

CAPÍTULO 2

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DE LAS ESTRUCTURAS

ESTRUCTURAS

Como ves, existe una gran variedad de estructuras. En ocasiones, nos encontramos con estructuras que cumplen la misma función pero que están construidas utilizando distintos **materiales**



Las estructuras también pueden diferenciarse notablemente por su forma. Por ejemplo, un edificio tiene una estructura de armazón, mientras que un monitor tiene una estructura de carcasa.

Según la forma y el material con que estén construidas pueden distinguirse tres tipos de estructuras: **masivas, laminares o de carcasa y de armazón**

➤ ESTRUCTURAS MASIVAS

Las **estructuras masivas** son estructuras muy pesadas y macizas formadas por superficies anchas y resistentes. Para construirlas se emplea gran cantidad de material. Los **muros** gruesos de los embalses son ejemplos de estructuras masivas. Las **bóvedas** y **techos** de las antiguas iglesias de piedra o los enormes **pilares** y **arcos** de los puentes o acueductos son otros ejemplos de estructuras masivas.



➤ ESTRUCTURAS LAMINARES O DE CARCASA

Las estructuras laminares o de carcasa están constituidas por láminas resistentes que envuelven al objeto, formando una caja o carcasa que protege y mantiene en su posición a las piezas que lo componen.

Otros ejemplos de estructuras de carcasa son las carrocerías y fuselajes de coches y aviones, y la mayoría de los envases como botellas de plástico o tetra briks.



➤ ESTRUCTURAS APORTICADAS DE ARMazón O ARMADURAS

Estas estructuras están formadas por piezas alargadas, como barras, tubos, pilares, vigas, travesaños o cables unidos entre sí para formar una especie de esqueleto o **armazón**. Según la disposición de sus elementos, las clasificamos en: trianguladas, entramadas y colgadas.

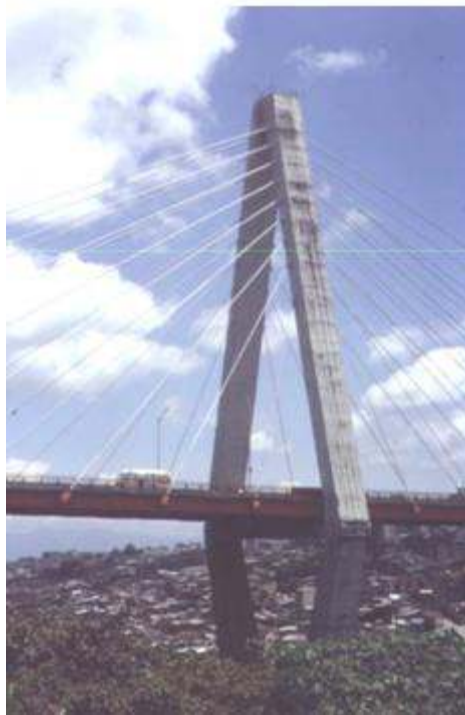


- Las estructuras trianguladas se caracterizan por la disposición de barras formando triángulos. Resultan muy resistentes y ligeras a la vez.



- Las estructuras entramadas están formadas por una malla de piezas verticales y horizontales.

- Las estructuras colgadas soportan el peso de la construcción mediante **cables** o **barras** que van unidos a soportes muy resistentes.



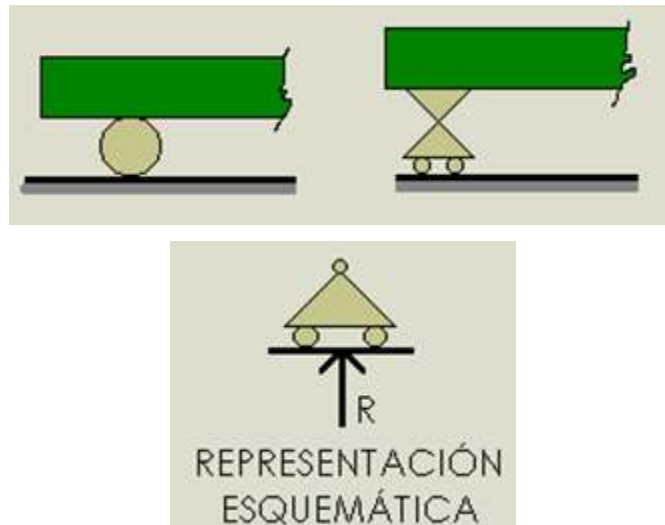
APOYOS

Grados de libertad – Estabilidad

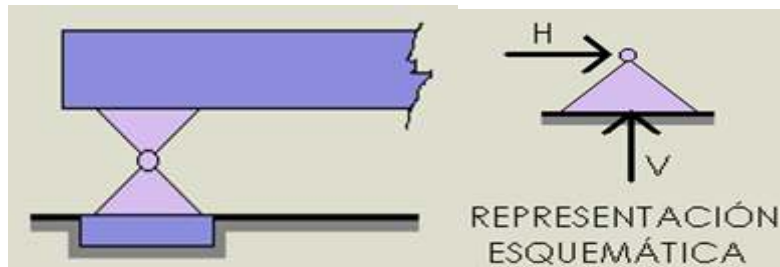
Hemos visto que las fuerzas en un plano pueden producir traslaciones y rotaciones. La traslación puede expresarse por sus dos componentes, según ejes ortogonales, y la rotación alrededor de un eje perpendicular al plano que contiene a las fuerzas. Diremos que una estructura plana posee tres grados de libertad (dos de traslación y una de rotación). Es evidente que estos grados de libertad deben ser restringidos para evitar toda tendencia al movimiento de la estructura y lograr su equilibrio. Esta restricción está dada por los apoyos, los que deben impedir las diversas posibilidades de movimiento; aparecen las **reacciones** en estos apoyos formando este conjunto (de cargas y reacciones) un sistema de fuerzas en equilibrio.

La función de estos apoyos es restringir los grados de libertad de la estructura, apareciendo reacciones en la dirección de los movimientos impedidos.

a) **Apoyo de primer género (MÓVIL)**: impide desplazamiento en la dirección perpendicular al plano de apoyo (figura A-1).

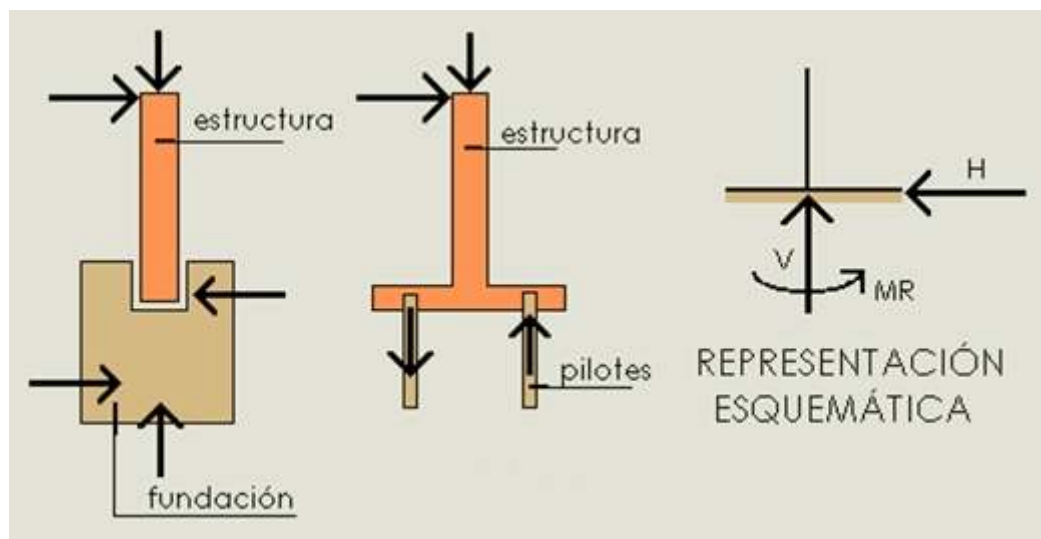


b) **Apoyo de segundo género o articulación:** impide traslaciones en cualquier dirección, permitiendo sólo rotaciones



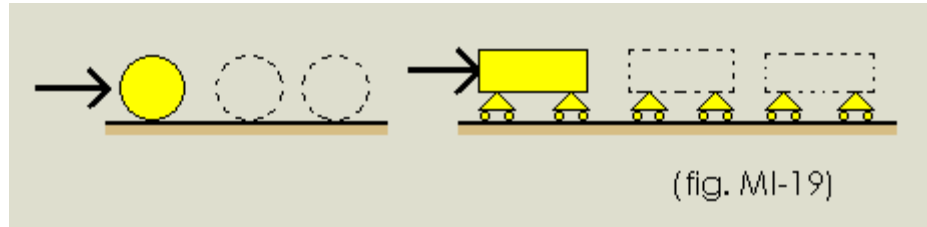
La dirección de la reacción puede ser cualquiera pero siempre podrá ser representada por sus dos componentes V y H . No es obligación descomponer la reacción de apoyo en ejes ortogonales, se puede descomponer en dos direcciones cualquiera.

c) **Apoyo de tercer género o empotramiento:** este tipo de apoyo impide todo tipo de movimiento de la estructura (dos traslaciones y una rotación) (figura 2).



Observación

Existe también otro tipo de equilibrio inadmisibles para las construcciones y es el equilibrio **indiferente**. Es cuando, al actuar una pequeña fuerza, la estructura se traslada, y si deja de actuar la fuerza, se restablece el equilibrio, pero en otro lugar (figura MI-19).



RECONOCIMIENTO DE ESTRUCTURAS Y APOYOS

- **APOYO FIJO.** Se pueden identificar por la distribución mas compleja en la base.



- **EMPOTRADO.** Aquellas que carecen de grados de libertad



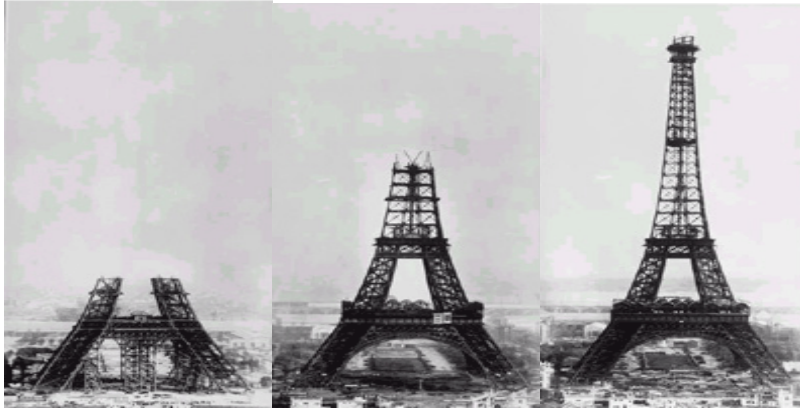
- **ARTICULACION.** Generalmente se presentan en uniones empernadas o clavadas.



- **TIRANTES.** En estructuras que necesitan soporte para equilibrarlos, generalmente se las observa en puentes atirantados y/o puentes colgantes.



- **ENTRAMADOS.** Se presenta en construcciones generalmente metálicas, en algunos casos en construcciones de gran magnitud con en la que se presenta a continuación.



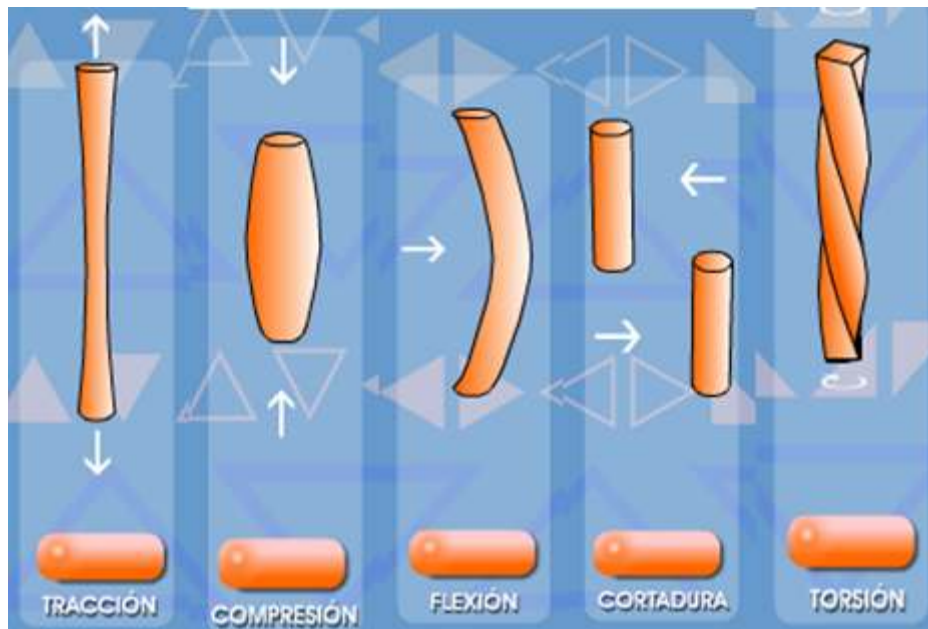
- **ARCOS.** Utilizados generalmente en la construcción de puentes, pero también se las utiliza para del diseño de bóvedas y construcciones arqueadas como se muestra a continuación.



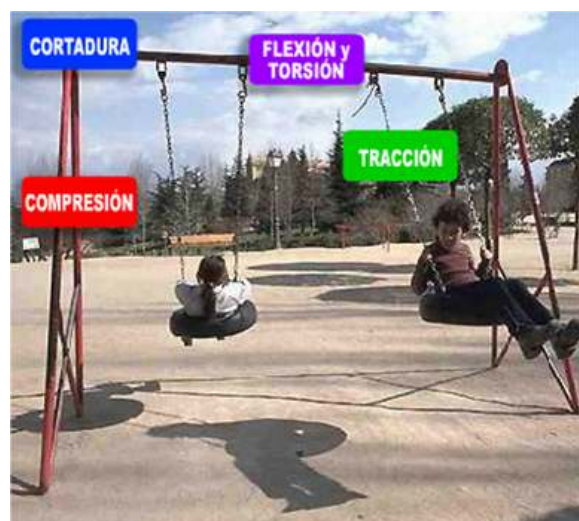
CAPÍTULO 3

ESFUERZOS INTERNOS EN LAS ESTRUCTURAS

Como ya tenemos conocimiento, los esfuerzos internos de una estructura bajo el efecto de fuerzas externas es el siguiente



Vemos a continuación un ejemplo claro de los tipos de esfuerzos sobre una pequeña estructura:



VIGAS

Vistas en todo tipo de estructuras, son de forma geométrica y dependiendo de la estructura el tipo de material.



En este grafico se muestra una viga de hormigón armado correspondiente a un puente de luz larga



En este grafico se muestra una viga de acero correspondiente a una construcción metálica

POTICOS

Según el tipo de pórtico se distinguen los siguientes:



En este grafico se muestra una estructura metálica aporticada



En este grafico se muestra una estructura aporticada de concreto armado



En este grafico se muestra una estructura aporticada de concreto armado

ARCOS

Utilizados generalmente en la construcción de puentes, pero también se las utiliza para del diseño de bóvedas y construcciones arqueadas como se muestra a continuación.

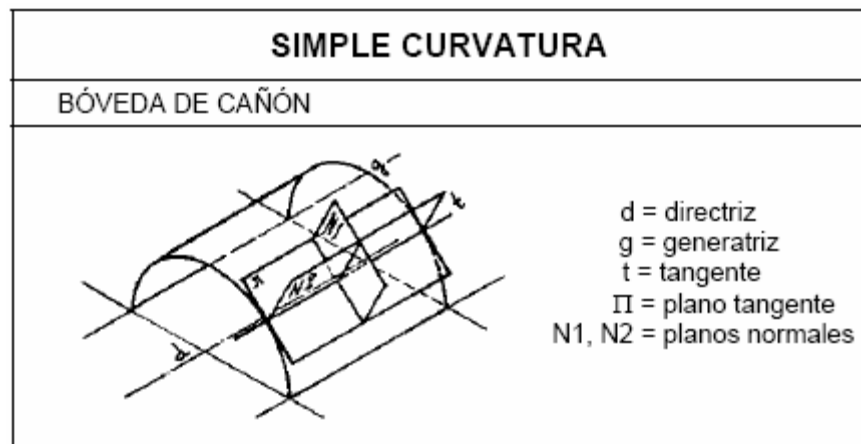


En este grafico se muestra un puente en forma de arco para uso viacual

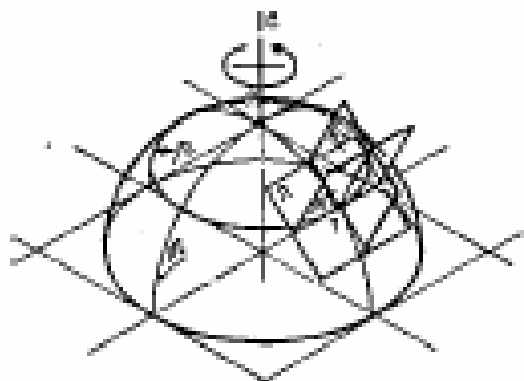
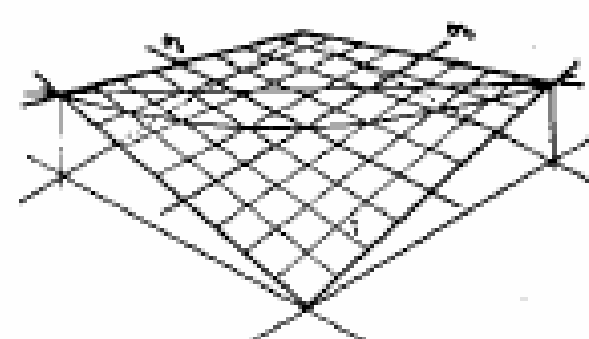
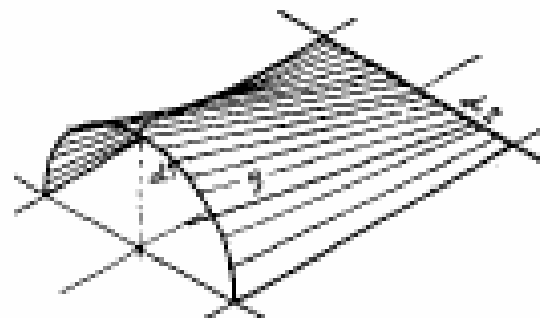


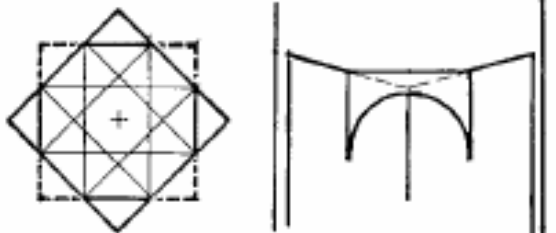
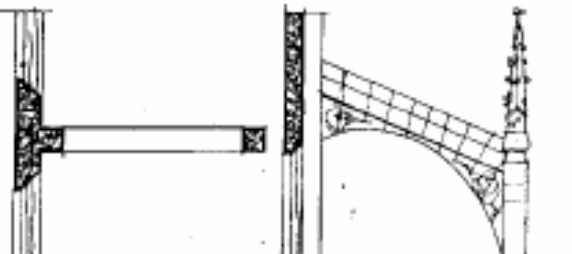
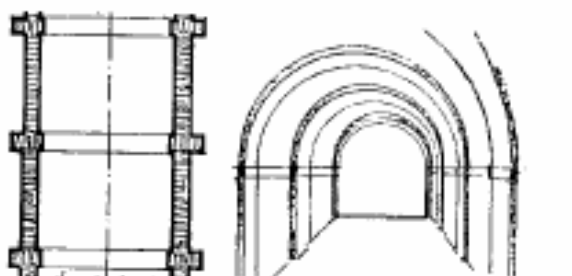
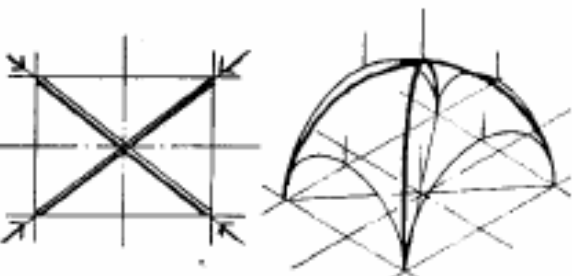
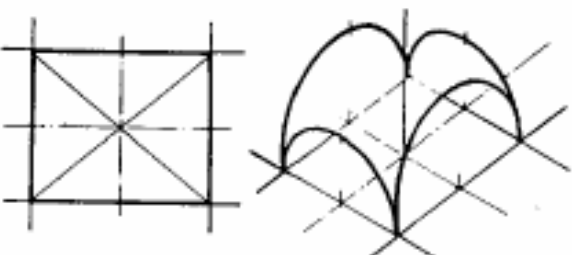
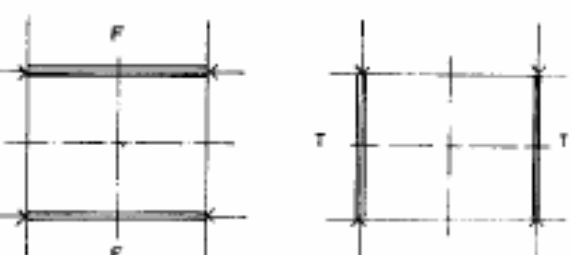

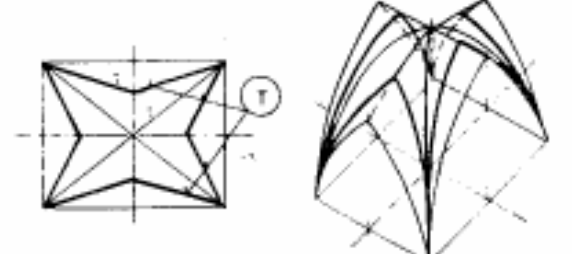
En este grafico se muestra un puente viga con armazón metálico en forma de arco parabólico

A continuación damos una muestra de los tipos de diseño de estructuras arqueadas y bóvedas



En este grafico se muestra una estructura aporticada de concreto armado

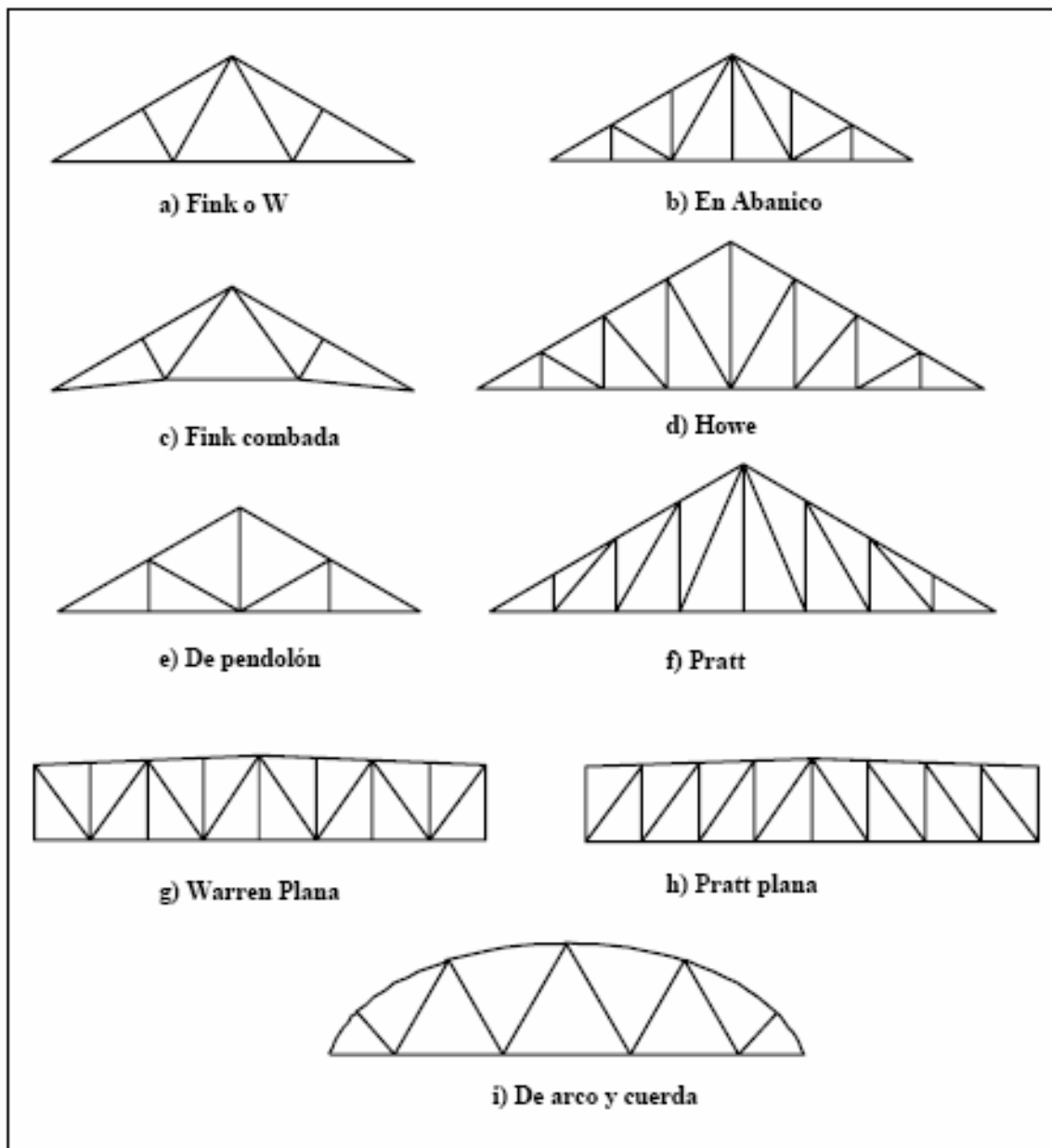
DOBLE CURVATURA	
CÚPULA SEMIESFÉRICA	
	<p> $d1$ = directrices g = generatrices T = punto de tangencia Π = plano tangente $N1, N2$ = planos normales </p> <p>meridiano, paralelo, ecuador, polo, huso esférico.</p>
PARABOLOIDE	
	<p> $d1; d2$ = directrices g = generatrices T = punto de tangencia π = plano tangente $N1, N2$ = planos normales </p>
CONOIDE	
	<p> $d1; d2$ = directrices g = generatrices π = plano tangente $N1, N2$ = planos normales T = punto de tangencia </p>

1. ARCO APECHINADO 	2. ARCO BOTARETE O ARBOTANTE. 
<p>Cada uno de los arcos que achafanjan los ángulos de una planta poligonal, para pasar a otra de doble número de lados.</p>	<p>El que bota sobre el arranque de otro o de una bóveda, para absorber su empuje o acodándose sobre el botarel</p>
3. ARCO FAJÓN O PERPIAÑO. 	4. ARCO CRUCERO DIAGONAL U OJIVO. 
<p>El que sobresale del intradós de una bóveda de cañón.</p>	<p>Une en diagonal dos ángulos de una bóveda por arista o rincón de claustro.</p>
5. ARCO PRIMERO 	6. ARCO FORMERO Y ARCO TORAL. 
<p>Cada uno de los arcos frontales de una bóveda de intersección o nervada.</p>	<p>FORMERO: Arco primero (de una bóveda) paralelo al eje mayor. TORAL: Arco primero perpendicular al eje mayor.</p>
7. ARCOS DE LIGADURAS O CADENAS. 	8. ARCOS TERCELETES O BRAQUETONES. 
<p>Los que unen las claves de los arcos primeros y ojivos, para dar mayor estabilidad a la plementería.</p>	<p>En las bóvedas de crucería o nervadas, van desde el arranque a un punto intermedio de las ligaduras o cadenas.</p>

CAPÍTULO 4

ARMADURAS O CERCHAS

Como ya tenemos conocimiento, las armaduras o cerchas pueden ser identificadas de la siguiente manera:



Ref.: Fig. 12.2 Pág.: 185 "Diseño Simplificado de Estructuras de Madera" Parker-Ambrose

Estos tipos de armaduras pueden ser combinadas y usadas en la construcción de paneles, como también pueden ser usados independientemente para el uso de cerchas para techo, puentes, casas, etc; veamos algunas estructuras de este tipo



En este grafico se muestra un panel hecho de madera, combinando distintos tipos de armadura.



En este grafico se muestra un puente de armadura metálica tipo Pratt plana

CAPÍTULO 5

LINEAS DE INFLUENCIA

Viga Simplemente Apoyada – Carga Uniformemente Distribuida

$$R = V = \frac{q \cdot L}{2}$$

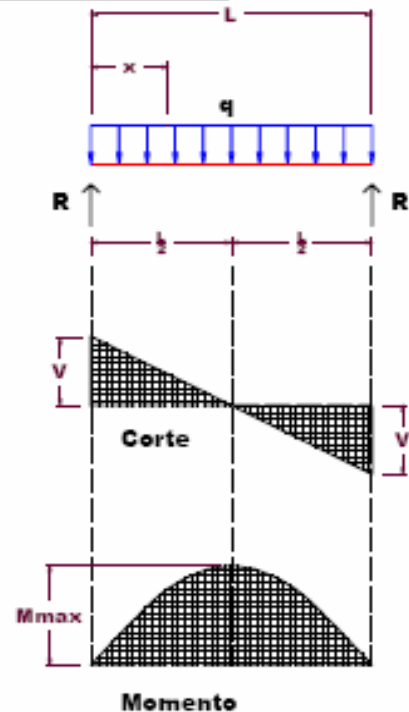
$$V_x = q \left(\frac{L}{2} - x \right)$$

$$M_{\max} = \frac{q \cdot L^2}{8}$$

$$M_x = \frac{q \cdot x}{2} (L - x)$$

$$f_{\max} (\text{en el centro}) = \frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I}$$

$$f_x = \frac{q \cdot x}{24 \cdot E \cdot I} (L^3 - 2 \cdot L \cdot x^2 + x^3)$$



Viga Simplemente Apoyada – Carga Uniforme Parcialmente Distribuida

$$R_1 = V_1 (\text{max. cuando } a < c) = \frac{q \cdot b}{2 \cdot L} (2 \cdot c + b)$$

$$R_2 = V_2 (\text{max. cuando } a > c) = \frac{q \cdot b}{2 \cdot L} (2 \cdot a + b)$$

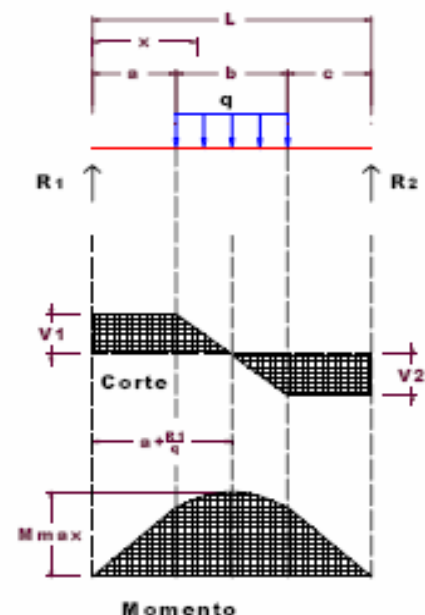
$$V_x (\text{cuando } x > a \text{ y } < (a + b)) = R_1 - q(x - a)$$

$$M_{\max} (\text{para } x = a + \frac{R_1}{q}) = R_1 \left(a + \frac{R_1}{2 \cdot q} \right)$$

$$M_x (\text{cuando } x < a) = R_1 \cdot x$$

$$M_x (\text{cuando } x > a \text{ y } < (a + b)) = R_1 \cdot x - \frac{q}{2} (x - a)^2$$

$$M_x (\text{cuando } x > (a + b)) = R_2 (L - x)$$



Viga Simplemente Apoyada – Carga Uniforme Parcialmente Distribuida En Un
Extremo

$$R_1 = V_1 = \frac{q \cdot a}{2 \cdot L} (2 \cdot L - a)$$

$$R_2 = V_2 = \frac{q \cdot a^2}{2 \cdot L}$$

$$V_x (\text{cuando } x < a) = R_1 - q \cdot x$$

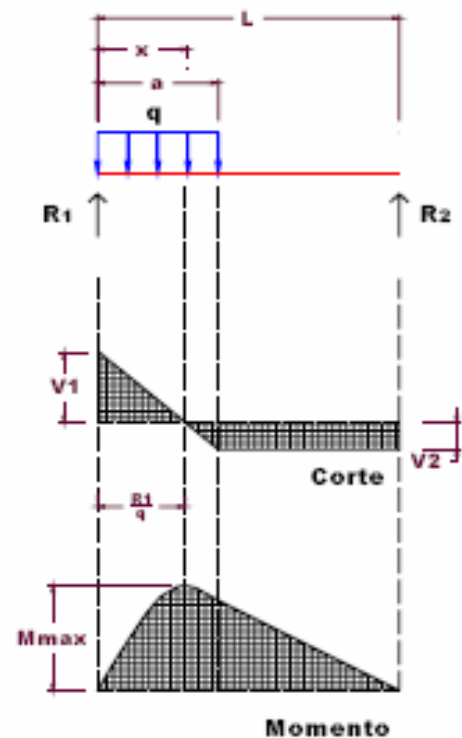
$$M_{\max} \left(\text{para } x = \frac{R_1}{q} \right) = \frac{R_1^2}{2 \cdot q}$$

$$M_x (\text{cuando } x < a) = R_1 \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}$$

$$M_x (\text{cuando } x > a) = R_2 (L - x)$$

$$f_x (\text{cuando } x < a) = \frac{q \cdot x}{24 E \cdot I \cdot L} (a^2 (2L - a)^2 - 2a \cdot x^2 (2L - a) + L \cdot x^3)$$

$$f_x (\text{cuando } x > a) = \frac{q \cdot a^2 (L - x)}{24 E \cdot I \cdot L} (4x \cdot L - 2x^2 - a^2)$$



Viga Simplemente Apoyada – Carga Uniforme Parcialmente Distribuida En Cada
Extremo

$$R_1 = V_1 = \frac{q_1 \cdot a(2 \cdot L - a) + q_2 \cdot c^2}{2 \cdot L}$$

$$R_2 = V_2 = \frac{q_2 \cdot c(2 \cdot L - c) + q_1 \cdot a^2}{2 \cdot L}$$

$$V_x (\text{cuando } x < a) = R_1 - q_1 \cdot x$$

$$V_x (\text{cuando } x > a \text{ y } < (a + b)) = R_1 - q_1 \cdot a$$

$$V_x (\text{cuando } x > (a + b)) = R_2 - q_2 (L - x)$$

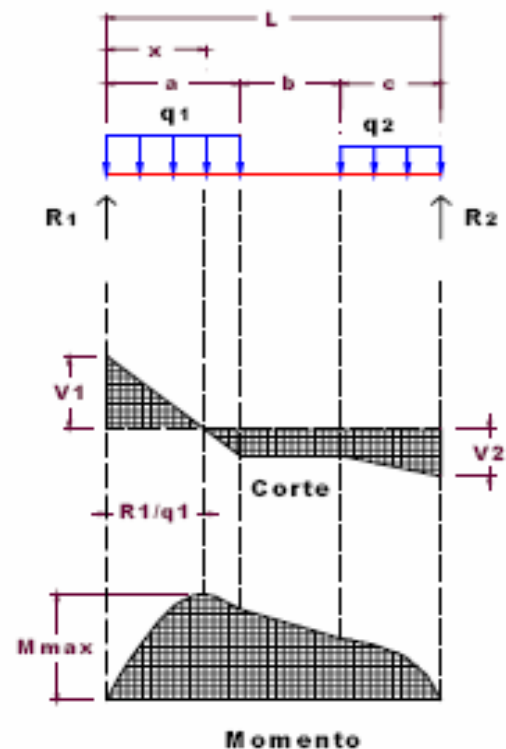
$$M_{\max} \left(\text{para } x = \frac{R_1}{q_1} \text{ cuando } R_1 < q_1 \cdot a \right) = \frac{R_1^2}{2 \cdot q_1}$$

$$M_{\max} \left(\text{para } x = L - \frac{R_2}{q_2} \text{ cuando } R_2 < q_2 \cdot c \right) = \frac{R_2^2}{2 \cdot q_2}$$

$$M_x (\text{cuando } x < a) = R_1 \cdot x - \frac{q_1 \cdot x^2}{2}$$

$$M_x (\text{cuando } x > a \text{ y } < (a + b)) = R_1 \cdot x - \frac{q_1 \cdot a}{2} (2 \cdot x - a)$$

$$M_x (\text{cuando } x > (a + b)) = R_2 (L - x) - \frac{q_2 (L - x)^2}{2}$$



Viga Simplemente Apoyada – Carga Aumentando Uniformemente Desde Cero Hasta “q”; De Un Extremo A Otro.

En estas ecuaciones: $W = \frac{q \cdot L}{2}$

$$R_1 = V_1 = \frac{W}{3}$$

$$R_2 = V_2 = \frac{2 \cdot W}{3}$$

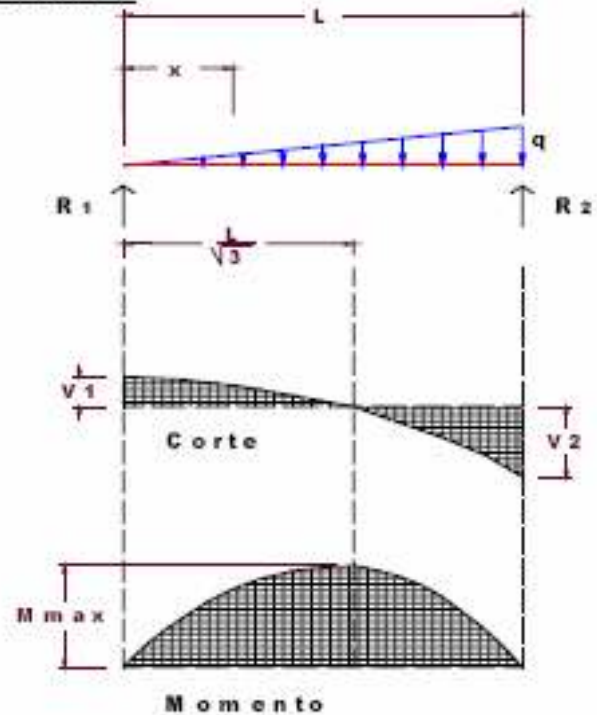
$$V_x = \frac{W}{3} - \frac{W \cdot x^2}{L^2}$$

$$M_{\max} \left(\text{para } x = \frac{L}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2 \cdot W \cdot L}{9 \cdot \sqrt{3}}$$

$$M_x = \frac{W \cdot x}{3 \cdot L^2} (L^2 - x^2)$$

$$f_{\max} \left(\text{para } x = L \cdot \sqrt{1 - \sqrt{\frac{8}{15}}} \right) = 0.01304 \frac{W \cdot L^3}{E \cdot I}$$

$$f_x = \frac{W \cdot x}{180 \cdot E \cdot I \cdot L^2} (3 \cdot x^4 - 10 \cdot L^2 \cdot x^2 + 7 \cdot L^4)$$



Viga Simplemente Apoyada – Carga Aumentando Desde Cero Uniformemente Hasta “q”; Desde Ambos Extremos Al Centro.

En estas ecuaciones: $W = \frac{q \cdot L}{2}$

$$R = V = \frac{W}{2}$$

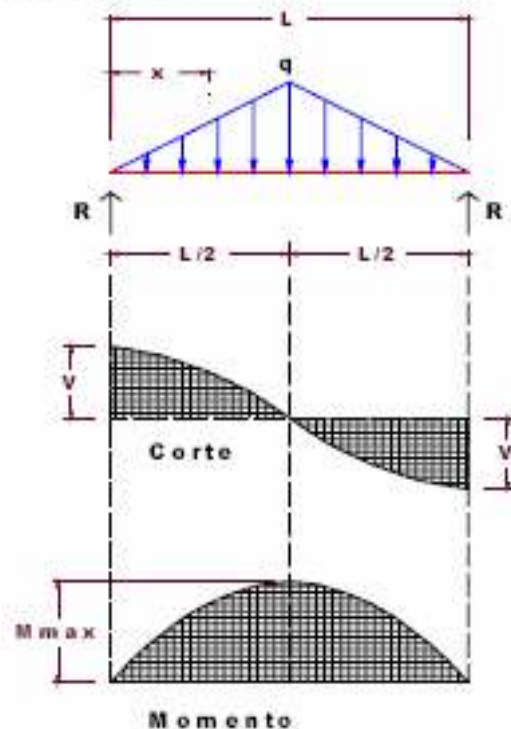
$$V_x \left(\text{cuando } x < \frac{L}{2} \right) = \frac{W}{2 \cdot L^2} (L^2 - 4 \cdot x^2)$$

$$M_{\max} (\text{en el centro}) = \frac{W \cdot L}{6}$$

$$M_x \left(\text{cuando } x < \frac{L}{2} \right) = W \cdot x \left(\frac{1}{2} - \frac{2 \cdot x^2}{3 \cdot L^2} \right)$$

$$f_{\max} (\text{en el centro}) = \frac{W \cdot L^3}{60 \cdot E \cdot I}$$

$$f_x = \frac{W \cdot x}{480 \cdot E \cdot I \cdot L^2} (5 \cdot L^2 - 4 \cdot x^2)^2$$



Viga Simplemente Apoyada – Carga Concentrada En El Centro De La Viga

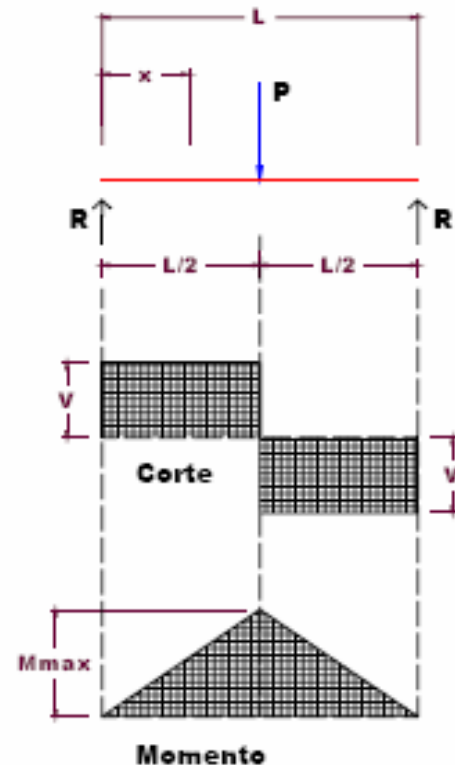
$$R = V = \frac{P}{2}$$

$$M_{\max}(\text{en el punto de aplicacion de } P) = \frac{P \cdot L}{4}$$

$$M_x \left(\text{cuando } x < \frac{L}{2} \right) = \frac{P \cdot x}{2}$$

$$f_{\max}(\text{en el punto de aplicacion de } P) = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I}$$

$$f_x \left(\text{cuando } x < \frac{L}{2} \right) = \frac{P \cdot x}{48 \cdot E \cdot I} (3 \cdot L^2 - 4 \cdot x^2)$$



Viga Simplemente Apoyada – Carga Concentrada En Cualquier Punto De La Viga

$$R_1 = V_1(\text{max. cuando } a < b) = \frac{P \cdot b}{L}$$

$$R_2 = V_2(\text{max. cuando } a > b) = \frac{P \cdot a}{L}$$

$$M_{\max}(\text{en el punto de aplicacion de } P) = \frac{P \cdot a \cdot b}{L}$$

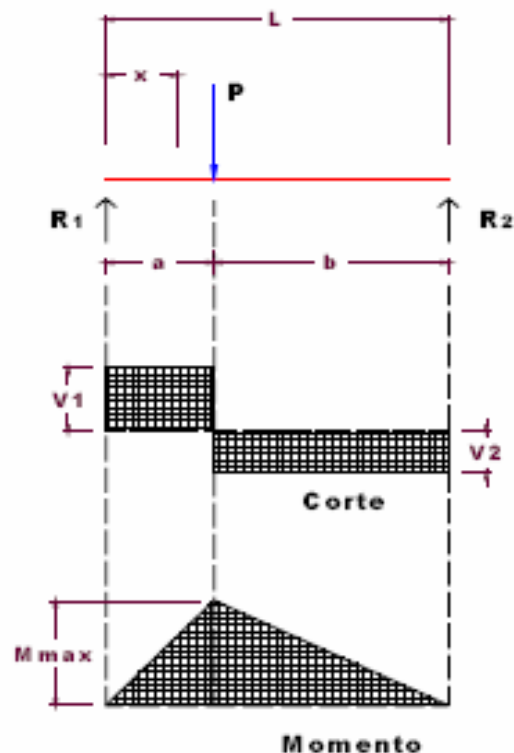
$$M_x(\text{cuando } x < a) = \frac{P \cdot b \cdot x}{L}$$

$$f_{\max} \left(\text{en } x = \sqrt{\frac{a(a+2b)}{3}} \text{ cuando } a > b \right) = \frac{P \cdot a \cdot b(a+2b) \sqrt{3a(a+2b)}}{27 E \cdot I \cdot L}$$

$$f_a(\text{en el punto de aplicacion de } P) = \frac{P \cdot a^2 \cdot b^2}{3 \cdot E \cdot I \cdot L}$$

$$f_x(\text{cuando } x < a) = \frac{P \cdot b \cdot x}{6 \cdot E \cdot I \cdot L} (L^2 - b^2 - x^2)$$

$$f_x(\text{cuando } x > a) = \frac{P \cdot a(L-x)}{6 \cdot E \cdot I \cdot L} (2 \cdot L \cdot x - x^2 - a^2)$$



Viga Simplemente Apoyada – Dos Cargas Concentradas Iguales, Ubicadas Simétricamente Respecto A Los Extremos

$$R = V = P$$

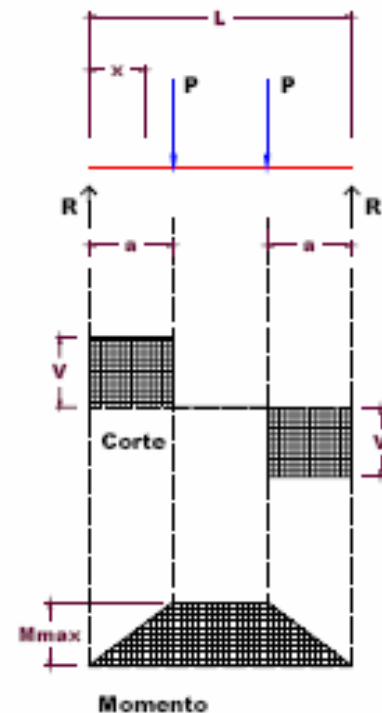
$$M_{\max}(\text{ubicado entre las cargas}) = P \cdot a$$

$$M_x(\text{cuando } x < a) = P \cdot x$$

$$f_{\max}(\text{ubicado en el centro}) = \frac{P \cdot a}{24 \cdot E \cdot I} (3 \cdot L^2 - 4 \cdot a^2)$$

$$f_x(\text{cuando } x < a) = \frac{P \cdot x}{6 \cdot E \cdot I} (3 \cdot L \cdot a - 3 \cdot a^2 - x^2)$$

$$f_x(\text{cuando } x > a \text{ y } < (L-a)) = \frac{P \cdot a}{6 \cdot E \cdot I} (3 \cdot L \cdot x - 3 \cdot x^2 - a^2)$$



Viga Simplemente Apoyada – Dos Cargas Concentradas Iguales, Ubicadas Asimétricamente Respecto A Los Extremos

$$R_1 = V_1(\text{max cuando } a < b) = \frac{P}{L} (L - a + b)$$

$$R_2 = V_2(\text{max cuando } a > b) = \frac{P}{L} (L - b + a)$$

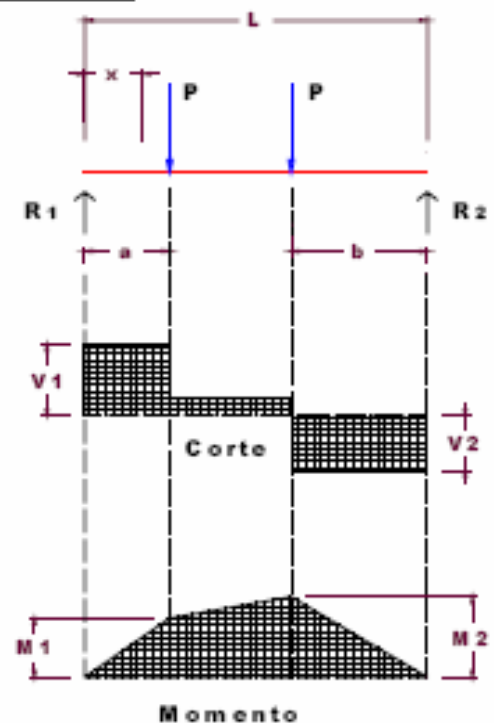
$$V_x(\text{cuando } x > a \text{ y } < (L-b)) = \frac{P}{L} (b - a)$$

$$M_1(\text{max cuando } a > b) = R_1 \cdot a$$

$$M_2(\text{max cuando } a < b) = R_2 \cdot b$$

$$M_x(\text{cuando } x < a) = R_1 \cdot x$$

$$M_1(\text{cuando } x > a \text{ y } < (L-b)) = R_1 \cdot x - P(x - a)$$



Viga Simplemente Apoyada – Dos Cargas Concentradas No Iguales, Ubicadas Asimétricamente Respecto A Los Extremos

$$R_1 = V_1 = \frac{P_1(L-a) + P_2 \cdot b}{L}$$

$$R_2 = V_2 = \frac{P_1 \cdot a + P_2(L-b)}{L}$$

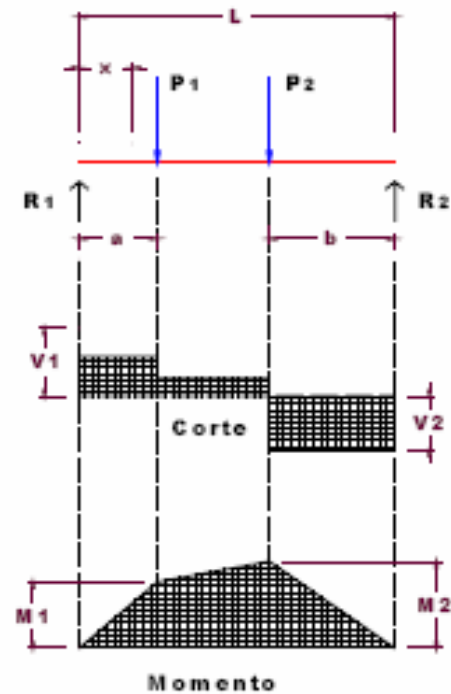
$$V_1(\text{cuando } x > a \text{ y } < (L-b)) = R_1 - P_1$$

$$M_1(\text{max cuando } R_1 < P_1) = R_1 \cdot a$$

$$M_2(\text{max cuando } R_2 < P_2) = R_2 \cdot b$$

$$M_x(\text{cuando } x < a) = R_1 \cdot x$$

$$M_x(\text{cuando } x > a \text{ y } < (L-b)) = R_1 \cdot x - P_1(x-a)$$



Viga En Voladizo – Carga Uniformemente Distribuida

$$R = V = q \cdot L$$

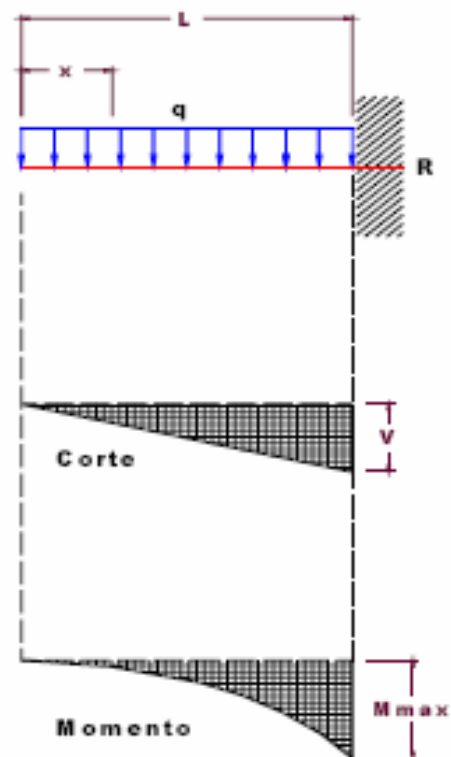
$$V_x = q \cdot x$$

$$M_{\max}(\text{en extremo empotrado}) = \frac{q \cdot L^2}{2}$$

$$M_x = \frac{q \cdot x^2}{2}$$

$$f_{\max}(\text{en extremo libre}) = \frac{q \cdot L^4}{8 \cdot E \cdot I}$$

$$f_x = \frac{q}{24 \cdot E \cdot I} (x^4 - 4 \cdot L^3 \cdot x + 3 \cdot L^4)$$



Viga En Voladizo – Carga Concentrada En El Extremo Libre

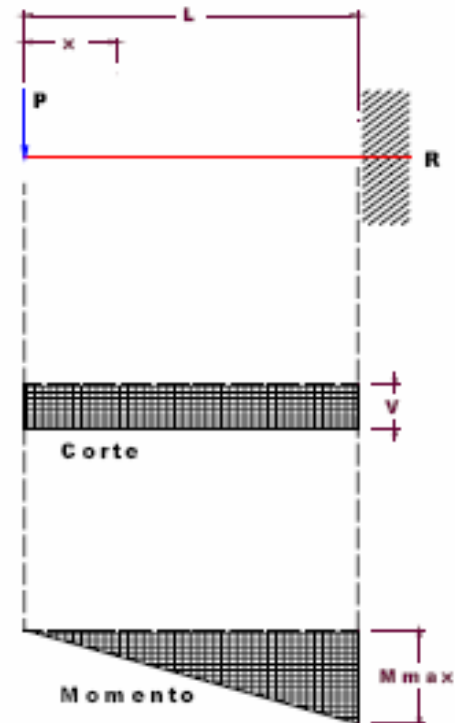
$$R = V = P$$

$$M_{\max} (\text{en extremo empotrado}) = P \cdot L$$

$$M_x = P \cdot x$$

$$f_{\max} (\text{en extremo libre}) = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

$$f_x = \frac{P}{6 \cdot E \cdot I} (2 \cdot L^3 - 3 \cdot L^2 \cdot x + x^3)$$



Viga En Voladizo – Carga Concentrada En Cualquier Punto De La Viga

$$R = V = P$$

$$M_{\max} (\text{en extremo empotrado}) = P \cdot b$$

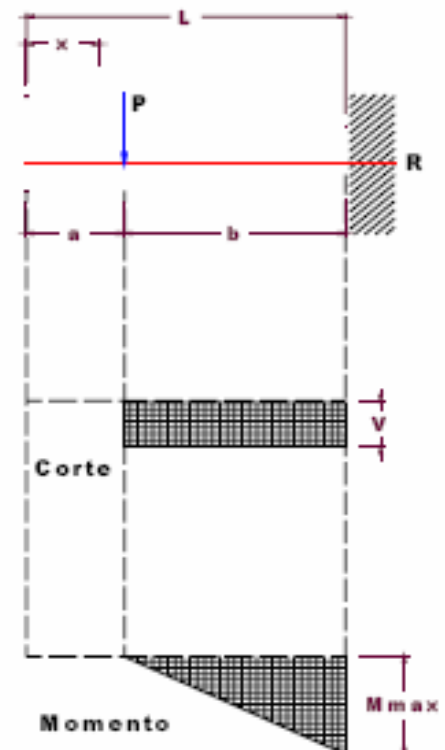
$$M_x (\text{cuando } x > a) = P(x - a)$$

$$f_{\max} (\text{en extremo libre}) = \frac{P \cdot b^2}{6 \cdot E \cdot I} (3 \cdot L - b)$$

$$f_a (\text{en el punto de aplicacion de } P) = \frac{P \cdot b^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

$$f_x (\text{cuando } x < a) = \frac{P \cdot b^2}{6 \cdot E \cdot I} (3 \cdot L - 3 \cdot x - b)$$

$$f_x (\text{cuando } x > a) = \frac{P \cdot (L - x)^2}{6 \cdot E \cdot I} (3 \cdot b - L + x)$$



Viga Empotrada Apoyada- Carga Uniformemente Distribuida

$$R_1 = V_1 = \frac{3 \cdot q \cdot L}{8} \quad ; \quad R_2 = V_2 = \frac{5 \cdot q \cdot L}{8}$$

$$V_x = R_1 - q \cdot x$$

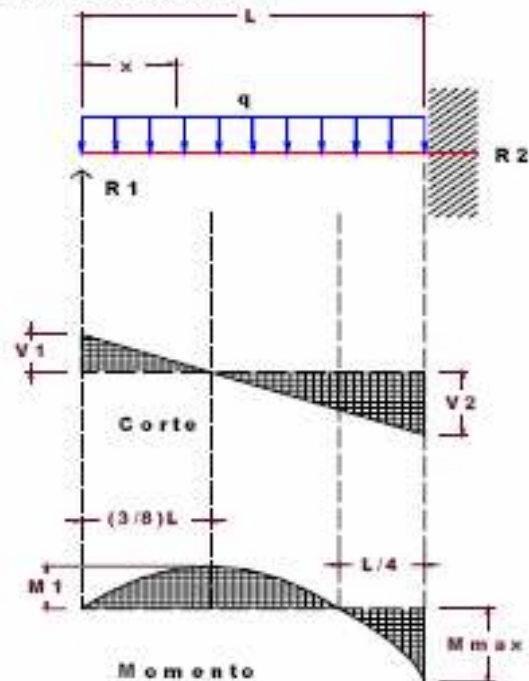
$$M_{\max} = \frac{q \cdot L^2}{8}$$

$$M_1 \left(\text{en } x = \frac{3}{8} \cdot L \right) = \frac{9}{128} \cdot q \cdot L^2$$

$$M_x = R_1 \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}$$

$$f_{\max} \left(\text{en } x = \frac{L}{16} \cdot (1 + \sqrt{33}) \right) = \frac{q \cdot L^4}{185 \cdot E \cdot I}$$

$$f_x = \frac{q \cdot x}{48 \cdot E \cdot I} (L^3 - 3 \cdot L \cdot x^2 + 2 \cdot x^3)$$



Viga Empotrada Apoyada- Carga Concentrada En El Centro De La Viga

$$R_1 = V_1 = \frac{5 \cdot P}{16} \quad ; \quad R_2 = V_2 = \frac{11 \cdot P}{16}$$

$$M_{\max} (\text{en extremo empotrado}) = \frac{3 \cdot P \cdot L}{16}$$

$$M_1 (\text{en el punto de aplicacion de } P) = \frac{5 \cdot P \cdot L}{32}$$

$$M_x (\text{cuando } x < \frac{L}{2}) = \frac{5 \cdot P \cdot x}{16}$$

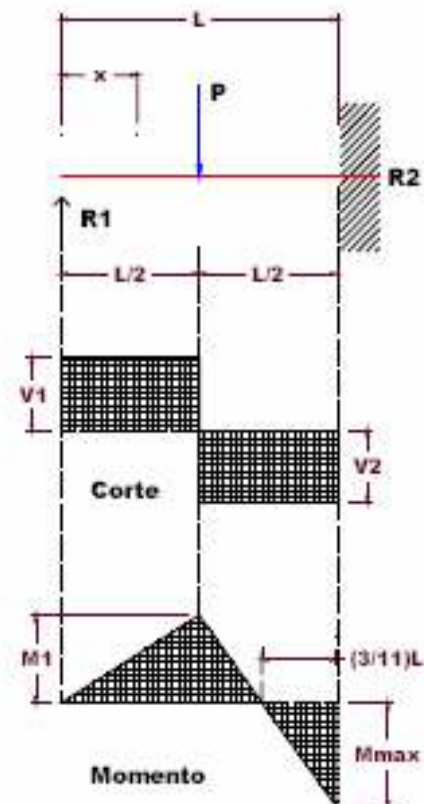
$$M_x (\text{cuando } x > \frac{L}{2}) = P \left(\frac{L}{2} - \frac{11 \cdot x}{16} \right)$$

$$f_{\max} \left(\text{en } x = L \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} \right) = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I \cdot \sqrt{5}}$$

$$f_p (\text{en el punto de aplicacion de } P) = \frac{7 \cdot P \cdot L^3}{768 \cdot E \cdot I}$$

$$f_x (\text{cuando } x < \frac{L}{2}) = \frac{P \cdot x}{96 \cdot E \cdot I} (3 \cdot L^2 - 5 \cdot x^2)$$

$$f_x (\text{cuando } x > \frac{L}{2}) = \frac{P}{96 \cdot E \cdot I} (x - L)^2 (11 \cdot x - 2 \cdot L)$$



Viga Empotrada En Un Extremo Y Apoyada En El Otro – Carga Puntual En Cualquier Punto

$$R_1 = V_1 = \frac{P \cdot b^2}{2 \cdot L^3} \cdot (a + 2 \cdot L) ; R_2 = V_2 = \frac{P \cdot a}{2 \cdot L^3} \cdot (3 \cdot L^2 - a^2)$$

$$M_1 (\text{En el punto de carga}) = R_1 \cdot a$$

$$M_2 (\text{En el extremo empotrado}) = \frac{P \cdot a \cdot b}{2 \cdot L^2} (a + L)$$

$$M_x (\text{Cuando } x < a) = R_1 \cdot x$$

$$M_x (\text{Cuando } x > a) = R_1 \cdot x - P \cdot (x - a)$$

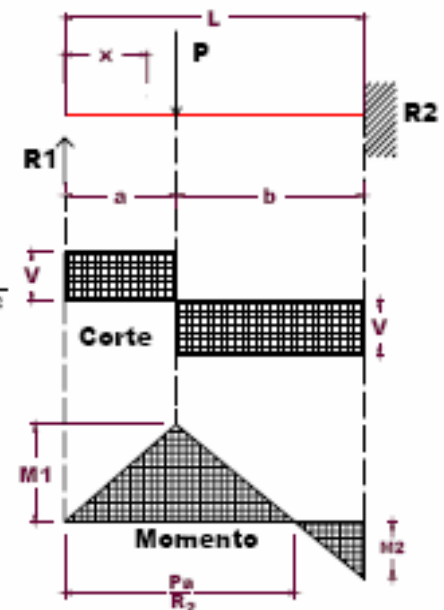
$$f_{\max} (\text{Cuando } a < 0.414 \cdot L \text{ en } x = L \cdot \frac{L^2 + a^2}{3 \cdot L^2 - a^2}) = \frac{P \cdot a}{3 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{(L^2 - a^2)^3}{(3 \cdot L^2 - a^2)^2}$$

$$f_{\max} (\text{Cuando } a > 0.414L \text{ en } x = L \cdot \sqrt{\frac{a}{2 \cdot L + a}}) = \frac{P \cdot a \cdot b^2}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \sqrt{\frac{a}{2 \cdot L + a}}$$

$$f_a (\text{En el punto de carga}) = \frac{P \cdot a^2 \cdot b^3}{12 \cdot E \cdot I \cdot L^3} (3L + a)$$

$$f_x (\text{Cuando } x < a) = \frac{P \cdot b^2 \cdot x}{12 \cdot E \cdot I \cdot L^3} (3aL^2 - 2Lx^2 - ax^2)$$

$$f_x (\text{Cuando } x > a) = \frac{P \cdot a}{12 \cdot E \cdot I \cdot L^3} (L - x)^2 (3L^2x - a^2x - 2a^2L)$$



Viga Apoyada Con Volado A Un Extremo-Carga Uniformemente Distribuida

$$R_1 = V_1 = \frac{q}{2 \cdot L} (L^2 - a^2) ; R_2 = V_2 + V_3 = \frac{q}{2 \cdot L} (L + a)^2$$

$$V_3 = \frac{q}{2 \cdot L} (L^2 + a^2) ; V_2 = q \cdot a$$

$$V_x (\text{Entre apoyos}) = R_1 - q \cdot x$$

$$V_{x_1} (\text{Para el volado}) = q \cdot (a - x_1)$$

$$M_1 (\text{En } x = \frac{L}{2} \left[1 - \frac{a^2}{L^2} \right]) = \frac{q}{8L^3} \cdot (L + a)^2 \cdot (L - a)^2$$

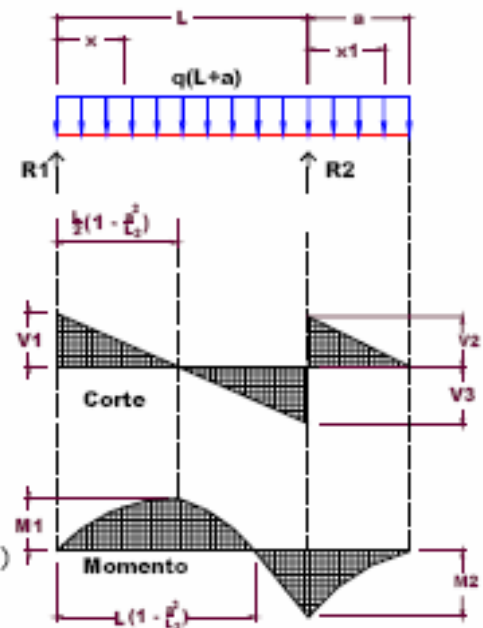
$$M_2 (\text{En } R_2) = \frac{q \cdot a^2}{2}$$

$$M_x (\text{Entre apoyos}) = \frac{q \cdot x}{2L} (L^2 - a^2 - x \cdot L)$$

$$M_{x_1} (\text{Para el volado}) = \frac{q}{2} (a - x_1)^2$$

$$f_x (\text{Entre apoyos}) = \frac{q \cdot x}{24 \cdot E \cdot I \cdot L} (L^4 - 2L^2x^2 + Lx^3 - 2a^2L^2 + 2a^2x^2)$$

$$f_{x_1} (\text{Para el volado}) = \frac{q \cdot x_1}{24 \cdot E \cdot I} (4a^2L - L^3 + 6a^2x_1 - 4ax_1^2 + x_1^3)$$



Viga Apoyada Con Volado A Un Extremo – Carga Uniforme Al Extremo Del Volado

$$R_1 = V_1 = \frac{q \cdot a^2}{2 \cdot L}$$

$$R_2 = V_1 + V_2 = \frac{q \cdot a}{2 \cdot L} (2 \cdot L + a)$$

$$V_2 = q \cdot a$$

$$V_{x_1} (\text{Para el volado}) = q \cdot (a - x_1)$$

$$M_{\max} (\text{En } R_2) = \frac{q \cdot a^2}{2}$$

$$M_x (\text{Entre apoyos}) = \frac{q \cdot a^2 \cdot x}{2L}$$

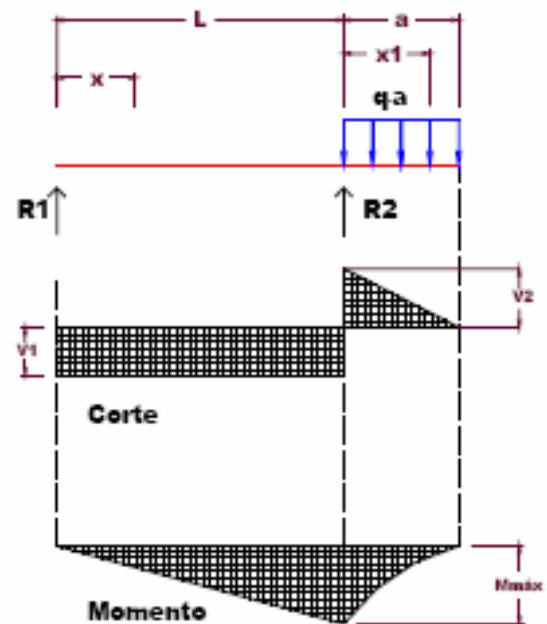
$$M_{x_1} (\text{Para el volado}) = \frac{q}{2} (a - x_1)^2$$

$$f_{\max} (\text{Entre apoyos en } x = \frac{L}{\sqrt{3}}) = \frac{q \cdot a^2 \cdot L^2}{18\sqrt{3} \cdot E \cdot I}$$

$$f_{\max} (\text{Para el volado en } x_1 = a) = \frac{q \cdot a^3}{24 \cdot E \cdot I} (4L + 3a)$$

$$f_x (\text{Entre apoyos}) = \frac{q \cdot a^2 \cdot x}{12 \cdot E \cdot I \cdot L} (L^2 - x^2)$$

$$f_{x_1} (\text{Para el volado}) = \frac{q \cdot x_1}{24 \cdot E \cdot I} (4a^2 L + 6a^2 x_1 - 4ax_1^2 + x_1^3)$$



Viga Apoyada Con Volado A Un Extremo-Carga Puntual Al Extremo del Volado

$$R_1 = V_1 = \frac{P \cdot a}{L}; \quad R_2 = V_1 + V_2 = \frac{P}{L} (L + a)$$

$$V_2 = P$$

$$M_{\max} (\text{En } R_2) = P \cdot a$$

$$M_x (\text{Entre apoyos}) = \frac{P \cdot a \cdot x}{L}$$

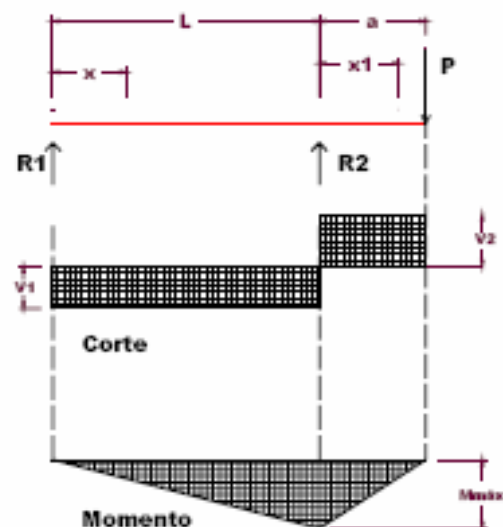
$$M_{x_1} (\text{Para el volado}) = P(a - x_1)$$

$$f_{\max} (\text{Entre apoyos en } x = \frac{L}{\sqrt{3}}) = \frac{P \cdot a \cdot L^2}{9\sqrt{3} \cdot E \cdot I}$$

$$f_{\max} (\text{Para el volado en } x_1 = a) = \frac{P \cdot a^2}{3 \cdot E \cdot I} (L + a)$$

$$f_x (\text{Entre apoyos}) = \frac{P \cdot a \cdot x}{6 \cdot E \cdot I \cdot L} (L^2 - x^2)$$

$$f_{x_1} (\text{Para el volado}) = \frac{P \cdot x_1}{6 \cdot E \cdot I} (2aL + 3ax_1 - x_1^2)$$



**Viga Apoyada Con Volado A Un Extremo – Carga Puntual en Cualquier Punto
Entre Apoyos**

$$R_1 = V_1 (\text{max cuando } a < b) = \frac{P \cdot b}{L}$$

$$R_2 = V_2 (\text{max cuando } a > b) = \frac{P \cdot a}{L}$$

$$M_{\text{max}} (\text{En el punto de carga}) = \frac{P \cdot a \cdot b}{L}$$

$$M_x (\text{Cuando } x < a) = \frac{P \cdot b \cdot x}{L}$$

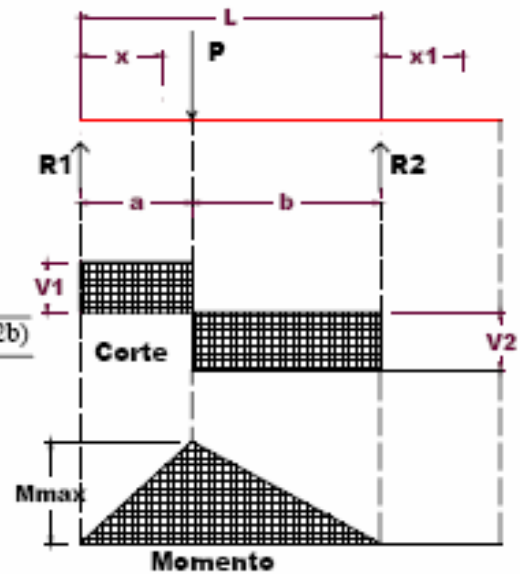
$$f_{\text{max}} (\text{En } x = \sqrt{\frac{a(a+2b)}{3}} \text{ cuando } a > b) = \frac{Pab(a+2b) \cdot \sqrt{3a \cdot (a+2b)}}{27 \cdot E \cdot I \cdot L}$$

$$f_a (\text{En el punto de carga}) = \frac{P \cdot a^2 \cdot b^2}{3 \cdot E \cdot I \cdot L}$$

$$f_x (\text{Cuando } x < a) = \frac{P \cdot b \cdot x}{6 \cdot E \cdot I \cdot L} (L^2 - b^2 - x^2)$$

$$f_x (\text{Cuando } x > a) = \frac{P \cdot a \cdot (L-x)}{6 \cdot E \cdot I \cdot L} (2 \cdot L \cdot x - x^2 - a^2)$$

$$f_{x_1} = \frac{P \cdot a \cdot b \cdot x_1}{6 \cdot E \cdot I \cdot L} (L + a)$$



Viga Con Volado En Ambos Extremos – Volados Diferentes - Carga Uniformemente Distribuida

$$R_1 = \frac{q \cdot L}{2 \cdot b} (L - 2c); \quad R_2 = \frac{q \cdot L}{2 \cdot b} (L - 2a)$$

$$V_1 = q \cdot a; \quad V_2 = R_1 - V_1$$

$$V_3 = R_2 - V_4; \quad V_4 = q \cdot c$$

$$V_x (\text{Cuando } x < L) = R_1 - q(a + x_1)$$

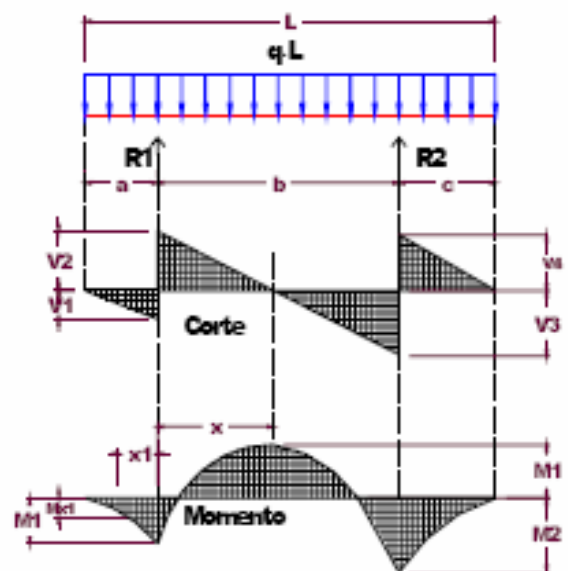
$$V_{x_1} (\text{Para el volado}) = V_1 - q \cdot x_1$$

$$V_m (\text{Cuando } a < c) = R_2 - q \cdot c$$

$$M_1 = -\frac{q \cdot a^2}{2}; \quad M_2 = -\frac{q \cdot c^2}{2}$$

$$M_3 = R_1 \left(\frac{R_1}{2q} - a \right)$$

$$M_x (\text{max cuando } x = \frac{R_1}{q} - a) = R_1 \cdot x - \frac{q(a+x)^2}{2}$$



Viga Empotrada En Ambos Extremos – Carga Uniformemente Distribuida

$$R = V = \frac{q \cdot L}{2}$$

$$V_x = q \cdot \left(\frac{L}{2} - x \right)$$

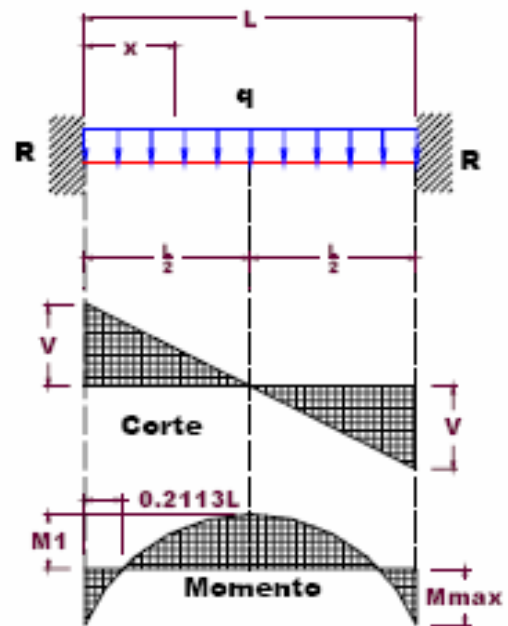
$$M_{\max}(\text{en los extremos}) = \frac{q \cdot L^2}{12}$$

$$M_1(\text{Al centro}) = \frac{q \cdot L^2}{24}$$

$$M_x = \frac{q}{12} (6Lx - L^2 - 6x^2)$$

$$f_{\max}(\text{Al centro}) = \frac{q \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I}$$

$$f_x = \frac{q \cdot x^2}{24 \cdot E \cdot I} (L - x)^2$$



Viga Empotrada En Ambos Extremos – Carga Puntual En El Centro

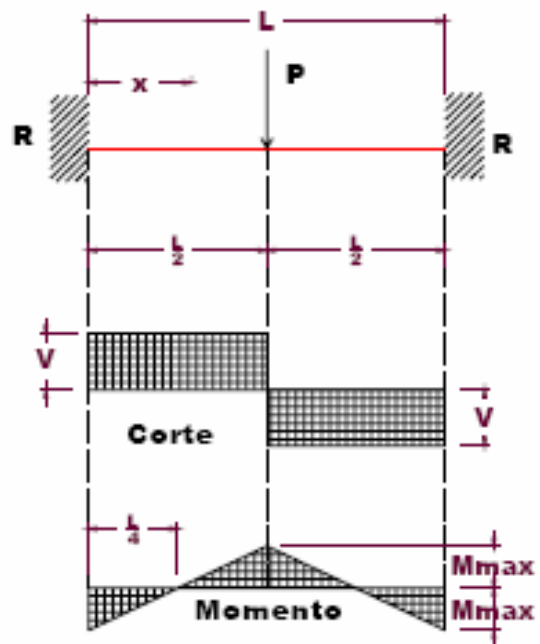
$$R = V = \frac{P}{2}$$

$$M_{\max}(\text{Al centro y en los extremos}) = \frac{P \cdot L}{8}$$

$$M_x(\text{Cuando } x < \frac{L}{2}) = \frac{P}{8} (4x - L)$$

$$f_{\max}(\text{Al centro}) = \frac{P \cdot L^3}{192 \cdot E \cdot I}$$

$$f_x(\text{Cuando } x < \frac{L}{2}) = \frac{P \cdot x^2}{48 \cdot E \cdot I} (3L - 4x)$$



Viga Empotrada En Ambos Extremos – Carga Puntual En Cualquier Punto

$$R_1 = V_1 (\text{max cuando } a < b) = \frac{P \cdot b^2}{L^3} (3a + b)$$

$$R_2 = V_2 (\text{max cuando } a > b) = \frac{P \cdot a^2}{L^3} (a + 3b)$$

$$M_1 (\text{max cuando } a < b) = \frac{P \cdot a \cdot b^2}{L^2}$$

$$M_2 (\text{max cuando } a > b) = \frac{P \cdot a^2 \cdot b}{L^2}$$

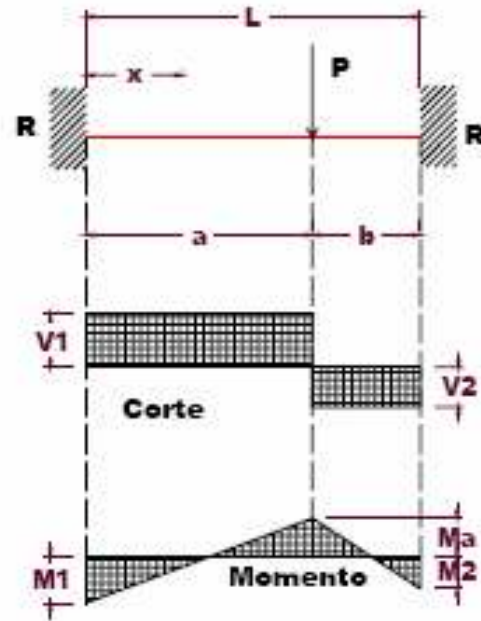
$$M_s (\text{En el punto de carga}) = \frac{2 \cdot P \cdot a^2 \cdot b^2}{L^3}$$

$$M_x (\text{Cuando } x < a) = R_1 \cdot x - \frac{P \cdot a \cdot b^2}{L^2}$$

$$f_{\text{max}} (\text{Cuando } a > b \text{ en } x = \frac{2 \cdot a \cdot L}{3a + b}) = \frac{2Pa^2b^2}{3 \cdot E \cdot I \cdot (3a + b)^2}$$

$$f_s (\text{En el punto de carga}) = \frac{P \cdot a^2 \cdot b^2}{3 \cdot E \cdot I \cdot L^3}$$

$$f_x (\text{Cuando } x < a) = \frac{P \cdot b^2 \cdot x^2}{6 \cdot E \cdot I \cdot L^3} (3aL - 3ax - bx)$$



Viga Continua – Dos Tramos Iguales – Carga Distribuida Uniformemente En Un Tramo

$$R_1 = V_1 = \frac{7}{16} \cdot q \cdot L$$

$$R_2 = V_2 + V_3 = \frac{5}{8} \cdot q \cdot L$$

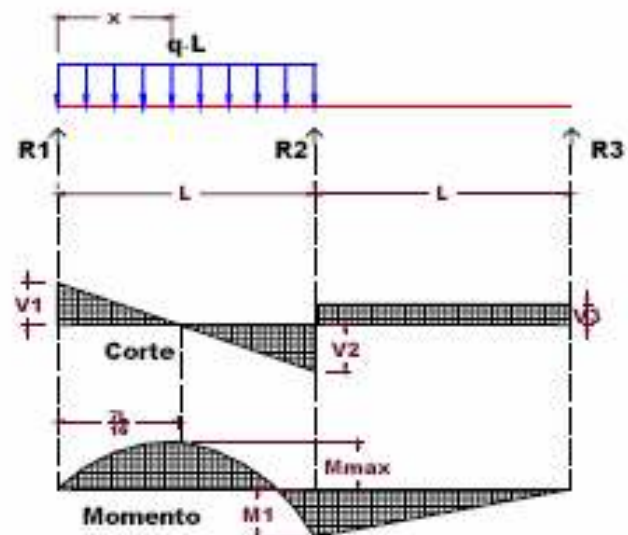
$$R_3 = V_3 = -\frac{1}{16} \cdot q \cdot L$$

$$V_2 = \frac{9}{16} \cdot q \cdot L$$

$$M_{\text{max}} (\text{En } x = \frac{7}{16} \cdot L) = \frac{49}{512} \cdot q \cdot L^2$$

$$M_1 (\text{En el apoyo } R_2) = \frac{1}{16} \cdot q \cdot L^2$$

$$M_x (\text{Cuando } x < L) = \frac{q \cdot x}{16} (7L - 8x)$$



Viga Continua – Dos Tramos Iguales – Carga Puntual Al Centro De Un Tramo

$$R_1 = V_1 = \frac{13}{32} \cdot P$$

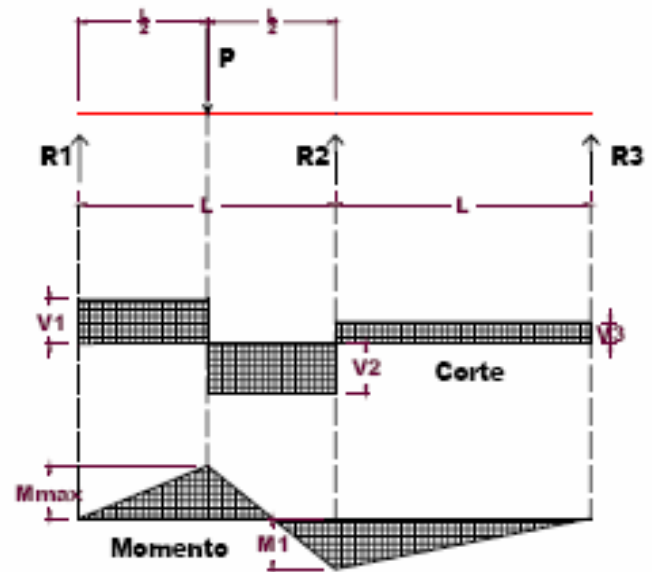
$$R_2 = V_2 + V_3 = \frac{11}{16} \cdot P$$

$$R_3 = V_3 = -\frac{3}{32} \cdot P$$

$$V_2 = \frac{19}{32} \cdot P$$

$$M_{\max}(\text{En el punto de carga}) = \frac{13}{64} \cdot P \cdot L$$

$$M_1(\text{En el apoyo } R_2) = \frac{3}{32} \cdot P \cdot L$$



Viga Continua – Dos Tramos Iguales – Carga Puntual En Cualquier Punto De Un Tramo

$$R_1 = V_1 = \frac{P \cdot b}{4 \cdot L^3} (4L^2 - a(L + a))$$

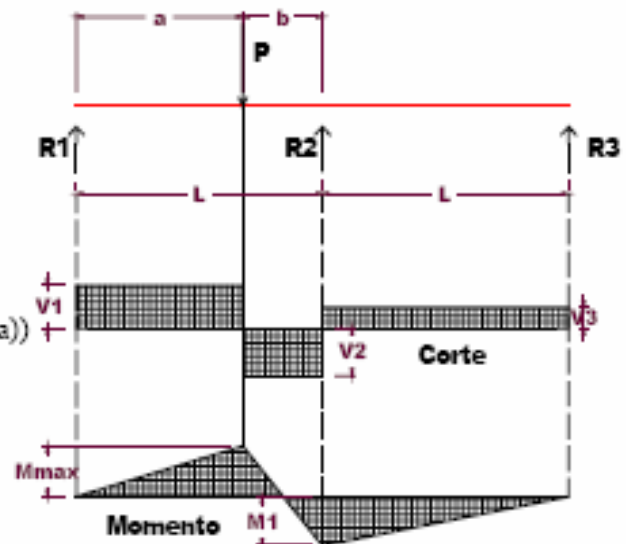
$$R_2 = V_2 + V_3 = \frac{P \cdot a}{2 \cdot L^3} (2L^2 - b(L + a))$$

$$R_3 = V_3 = -\frac{P \cdot a \cdot b}{4 \cdot L^3} (L + a)$$

$$V_2 = \frac{P \cdot a}{4 \cdot L^3} (4L^2 + b(L + a))$$

$$M_{\max}(\text{En el punto de carga}) = \frac{P \cdot a \cdot b}{4 \cdot L^3} (4L^2 - a \cdot (L + a))$$

$$M_1(\text{En el apoyo } R_2) = \frac{P \cdot a \cdot b}{4 \cdot L^3} (L + a)$$



Viga Continua – Dos Tramos Iguales – Carga Uniformemente Distribuida

$$R_1 = V_1 = R_3 = V_3 = \frac{3}{8} \cdot q \cdot L$$

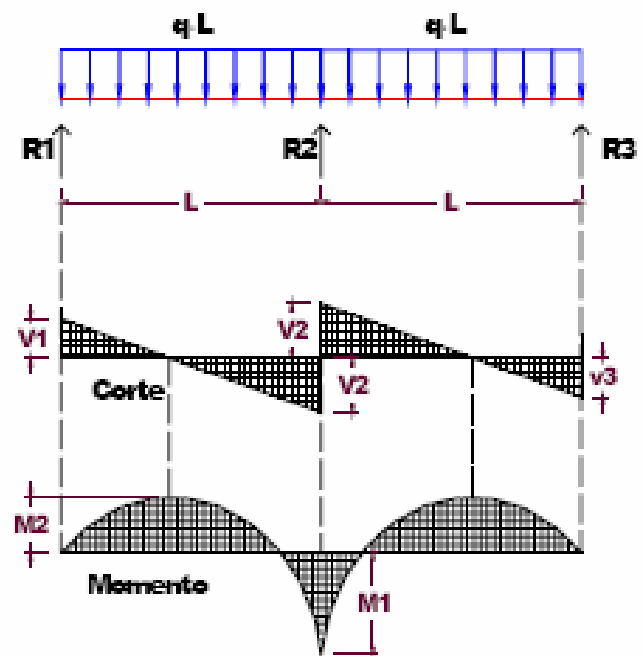
$$R_2 = \frac{10}{8} \cdot q \cdot L$$

$$V_2 = V_{\max} = \frac{5}{8} \cdot q \cdot L$$

$$M_1 = \frac{q \cdot L^2}{8}$$

$$M_2 \left(\text{En } \frac{3L}{8} \right) = \frac{9 \cdot q \cdot L^2}{128}$$

$$f_{\max} \left(\text{En } 0.46L, \text{ desde } R1 \text{ y } R3 \right) = \frac{q \cdot L^4}{185 \cdot E \cdot I}$$



Viga Continua – Dos Tramos Iguales – Dos Cargas Puntuales Situadas Al Centro De Cada Tramo

$$R_1 = V_1 = R_3 = V_3 = \frac{5}{16} \cdot P$$

$$R_2 = 2 \cdot V_2 = \frac{11}{8} \cdot P$$

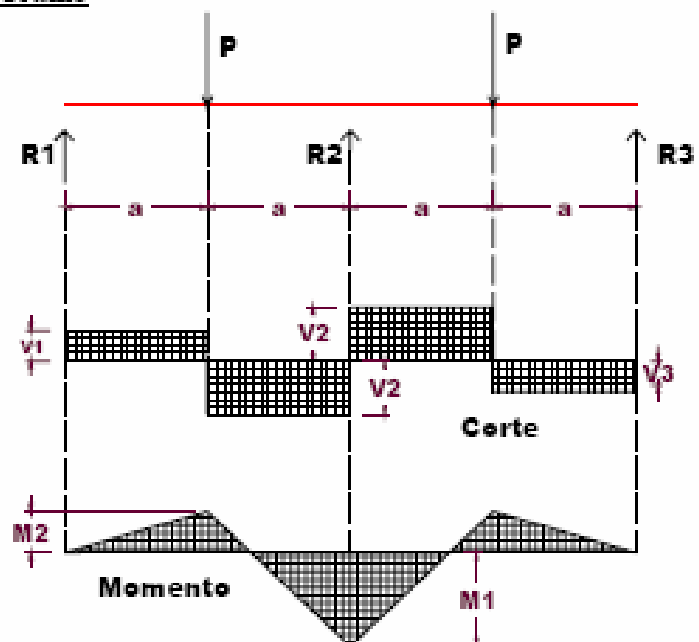
$$V_2 = P - R_1 = \frac{11}{16} \cdot P$$

$$V_{\max} = V_2$$

$$M_1 = -\frac{3 \cdot P \cdot L}{16}$$

$$M_2 = \frac{5 \cdot P \cdot L}{32}$$

$$M_x \left(\text{Cuando } x < a \right) = R_1 \cdot x$$



Viga Continua – Dos Tramos Diferentes – Carga Uniformemente Distribuida

$$R_1 = \frac{M_1}{L_1} + \frac{q \cdot L_1}{2}$$

$$R_2 = q \cdot L_1 + q \cdot L_2 - R_1 - R_3$$

$$R_3 = V_4 = \frac{M_1}{L_2} + \frac{q \cdot L_2}{2}$$

$$V_1 = R_1$$

$$V_2 = q \cdot L_1 - R_1$$

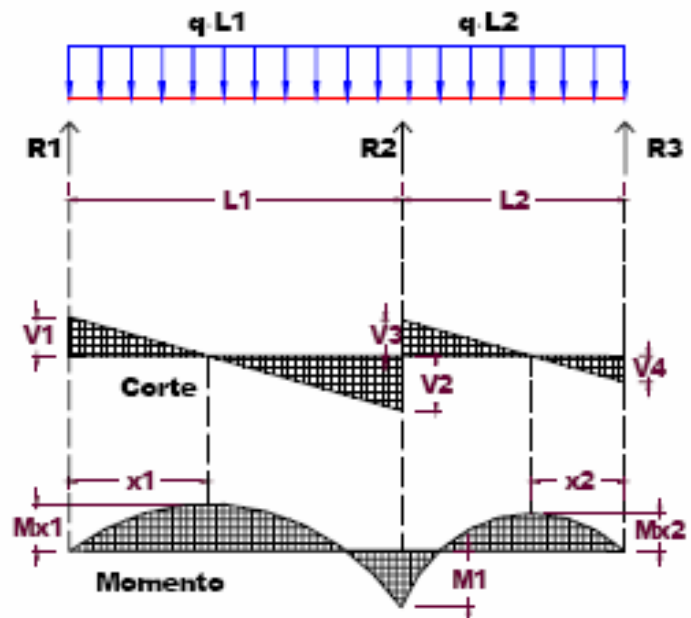
$$V_3 = q \cdot L_2 - R_3$$

$$V_4 = R_3$$

$$M_1 = -\frac{q \cdot L_2^3 + q \cdot L_1^3}{8(L_1 + L_2)}$$

$$M_{x1} (\text{Cuando } x_1 = \frac{R_1}{q}) = R_1 \cdot x_1 - \frac{q \cdot x_1^2}{2}$$

$$M_{x2} (\text{Cuando } x_2 = \frac{R_3}{q}) = R_3 \cdot x_2 - \frac{q \cdot x_2^2}{2}$$



Viga Continua – Dos Tramos Diferentes – Carga Puntual situada En El Centro De Cada Tramo

$$R_1 = \frac{M_1}{L_1} + \frac{P_1}{2}$$

$$R_2 = P_1 + P_2 - R_1 - R_3$$

$$R_3 = \frac{M_1}{L_2} + \frac{P_2}{2}$$

$$V_1 = R_1$$

$$V_2 = P_1 - R_1$$

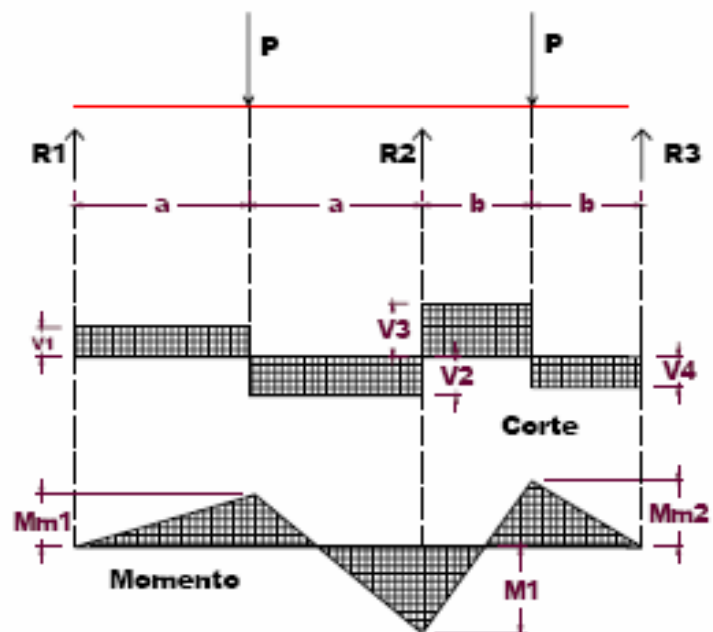
$$V_3 = P_2 - R_3$$

$$V_4 = R_3$$

$$M_1 = -\frac{3}{16} \left(\frac{P_1 \cdot L_1^2 + P_2 \cdot L_2^2}{L_1 + L_2} \right)$$

$$M_{m1} = R_1 \cdot a$$

$$M_{m2} = R_3 \cdot b$$



CAPÍTULO 6

CABLES

Más comúnmente visto en puentes de luces largas, viales y peatonales, como también en sostenimiento de antenas metálicas.



En este grafico se muestra un puente atirantado de uso peatonal.



En este grafico se muestra un puente atirantado de vial.

CAPÍTULO 7

TUTORIALES DE PROGRAMAS PARA HEWLETT PACKARD

Para poder tener mayor practica con el uso de programas para la calculadora HEWLETT PACKARD, aconsejamos los siguientes programas para bajar, junto a su descripción:

Nombre del programa	Descripción
ARMADURAS	Permite la solución de armaduras o cerchas isostáticas e hiperestaticas
ARMADURAS ISOSTATICAS	Solución de armaduras por el método de nudos
FEM 49	Permite la solución de pórticos isostáticos e hiperestaticos
REACCIONES FR	Programa sencillo para el calculo de reacciones y esfuerzos internos (esta en Francés)
ESF 3D	Para el calculo de esfuerzos internos de pórticos isostáticos o hiperestaticos en 3D
QUERY	Para el calculo de cortantes en vigas y pórticos
LCASE	Para el cálculo de pórticos.

Todos estos programas y mas los puedes descargar de las siguientes paginas:

- ✓ www.hpcivil.tk
- ✓ www.HpCivil.org
- ✓ www.elprisma.com/apuntes
- ✓ www.foros.construaprende.com/
- ✓ www.pachanet.com/hpcivil/
- ✓ www.iupsmcivil.turincon.com

DIRECCIONES DE INTERNET RELACIONADOS CON INGENIERIA CIVIL ESTRUCTURAS ISOSTATICAS

UNIVERSIDAD	Dirección de Internet	País
Universidad mayor de San Andrés	www.umsanet.edu.bo	BOLIVIA
Universidad de Valle	www.univalle.edu	BOLIVIA
Universidad Católica Boliviana	www.ucbcba.edu.bo	BOLIVIA
Universidad san Francisco Xavier	www.usfx.edu.bo	BOLIVIA
Universidad Técnica de Oruro	www.uto.edu.bo	BOLIVIA
Universidad Autónoma de México	www.unam.mx	MEXICO
Harvard University	www.harvard.edu	USA
Princeton University	www.princeton.edu/index.shtml	USA
Yale University	www.yale.edu	USA
Universidad de Monterrey	www.mty.itesm.mx/principal/html	MEXICO
Universidad Nacional de Chile	www.uchile.cl	CHILE
George Town University	www.georgetown.edu	USA