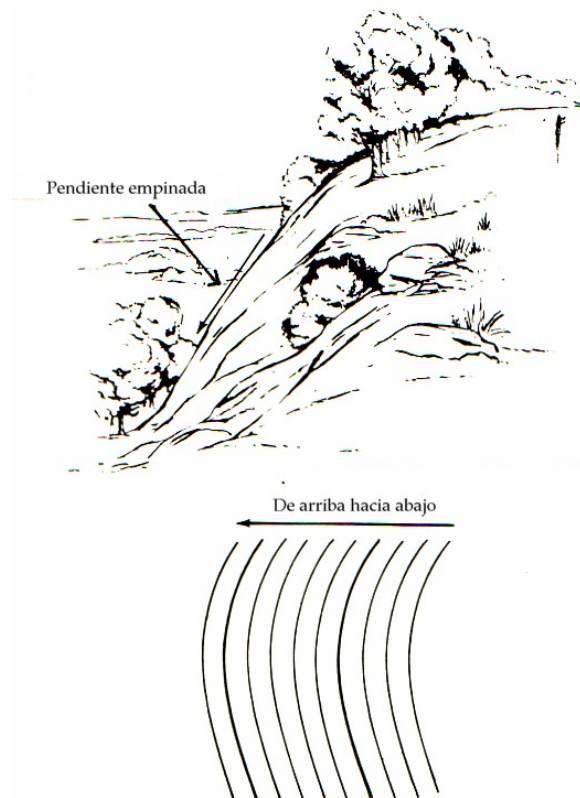


Figura 10.15 Pendiente uniforme empinada

- Las curvas de nivel de menor separación en la parte superior y de mayor separación en la parte inferior indican una pendiente cóncava (Fig. 10.16). Si se considera solo el relieve un observador ubicado en la parte superior de la pendiente cóncava puede observar a lo largo de toda la pendiente y puede ver el terreno al final de ella.

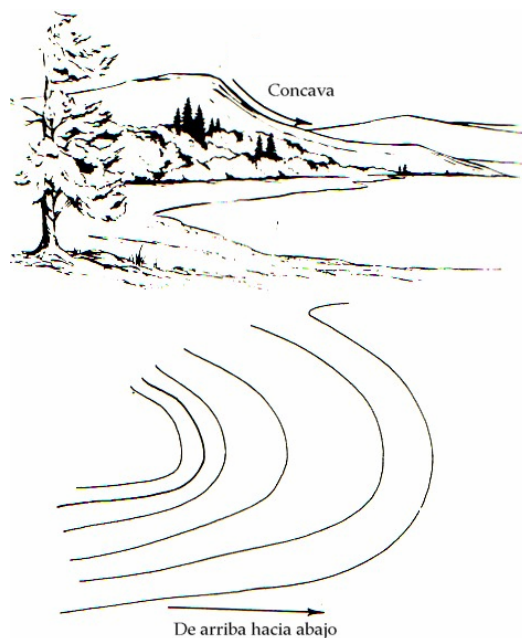


Figura 10.16 Pendiente cóncava

- Las curvas del nivel de mayor separación en la parte superior y de menor separación en la parte inferior indica una pendiente convexa según se puede observar en la figura 10.17. Un observador ubicado en la parte superior de una pendiente convexa no puede observar la mayor parte de la pendiente ni el terreno al pie de la misma.

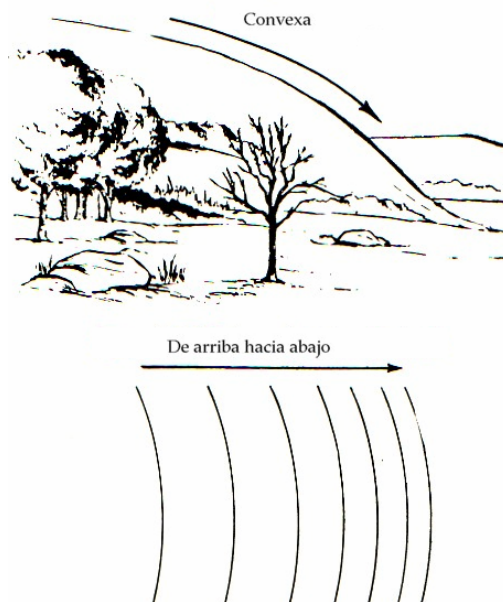


Figura 10.17 Pendiente convexa.

Con el propósito de mostrar la relación entre las formaciones terrestres y los símbolos que la caracterizan en un plano acotado, se han dibujado bosquejos panorámicos estilizados de las principales formaciones topográficas, que han servido como base para el desarrollo de un plano (mapa) acotado. De la figura 10.18 a la 10.19 inclusive, se puede apreciar el croquis y el plano. En cada uno de ellos se ha puesto de relieve una característica topográfica distinta y el mismo símbolo para representar el relieve.

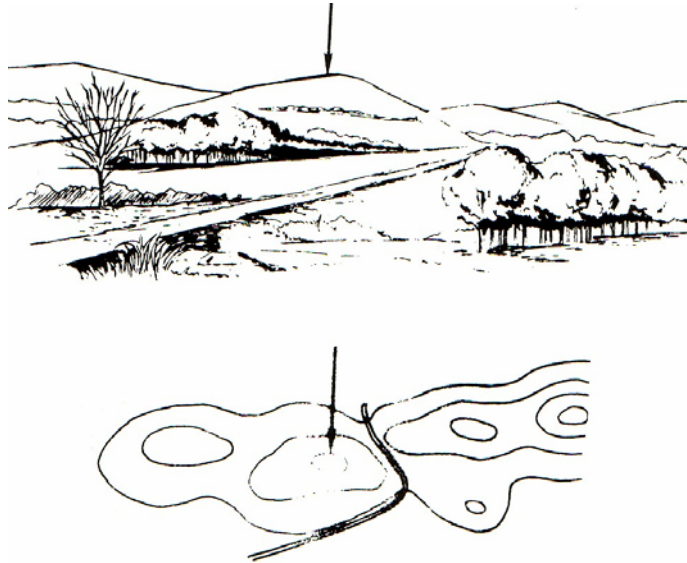


Figura 10.18 Colina

(1) Colina.- Loma o ligera elevación del terreno según se puede observar en la figura 10.18 Un individuo ubicado en la cima de una colina puede observar que un nivel del terreno se incline gradualmente en la dirección que se le vea.

(2) Valle.- Espacio entre dos montes o alturas que recoge ordinariamente en su centro las aguas que corren por las faldas de aquellos (véase a la de la figura 10.19 a). Las curvas de nivel que representa un valle tiene la forma en U que corre en un modo general paralelas a un curso de aguas principal antes de cruzarlo. Mientras mas gradual sea la caída en un curso de agua, a mayor distancia se prolongaran las curvas de nivel paralelas a dicho curso. La forma angular de las curvas de nivel que cruzan en el curso de agua siempre apunta corriente arriba.

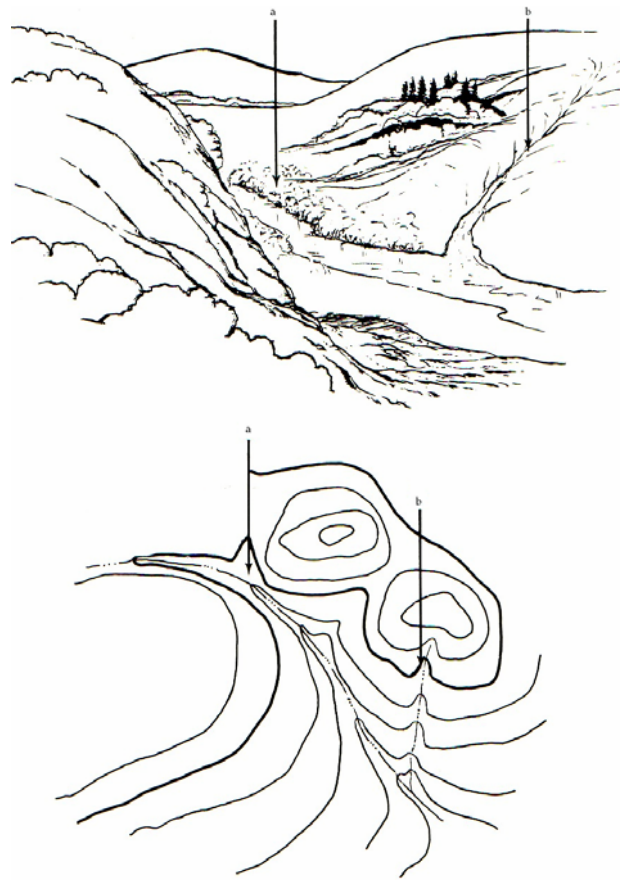


Figura 10.19 a. Valle; b. Quebrada.

(3) Arroyo.- Corto caudal de agua esencialmente sin terreno llano a su lado (Fig. 10.19 b). El terreno forma un declive pronunciado a ambos lados del curso de agua. Con frecuencia se encuentran arroyos a lo largo de los lados de las serranías, formando ángulos rectos con los valles que se encuentran entre ellas. Las curvas de nivel que representan un arroyo tienen forma de V; el punto de la “V” apunta hacia la parte superior del arroyo.

(4) Serranía.- Una serranía es una línea de elevaciones máxima que por lo general contiene variaciones menores a lo largo de su cresta (Fig. 10.20 a). La serranía no es simplemente una línea de colinas. Todos los puntos en su cuesta son mucho mas altos que en el terreno de ambos lados de la serranía.

(5) Estribaciones.- Ramificación pequeña de montañas que se desprenden a uno u otro lado de una cordillera (Fig. 10.20 b). Una estribación esta por lo general formada por dos cursos de agua que corren paralelos y cortan el terreno formando un arroyo a lo largo de los lados de una serranía.

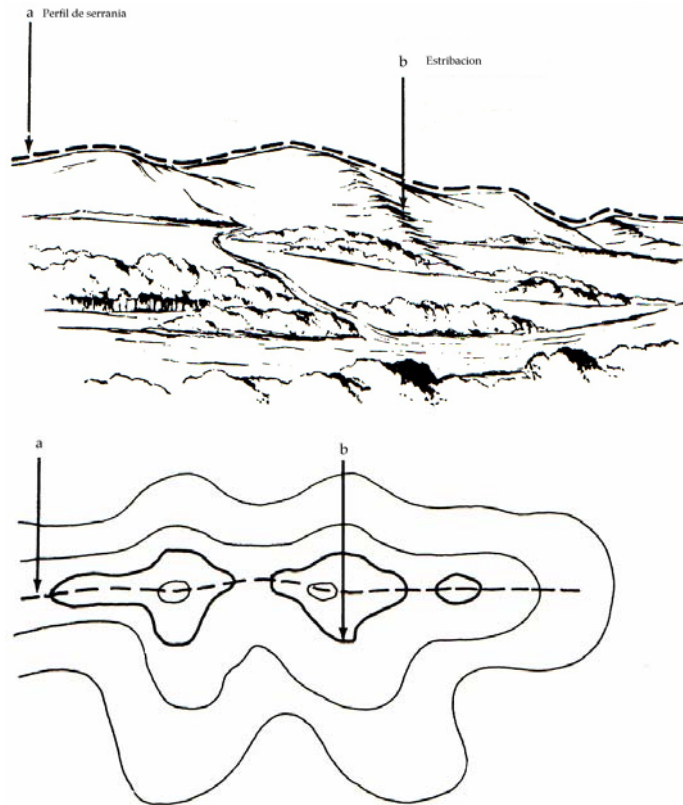


Figura 10.20 a. Serranía b. Estribación

(6) Garganta.- Declive o punto notablemente bajo a lo largo de la cresta de una serranía. La garganta no es necesariamente el punto mas bajo entre dos cumbre de colinas; puede ser simplemente un declive o un punto bajo a lo largo de la cresta de una serranía que de lo contrario sigue el mismo nivel (Fig. 10.21).

(7) Depresión.- Concavidad, bajada u hondonada de alguna extensión en un terreno, que se contrapone topográficamente a una elevación (Fig. 10.22).

(8) Corte y terraplén.- Características artificiales construidas con el propósito de establecer el lecho de un camino o de una vía férrea. Como se puede observar (Fig.

10.23 a), el corte se hace a través del terreno alto y como se puede observar (Fig. 10.23 b), el terraplén es el relleno de depresiones a lo largo de la servidumbre de vía.

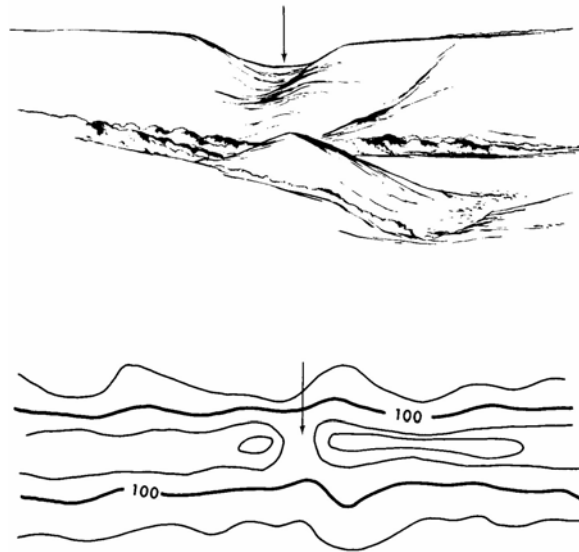


Figura 10.21 Garganta.

(9) Riscos.- Una escarpa vertical o casi vertical como se puede observar en la figura 10.24 En aquellos casos en el que declive sea tan recto o pronunciado que no se pueda mostrar la equidistancia sin que las curvas de nivel se unan, se mostrara la configuración por medio de contramarcas. Las contramarcas siempre apuntan hacia el terreno mas bajo.

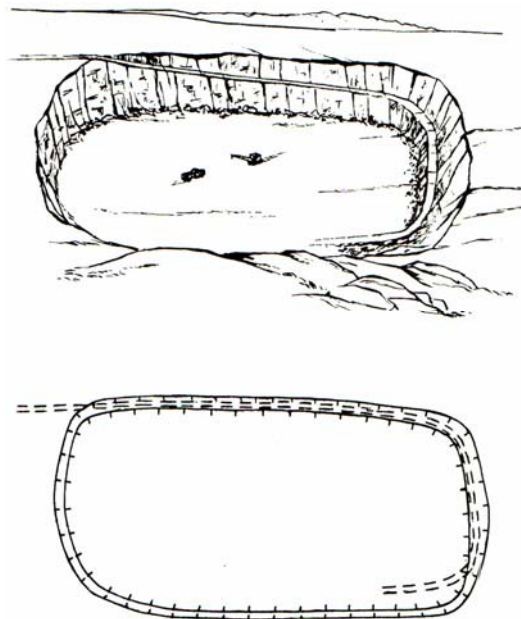


Figura 10.22 Depresión

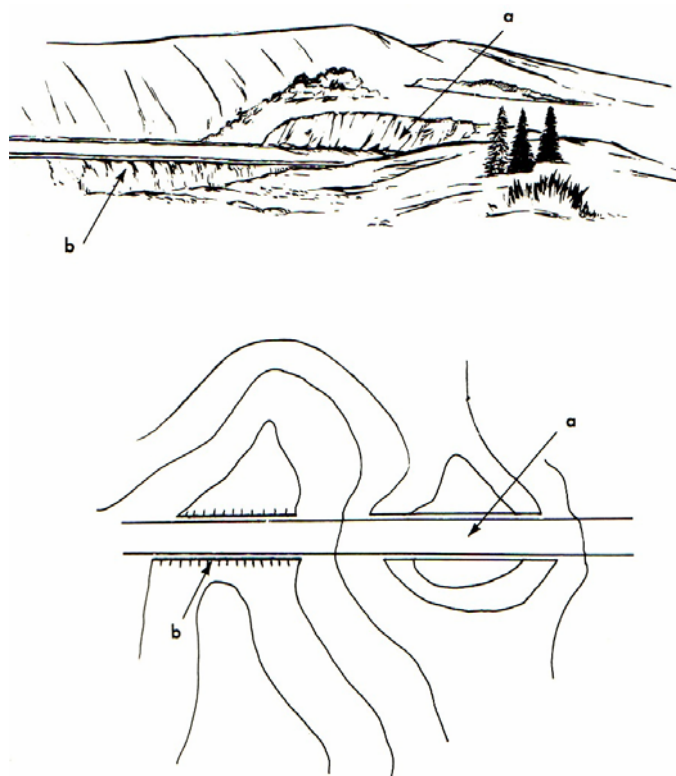


Figura 10.23 a. Corte b. Terraplén.



Figura 10.24 Riscos.

10.4.3 Pendiente

La inclinación que tiene el terreno con respecto al plano horizontal se conoce como pendiente. Se la describe indefinidamente como pronunciada o poco pronunciada. Mas, esto no es suficiente, se debe determinar el grado de inclinación. La inclinación del terreno influye en la rapidez con que se pueda trasladar el equipo o el personal. Por ejemplo, la mayoría del equipo tiene un límite en cuanto al grado de inclinación que puede salvar. Por razones de este índole se requiere que se describan las pendientes de manera exacta. Una pendiente se puede representar de varias maneras, mas siempre será una comparación entre la distancia vertical (DV) y la distancia horizontal (DH). La DV es la diferencia en elevación entre las alturas máximas y mínima de la pendiente y se determina a base de las curvas de nivel. La DH es la distancia lineal entre las alturas máximas y mínima de la pendiente y se la mide de acuerdo con el procedimiento que se le da en el apartado 10.3.3. La DV y la DH se deben siempre expresar en la misma unidad de medida y ambas medidas se deben tomar con suma precisión para obtener así una determinación valida de la pendiente.

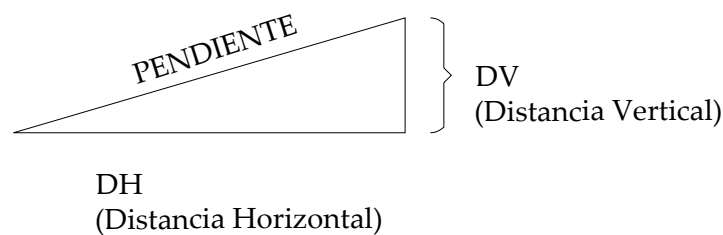


Figura 10.25 Diagrama de una pendiente.

La pendiente se puede expresar en forma de fracción. En este caso la relación entre la distancia horizontal y la distancia vertical se expresa en forma descrita con un numerador de uno (1) (Fig. 10.26).

$$\text{Pendiente} = \frac{DV}{DH} = \frac{150}{3000} = \frac{1}{20}$$

$$DV = B - A = 150 \text{ METROS}$$

$$\frac{150}{3.000} = \frac{1}{20} \text{ o un (1) metro de elevación por cada veinte}$$

(20) metros de distancia horizontal

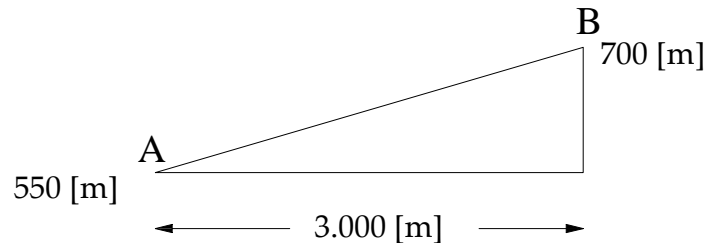


Figura 10.26 Pendiente expresada en forma de fracción.

Una manera corriente de expresar una pendiente es un tanto por ciento (%) que indica la cantidad de unidades verticales de altura por cada cien (100) unidades de distancia horizontal. Ya sea que se use la fracción o el porcentaje para expresar una pendiente, se debe dar los signos mas (+) o menos (-) para indicar el sentido ascendente o descendente de la misma. En la figura 10.17, la pendiente de A hacia B es de aproximadamente +5% mientras que la de B hacia A es de aproximadamente -5%.

$$\% \text{ de pendiente} = \frac{DV}{DH} \times 100$$

La pendiente también se puede expresar en grado como una unidad de medida angular. En este caso el valor de $\frac{DV}{DH}$ se expresa como un decimal, o sea, el valor es la tangente del ángulo de altura. El ángulo de la pendiente se puede encontrar entonces en una tabla de tangentes de funciones trigonométricas o sea le puede calcular multiplicando la fracción por 57,3. Este método es razonablemente exacto para ángulo de pendientes de menos de 20° (véase la figura 10.28).

$$DV = B - A = 150 \text{ METROS}$$

$$DH = 3.000 \text{ METROS}$$

$$\% \text{ de pendiente} = \frac{150 \times 100}{3.000} = \frac{15.000}{3.000} = 5 \text{ por ciento}$$

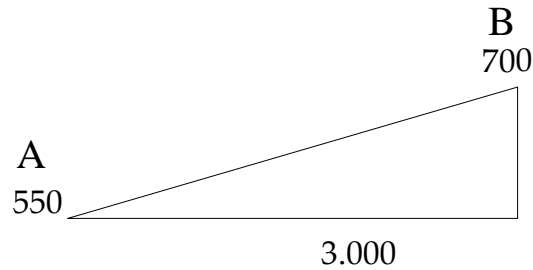


Figura 10.27 Pendiente expresada en un tanto por ciento (%).

$$DV = B - A = 150$$

$$DH = 3.000$$

$$\text{GRADO DE PENDIENTE} = \frac{150 \times 57,3}{3.000}$$

$$\frac{8.595}{3.000} = \text{APROXIMADAMENTE } 3^\circ \text{ DE PENDIENTE}$$

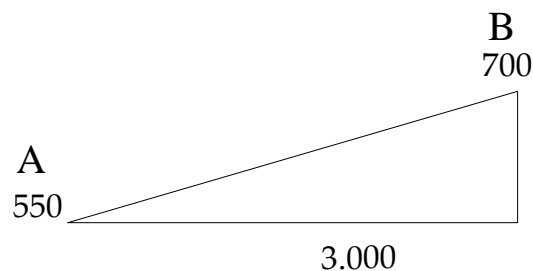


Figura 10.28 Pendiente expresada en grados.

10.4.4 Perfiles

El estudio de las configuraciones del terreno con base en las curvas de nivel resulta adecuado para muchos propósitos, mas cuando se exige exactitud usualmente se precisa un perfil. Un perfil, dentro del alcance y el propósito de este proyecto de

grado, es una vista lateral exagerada de una porción de la superficie de la Tierra a lo largo de una línea entre dos puntos del terreno.

El perfil se puede construir de cualquier mapa acotado, tal como se muestra en la figura 10.29. Para su trazado se debe seguir los siguientes pasos.

- a) Trace una línea (línea de perfil) en el mapa a lo largo de la línea para la que se desea construir el perfil.
- b) Determine el valor de las curvas de nivel más alta y más baja que cruzan o tocan las líneas de perfil. Tome la cota inmediatamente superior al valor más alto y la cota inmediatamente inferior al valor más bajo para abarcar las colinas y los valles.
- c) Dibuje en una hoja de papel en blanco líneas horizontales igualmente espaciadas. Dibuje suficientes líneas de manera que haya una línea para cada valor de curva de nivel determinado de conformidad con lo indicado en el párrafo **b**.
- d) Coloque el papel rayado sobre el mapa con las líneas adyacentes y paralela a la línea de perfil.
- e) Numere en el papel rayado la línea que más próxima esté a la línea de perfil con el valor máximo determinado según lo indicado en el párrafo **b**.
- f) Numere el resto de las líneas en serie hasta llegar al valor mínimo en la línea más apartada de la línea de perfil.

Pasos que se deben seguir:

1. Una los puntos con una línea recta
2. Determine los extremos de las alturas.
3. Dibuje líneas horizontales y numérelas.
4. Trace las líneas perpendiculares.
5. Dibuje el perfil.

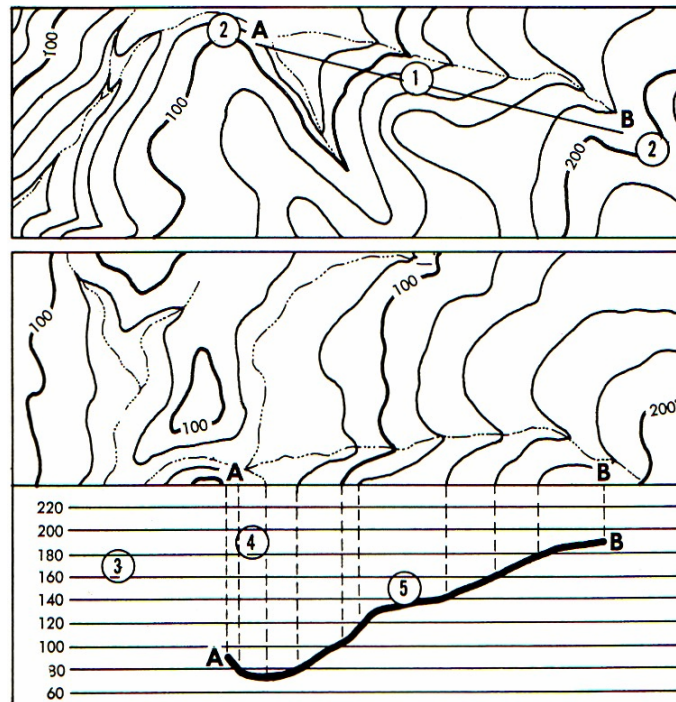


Figura 10.29 Manera de dibujar un perfil.

- g) Baje o trace desde toda curva de nivel que cruce o toque la línea de perfil, perpendiculares que corten las correspondientes rectas paralelas de igual cota. Coloque una contramarca en los puntos de intersección de las perpendiculares con la horizontal.
- h) El punto máximo de la colina y el punto mínimo de los valles se determinan mediante la interpolación. Una vez hecho esto, se baja o se traza una perpendicular hasta sus valores interpolados.
- i) Después de que se hayan trazado todas las perpendiculares en el papel rayado, se unen las contramarcas con una curva natural poco pronunciada. Recordando que las colinas y los valles usualmente tiene una forma redondeada. Los cursos de agua, sin embargo tienden a tener una forma de V pronunciada o de "U".
- j) El perfil que se acaba de dibujar puede ser exagerado. La exageración, la determinaran los espacios entre las líneas que se dibujen, de conformidad con lo

indicado en el párrafo c anterior. De allí que se les pueda variar para ajustarlos a cualquiera citación.

Cuando no haya mucho tiempo o cuando no sea necesario un perfil completo, se puede construir un perfil hecho a la ligera (figura 10.30) que muestre solo las cimas de las colinas y de las serranías y, de deseirlo, de los valles. Este tipo de perfil se construye de la misma manera que un perfil completo.

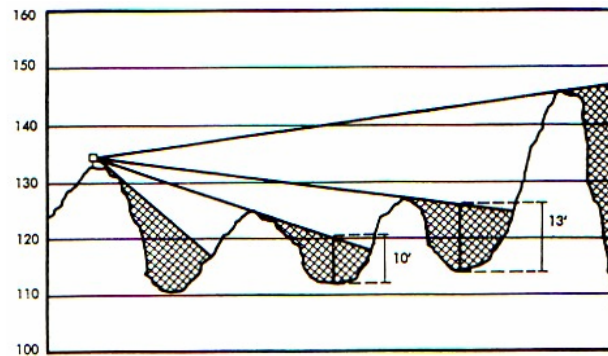


Figura 10.30 Desenfilada determinada mediante un perfil.

A continuación, algunos de los usos prácticos que se le pueden dar a los perfiles:

- La determinación de la visibilidad (desenfilada) (figura 10.31).

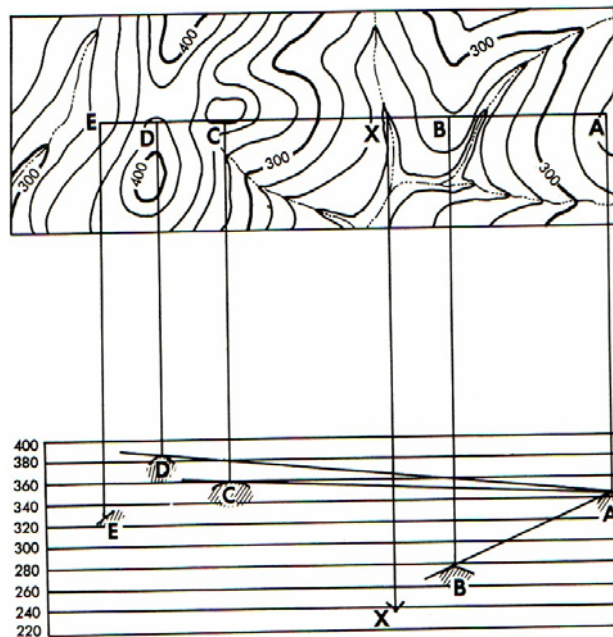


Figura 10.31 manera de dibujar un perfil hecho a la ligera

- La representación grafica de arcos cubiertas (ocultas) (figura 10.32).

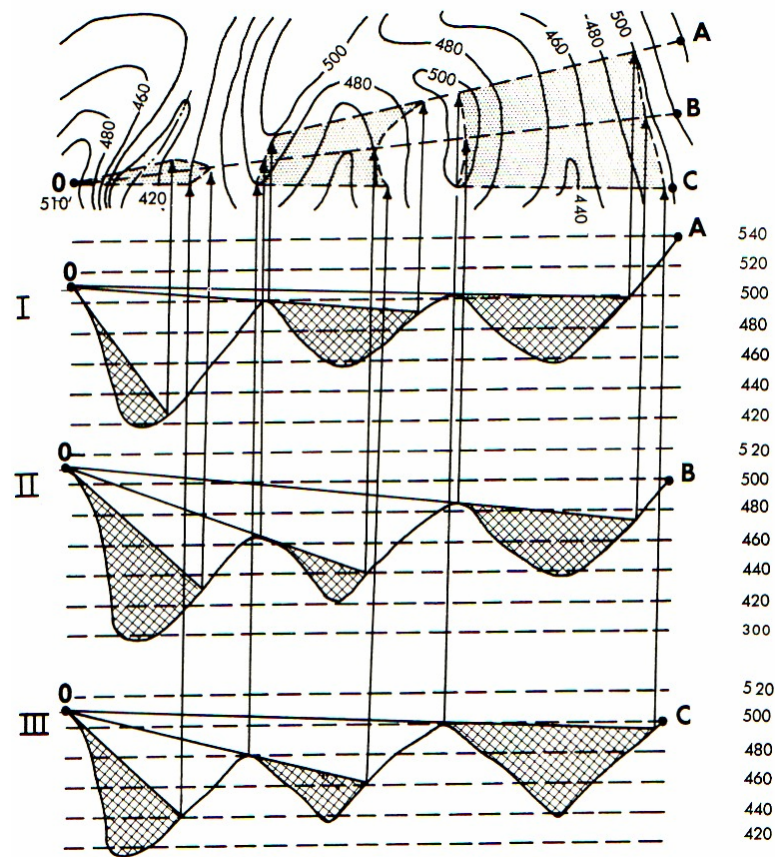


Figura 10.32 Trazado de áreas cubiertas.

- La elaboración de los planes para la construcción de carreteras y de vías férreas.
- La elaboración de plano es para la construcción de oleoductos.
- La elaboración de planes para la remoción de tierra.

BIBLIOGRAFÍA

1. ZABALAGA M., OSCAR: "Apuntes de la materia de Geodesia y Fotogrametría"
2. AYRES F.: "Trigonometría Plana y Esférica", *Edit. San Fernando, Schaum 1980*
3. Mc GRAW HILL: "Problemas de Trigonometría"
4. MARTIN ASIN, FERNANDO: "Geodesia y Cartografía Matemática", *Ed. Paraninfo S.A. 3ª Edición Madrid 1990*
5. ZACATOV, P.S.: "Curso de Geodesia Superior", *Ed. Rubiños – 1860, S. A. Edición Alcalá 1997*
6. MILTON ARANA, JOSÉ: "Geodesia Física – Notas de Aula", *Unesp – Campus de Presidente Prudente, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Departamento de Cartografia, Março 2000*
7. WEIKKO A. HEISMEN Y HELMUT MORITZ: "Geodesia Física", *Ed. W. H. Freeman and company, 1966*
8. MARTINEZ, OJEDA, SÁNCHEZ, REJAS, GARCÍA: "Formulario Técnico de Geodesia y Topografía", *Profesores de Topografía de la ETSI de Caminos, Canales y Puertos e Madrid, Ed. Bellisco Ediciones técnicas y Científicas, 1ª Edición Madrid 2004*
9. NÚÑEZ ALFONSO, VALBUENA DURÁN JOSÉ LUÍS, VELASCO GÓMEZ JESÚS: "GPS, La nueva etapa de la Topografía", *Ed. Ediciones de las Ciencias Sociales S.A. Madrid 1992*
10. FRANCO REY, JORGE: "Nociones de Geodesia. GPS"
11. B. HOFFMAN Y WELLENHOF H.: "Global Positioning System Theory and Practice", *Ed. Springer Verlag Wien New York, 1992*
12. DEAGOSTINI ROUTIN, DANIEL: "Introducción a la Fotogrametría", *Centro Interamericano de Fotointerpretación, Bogota-Colombia 1978*
13. DEAGOSTINI ROUTIN, DANIEL: "Fotografías aéreas y planeación de vuelos", *Centro Interamericano de Fotointerpretación, Bogota-Colombia 1971*

14. PÉREZ ÁLVAREZ, JUAN ANTONIO: "Apuntes de Fotogrametría II", *Universidad de Extremadura – Centro Universitario de Mérida – Ingeniería Técnica en Topografía, Septiembre 2001*
15. PÉREZ ÁLVAREZ, JUAN ANTONIO: "Apuntes de Fotogrametría III", *Universidad de Extremadura – Centro Universitario de Mérida – Ingeniería Técnica en Topografía, Septiembre 2001*
16. FRANCO REY, JORGE: "Nociones de Cartografía"
17. ÁLVAREZ DE ZAYAS, CARLOS M.: "La Escuela en la Vida", *Didáctica General, Quinta Edición, 2002*
18. ÁLVAREZ DE ZAYAS, CARLOS M.: "Fundamentos Teóricos de la Dirección del Proceso de Formación del Profesional de Perfil Amplio", *UMRPSXCh, Sucre, Tercera Edición, 1992*
19. MILTON ARANA, JOSÉ: "Geodesia Física – Notas de Aula", *Unesp – Campus de Presidente Prudente, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Departamento de Cartografia, Março 2000*
20. "Lectura de Mapas – Texto especial del FM 21 – 26 de la Secretaria del Ejercito de los E.E.U.U", *Material traducido al español por la escuela de las Américas de los E.E.U.U. con sede en el fuerte de Gullik, zona del canal de Panama.*
21. <http://www.cartesia.org/articulo222.html>
22. <http://www.gabrielortiz.com/>

ANEXO I

PROBLEMAS RESUELTOS



1.1 CONCEPTOS GENERALES SOBRE GEODESIA

Problema # 1

Calcular el error de cierre del triángulo elipsoidal ABC, cuyos datos de campo han sido los siguientes.

La longitud del lado AB, reducido al elipsoide, es de 39.001,00 [m].

De los datos de campo, se deduce los valores angulares γ , α y β siguientes:

$$\alpha = 36^{\circ} 55' 34'',6$$

$$\beta = 38^{\circ} 53' 37'',2$$

$$\gamma = 104^{\circ} 10' 52'',2$$

El error de cierre de un triángulo geodésico viene dado por la expresión

$$\text{ERROR} = \alpha + \beta + \gamma - 180 - \text{Exceso}$$

Se realizara la sustitución de los valores angulares calculados anteriormente se tiene:

$$\text{ERROR} = 4'' - \text{Exceso}$$

Por lo que calculado el valor esférico, se obtiene la siguiente expresión del valor de cierre que pide el problema.

Cálculo de exceso esférico

Bastara aplicar la expresión (2.1.14) deducida en el capítulo 2, teniendo en cuenta el teorema de Gauss, que permite resolver el triangulo elipsóidico como esférico, sobre la esfera de radio

$$R = \sqrt{N\rho}$$

en la que los valores de N y ρ se calcularan con la latitud media entre las tres dadas en los datos. Aplicando, por tanto, este valor de ϕ y aplicando los parámetros de a y e^2 correspondientes al elipsoide de Hayford, se obtiene:

$$N = 6.387.873,65 \text{ [m]} \quad \rho = 6.363.815,907 \text{ [m]} \quad R = 6.375.833,431 \text{ [m]}$$

Para el cálculo de T, o área del triangulo, se aplicara el *teorema de Legendre*, pudiendo despreciar la corrección de la tercera parte del exceso dada su pequeñez. Por ello, se obtendrá como área del triangulo plano la obtenida con la expresión:

$$T = \frac{1}{2} AC * AB * \text{sen} \alpha$$

que requiere el conocimiento del lado AC y que se calcula sin dificultad con la formula del coseno (Fig. AI.1)

$$\cos AC = \cos (90^\circ - \varphi_C) * \cos (90^\circ - \varphi_A) + \sin (90^\circ - \varphi_C) * \sin (90^\circ - \varphi_A) * \cos \Delta\lambda$$

Sustituyendo los correspondientes valores en ella, se obtiene (después de pasar a medida lineal sobre la esfera)

$$AC = 25.220,754 \text{ [m]}$$

Sustituyendo en la expresión del área se obtiene:

$$T = 295.477.407, \text{ [m}^2\text{]}$$

Y con este valor de T se llega como valor del exceso a;

$$\text{Exceso} = \frac{T}{R^2} * 206.265 = 1''{,}5$$

Y con el error de cierre del triangulo

$$\text{ERROR} = 4'' - 1''{,}5 = 2''{,}5$$

Problema # 2

Se ha observado una figura formada por tres vértices geodésicos A, B, C, cuyas lecturas se adjuntan (grados centesimales) y cuyo lado AB es 33252,35 metros. La latitud media de la zona es de 40°38'. Hallar el error de cierre del triangulo.

Solución:

En primer lugar, se deducirá los valores angulares α , β y γ del triangulo a partir de la lectura, resultado:

$$\alpha = 65,0093$$

$$\beta = 72,1803$$

$$\gamma = 62,8120$$

El error vendrá determinado por:

$$e = \alpha + \beta + \gamma - 200^g - \varepsilon$$

Para determinar el exceso esférico (ε) habrá que calcular el área del triángulo y el radio de la esfera de Gauss.

$$R = \sqrt{N \cdot \rho}$$

Donde

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad \rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

Tomando los valores del elipsoide de Hayford $a = 6378388,000$; $e = 0,081992$, se obtiene:

$$N = 6387499,78 \text{ [m]}; \quad \rho = 636298,491 \text{ [m]}; \quad R = 6375087,079 \text{ [m]}$$

Para calcular el área del triángulo, se puede aplicar la expresión:

$$T = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \text{sen } a$$

Donde será necesario conocer el lado AC del triángulo. Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{AB}{\text{sen } \gamma} = \frac{AC}{\text{sen } \beta} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \text{sen } \beta}{\text{sen } \gamma} = 36116,33 \text{ [m]}$$

resultando con estos datos el área de triángulo.

T = 512036144 [m²]. Con este valor se calcula el exceso esférico:

$$\varepsilon = \frac{T}{R^2} = 1,25988 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

Para pasar este valor a segundo centesimales:

$$\varepsilon^{c^c} = 1,25988 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \frac{200}{\pi} \cdot 10000 = 8^{c^c}$$

Con lo que finalmente,

$$e^{c^c} = a + \beta + \gamma - 200^g - 0,0008^g = 8^{c^c}$$

2.8.- PROBLEMA INVERSO DEL TRANSPORTE DE COODENADAS

Determinación de acimutes directo y reciproco.

Problema # 3

Se quiere determinar las coordenadas aproximadas sobre el elipsoide WGS84 de un punto **B** al cual se ha hecho una observación de distancia reducida y acimut desde otro punto **A** (acimut = 317°43'25", distancia = 27456,5 m). Las coordenadas de A son $\varphi = 38^\circ 55' 00''$, $\lambda = 1^\circ 22' 37''$. Resolver el problema utilizando únicamente la esfera de radio medio.

Datos elipsoide: **a = 6378137, b = 6356752,314.**

Solución:

De una forma estricta, habría que aplicar el problema directo de la geodesia. Aquí se resuelve simplemente resolviendo el triángulo esférico. En primer lugar, es necesario calcular el radio medio de la esfera de Gauss sobre lo que se va a trabajar: $R = \sqrt{N \cdot \rho}$,

siendo:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{y} \quad \rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

donde no se conoce la primera excentricidad del elipsoide, e que es lo primero que hay que calcular, para lo cual.

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

resultando $e^2 = 0,00669438$

Con lo cual ya se calcula N y ρ , resultado:

$$N = 6386578,45 \quad \rho = 6360627,45 \quad R = 6373589,74$$

A continuación se resuelve el triángulo esférico **PAB**, donde se conoce el ángulo en **A** y los lados **PA** y **AB**.

$$A = 360^\circ - 317^\circ 43' 25'' = 42^\circ 16' 35''$$

$$B = 90^\circ - \varphi = 51^\circ 05' 00''$$

ANEXO II

PROBLEMAS RESUELTOS



2.1 CONCEPTOS GENERALES SOBRE GEODESIA

Problema # 1

Calcular el error de cierre del triángulo elipsoidal ABC, cuyos datos de campo han sido los siguientes (Fig. AI.1).

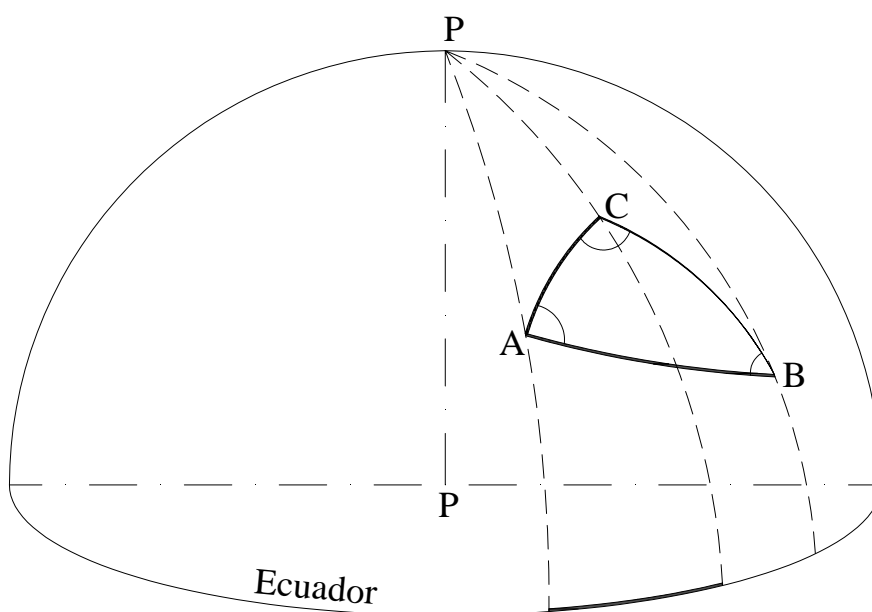


Figura AI.1 Triangulo elipsoidal

Estación en A	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Lectura } a \ C \ 0^{\circ}00'03'',8 \\ \text{Lectura } a \ B \ 36^{\circ}55'38'',4 \end{array} \right.$
Estación en B	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Lectura } a \ A \ 0^{\circ}00'02'',0 \\ \text{Lectura } a \ C \ 38^{\circ}53'39'',2 \end{array} \right.$
Estación en C	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Lectura } a \ B \ 359^{\circ}59'58'',8 \\ \text{Lectura } a \ A \ 104^{\circ}10'51'',0 \end{array} \right.$

Las coordenadas geodésicas de los puntos A, B y C son:

	Longitud	Latitud
A	1° 47' 14,84' W	41° 37' 43',09 N
B	1° 19' 45',88 W	41° 33' 26',98 N
C	1° 30' 48',00 W	41° 43' 33',00 N

La longitud del lado AB, reducido al elipsoide, es de 39.001,00 [m].

De los datos de campo, se deduce los valores angulares γ , α y β siguientes:

$$\alpha = 36^{\circ} 55' 34'',6$$

$$\beta = 38^{\circ} 53' 37'',2$$

$$\gamma = 104^{\circ} 10' 52'',2$$

El error de cierre de un triangulo geodésico viene dado por la expresión

$$\text{ERROR} = \alpha + \beta + \gamma - 180 - \text{Exceso}$$

Se realizara la sustitución de los valores angulares calculados anteriormente se tiene:

$$\text{ERROR} = 4'' - \text{Exceso}$$

Por lo que calculado el valor esférico, se obtiene la siguiente expresión del valor de cierre que pide el problema.

Cálculo de exceso esférico

Bastara aplicar la expresión (2.1.14) deducida en el capítulo 2, teniendo en cuenta el teorema de Gauss, que permite resolver el triangulo elipsóidico como esférico, sobre la esfera de radio

$$R = \sqrt{N\rho}$$

en la que los valores de N y ρ se calcularan con la latitud media entre las tres dadas en los datos. Aplicando, por tanto, este valor de ϕ y aplicando los parámetros de a y e^2 correspondientes al elipsoide de Hayford, se obtiene:

$$N = 6.387.873,65 \text{ [m]} \quad \rho = 6.363.815,907 \text{ [m]} \quad R = 6.375.833,431 \text{ [m]}$$

Para el cálculo de T, o área del triangulo, se aplicara el *teorema de Legendre*, pudiendo despreciar la corrección de la tercera parte del exceso dada su pequeñez. Por ello, se obtendrá como área del triangulo plano la obtenida con la expresión:

$$T = \frac{1}{2} AC * AB * \text{sen} \alpha$$

que requiere el conocimiento del lado AC y que se calcula sin dificultad con la formula del coseno (Fig. AI.1)

$$\cos AC = \cos (90^\circ - \phi_C) * \cos (90^\circ - \phi_A) + \text{sen} (90^\circ - \phi_C) * \text{sen} (90^\circ - \phi_A) * \cos \Delta\lambda$$

Sustituyendo los correspondientes valores en ella, se obtiene (después de pasar a medida lineal sobre la esfera)

$$AC = 25.220,754 \text{ [m]}$$

Sustituyendo en la expresión del área se obtiene:

$$T = 295.477.407, \text{ [m}^2\text{]}$$

Y con este valor de T se llega como valor del exceso a;

$$\text{Exceso} = \frac{T}{R^2} * 206.265 = 1''{,}5$$

Y con el error de cierre del triangulo

$$\text{ERROR} = 4'' - 1''{,}5 = 2''{,}5$$

Exceso Esférico de un Triángulo

Problema # 2

Se ha observado una figura formada por tres vértices geodésicos A, B, C, cuyas lecturas se adjuntan (grados centesimales) y cuyo lado AB es 33252,35 metros. La latitud media de la zona es de 40°38'. Hallar el error de cierre del triangulo.

Estación	Visado	Lectura acimutal
A	B	237,4257
A	C	302,4350
B	A	326,2312
B	C	398,4115
C	A	11,5781
C	B	74,3901

Solución:

En primer lugar, se deducirá los valores angulares α , β y γ del triángulo a partir de la lectura, resultado:

$$\alpha = 65,0093$$

$$\beta = 72,1803$$

$$\gamma = 62,8120$$

El error vendrá determinado por:

$$e = \alpha + \beta + \gamma - 200^g - \varepsilon$$

Para determinar el exceso esférico (ε) habrá que calcular el área del triángulo y el radio de la esfera de Gauss.

$$R = \sqrt{N \cdot \rho}$$

Donde

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad \rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

Tomando los valores del elipsoide de Hayford $a = 6378388,000$; $e = 0,081992$, se obtiene:

$$N = 6387499,78 \text{ [m]}; \quad \rho = 636298,491 \text{ [m]}; \quad R = 6375087,079 \text{ [m]}$$

Para calcular el área del triángulo, se puede aplicar la expresión:

$$T = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin a$$

Donde será necesario conocer el lado AC del triángulo. Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{AB}{\text{sen}\gamma} = \frac{AC}{\text{sen}\beta} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \text{sen}\beta}{\text{sen}\gamma} = 36116,33 [m]$$

resultando con estos datos el área de triángulo.

T = 512036144 [m²]. Con este valor se calcula el exceso esférico:

$$\varepsilon = \frac{T}{R^2} = 1,25988 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

Para pasar este valor a segundo centesimales:

$$\varepsilon^{c^c} = 1,25988 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \frac{200}{\pi} \cdot 10000 = 8^{c^c}$$

Con lo que finalmente,

$$e^{c^c} = \alpha + \beta + \gamma - 200^g - 0,0008^g = 8^{c^c}$$

2.8.- PROBLEMA INVERSO DEL TRANSPORTE DE COODENADAS

Determinación de acimutes directo y reciproco.

Problema # 3

Se quiere determinar las coordenadas aproximadas sobre el elipsoide WGS84 de un punto **B** al cual se ha hecho una observación de distancia reducida y acimut desde

otro punto **A** (acimut = $317^{\circ}43'25''$, distancia = 27456,5 m). Las coordenadas de **A** son $\varphi = 38^{\circ}55'00''$, $\lambda = 1^{\circ}22'37''$. Resolver el problema utilizando únicamente la esfera de radio medio.

Datos elipsoide: **a = 6378137, b = 6356752,314**.

Solución:

De una forma estricta, habría que aplicar el problema directo de la geodesia. Aquí se resuelve simplemente resolviendo el triángulo esférico. En primer lugar, es necesario calcular el radio medio de la esfera de Gauss sobre lo que se va a trabajar: $R = \sqrt{N \cdot \rho}$,

siendo:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{y} \quad \rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

donde no se conoce la primera excentricidad del elipsoide, e que es lo primero que hay que calcular, para lo cual.

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

resultando $e^2 = 0,00669438$

Con lo cual ya se calcula N y ρ , resultado:

$$N = 6386578,45 \quad \rho = 6360627,45 \quad R = 6373589,74$$

A continuación se resuelve el triángulo esférico **PAB**, donde se conoce el ángulo en **A** y los lados **PA** y **AB**.

$$A = 360^\circ - 317^\circ 43' 25'' = 42^\circ 16' 35''$$

$$B = 90^\circ - \varphi = 51^\circ 05' 00''$$

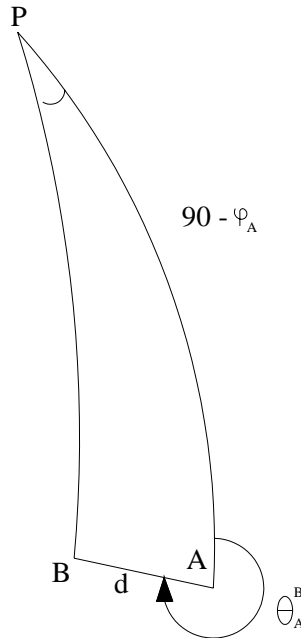


Figura AI.2

Aplicando el teorema del coseno:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

llamando

$$a = PB$$

$$b = 90^\circ - \varphi_A$$

$$c = AB = d$$

se tiene:

$$\cos PB = \sin \varphi_A \cos AB + \cos \varphi_A \sin AB \cos A$$

siendo aquí $AB = \frac{d}{R} = 14'48,56''$

se obtiene $AB = 90^\circ - \varphi_B = 50^\circ 54' 3,25'' \Rightarrow \varphi_B = 39^\circ 05' 56,75''$

$$\frac{\text{sen}\Delta\lambda}{\text{sen}AB} = \frac{\text{sen}A}{\text{sen}(90^\circ - \varphi_B)}$$

Para determinar longitud se puede aplicar la relación de los senos

resultando $\Delta\lambda = 0^\circ 12' 50,23''$

con lo que $\lambda_B = \lambda_A - \Delta\lambda = 1^\circ 9' 46,77''$

Problema # 4

Calcular, con los datos anteriores, las coordenadas del punto B utilizando la formula aproximada del problema directo de la geodesia. ¿Cuál es la diferencia entre las coordenadas resultantes?

Solución:

En este caso, si se utilizan una de las numerosas formulas simplificadas del problema directo de la geodesia:

$$p = \frac{D^2 \cdot \text{sen}A \cdot \cos A}{2 \cdot N_X \cdot \rho_X} \quad q = p \cdot \tan A \cdot \tan \varphi_X$$

$$\Delta\varphi = \frac{D \cdot \cos\left(A - \frac{2}{3}p\right)}{\rho_Y} - q$$

$$\Delta\lambda = \frac{D \cdot \text{sen}\left(A - \frac{1}{3}p\right)}{N_X \cdot \cos\left(\varphi_2 + \frac{1}{3}q\right)}$$

donde x se refiere a $\varphi_x = \varphi_1 + \frac{D \cdot \cos A}{\rho}$

y se refiere $\varphi_y = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_x)$

Se empieza calculando los radios principales de curvatura de la elipse meridiana para esta latitud (38°55') con los parámetros del elipsoide WGS84:

$$N = 6386578,448 \quad \rho = 6360627,448$$

Seguidamente se calcula la latitud aproximada del punto B, para el termino X, resultando $\varphi_x : 39^\circ 0' 29,4''$, con lo cual se calculan nuevamente los radios de curvatura para esa latitud nuevamente los radios de curvatura para esas latitud, resultando:

$$N_x = 6386645,33$$

$$\rho_x = 6360827,29$$

$$\rho_y = 6360727,33$$

con estos valores, los términos:

$$p = -0,952584''$$

$$q = 0,703820''$$

y finalmente, se calcula los incrementos correspondiente, de tal forma que:

$$\varphi_B = 38^\circ 55' 00'' + 0^\circ 10' 58,0786'' = 39^\circ 05' 58,0796''$$

$$\lambda_B = 1^\circ 22' 37'' + (-0^\circ 12' 48,6563'') = 1^\circ 9' 48,3437''$$

Sin embargo, estos valores no son exactos, ya que haciendo los cálculos de manera rigurosa, la solución es $\varphi_B = 39^\circ 5' 58,0801''$ (diferencia de 15 mm).

Problema # 5

Con las coordenadas verdaderas de los puntos A y B del problema anterior $A(\varphi = 38^{\circ}55'00'', \lambda = 1^{\circ}22'37'')$ y $B(\varphi = 39^{\circ}05'58,0801'', \lambda = 1^{\circ}9'48,3424'')$, calcular la distancia aproximada entre ambos puntos sin aplicación del problema inverso de la geodesia.

Solución:

Como se dice el enunciado, la solución sin aplicar estrictamente el problema inverso de la geodesia, ha de ser aproximada. La solución mas sencilla pasa por calcular el arco de meridiano:

$$m = N \cdot \cos \varphi \cdot \Delta \lambda$$

y el arco de paralelo:

$$p = \rho \cdot \Delta \varphi$$

Cogiendo la latitud medida para calcular los radios de curvatura de la elipse meridiana ($\varphi_M = 39^{\circ}0'29,05''$):

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = 6386611,88$$

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} = 6360727,35$$

resulta:

$$\Delta \lambda (rad) = 0,003726557206 \Rightarrow m = 18494,03m$$

$$\Delta \varphi (rad) = 0,003190462358 \Rightarrow p = 20293,66m$$

Y ahora ya:

$$D = \sqrt{m^2 + p^2} = 27456,54m$$

Resultado sorprendentemente cercano (4 cm.) al valor real dada la considerable distancia.

Si se aplica la formula aproximada para el cálculo de la distancia:

$$L = \frac{\rho_m \cdot \Delta\varphi}{\cos\left(A + \frac{1}{2}\Delta A\right)}$$

$$\rho_m = 6360727,33m$$

$$\Delta A = \Delta\lambda \operatorname{sen}\varphi_m = 0,134393333^\circ = 0^\circ 8' 3,82''$$

resultado

$$L = 27456,54m$$

Es decir, el mismo resultado que por el procedimiento de calcular el arco de meridiano y el de paralelo.

2.5 SISTEMAS DE COORDENADAS EMPLEADOS EN GEODESIA SUPERIOR.

Paso de coordenadas geodésicas o geocéntricas.

Problema # 6

Obtener las coordenadas cartesianas geométricas de un punto de coordenadas geográficas en WGS84: $\varphi = 37^\circ 45' 8762'' = -3^\circ 22' 43,8234''$, $h = 734,23$ m (altura elipsoidal).

Solución:

Aplicando directamente las ecuaciones de transformación.

$$X_p = (N + h) \cos \varphi \cdot \cos \lambda$$

$$Y_p = (N + h) \cos \varphi \cdot \operatorname{sen} \lambda$$

$$Z_p = (N(1 - e^2) + h) \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

con los siguientes datos:

$$N = 6386156,651$$

$$e = 0,0818191908426$$

Se obtiene:

$$X = 5040741,764$$

$$Y = -297607,093$$

$$Z = 3884669,740$$

Hay que tener en cuenta que la coordenada Z es muy sensible al número de decimales que se tengan en cuenta en e^2 , puesto que va multiplicando por una cantidad muy grande (N).

Paso de coordenadas geocéntricas o geodésicas.

Problema # 7

Obtener las coordenadas cartesianas geocéntricas del problema anterior, calcular sus coordenadas geográficas, para comprobar el resultado.

Solución:

En primer lugar, se va a utilizar la formulas aproximadas dadas sin realizar interacciones:

$$\varphi = \arctan \frac{Z + e'^2 b \sin^3 \theta}{p - e^2 a \cos^3 \theta}; \quad \lambda = \arctan \frac{Y}{X}; \quad h = \frac{P}{\cos \varphi} - N$$

con:

$$\theta = \arctan \frac{Za}{pb} \quad \text{y} \quad p = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

En este caso, los parámetros de elipsoide (WGS84) que se necesitan son:

$$a = 6378137$$

$$b = 6356752,314$$

$$e = 0,0818191908426$$

$$e' = 0,0820944379497$$

Se calculan p y θ :

$$P = 5049519,533$$

$$\theta = 37,66464989^\circ$$

resultando efectivamente:

$$\varphi = 37^\circ 45' 27,88''$$

$$\lambda = -3^\circ 22' 43,82''$$

$$h = 734,23m$$

Por otro lado, sin esta formulas, se podría haber utilizado las obtenidas a partir del proceso directo, pero iterando en la solución.

$$h = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \varphi} - N$$

$$\varphi = \arctan \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \cdot \left(\frac{N + h}{N \cdot (1 - e^2) + h} \right)$$

$$\lambda = \arctan \frac{Y}{X}$$

En primer lugar, se hace $h = 0$ y se calcula un φ aproximado:

$$\varphi = \arctan \frac{Z}{(1 - e^2) \sqrt{X^2 + Y^2}}$$

resultando $\varphi' = 37,75776487 = 37^\circ 45' 27,9535''$, que como se puede ver, es un valor bastante cercano al buscado (<2 m de diferencia) con este valor se calcula N' como:

$$N' = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}} = 6386156,658$$

Con este valor de N' se calcula una h' :

$$h' = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \varphi'} - N' = 736,078$$

Y con este ya se calcula un nuevo valor de φ'' , utilizando todos los términos:

$$\begin{aligned}\varphi'' &= \arctan \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \cdot \left(\frac{N' + H'}{N'(1 - e^2) + h} \right) = 37,75774332'' \\ &= 37^\circ 45' 27,8759''\end{aligned}$$

$$N'' = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi''}} = 6386156,651$$

$$h'' = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \varphi''} - N'' = 734,223$$

Con esta **h**, mas aproximada ya, se volvería a calcular φ , que con mas decimales en su soluciones haría ya converger a h a su valor exacto.

$$\begin{aligned}\varphi''' &= \arctan \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \cdot \left(\frac{N'' + h}{N''(1 - e^2) + h} \right) = 37,75774339^\circ \\ &= 37^\circ 45' 27,8762''\end{aligned}$$

Calculando finalmente la h definitiva:

$$h''' = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \varphi'''} - N''' = 734,23m$$

Para λ el resultado sale directamente de:

$$\lambda = \arctan \frac{X}{Y} = -3,378839836 = 3^\circ 22' 43,8234''$$

Es evidente que al realizar estos cálculos con un ordenador, es necesario establecer para toda las variables la máxima dimensión en cifras decimales (float, double.....)

ANEXO

PROBLEMAS RESUELTOS



CORRECCIONES PARA REDUCIR UNA BASE AL ELIPSOIDE

Paso de la cuerda al arco

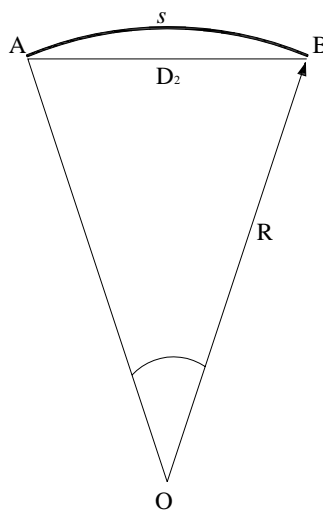


Figura 2.10 Paso de la cuerda al arco

Se obtiene con la figura 2.10

$$\widehat{AB} = s = R \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{s}{R} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2R}$$

y

$$\overline{AB} = 2R \sin \frac{\alpha}{2} \cong 2R \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{48} \right)$$

de donde

$$D_2 = \overline{AB} = 2R \left(\frac{s}{2R} - \frac{s^3}{48R^3} \right) = s - \frac{s^3}{24R^2}$$

luego de esta última corrección será

$$\overline{AB} - s = +C_c = + \frac{s^3}{24R^2} \cong \frac{D_2^3}{24R^2} \quad [2.2.5]$$

Esta corrección es despreciable en lados de tercer orden. No así en primero o segundo orden.

Corrección Especial

Es importante hacer una consideración respecto a las dos correcciones 3) y 4), es decir, las que conducen la medida al horizonte de la altitud media y al geoide o elipsoide (según los casos).

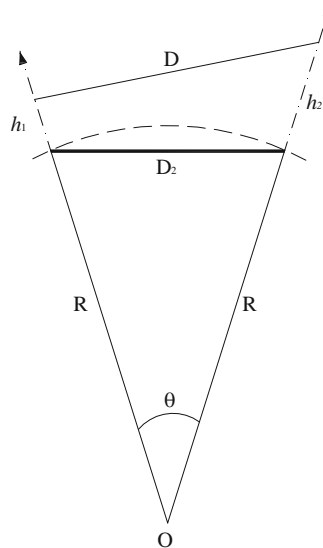


Figura 2.11 Corrección especial

Ambas correcciones unidas se obtiene con la siguiente fórmula

$$D_2 = \left[\frac{D^2 - \Delta h^2}{\left(1 + \frac{h_1}{R}\right) \left(1 + \frac{h_2}{R}\right)} \right]^{1/2} \quad [2.2.6]$$

cuya deducción es de gran sencillez y que no utiliza desarrollos en serie ni implica la perdida de precisión derivada de la supresión de términos. En efecto, de la figura 2.11 se obtiene, aplicando la fórmula del coseno,

$$D^2 = (R + h_1)^2 + (R + h_2)^2 - 2 (R + h_1) (R + h_2) \cos \theta \quad [2.2.7]$$

de donde despejando

$$-\cos \theta = \frac{D^2 - (R + h_1)^2 - (R + h_2)^2}{2(R + h_1)(R + h_2)}$$

Por otra parte

$$\frac{D_2}{2} = R \sin \frac{\theta}{2}$$

y operando

$$\frac{D_2^2}{4} = R^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = R^2 \frac{1}{2} (1 - \cos \theta)$$

se llega a

$$D_2^2 = 2R^2 (1 - \cos \theta)$$

y

$$D_2^2 = 2R^2 \left[1 + \frac{D^2 - (R + h_1)^2 - (R + h_2)^2}{2(R + h_1)(R + h_2)} \right] = 2R^2 \frac{D^2 - [(R + h_1)^2 + (R + h_2)^2 - 2(R + h_1)(R + h_2)]}{2R \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) R \left(1 + \frac{h_2}{R} \right)}$$

de donde

$$D_2^2 = \frac{D^2 - [(R + h_1) - (R + h_2)]^2}{\left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \left(1 + \frac{h_2}{R} \right)} = \frac{D^2 - \Delta h^2}{\left(1 + \frac{h_1}{R} \right) \left(1 + \frac{h_2}{R} \right)}$$

Problema # 8

Se supone una distancia medida de 5.000 [m] entre dos vértices de tercer orden **A** y **B**. La distancia cenital de la visual **AB** medida en **A** es 88° 18' 08". Calcular las sucesivas correcciones aplicando las fórmulas anteriores para pasarla al elipsoide de

la figura. Prescindiendo de los efectos de refracción, suponiendo que la visual AB fuera en la línea recta entre los dos vértices.

Solución

Calculando el ángulo central θ que forman las dos normales en **A** y **B** (con el supuesto de Tierra esférica de 6.370 [Km.] de radio). Se obtendría $\theta = 2' 42''$.

Se puede pasar a la relación de senos en el triángulo ABB_1 , en el cual el ángulo \hat{B}_1 , tiene por valor $90^\circ 01' 21''$. Con este triángulo se obtiene, estableciendo la relación siguiente,

$$\frac{D_1'}{\sin 88^\circ 15' 26''} = \frac{5.000}{\sin 90^\circ 01' 21''} = \frac{\Delta h}{\sin 1^\circ 43' 13''}$$

tanto la distancia horizontal del punto **A** $D_1' = 4997.6387$ [m]

como el desnivel $\Delta h = 150,10$ [m]

Luego suponiendo que la altitud de **A** es de 200 [m], la de **B** será de 350,1 [m]. Insistimos en que el desnivel estaría afectado de refracción y esfericidad.

Siguiendo con las correcciones analizadas a lo largo del capítulo, se obtendría la distancia reducida al horizonte de la altitud media a partir de la corrección correspondiente

$$C_H = -\frac{\Delta h^2}{2D} - \frac{\Delta h^4}{8D^3} = 2,253$$
 [m]

Con lo que quedaría como valor de

$$D_1 = 4997,747$$
 [m]

A continuación se tendría como corrección al nivel del mar (tomando como valor $R_z = R$) la siguiente expresión

$$C_M = -D_1 \frac{h_m}{R_z} + D_1 \frac{h_m^2}{R_z^2} = 0,216 \text{ [m]}$$

y con ella la distancia

$$D_2 = 4997,531 \text{ [m]}$$

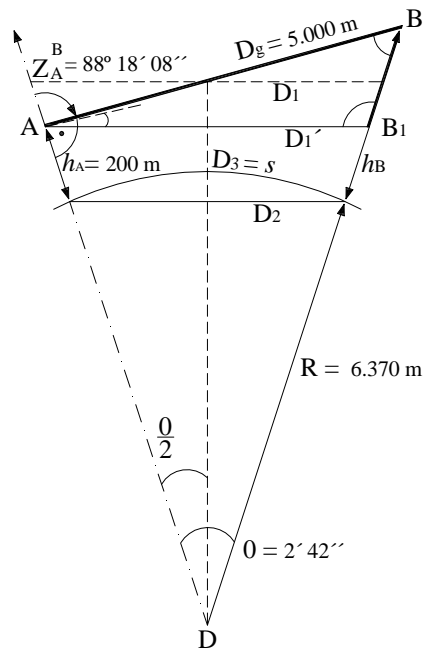


Figura 2.12 Ejemplo

Aplicando la fórmula que pasa directamente a la cuerda (corrección especial), hubiera dado el mismo valor de D_2 , es decir

$$D_2 = \left[\frac{D^2 - \Delta h^2}{\left(1 + \frac{h_A}{R}\right) \left(1 + \frac{h_B}{R}\right)} \right]^{1/2} = 4997,531 \text{ [m]}$$

Finalmente, la reducción de la cuerda al arco daría una corrección

$$C_c = + \frac{s^3}{24R^2} = 0,0001 \text{ [m]}$$

con la que se llega a que el arco sobre el elipsoide es el mismo obtenido anteriormente (ya que esta corrección para esta distancia es despreciable).

Problema # 9

Entre dos puntos A y B de altitudes aproximadas $h_A = 557\text{m}$ y $h_B = 945\text{ m}$ se ha medido la distancia geométrica de 6545,53 m. Obtener la distancia reducida al elipsoide para el calculo de coordenadas. (φ media de la zona, $39^\circ 40'$).

Solución:

En primer lugar, se puede calcular el radio medio de la esfera para esa zona de latitud (datos elipsoide Internacional), sin tener en cuenta la dirección de la sección normal:

$$R = \sqrt{N \cdot \rho}$$

Resultado:

$$N = 6387141,752 \text{ m}; \rho = 6361628,613 \text{ m}; R = 6374372,418\text{m}$$

Con **R**, se calcula la reducción conjunta de paso al horizonte medio y a la cuerda, con:

$$D_2 = \left[\frac{D^2 - \Delta h^2}{\left(1 + \frac{h_1}{R}\right) \cdot \left(1 + \frac{h_2}{R}\right)} \right]^{1/2}$$

resultado **$D_2 = 6533,25 \text{ m}$** . Como se puede suponer, la mayor parte de esta corrección conjunta corresponde a la diferencia de altitud entre ambos puntos, siendo tan solo 2 cm. de corrección la correspondientes al paso a la cuerda.

Finalmente, se lleva a cabo el paso de la cuerda al arco, con:

$$D_3 = D_2 + \frac{D_2^3}{24R^2}$$

resultado $D_3 = 6533,25$ m exactamente la misma que D_2 , ya que para distancia pequeñas apenas tiene influencia (en una distancia de 10 Km. la corrección para el paso de la cuerda al arco es de 1 mm).

ANEXO III

PROBLEMAS RESUELTOS



4.4 TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS.

Transformación de coordenadas horizontales en ecuatoriales horarias.

Problema # 1

En un observatorio astronómico de coordenadas ($\lambda = -3^\circ 47' 12,98''$, $\varphi = 38^\circ 37' 22,34''$) se midió el acimut de una estrella en un determinado instante, obteniéndose $A = 123^\circ 38' 23''$ y una distancia cenital $z = 29^\circ 17' 29''$. Calcular las coordenadas ecuatoriales horarias de dicha estrella en el momento de la observación.

Solución

Aplicando las dos formulas de paso de coordenadas horizontales a ecuatoriales horarias:

$$\text{sen } \delta = \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } h - \cos \varphi \cdot \cos h \cdot \cos A$$

$$\tan H = \frac{\cosh \cdot \text{sen} A}{\text{sen} h \cdot \cos \varphi + \cosh \cdot \text{sen} \varphi \cdot \cos A}$$

donde $h = 90^\circ - z = 90^\circ - 29^\circ 17' 29'' = 60^\circ 42' 31''$

$$\delta = \arcsin (\sin 38^\circ 37' 22,34'' \cdot \sin 60^\circ 42' 31'' - \cos 38^\circ 37' 22,34'' \cdot \cos 60^\circ 42' 31'' \cdot \cos 123^\circ 38' 23'') = 49^\circ 7' 28''$$

Y por otro lado, resolviendo, $H = 38^\circ 32' 47''$ o si se quiere expresar en unidades de tiempo, se divide por 15 ($360^\circ/24^h = 15$), con lo que $H = 2^h 34^m 11^s$.

Transformación de coordenadas ecuatoriales horaria en horizontales.

Problema # 2

Calcular las coordenadas horizontales en Valencia ($\varphi = 39^\circ 28' 31''$) de una estrella en el instante en que sus coordenadas horarias son $H = 13^h 27^m 14.97^s$ y $\delta = 16^\circ 27' 41,74''$.

Solución:

Aplicando las formulas de Bessel para paso de coordenadas ecuatoriales horarias a horizontales:

$$\sin h = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos H$$

$$\tan A = \frac{\cos \delta \cdot \sin H}{\sin \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos H - \cos \varphi \cdot \sin \delta}$$

En primer lugar, es necesario tener H en unidades angulares (multiplicando por 15) para introducir en la formula, obteniendo:

$$H = 201^\circ 48' 44,55''$$

$$\begin{aligned} h &= \arcsen(\sen 39^{\circ} 28' 31'' \sen 16^{\circ} 27' 41,74'' + \dots + \cos 39^{\circ} 28' 31'' \cos 16^{\circ} 27' 41,74'' \cos 201^{\circ} 48' \\ &44,55'') = \\ &= -30^{\circ} 28' 16,9'' \end{aligned}$$

Es decir, la estrella esta por debajo del horizonte del lugar, y por tanto, no se puede observar.

De la misma forma sustituyendo valores en la segundo formula, resulta $A = 24^{\circ} 25' 16,26''$. Pero $H > 180^{\circ}$, al acimut resultante, obteniendo finalmente $A = 204^{\circ} 25' 16,26''$.

Transformación de coordenadas ecuatoriales horarias en coordenadas ecuatoriales absolutas y viceversa.

Problema # 3

Se desea observar con un teodolito en un lugar de coordenadas ($\lambda = -2^{\circ} 22' 55''$, $\varphi = 38^{\circ} 57' 12''$) una estrella de coordenadas ecuatoriales absolutas ($\alpha = 16^h 22^m 55.3^s$, $\delta = 37^{\circ} 23' 58.3''$). Teniendo el instrumento perfectamente orientado en la dirección del norte geográfico, ¿qué lecturas acimutal y cenital habrá que poner en el mismo para observar la estrella a las $14^h 15^m$ de tiempo sidéreo?

Solución:

En primer lugar, se calcula la coordenada ecuatorial horaria H:

$$H = \theta - \alpha = 14^h 15^m - 16^h 22^m 55,3^s = -2^h 7^m 55.3^s$$

Transformando en grados, minutos y segundo se tiene $H = -31^{\circ} 58' 49,5''$ y al ser negativo, se le suma 360° , obteniendo finalmente $H = 328^{\circ} 1' 10,5''$.

A partir de aquí, el proceso es el mismo que en problema anterior:

$$\text{sen } h = \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos H$$

$$\tan A = \frac{\cos \delta \cdot \text{sen} H}{\text{sen} \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos H - \cos \varphi \cdot \text{sen} \delta}$$

$$h = \text{arc sen} (\text{sen} 38^{\circ} 57' 12'' \cdot \text{sen } 37^{\circ} 23' 58,3'' + \cos 38^{\circ} 57' 12'' \cdot \cos 37^{\circ} 23' 5,3'' \cdot \cos 328^{\circ} 1' 10,5'') = 64^{\circ} 56' 27''$$

La lectura cenital que habrá que poner será $z = 90 - h = 25^{\circ} 3' 33''$

Resolviendo la segunda ecuación, $A = 83^{\circ} 23' 59''$.

Pero con $180^{\circ} < H < 360^{\circ}$, entonces $180^{\circ} < A < 360^{\circ}$, por lo que $A = 263^{\circ} 23' 59''$. Como el acimut astronómico empieza a contar desde el sur y se tiene orientado el instrumento en la dirección del norte geográfico, la lectura acimutal que habrá que poner en el instrumento para observar la estrella será:

$$L = A - 180^{\circ} = 83^{\circ} 23' 59''$$

Problema # 4

Se desean saber las coordenadas (ecuatoriales absolutas) de una estrella que se a observado en un lugar de latitud $\varphi = 41^{\circ} 13' 51''$ y que las 22^h de tiempo sidéreo tenía un acimut astronómico de $214^{\circ} 22' 38''$ y una distancia cenital de $9^{\circ} 56' 38''$.

Solución:

En primer lugar, se calculan las coordenadas ecuatoriales horarias de la estrella a partir de:

$$\text{Sen } \delta = \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } h - \cos \varphi \cdot \cos h \cdot \cos A$$

$$\tan H = \frac{\cosh \cdot \text{sen} A}{\text{sen} h \cdot \cos \varphi + \cosh \cdot \text{sen} \varphi \cdot \cos A}$$

$$\text{con } h = 90^\circ - z = 90^\circ - 9^\circ 56' 38'' = 80^\circ 3' 22''.$$

$$\delta = \text{arc sen}(\text{sen } 41^\circ 13' 51'' \cdot \text{sen } 80^\circ 3' 22'' - \cos 41^\circ 13' 51'' \cdot \cos 80^\circ 3' 22'' \cdot \cos 214^\circ 22' 38'') = 49^\circ 8' 45,4''$$

Sustrayendo valores en formula de H, resulta:

$$H = 351^\circ 25' 39,6''$$

La hora sidérea (22^h) expresada en valores de arco será $\theta = 330^\circ$

Teniendo en cuenta **que** $\alpha = \theta - H = 330^\circ - 351^\circ 25' 39,6'' = -21^\circ 25' 39,6''$, con lo que finalmente, sumando 360° , $\alpha = 338^\circ 34' 20,4''$.

Problema # 5

Calcular la latitud de un lugar en el que se han hecho en un mismo día dos observaciones al Sol, obteniendo acimut y altura. ($A_1 = 23^\circ 34'$, $h_1 = 48^\circ 33'$, $A_2 = 63^\circ 56'$, $h_2 = 34^\circ 27'$).

Solución:

Aplicando la primera formula de Bessel al triangulo esférico de posición PZSOL en ambas posiciones se tiene:

$$\text{sen } \delta = \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } h_1 - \cos \varphi \cdot \cos h_1 \cdot \cos A_1$$

$$\text{sen } \delta = \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } h_2 - \cos \varphi \cdot \cos h_2 \cdot \cos A_2$$

Igualando ambas expresiones desaparece δ :

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} h_1 - \cos \varphi \cdot \cos h_1 \cdot \cos A_1 &= \\ &= \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} h_2 - \cos \varphi \cdot \cos h_2 \cdot \cos A_2\end{aligned}$$

y sacando factor común:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \varphi \cdot (\operatorname{sen} h_1 - \operatorname{sen} h_2) &= \\ &= \cos \varphi \cdot (\cos h_1 \cdot \cos A_1 - \cos h_2 \cdot \cos A_2)\end{aligned}$$

dividiendo por $\cos \varphi$ y despejando:

$$\tan \varphi = \frac{\cos h_1 \cdot \cos A_1 - \cos h_2 \cdot \cos A_2}{\operatorname{sen} h_1 - \operatorname{sen} h_2} \Rightarrow \varphi = 53^{\circ} 2' 55''$$

4.5 POSICIONES PARTICULARES DE LA ESTRELLA.

Orto y ocaso.

Problema # 6

Calcular el ángulo horario de una estrella cuya declinación es $37^{\circ} 44' 30''$ cuando cruza el primer vertical oeste en un lugar de latitud $48^{\circ} 31' 27''$. ¿Tiene orto y ocaso dicha estrella en el lugar de observación?

Solución:

Si la estrella esta cruzado el primer vertical oeste, el acimut en este instante es 90° , por lo que el triangulo de posición es rectángulo en Z.

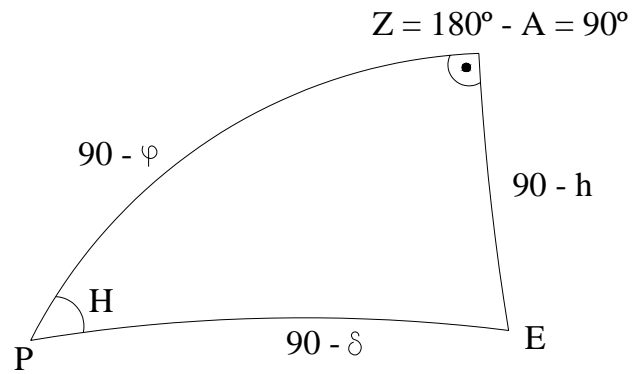


Figura AII.1

En el caso de triángulo rectángulo si se construye el pentágono de Neper:

$$90 - (90 - \varphi) = 90 - (90 - h) = h$$

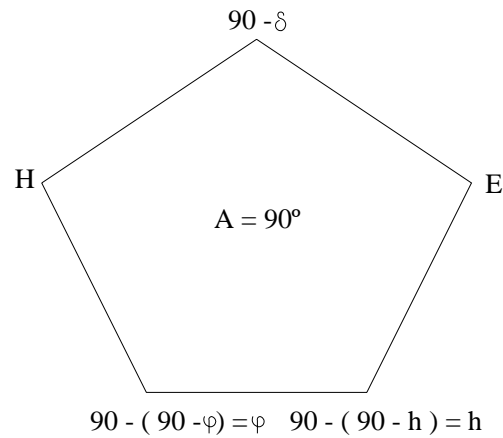


Figura A.II.2

donde se deduce fácilmente que:

$$\cos H = \cotan \varphi \cdot \cotan (90^\circ - \delta)$$

$$\cos H = \frac{\tan \delta}{\tan \varphi} = \frac{\tan 37^\circ 44' 30''}{\tan 48^\circ 31' 27''} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = 46^\circ 49' 27''$$

Por otro lado, como se puede ver en la figura, para que una estrella tenga orto y ocaso se ha de cumplir que $PE > \varphi \Rightarrow 90^\circ - \delta > \varphi$.

En el caso del problema, $90^\circ - \delta = 52^\circ 15'30'' > \varphi \Rightarrow$ tiene orto y ocaso en ese lugar.

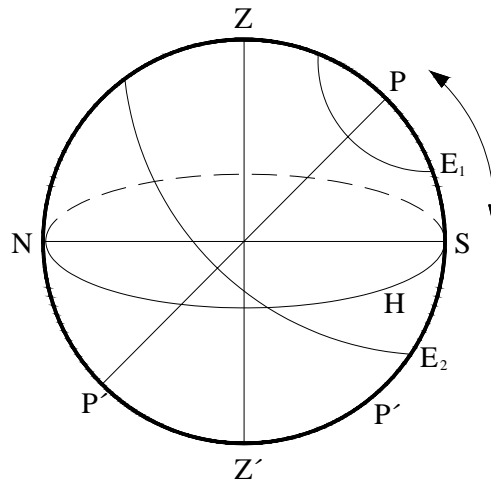


Figura A.II.3

En la figura A.II.3, E_1 culmina por encima del horizonte, sería una estrella circumpolar y E_2 estaría por debajo del horizonte, tendría orto y ocaso.

Problema # 7

Hallar las horas sidéreas de salida y máxima digresión de una estrella de coordenadas ($\alpha = 8^h 43^m 27^s$, $\delta = 48^\circ 23'42''$) en lugar de latitud $\varphi = 35^\circ 23' 56''$.

Solución

Para hallar la hora sidérea de salida, en primer lugar se ha de calcular el ángulo horario H en el instante orto. Si se construye el ángulo de posición PZE, en el

instante del orto, $h = 0^\circ$, con lo que el lado $ZE = 90^\circ$. Se trata pues, de un triángulo rectilátero. El triángulo de posición y pentágono de Neper correspondiente será:

Con lo que se deduce:

$$\cos (180^\circ - H) = \cotan (90^\circ - \varphi) \cdot \cotan (90^\circ - \delta) \Rightarrow$$

$$\cos H = - \tan \varphi \cdot \tan \delta$$

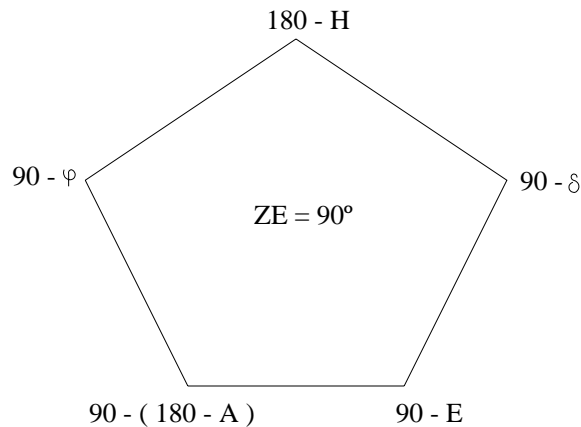


Figura A.II.4

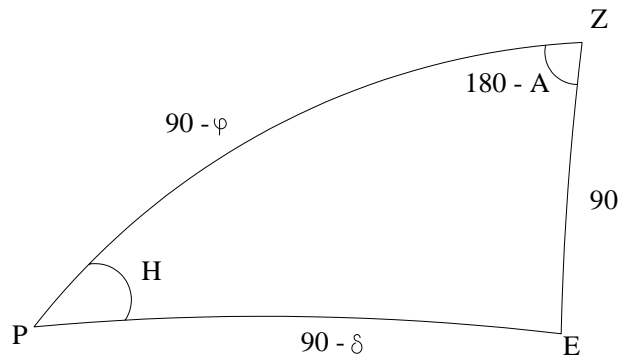


Figura A.II.5

Sustituyendo valores y resolviendo:

$$H = 143^\circ 9' 20'' = 9^h 32^m 37^s$$

Sin embargo, el ángulo horario del orto tiene que estar entre 180° y 360° , con lo que realmente, $H_{orto} = 360 - H = 14^h 27^m 23^s$.

$$\text{Como } \theta = H + \alpha \Rightarrow \theta = 14^h 27^m 23^s + 8^h 43^m 27^s = 23^h 10^m 50^s.$$

Para el caso del calculo del ángulo horario de la máxima digresión, en el triangulo de la posición PZE, el ángulo en E es 90° , con lo que construyendo el pentágono de Neper correspondiente, siendo

$$a = 90^\circ - \varphi$$

$$A = 90^\circ$$

$$b = 90^\circ - \delta$$

$$B = 180^\circ - A$$

$$c = 90^\circ - h$$

$$C = H$$

se deduce que:

$$\cos H = \cotan (90^\circ - \varphi) \cdot \cotan \delta \Rightarrow \cos H = \frac{\tan \varphi}{\tan \delta}$$

$$H = 50^\circ 52' 23'' = 3^h 23^m 30^s$$

Existirán dos momentos de máximo digresión (oriental y occidental). Como son dos posiciones correspondientes, el ángulo horario de la otra vendrá dado por $360^\circ - H$ y las horas sidéreas correspondientes serán:

$$\theta = \alpha + H$$

$$\theta = \alpha + 360^\circ - H$$

o lo que es lo mismo:

$$\theta = \alpha \pm H$$

sumando se obtiene la máxima digresión occidental y restando, la máxima digresión oriental, por lo que:

$$\theta_1 = \alpha + H = 12^h 6^m 57^s$$

$$\theta^2 = \alpha - H = 5^h 19^m 57^s$$

Problema # 8

Calcular en Madrid ($\varphi = 40^\circ 24'$) las horas sidéreas de salida y puesta del Sol en los solsticios.

Solución:

Se trata de un problema de orto y ocaso en el que el astro, que es el Sol tiene coordenadas ecuatoriales absolutas (α, δ) conocidas, ya que, observado la figura, se ve que $\alpha = 6^h$ y $\delta = \varepsilon = 23^\circ 26'$ (oblicuidad de la eclíptica) en el solsticio de verano y $\alpha = 18^h$ y $\delta = -\varepsilon = -23^\circ 26'$ en el solsticio de invierno.

Procediendo a resolver el triángulo de posición en el que en el momento del orto u del ocaso $h = 0$ y por tanto el lado ZE (ZSOL) es rectilátero:

$$\cos H = -\tan \varphi \cdot \tan \delta$$

sustituyendo valores y resolviendo, se obtiene que $H_{orto} = 111^\circ 38' 47'' = 7^h 26^m 35^s = 7^h 26^m 35^s$, que el ángulo horario del ocaso, por estar entre 0° , mientras que el ángulo horario del orto será $H_{orto} = 24^h - 7^h 26^m 35^s = 16^h 33^m 25^s$.

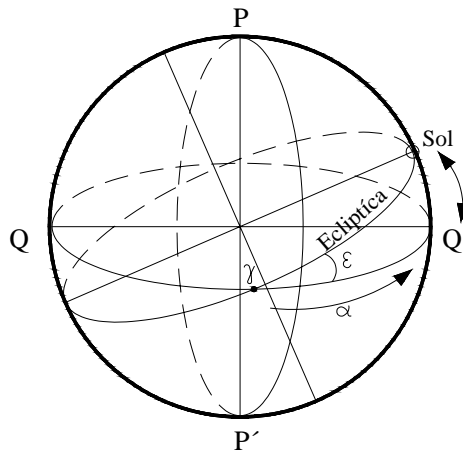


Figura A.II.6

Con ello se calculan las horas sidéreas:

$$\theta_{orto} = H_{orto} + \alpha = 22^h 33^m 25^s$$

$$\theta_{ocaso} = H_{ocaso} + \alpha = 13^h 26^m 35^s$$

Para el solsticio de invierno, la coordenadas ecuatoriales absolutas serán $(\alpha = 18^h, \delta = -23^\circ 26')$, con lo que sustituyendo estos valores en la formula anterior.

Obtenemos $H = 68^\circ 21' 13'' = 4^h 33^m 25^s$ (H_{ocaso}). De la misma manera

$$H_{orto} = 24^h - 4^h 33^m 25^s = 19^h 26^m 35^s$$

Y ya se determina las horas sidéreas correspondientes:

$$\theta_{orto} = H_{orto} + \alpha = 13^h 26^m 35^s$$

$$\theta_{ocaso} = H_{ocaso} + \alpha = 22^h 33^m 25^s$$

Problema # 9

Calcular la latitud de un lugar en el que se ha observado una estrella a su paso por el meridiano, obteniendo una distancia cenital de $33^\circ 32' 18''$ y el acimut en el momento del ocaso, $A = 127^\circ 23' 59''$.

Solución

En el momento de la culminación o el paso de meridiano, $PE = PZ + ZE$, culminando entre Z y el Ecuador, ya que si culminara entre P y Z, la estrella seria circumpolar. Entonces:

$$90^\circ - \delta = (90^\circ - \varphi) + z \Rightarrow \delta = \varphi - z$$

Por orto lado en el momento del ocaso, $ZE = 90^\circ$, por lo que el triangulo es rectilatero. Construyendo el pentágono de Neper se obtiene:

$$\cos (90^\circ - \delta) = \sin (90^\circ - \varphi) \sin (A - 90^\circ) \Rightarrow \sin \delta = - \cos \varphi.$$

$$\cos A$$

sustituyendo δ por el valor anterior:

$$\text{sen } (\varphi - z) = -\cos \varphi \cdot \cos A$$

$$\text{sen } \varphi \cdot \cos z - \cos \varphi \cdot \text{sen } z = -\cos \varphi \cdot \cos A$$

dividiendo por $\cos \varphi$:

$$\tan \varphi \cdot \cos z - \text{sen } z = -\cos A \Rightarrow \tan \varphi = \frac{\text{sen } z - \cos A}{\cos z} \Rightarrow$$

obteniendo $\varphi = 54^\circ 17' 52''$

Problema # 10

Calcular por dirección saldrá el Sol en Madrid el día mas corto del año y cual será la altura máxima alcanzada ($\varphi = 40^\circ 24'$). ¿En que punto de la Tierra no saldrá el Sol ese día?

Solución:

Si se considera el día mas corta del año, solsticio de invierno, la declinación del Sol será $-23^\circ 26'$. Para hallar el acimut del orto, resolviendo el triangulo de posición en el que el lado ZSOL es 90° , aplicando la primera formula de Bessel, haciendo el lado $a = 90 - \delta$:

$$\cos (90 - \delta) = \cos \varphi \cdot \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{\text{sen } \delta}{\cos \varphi} \Rightarrow$$

$$A = 120^\circ 15' 36''$$

Para hallar la máxima altura alcanzada se vuelve a aplicar la primera formula de Bessel al triangulo, en este caso siendo $\alpha = 90 - h$:

$$\text{Sen } h = \text{sen } \varphi \cdot \text{sen } \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos H$$

Problema # 11

Una estrella circumpolar que tiene su culminación superior al norte del cenit se observan en ambas culminaciones con distancias cenitales de $15^{\circ} 42' 56''$ y de $55^{\circ} 33' 19''$. Calcular la declinación de la estrella y la latitud del lugar de observación

Solución

Si la estrella es circumpolar, no tiene Orto ni ocaso en el lugar de observación. En ambas posiciones se cumple que:

$$PZ = PE_1 + E_1Z$$

$$PZ = ZE_2 - PE_2$$

$$(90^{\circ} - \varphi) = (90^{\circ} - \delta) + (90^{\circ} - h_1)$$

$$(90^{\circ} - \varphi) = (90^{\circ} - h_1) - (90^{\circ} - \delta)$$

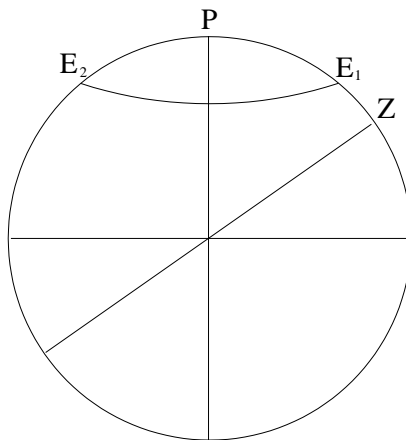
Sustituyendo las distancias cenitales:

$$90^{\circ} - \varphi = 90^{\circ} - \delta + 15^{\circ} 42' 56''$$

$$90^{\circ} - \varphi = 55^{\circ} 33' 19'' - 90^{\circ} + \delta$$

Sumando ambas expresiones:

$$90^{\circ} - 2\varphi = 71^{\circ} 16' 15'' - 90^{\circ} \Rightarrow \varphi = 54^{\circ} 21' 52,5''$$



Restando las dos expresiones anteriores:

$$-90^\circ = -\delta + 15^\circ 42' 56'' - 55^\circ 33' 19' + 90^\circ - \delta \Rightarrow$$

$$\delta = 70^\circ 4' 48,5''$$

Problema # 12

¿A que hora sidérea tiene lugar la culminación inferior de una estrella de coordenadas ($\alpha = 143^\circ 37' 23''$, $\delta = 56^\circ 33' 56''$)?

Solución:

En la culminación inferior, $H = 180^\circ$, por lo tanto:

$$\theta = H + \alpha$$

$$\theta = 12^h + 9^h 34^m 30^s = 21^h 34^m 30^s$$

Problema # 13

Haciendo una observación de estrella a su por el meridiano superior, se pide saber con que diferencia de tiempo culminara una estrella de $\alpha = 7^h 23^m$ con respecto a otra de $\alpha = 8^h 11^m$

Solución

Las horas sidéreas de la culminación de ambas estrella serán:

$$\theta_1 = H_1 + \alpha_1$$

$$\theta_2 = H_2 + \alpha_2$$

En ambos casos, en el momento de la culminación por el meridiano, $H = 0$, por lo que:

$$\theta_1 - \theta_2 = \alpha_1 - \alpha_2 = 48''$$

Problema # 14

El día del solsticio de verano del hemisferio norte se mide en un punto de España la distancia cenital de la culminación superior del Sol, siendo $z = 17^\circ 23' 15''$.

Calcular latitud del lugar, el acimut del Sol a las 10^h de tiempo sidéreo en el acimut del Sol en el ocaso. (Oblicuidad de la eclíptica para ese año = $23^\circ 26' 19''$).

Solución

La culminación puede tener lugar entre PZ o bien por debajo de Z, es un dato que en principio no se conoce.

En el primer caso:

$$PZ = PSol + SolZ \Rightarrow 90 - \varphi = (90 - \delta) + z$$

En el solsticio de verano $\delta = \varepsilon = 23^\circ 26' 19''$, con lo cual $\varphi = \varepsilon - z = 6^\circ 3' 4''$, luego no es válida esta solución.

Si la culminación tuviera lugar por debajo de Z, entonces $PSol = PZ + ZSol$, con lo cual:

$$90^\circ - \delta = (90^\circ - \varphi) + z \Rightarrow \varphi = \delta + z = 40^\circ 49' 34'', \text{ que es la solución correcta.}$$

Para hallar el acimut de las 10^h de horas sidéreas, se sabe la ascensión recta α , ya que ese día es de 90° o 6^h , con lo cual:

$$\theta = 10^h = \alpha + H \Rightarrow H = 10^h - 6^h = 4^h = 60^\circ$$

Con H , δ y φ ya se puede calcular las coordenadas horizontales, concretamente el acimut:

$$\tan A = \frac{\cos \delta \cdot \sin H}{\sin \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos H - \cos \varphi \cdot \sin \delta}$$

resolviendo, resulta $A = 90^\circ 4' 40''$.

Para resolver la última cuestión, en el ocaso, $h = 0$, y por tanto:

$$\sin \delta = -\cos \varphi \cdot \cos A \Rightarrow \cos A = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi} \Rightarrow A = 121^\circ 42' 46''$$

Problema # 15

Sabiendo que la declinación del Sol el 15 de agosto es $14^\circ 5'$, calcular aproximadamente la duración del día y la noche en Madrid ese día. ($\varphi_{\text{Madrid}} = 40^\circ 24'$).

Solución

Como se sabe, la declinación del Sol varía entre un máximo correspondiente a la oblicuidad de la eclíptica ($\varepsilon \approx 23^\circ 26'$) alrededor del 21 de junio hasta el mínimo de $-\varepsilon$ alrededor de 21 de diciembre (solsticios) pasando por 0° alrededor del 21 de marzo y el 21 de septiembre (equinoccios), teniendo relaciones directas con la duración del

día y la noche en las diferentes latitudes. Los valores vienen tabulados en el Anuario Astronómico. En este caso, se trata de calcular la diferencia de ángulos horarios entre el orto y el ocaso ese día, con lo que se puede aplicar:

$$\cos H = -\tan \delta \cdot \tan \varphi$$

Sustituyendo los valores dato del problema, se obtiene:

$$H = 102^\circ 19' 41'' = 6^h 49^m 19^s$$

que corresponde al ángulo horario del Sol en el ocaso. Para hallar el del orto, al ser posiciones correspondientes:

$$H_{orto} = 24^h - H_{ocaso} = 17^h 10^m 41^s$$

Por lo que la duración del día será $2H_{ocaso} = H_{orto} - H_{ocaso} = 13^h 39^m$ y la duración de la noche, su complementario, $10^h 21^m$.

Donde $H = 0^\circ$ en la culminación superior, de donde se obtiene:

$$H = 27^\circ 2'$$

El límite de la salida del Sol para ese día la marca la línea del círculo polar, a una latitud de $90 - \varepsilon = 66^\circ 34'$. A partir de esa latitud, el Sol ese día no se vera. Efectivamente si se sustituye φ en la anterior formula por $66^\circ 34'$, se obtiene $h = 0^\circ$.

ANEXO IV

CARACTERÍSTICAS DE UNA FOTOGRAFIA AÉREA



IV.1 PRINCIPALES CARÁCTERISTICAS A DESTACAR PARA EL EMPLAZAMIENTO DE OBRAS CIVILES

IV.1.1 La Fotografía aérea

Un requisito previo de la interpretación de la fotografía aérea es la comprensión básica del proceso fotográfico, de las relaciones básicas entre materia y energía, de la atmósfera, y de la aviación.

Las fotografías aéreas para cartografía para la mayor parte de las formas de interpretación toman en exposiciones sucesivas a lo largo de una línea de vuelo, o en una pasada continua sobre la zona, con una superposición de un 60 %. Si el área a fotografiar es demasiado ancha para ser captada por completo por una sola pasada, se suelen seguir líneas de vuelo adicionales paralelas que se solapan un 30 % con las líneas de vuelo contiguas.

Esta también establecido que las imágenes deben primero ser detectadas, después identificadas y posteriormente interpretadas. Es en la interpretación donde se determina el significado de lo que se ha visto e identificado.

IV.1.2 Criterios para identificación de imágenes

En el capítulo 1 se han dado siete criterios básicos de identificación de imágenes. En la etapa de interpretación, los criterios para identificación de imágenes se evalúan como sigue:

1. TAMAÑO. ¿Qué longitud (considerando la escala de la foto) debería tener las imágenes críticas y qué longitud tienen las imágenes que ha sido detectada?
 2. FORMA. ¿Qué forma deberían tener las imágenes críticas, vista desde arriba, y cuál es la forma de las imágenes que han sido detectadas?
 3. SOMBRA. ¿Cuál debería ser la forma del perfil de las imágenes críticas? ¿Tienen las sombras de las imágenes detectadas la misma forma?
 4. TOTALIDAD. En fotografías en blanco y negro, considerando la combinación película-filtro utilizada, ¿deberían tener (y tenían) más o menos reflejo de luz las imágenes críticas que el fondo? Si los objetos reflejan más luz, deberían aparecer más iluminados que el fondo. Si reflejan menos luz deberían aparecer más oscuros. ¿Cabe esperar que reflejen más o menos luz las imágenes críticas que su entorno? En fotografía en color, ¿Qué color deberían tener las imágenes críticas?
 5. TEXTURA. Considerando la escala fotográfica, ¿deberían tener las imágenes críticas en estereo una apariencia de zona manchada o una superficie rugosa que pueda ayudar a su identificación? ¿Tienen las áreas que están siendo estudiadas la textura esperada?
 6. LOCALIZACIÓN. ¿Dónde, considerando la topografía, puede esperarse que se encuentren las imágenes críticas? (A lo largo de los ríos, sobre colinas, en la orilla de los lagos, etc.) ¿Han sido encontradas las imágenes en el lugar esperado? (A veces, desde luego, la localización por si misma es crítica.

Suele ser de mucho más interés, por ejemplo, un avión visto debajo del agua que en un aeropuerto.)
 7. RELACIÓN CON LOS OBJETOS CIRCUNDANTE. A veces pueden identificarse imágenes, y determinarse su significado, por lo que las rodea.
-

IV.1.3 Medición en Fotografías aéreas.

La fotometría, se define como la ciencia o arte de obtener medidas correctas a partir de la fotografía. Mas de un 95% de los mapas topográficos se construyen utilizando métodos fotométricos.

a) *Determinación de la escala.*

Los tamaños de las imágenes en fotografías aéreas verticales son, para todos los fines prácticos, directamente proporcionales a la razón entre la distancia focal de la lente de la cámara y la distancia de la cámara a la superficie del suelo (altura de vuelo). Si se hace la consideración de que el terreno rara vez es perfectamente plano ver figura 8.5 y figura 8.6, entonces se tendrá que admitir que la escala varia a lo largo de la fotografía. La medición de las distancias reales sobre una fotografía aérea necesita que la escala es perfectamente determinada preferiblemente en varios puntos de la fotografía. Esto es particularmente cierto en terreno montañoso y accidentado.

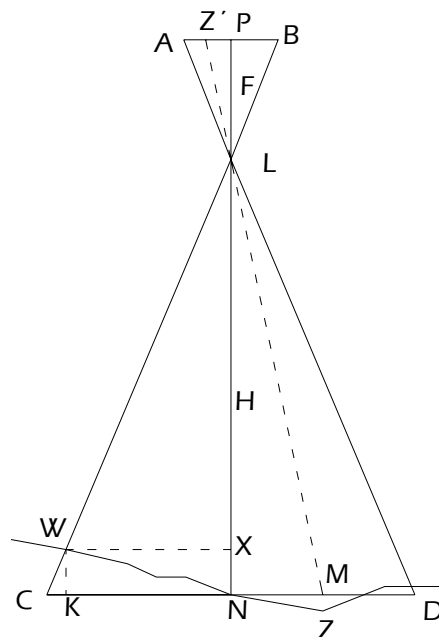


Figura IV.1 Geometría básica de una fotografía aérea vertical.

Dos métodos pueden utilizarse para determinar la escala exacta de una fotografía aérea. Cuando tiene que medirse áreas muy grandes, es recomendable que la escala se determine por comparación con un mapa. Un método alternativo de determinación de escalas es la medición de un objeto o rasgo de tamaño conocido directamente en una fotografía aérea.

b) Mediciones horizontales

Las distancias en la línea resta pueden medirse directamente utilizando una regla graduada. Si se conoce la escala de la fotografía basta multiplicar el número de graduaciones de la regla contadas por el factor de escala. El método más sencillo para medir distancias curvas o rectas es la utilización de un instrumento llamado correccaminos, o medidor de mapas.

c) Medición de direcciones

El primer paso en la medición de direcciones es buscar el norte, y trazar una flecha o línea dirigida al norte sobre alguna de las fotografías por lo menos. Esto es mas fácil de hacer por comparación de las fotografías por un mapa de la misma zona. Si se quiere la orientación del mapa y del campo, podemos encontrarnos con que tengamos colocados sobre las fotografías dos <<nortes>>. El <<norte>> encontrado directamente sobre el mapa corresponde al <<norte de la cuadrícula militar>>, y normalmente es algo distinto del norte magnético, encontrado en el campo con una simple brújula. Los dos no deben confundirse en el campo.

El norte del mapa (o de la cuadrícula) se encuentra en fotografías aéreas mediante los siguientes pasos.

Paso 1. Selecciónense dos puntos que puedan identificarse tanto en el mapa como en la fotografía aérea.

Paso 2. Únanse dos puntos con una línea recta.

Paso 3. Encuéntrese el azimut (u orientación) de esta línea en un mapa. Esto se hace se hace alargando la línea asta que corta un margen de mapa. Utilícese el extremo de la línea mas alejada hacia el sur como un punto de origen de la línea. Esta línea será la <<línea base>> en los pasos siguientes.

Paso 4. Utilice un transportador para medir la distancia angular entre la línea base y el norte de el mapa. (Los límites laterales del mapa normalmente se extienden en dirección norte-sur). Llevar esta distancia a la fotografía. Dibújese una flecha dirigida al norte en la fotografía.

d) Medición verticales

Las alturas de los objetos pueden ser medidas en fotografías aéreas de dos maneras: por cálculos apartar de la longitud de la sombra y por cálculos basados en las diferencias de paralaje.

Es igualmente clarísimo, sin embargo, que este método puede llevar a serios errores si las sombras no se proyectan en terreno llano (u otra superficie plana).

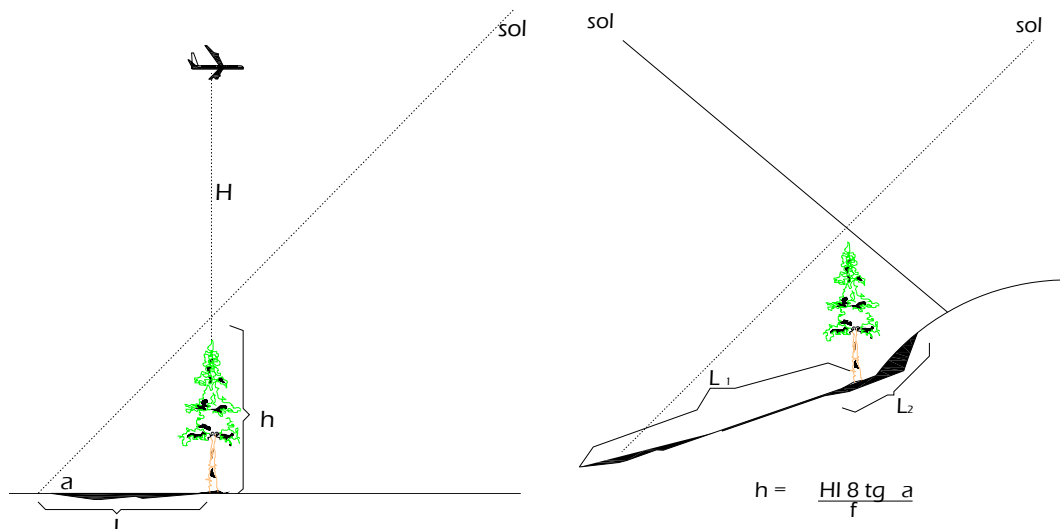


Figura IV. 2 Medición vertical según la sombra proyectada

e) Altura determinada por mediciones de diferencia (o delta) de paralaje

- 1) Para determinar la elevación de un punto específico
- 2) Para determinar la altura de un objeto
- 3) Para determinar puntos de igual elevación

Entre las técnicas mas sencillas para hacer mediciones de paralaje se incluyen el uso de la escala de paralaje y de la cuña de paralaje. En este manual solo se explica la utilización de la escala de paralaje.

f) Mediciones de áreas

Cuatro son los métodos mas utilizados en la medición de áreas. Estos incluyen la medición utilizando instrumentos especiales, sistemas de cuadrulado, redes de puntos, y por el peso.

g) Instrumentos para medición de áreas

El instrumento medidor de áreas mas sencillo se conoce con el nombre de parámetro

Paso 1. Pésense las fotografías en las que están representadas las áreas

Paso 2. Recórtense las áreas de forma irregular de las fotografías. Pésense con mucha precisión las áreas recortadas.

Paso 3. Recórtese un área de tamaño conocido y pésense con mucha precisión

Paso 4. Relaciónese el peso del área representativa con el peso de los trozos recortados del área que se busca

Paso 5. Como medida de seguridad, súmense los pesos encontrados en los pasos 2 y 3. Su total seria igual al peso encontrado en el paso 1.

IV.1.4 Análisis Comparativo

Más del 95 por ciento de los mapas utilizados corrientemente han sido elaborados con el uso de la fotografía aérea.

Cuando los mapas están elaborados a partir de la fotografía aérea, la fotografía aérea se ha utilizado para identificar objetos y condiciones en el terreno (por reconocimiento de imágenes), para determinar la localización relativa de los rasgos, y para medir, por mediciones fotométricas precisas, la forma exacta de la topografía.

<<Un mapa es una representación de una parte de la superficie de la tierra, realizada a escala. >>

ANEXO V

EJERCICIOS FOTOGRAMETRÍA



V.1 ASPECTOS GEOMÉTRICOS DE LA FOTOGRAFÍA AÉREA VERTICAL.

Los tipos de fotografías aéreas en función de la inclinación del eje de la cámara son:

- **Verticales.** Cuando el ángulo que forma el eje óptico de cámara con la vertical no supera los 3° .
- **Oblicuas.** Aquellas en las que el ángulo que forma el eje óptico de la cámara y la vertical es superior a 3° .
- **Panorámicas.** Son en la que en la fotografía aparecen el horizonte

En fotogrametría aérea las fotografías utilizadas son las verticales, siendo tomadas con una cámara aérea calibrada.

Estas son cámaras cuyos elementos internos son estables y perfectamente conocido mediante procesos de calibración.

V.1.1 Calibración de una cámara métrica.

La calibración de una cámara métrica consiste en determinar los parámetros internos, para poder reconstruir el haz (orientación interna).

El resultado de un proceso de calibración en cámaras analógicas es la medición y cálculos de los elementos siguientes:

- Distancia focal de la lente.
- Coordenadas de las marcas fiduciales.
- Posición del punto principal, respecto al centro fiducial.
- Distorsión radial del objetivo mediante una grafica o tabla.
-

V.1.2 Paso de coordenadas foto o coordenadas terreno.

En una primera aproximación, se puede establecer la siguiente analogía entre coordenadas fotografía y coordenadas terreno a partir de la figura:

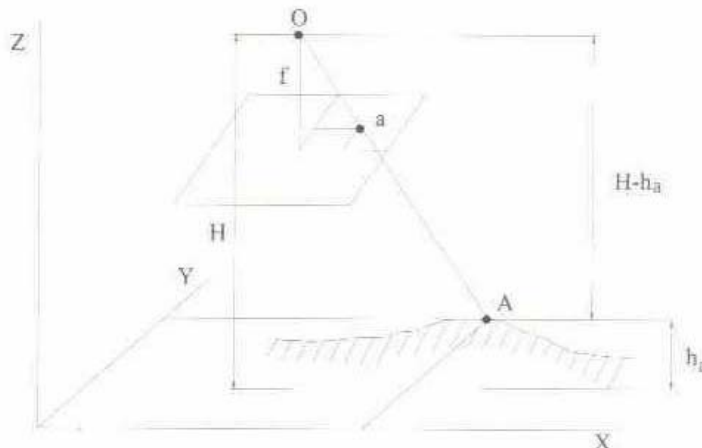


Figura V.1 Relación coordenadas terreno y coordenadas foto.

donde:

- f es la distancia focal de la cámara.
- H es la altura de vuelo sobre el nivel medio del mar.
- h es la altura del punto A del terreno, sobre el nivel medio del mar.
- x, y coordenadas foto.
- $X Y$ coordenadas terreno.

$$\frac{f}{H - h_A} = \frac{x_a}{X_A} \Rightarrow X_A = \frac{H - h_A}{f} \cdot x_a \quad [V.1.1]$$

$$\frac{f}{H - h_A} = \frac{y_a}{Y_A} \Rightarrow Y_A = \frac{H - h_A}{f} \cdot y_a$$

V.1.3 Escala de la fotografía

Al ser la fotografía una proyección cónica la escala en la fotografía sería uniforme en el caso que el terreno fuera llano, como este no es un caso habitual la escala depende del punto imagen.

En un terreno llano la escala de la fotografía vendría determinada por la relación entre una distancia en la foto y una en el terreno.

$$\frac{1}{E} = \frac{f}{D} = \frac{ab}{AB} \quad [V.1.2]$$

siendo **D** la altura de vuelo del avión sobre el terreno.

En el caso de un terreno normal la escala de la fotografía vendría dada por la siguiente relación:

$$\frac{1}{E} = \frac{f}{H - h} \quad [V.1.3]$$

Al haber una escala por cada punto imagen, se hace necesario definir el concepto de escala media del fotograma, en la altura **h** queda determinada por una altura media de los puntos representativos de la fotografía.

$$\frac{1}{E} = \frac{f}{H - h_m} \quad [V.1.4]$$

Por otro lado hablando de escalas, conviene tener presente que la fórmula que relaciona la escala de la fotografía con la escala de la cartografía final es:

$$E = 200 \cdot \sqrt{E_c} \quad [V.1.5.]$$

donde **E** es el denominador de la escala de la fotografía y **E_c** es el denominador de la escala de la cartografía.

V.1.4 Desplazamiento debido al relieve.

Debido al relieve, un punto de imagen va a sufrir un desplazamiento radial respecto del punto principal de la foto. Si observamos la figura, por semejanza de triángulos se establecerá:

$$\frac{dr}{r} = \frac{h}{H} \Rightarrow dr = \frac{h}{H} \cdot r$$

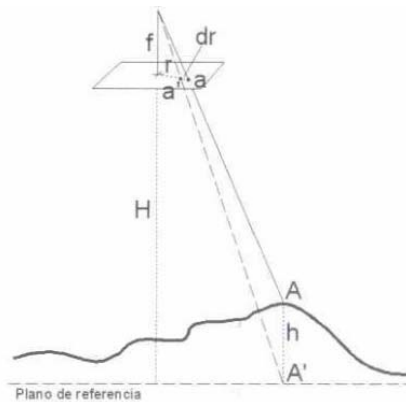


Figura V.2 Desplazamiento debido al relieve

Ejercicio # 1

Calcular las fotocoordenadas de la base de una antena de 43 [m] situada en una playa si las coordenadas del punto más alto son (-33,65 [mm]; 42,53 [mm]) en una fotografía aérea de altura de vuelo:

$$H = 1125 \text{ [m]}$$

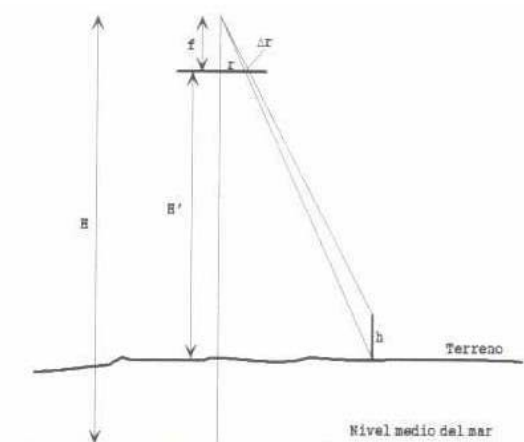


Figura V.3

Solución

El desplazamiento viene dado debido a la altura de la antena viene dado por:

$$\frac{r_{\text{extr}}}{\Delta r} = \frac{H'}{h} \Rightarrow \Delta r = \frac{h}{H} \cdot r_{\text{ext}}$$

En este caso, $H = H' = 1125 \text{ m}$, y el vector r será la distancia desde punto principal:

$$r_{\text{extr}} = \sqrt{x^2 + y^2} = 54,23 \text{ mm}$$

Con lo cual, resolviendo, $\Delta r = 2,07 \text{ mm}$

Observando el dibujo, para remplazar las coordenadas de la base, se tiene:

$$a = \arctan \frac{42,53}{33,65} = 51,65^\circ$$

$$\Delta x = \Delta r \cos a = 1,28 \text{ mm}$$

$$\Delta y = -\Delta r \sin a = -1,62 \text{ mm}$$

Con lo cual:

$$x_{\text{base}} = x_{\text{ext}} + \Delta x = -32,37 \text{ mm}$$

$$y_{\text{base}} = y_{\text{ext}} + \Delta y = 40,91 \text{ mm}$$

Ejercicio # 2

Calcular el desplazamiento radial de una imagen de una cámara aérea debido a una inclinación de $3,5^\circ$, para los casos de focal supergranangular, granangular, normal y de ángulo pequeño, sabiendo que el punto imagen está a 178 mm del isocentro por debajo del eje de inclinación, considerando un giro $\lambda = 120^\circ$.

Solución

La geometría del desplazamiento debido a la inclinación respecto de la vertical en una fotografía aérea la podemos expresar según el siguiente grafico.

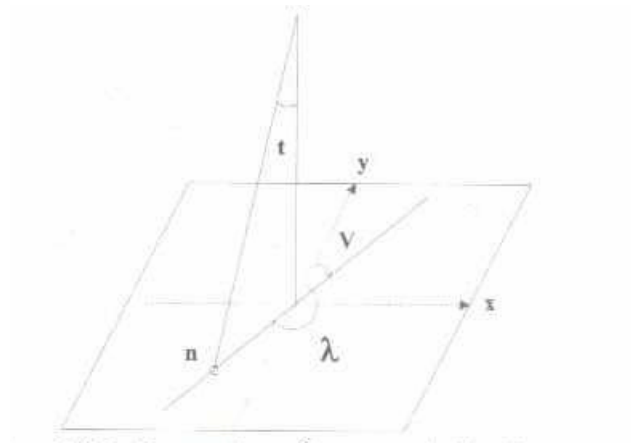


Figura V.4. Geometría en fotograma inclinado.

donde:

L es el centro óptico

t es el ángulo de inclinación

n es el punto imagen del nadir en el plano de la fotografía

x e **y** son los ejes de coordenadas en sistema fiducial imagen

V es el ángulo que forma la intersección del punto nadiral en el plano imagen y en el punto principal menos 180° .

Una vista en alzado nos muestra los elementos que intervienen en el desplazamiento.

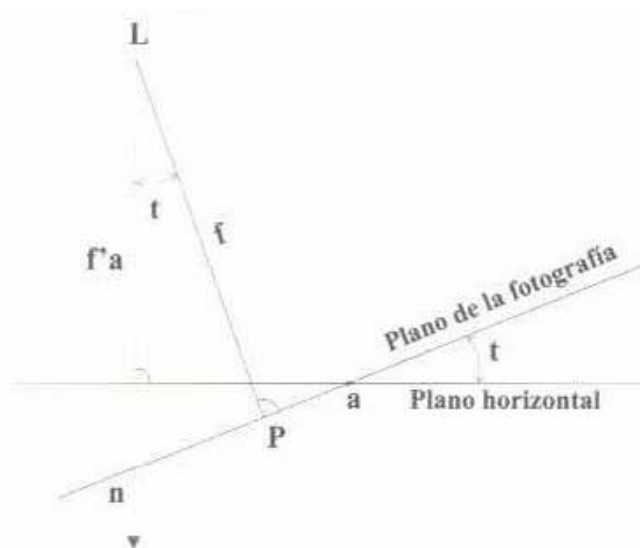


Figura V.5 Plano imagen en fotograma inclinado.

La expresión del desplazamiento radial debido a la inclinación es

$$dr = \frac{r_i^2 \cdot \sin^2 \lambda}{f - r_i^2 \cos \lambda} \quad [7]$$

Se considera dr positivo si el punto se encuentra por encima del eje de inclinación y negativo si se encuentra por debajo. En los casos en los que se encuentra en el eje, λ toma los valores 90° y 270° , por lo que el denominador de la expresión tomará los valores $f - r_i \sin t$ o $f + r_i \sin t$.

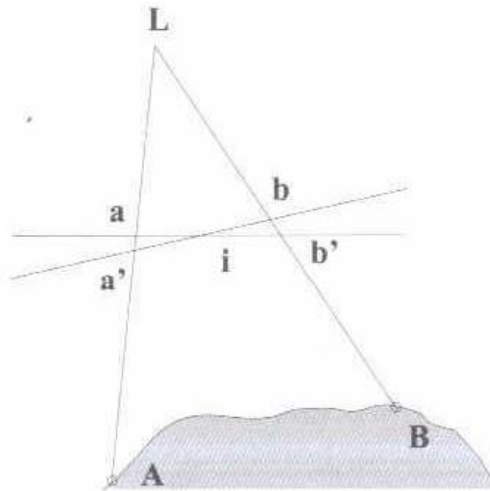


Figura V.6 Punto imagen en fotograma inclinado.

Teniendo en cuenta las distancias focales del problema y sustituyendo en la fórmula obtenemos los siguientes valores de distorsión.

Supergranangular ($f = 88\text{mm}$)	$dr=5,175 \text{ mm}$
Granangular ($f=152 \text{ mm}$)	$dr=3,071 \text{ mm}$
Normal ($f=200 \text{ mm}$)	$de=2,354 \text{ mm}$
Ángulo pequeño ($f=300 \text{ mm}$)	$dr=1,583 \text{ mm}$

Ejercicio # 3

En una fotografía vertical tomada con una cámara de focal $152,8 \text{ mm}$ y altura de vuelo 2200 m aparecen las imágenes de dos puntos cuyas alturas en el terreno son

conocidas ($h_a = 348 \text{ m}$, $h_b = 456 \text{ m}$). Las fotocoordenadas son (en mm): a (-53,43;34,39), b (47,31;50,02).

Calcular:

- a) la distancia horizontal en el terreno
- b) Si el punto "a" fuera la parte más alta de una chimenea de 50 m de altura, calcular el desplazamiento radial que tendría la base de la misma.

Solución

- a) En sentido estricto, habría que calcular las coordenadas terreno de los puntos A y B

Aplicando [2], tenemos resultado:

$$\begin{aligned} X_A &= -647,59 \text{ m} & X_B &= 539,98 \text{ m} \\ Y_A &= -416,82 \text{ m} & Y_B &= 570,91 \text{ m} \end{aligned}$$

Con lo que la distancia sería:

$$d = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} = 1545 \text{ m}$$

De un modo más simple y aproximado también se puede calcular la escala del fotograma en la altura media de ambos puntos:

$$\frac{1}{E_f} = \frac{f}{H - h_M} = \frac{1}{11829}$$

Seguidamente, calcular la distancia en fotograma:

$$d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 131,43 \text{ mm}$$

Y multiplicando este segmento por la escala media de la foto:

$$D = 131,43 \text{ mm} \cdot 11829 = 155 \text{ m}$$

Lo que resulta sumamente cercano al valor anterior.

- b) En el caso de que "a" fuera la parte más alta de una chimenea, la base tendría un desplazamiento radial Δr hacia el punto principal del fotograma (origen del fotocoordenadas):

$$\frac{r_{extr}}{\Delta r} = \frac{H'}{h}$$

Siendo: $r_{extr} = \sqrt{x_a^2 + y_a^2} = 63,54 \text{ mm}$

$$h = 50 \text{ m} \quad H' = H - h_a = 1852 \text{ m}$$

V.2 ESTEREOSCOPIA EN FOTOGRAMETRÍA.

V.2.1 La visión estereoscópica.

La misión estereoscópica es la propiedad que tenemos para la observación de objetos en tres dimensiones, y es el fundamento y la condición fundamental para obtener la tercera coordenada o altura en el proceso fotogramétrico. El ojo humano normal recibe la información tridimensional de un objeto por la diferencia de imágenes captada por los ojos respecto a un mismo objeto. Esta diferencia se debe a que la imagen formada en cada ojo es una proyección central con centro de proyección diferente.

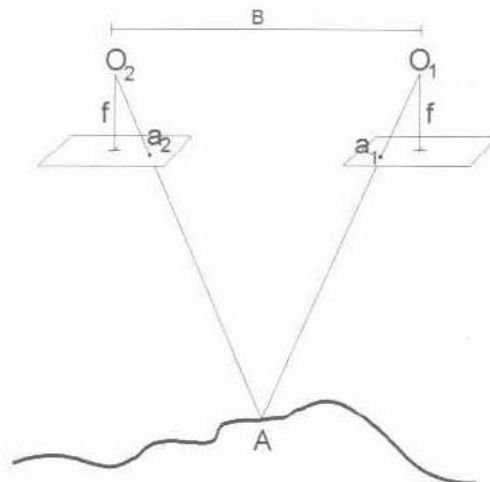


Figura V.7. Por estereoscópico.

Esta propiedad permite que al observar dos fotografías de una misma zona, pero tomadas, en el vuelo fotogramétrico, desde dos puntos diferentes (fotogramas consecutivos con una parte común denominada recubrimiento) y bajo una ciertas condiciones, podemos obtener una sensación tridimensional de la zona.

V.2.2 Paralaje estereoscópica: principio de la marca flotante.

En el vuelo fotogramétrico la cámara va tomando fotografías sucesivamente adquiriendo una porción de terreno común para tenerla desde dos puntos de vista diferentes y poderla estereoscópicamente. El porcentaje de terreno común en una fotografía de la siguiente se denomina (p).

Se denomina paralaje, en general, al desplazamiento aparente en la posición de un objeto fijo respecto a un cierto sistema. De la misma forma, al desplazamiento de la imagen de un punto en dos fotogramas sucesivos debido al cambio de posición de la cámara, se denomina paralaje estereoscópica o paralela horizontal.

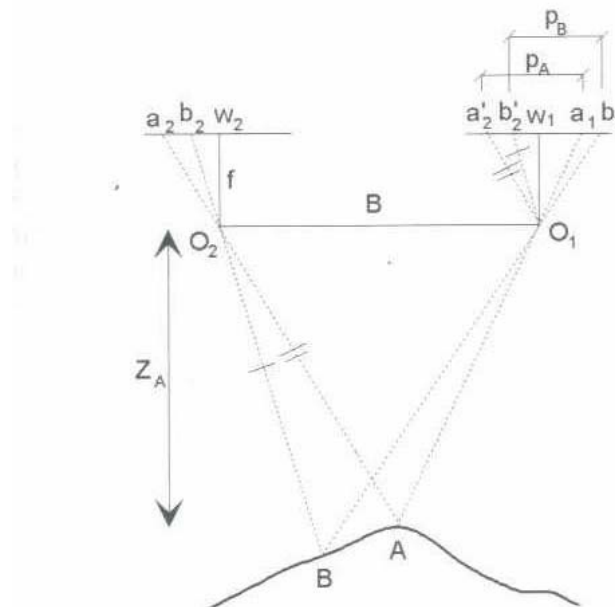


Figura V.8. Paralela estereoscópica.

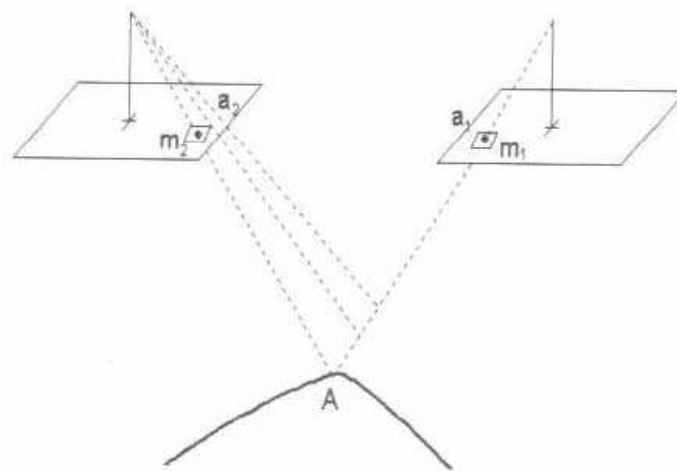
Si llamamos paralaje de A. $p_A = a_1 a'_2$ podemos establecer que:

$$\frac{P_A}{f} = \frac{B}{H_A Z_A} \Rightarrow p_A = \frac{B \cdot f}{H_A - Z_A} \quad [V.2.1]$$

Y por tanto, la paralaje de un punto depende de dos factores fijos en cada para como son la distancia focal f y la base o distancia entre tomas B , y un factor que es variable: la altitud del punto, de lo que se deduce que la paralaje está directamente relacionada con este factor, siendo mayor para los puntos más alto (A) y menor para los más bajo (B).

Si se colocan ambas fotos en una mesa y fijamos la distancia B a escalas fotográficas y medimos paralaje entre puntos, podríamos saber la diferencia de altitud entre esos puntos. En este principio se basa la antigua barra de paralaje, utiliza manualmente para medir diferencia de altitud entre puntos.

Hasta ahora, esta paralaje es exclusivamente horizontal, p_x (en sentido del eje X o dirección de vuelo), pero existe otra paralaje, mucho menor, en el sentido del eje Y , denominada vertical, p_y debida a que las fotos no están perfectamente orientadas entre si como en el momento de la toma. El efecto visual será el de ver dos imágenes monoscópicas en lugar de una estereoscópica, en el caso de que esta paralaje vertical sea muy grande.



FiguraV.9. Principio de índice flotante.

Independientemente del sistema utilizado en el proceso fotogramétrico (analógico, analítico o digital), la medición de la longitud en cualquier sistema se hace gracia al denominado principio del índice flotante, formulado por Stolze en 1892.

Este principio es el que ha sido aplicado tradicionalmente a los instrumentos de fotogrametría, de tal forma que la medida de coordenadas para el trazado de mapas por fotogrametría (restitución) se sigue realizando con un índice “posado” sobre el terreno.

Ejercicio # 4

Un par estereoscópico de fotografía verticales tomadas con una distancia focal de 200 mm tiene una línea base de 447,80 m. La elevación del punto del control A es 194,2 3m por encima del nivel del mar y la paralaje del punto A es 45,80 mm. ¿Cuál es la altura de vuelo por encima del nivel del mar para este estereopar?

Solución

Según la ecuación de la paralaje

$$H_A = H - \left(\frac{f \cdot B}{P_a} \right) \quad [V.2.2]$$

Podemos sustituir los parámetros del ejercicio y despejar la altura de vuelo H, de tal manera que

$$194,23 \text{ m} = H - (200 \cdot 447,80 \text{ m} / 45,80)$$

$$H = 2149,688 \text{ m}$$

Ejercicio # 5

Un par estereoscópico de fotografías verticales han sido tomadas con una distancia focal de 152,4 mm y una altura de vuelo de 1621,54 m. El punto de control C tiene

una elevación de 263,65 m por encima del datum altimétrico y la paralaje de sus imagen en el para es de 86,27 mm.

Calcular la línea base.

Solución:

$$B = 768,669 \text{ m (Análogo al ejercicio anterior)}$$

Ejercicio # 6

Con una intención de poder obtener un mapa final con una precisión de 60,2 mm, podemos seleccionar la razón 1:5 entre el mapa y la fotografía, que es un valor muy común en escalas 1:1000 a 1.2000.

En escalas pequeñas, sin embargo, la relación entre la fotografía y el mapa final aumenta. La razón reside en el límite de interpretabilidad de la fotografía.

La óptima selección de la escala del fotograma viene dada por la siguiente función empírica

$$m_b = k \cdot \sqrt{m_k}$$

Siendo m_k la escala de la fotografía, m_k la escala del mapa y k un parámetro que depende de la calidad de la fotografía, del restituidor y de los requerimientos del producto final, oscila entre 200 y 300.

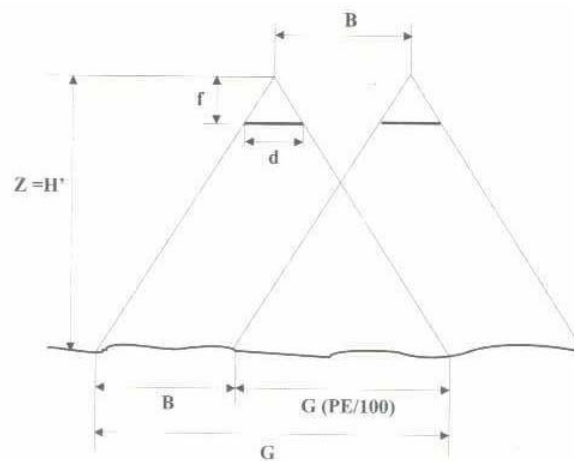


Figura V10. Relación Base/Altura.

Por otro lado, la razón Base/Altura viene dada por

$$B = G - G \frac{PE}{100} = G \cdot \left(1 - \frac{PE}{100}\right) \quad [V.2.3]$$

Siendo:

PE, el porcentaje de solapamiento entre las fotografías.

B, la Base, distancia entre disparos consecutivos.

G, la cobertura de los fotogramas en el terreno.

Por semejanza de triángulos podemos escribir:

$$\frac{Z}{G} = \frac{f}{d}$$

Siendo f la focal de la cámara y d la dimensión del formato.

a) una cámara métrica ($f = 90.00$ mm) se utiliza en un levantamiento fotogramétrico de un valle con distancias extremas de 750 m y 3000 m para la producción de una mapa base escala 1:25000. ¿Qué longitud de base se debe elegir si el error del mapa no debe ser mayor de 0,2 mm?

Tomara los valores de $\sigma_x = \sigma_y = 67 \mu m$.

Solución:

Suponiendo que el recubrimiento es del 60 % y que el formato del fotograma es 23 x 23 cm.

$$m_b = 200 \cdot \sqrt{25000} = 31622,7$$
$$m_b = 31623 \approx 31600$$

La relación entre distancia focal altura de vuelo y escala del fotograma viene dada por

$$\frac{1}{E_F} = \frac{f}{H_V} \quad [V.2.4]$$

Despejando $H_v = 2844 \text{ m}$

Por otro lado $G = 23 \text{ cm} \cdot E_f = 7268 \text{ m}$

Sustituyendo parámetros en la función [10]

Se obtiene $B = 2907,2 \text{ m}$

$0,2 \text{ mm} \cdot 25000 = 5 \text{ m}$

$0,0067 \text{ mm} \cdot 31600 = 2117,2 \text{ m} = 2,1172 \text{ m}$, por lo tanto está dentro de tolerancia.

- b) se quiere medir altitudes de puntos señalados por medidas fotogramétricas con una exactitud de 5 cm para un proyecto de autovía. Se dispone de una cámara de supergranangular y un restituidor analítico. Determina la escala de fotograma y la altura de vuelo sobre el terreno con solape del 60 % ¿Qué disminución en la exactitud se produce en un valle situado más abajo si no modificamos la base de vuelo en esta zona?

Solución:

El caso que se plantea en el ejercicio se puede representar gráficamente así.

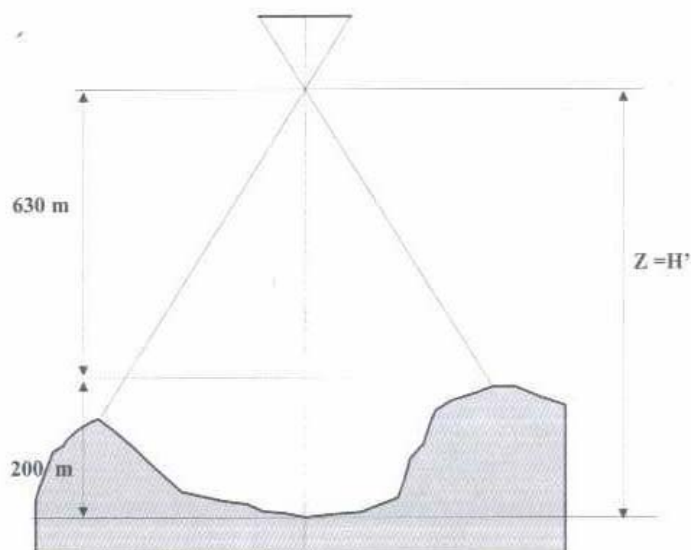


Figura V.11 Distinta altitud del terreno en un fotograma.

Empíricamente se tiene que $\sigma_Z = 0.08 \text{ ‰}$ de la distancia al objeto = $0,08 \text{ ‰}$
 $\cdot f \cdot E_F' = 5 \text{ cm}$

$$E_F = \frac{(50\text{mm} \cdot 1000)}{(0,08 \cdot 90\text{mm})} = 6944 \approx 7000$$

Según la relación de la función [11], despejando obtenemos $H'_1 = 630\text{m}$

Por lo tanto $H'_2 = 630\text{m} + 200\text{m} = 830\text{m}$

$$E_F' = H' / f = 9222$$

$$\sigma_Z = 0,08\text{‰} \cdot H' = 6,64 \text{ cm},$$

Disminuye por lo tanto en **1,64 cm** la exactitud deseada.