



CAPITULO 1

FUNDAMENTOS DE LA ESTATICA Y ENFOQUE VECTORIAL

1.1 OBJETIVO GENERAL.

El objetivo fundamental de este capítulo es que el estudiante conozca los fundamentos de la estática con un enfoque vectorial, y este desarrolle destrezas para el cálculo del equilibrio estático.

1.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS.

Al finalizar este capítulo el estudiante podrá:

- Describir una fuerza en términos de su modulo, dirección, y sentido.
- Comprender y calcular el concepto de momento con relación a un punto y un eje, además el efecto que este implica.
- Adquirir destrezas para hallar la resultante de un conjunto de fuerzas y momentos en el espacio y de momentos.

1.3 FUERZA.

La fuerza es la acción de un cuerpo sobre otro, que produce en este último una modificación en su estado de reposo o de movimiento.

La unidad dimensional en el análisis de las estructuras es libra, kilogramo, tonelada.

Un vector fuerza es un segmento orientado en el espacio, se puede caracterizar por tener:

- **Origen** a considerar cuando interese conocer el punto de aplicación del vector.
- **Dirección** o línea de acción coincidente con la de la recta que la contiene o cualquier otra recta paralela.
- **Sentido** viene determinado por la punta de flecha localizada en el extremo del vector.
- **Módulo** es la distancia entre el origen y el extremo del vector.

Introduciendo los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} orientados en las direcciones de los ejes x , y , z , respectivamente, (figura 1.1), podemos expresar F en la forma:

$$F = \vec{F}_x \hat{i} + \vec{F}_y \hat{j} + \vec{F}_z \hat{k} \quad \text{Expresión vectorial de la fuerza}$$

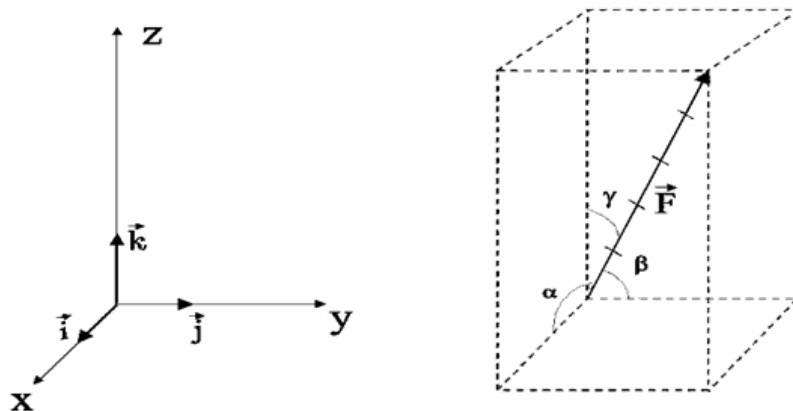


Figura 1.1

Donde definiremos cada término:

- Componentes escalares de \vec{F} están definidas por las relaciones: F_x, F_y, F_z a largo de los tres ejes de coordenadas.
- Vectores unitarios en dirección de los cartesianos: $\hat{i}; \hat{j}; \hat{k}$
- Componentes vectoriales de $F = \vec{F}_x \hat{i} + \vec{F}_y \hat{j} + \vec{F}_z \hat{k}$.
- Relación entre la magnitud de F y sus componentes escalares

$$\Leftrightarrow |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$



- Vector unitario en la dirección de \vec{F} : $\vec{e}_F = \frac{1}{|\vec{F}|} [F_x, F_y, F_z]$
- Los tres ángulos $\alpha_x, \beta_y, \gamma_z$ definen la dirección de la fuerza \vec{F} , los cósenos de $\alpha_x, \beta_y, \gamma_z$ se conocen como los cósenos directores de la fuerza \vec{F} :

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{|\vec{F}|}$$

$$\cos \beta = \frac{F_y}{|\vec{F}|}$$

$$\cos \gamma = \frac{F_z}{|\vec{F}|}$$

Para la mejor concepción del anterior concepto, proponemos a continuación el siguiente ejercicio.

Ejercicio #1

Dada la fuerza $F = [2, -3, 5]$ en toneladas, determinar la magnitud y dirección de la fuerza

Solución.-

- Se tiene los componentes escalares (2t, -3t, 5t)
- Se tiene los componentes vectoriales (2 i, -3 j, 5 k)

La magnitud de \vec{F} será:

$$|\vec{F}| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (5)^2} = 6.16 \text{ ton}$$

Entonces:

$$\cos \alpha = \frac{2}{6,16} = 0,32$$

$$\cos \beta = \frac{-3}{6,16} = -0,49$$

$$\cos \gamma = \frac{5}{6,16} = 0,81$$

La dirección del vector es:

$$\vec{e}_F = \frac{1}{6.16} [2; -3; 5]$$

$$\Rightarrow \vec{e}_F = [0.32; -0.49; 0.81]$$

1.4 VECTOR DE POSICION.

Si tenemos un punto cualquiera P_1 se define el vector de posición del punto P_1 como el segmento orientado que determina el origen de coordenadas O y el punto P_1 .

Es el segmento rectilíneo orientado dirigido del origen al punto como vemos en la fig1.2.

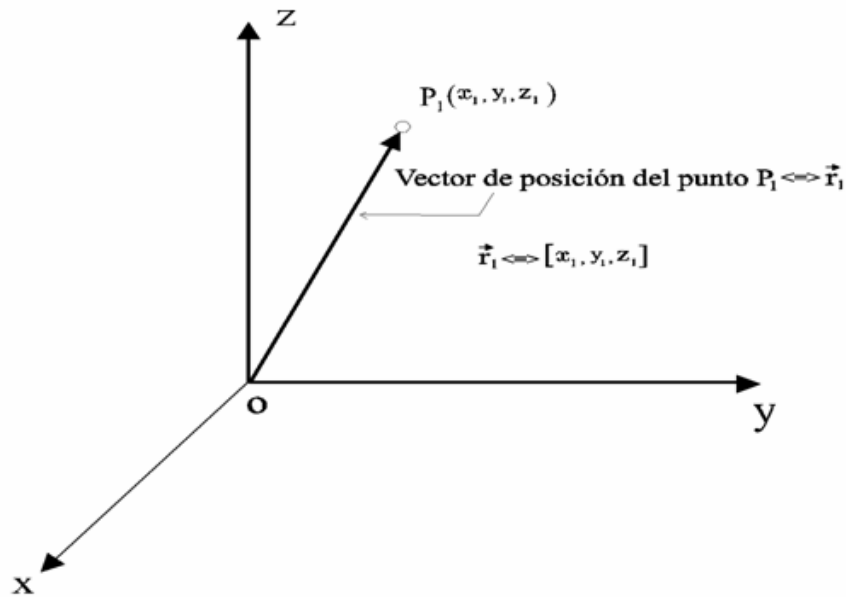


Figura 1.2

Consideramos el sistema de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido en los puntos X_1, Y_1, Z_1 , definidos por los vectores posición \vec{r}_1 .

$$P_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$$

$\vec{r}_1 = [X_1; Y_1; Z_1]$ es la magnitud, y representa la distancia entre O y P_1

Si se desea encontrar la magnitud y dirección de la Fuerza \vec{r} puede calcularse de las componentes r_x, r_y, r_z como se explica a continuación.

Fácilmente podemos verificar que los vectores de posición obedecen la ley de suma para vectores. Consideremos, por ejemplo, los vectores de posición \vec{r} y \vec{r}' con respecto a los puntos de referencia O y O' y el vector de posición de s y O con respecto a O' de la figura 1.3 verificamos que el vector de posición $\vec{r}' = O'A$ puede obtenerse de los vectores de posición $s = O'O$ y $\vec{r} = OA$ aplicando la regla del triángulo para la suma de vectores.

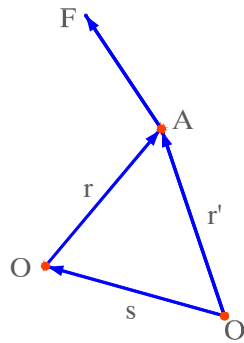


Figura 1.3

Como siempre es posible trazar un segmento rectilíneo, entre el origen y un punto arbitrario dado, entonces, siempre es posible asociar a dicho punto, su respectivo vector de posición.

1.5 VECTOR DE DESPLAZAMIENTO.

Vamos a empezar por la cantidad vectorial más simple, el **desplazamiento**, que no es más que el cambio de posición de un punto a otro (Atención, este punto puede ser un modelo que representa una partícula o un pequeño cuerpo que se traslada). El desplazamiento es un vector porque no solamente basta decir a qué distancia se movió sino en qué dirección. No es lo mismo salir de la puerta de casa y moverse 2 cuadras hacia la derecha que hacia la izquierda. El desplazamiento **no** es el mismo.

El desplazamiento a menudo lo representamos por una sola letra mayúscula que aquí la mostraremos en negrita **P**, pero hay muchas otras maneras.

En la fig 1.4 mostramos que el desplazamiento para ir de A hasta B es una línea recta que une estos puntos, empieza en A y termina en B dirigida hacia B. Cuando el cuerpo se mueve de manera que vaya y vuelva al punto inicial, el desplazamiento es cero. Es importante darse cuenta que el desplazamiento no está relacionado con la distancia recorrida.

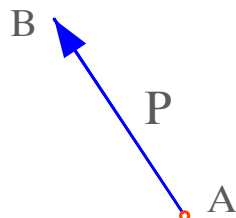


Figura 1.4 (a)

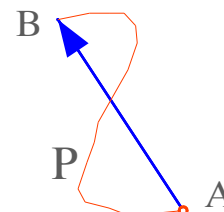


Figura 1.4 (b)

Vamos a representar la **magnitud** de un vector (la longitud en el caso del desplazamiento) por la misma letra del vector pero no en negrita o bien:

$$(\text{Magnitud o módulo de } \mathbf{P}) = \bar{P} = |\vec{P}|$$

Por definición el módulo de \mathbf{P} es un escalar (un número) y siempre es positivo.

Suponemos ahora que una partícula tiene un desplazamiento \mathbf{P} , seguido por un desplazamiento \mathbf{Q} . El resultado es el mismo que si se hubiera considerado partiendo del mismo punto inicial un único desplazamiento \mathbf{R} como podemos ver en la figura.

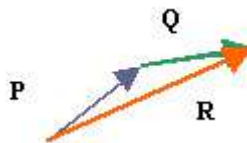


Figura 1.5

Lo que en símbolos podemos expresar $\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$, a este vector se lo llama **suma** o **resultante**. Poner atención que aquí estamos sumando vectores y no es la simple suma algebraica de sus módulos sino que debemos tomar en cuenta sus direcciones.

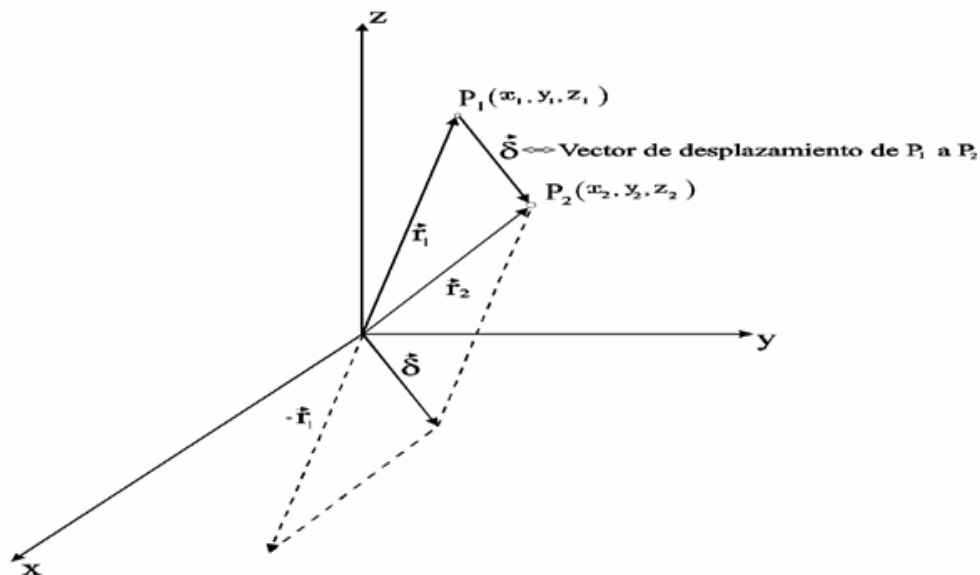


Figura 1.6

Viendo la fig 1.6 se deduce que:

$$\vec{\delta}_{12} = \vec{r}_2 + (-\vec{r}_1) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$



$\vec{\delta}_{12}$ Llamado vector de desplazamiento entre P_1 y P_2

Siempre se puede asociar a un punto su respectivo vector de posición

$$\vec{r}_1 = [X_1; Y_1; Z_1] \quad ; \quad \vec{r}_2 = [X_2; Y_2; Z_2]$$

$$\vec{\delta}_{12} = [X_2; Y_2; Z_2] - [X_1; Y_1; Z_1]$$

$$\vec{\delta}_{12} = [X_2 - X_1; Y_2 - Y_1; Z_2 - Z_1]$$

$$|\vec{\delta}| \Leftrightarrow \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}$$

$|\vec{\delta}|$ Es la fórmula de distancia entre dos puntos P_1 y P_2

Ejercicio #2

Dados los puntos P_1 de coordenadas (2,-3,0) metros, P_2 de coordenadas (0,1,3) metros, P_3 de coordenadas (-1,0,3) metros.

- Hallar el vector de posición entre P_2 y P_3
- Hallar el vector de desplazamiento entre P_2 y P_3
- Hallar la distancia entre P_1 y P_2

Solución.-

a) $\vec{r}_1 \Leftrightarrow [2, -3, 0] \Leftrightarrow 2\vec{i} - 3\vec{j} + 0\vec{k}$

$\vec{r}_2 \Leftrightarrow [0, 1, 3] \Leftrightarrow 0\vec{i} + 1\vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{r}_3 \Leftrightarrow [-1, 0, 3] \Leftrightarrow -1\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k}$

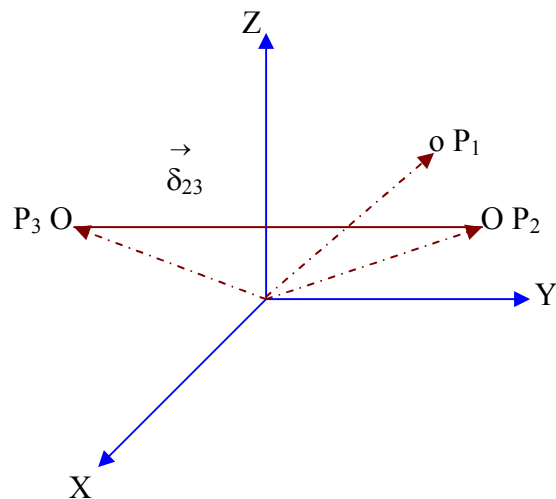
b) $\vec{\delta}_{23} \Leftrightarrow \vec{r}_3 - \vec{r}_2 \Leftrightarrow [-1, 0, 3] - [0, 1, 3]$

$\vec{\delta}_{23} = [-1, -1, 0]$

c) $\vec{\delta}_{12} \Leftrightarrow \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \Leftrightarrow [0, 1, 3] - [2, -3, 0]$

$\vec{\delta}_{12} \Leftrightarrow [-2, 4, 3]$

$|\vec{\delta}_{12}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 3^2} = 5,38 \text{ (m) de distancia}$



1.6 MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN PUNTO.

Consideremos una fuerza F que actúa sobre un cuerpo rígido como se muestra en la figura 1.7. Como sabemos la fuerza F se representa por un vector que define su magnitud y dirección. Sin embargo, el efecto de la fuerza sobre el cuerpo rígido depende también de su punto de aplicación P . La posición de P se define convenientemente por el vector r que une el punto de referencia fijo O con el punto P ; este vector se conoce como vector de posición de P . El vector de posición r y la fuerza F definen el plano mostrado en la figura 1.7

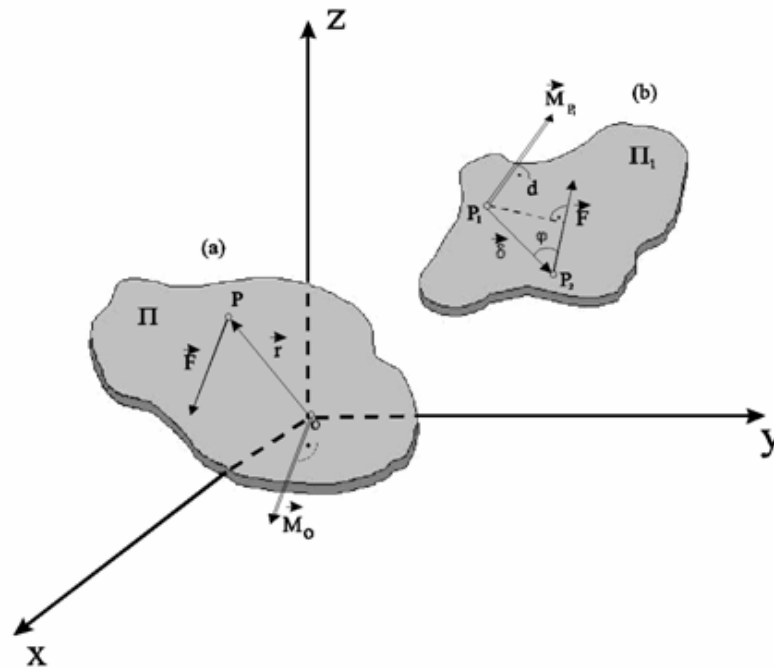


Figura 1.7

Definiremos el momento de F con respecto a O como el producto vectorial de r y F .

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} * \mathbf{F}$$

$\vec{r} \Leftrightarrow$ Vector de posición de P

$$\vec{\mathbf{M}}_{P_1} = \vec{\delta} * \vec{\mathbf{F}}_1$$

$\vec{\delta} \Leftrightarrow$ Vector de desplazamiento entre P_1 y P_2

El momento \mathbf{M}_O debe ser perpendicular al plano que contiene a O y a F . El sentido de \mathbf{M}_O se define por el sentido de rotación que podría llevar el vector r a ser colineal con el vector F ; pero esta rotación es la rotación que F tiende a imprimir al cuerpo. Así, el sentido del momento \mathbf{M}_O

caracteriza el sentido de la rotación que \mathbf{F} tiende a imprimir al cuerpo rígido; esta rotación será observada como contraria a la de las agujas del reloj por un observador situado en el extremo de \mathbf{M}_0 . Otra manera de establecer la relación entre el sentido de \mathbf{M}_0 y el sentido de la rotación del cuerpo rígido es el suministrado por la regla de la mano derecha: cierre su mano derecha manteniendo el dedo pulgar extendido, sosténgala de tal modo que sus dedos indiquen el sentido de rotación que la fuerza \mathbf{F} tiende a impartirle al cuerpo rígido; su dedo pulgar indicará el sentido del momento \mathbf{M}_0 .

Finalmente, llamando θ al Angulo comprendido entre las líneas de acción del vector de posición \mathbf{r} y la fuerza \mathbf{F} hallamos que el momento de \mathbf{F} con respecto a O es:

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \sin \theta = F d$$

Ejercicio #3

Dada la fuerza $[1, 2, -2]$ toneladas, que pasa por el punto $P_1 (2, 1, 3)$ metros. Determinar el momento de la fuerza respecto el punto $P_2 (0, 2, -1)$.

Solución.-

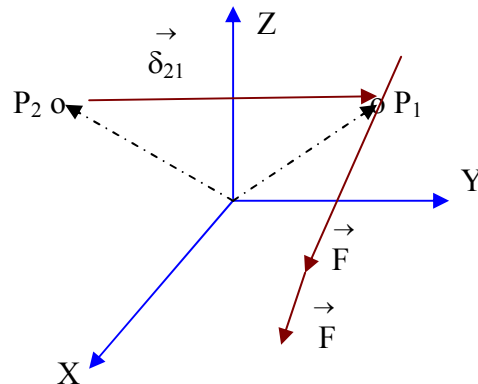
$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &\Leftrightarrow [2, 1, 3] \\ \vec{r}_2 &\Leftrightarrow [0, 2, -1] \\ \vec{\delta}_{21} &\Leftrightarrow \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \Leftrightarrow [2, 1, 3] - [0, 2, -1] \\ \vec{\delta}_{21} &\Leftrightarrow [2, -1, 4] \text{ vector desplazamiento} \end{aligned}$$

$$\vec{M}_2 = \vec{\delta}_{21} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_2 = \vec{\delta}_{21} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ i & j & k \end{vmatrix} = -6i + 8j + 5k = [-6, 8, 5]$$

$$M_2 = \sqrt{(-6)^2 + (8)^2 + (5)^2}$$

$$M_2 = 11,86 \text{ ton}_m$$



1.7 MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO DE UN EJE.

Ahora que se han aumentado nuestros conocimientos de álgebra vectorial, introduciremos un nuevo concepto, el concepto del momento de una fuerza con respecto a un eje. Consideraremos nuevamente una fuerza F que actúa sobre un cuerpo rígido y el momento M_o de esa fuerza con respecto a la (fig 1.8).

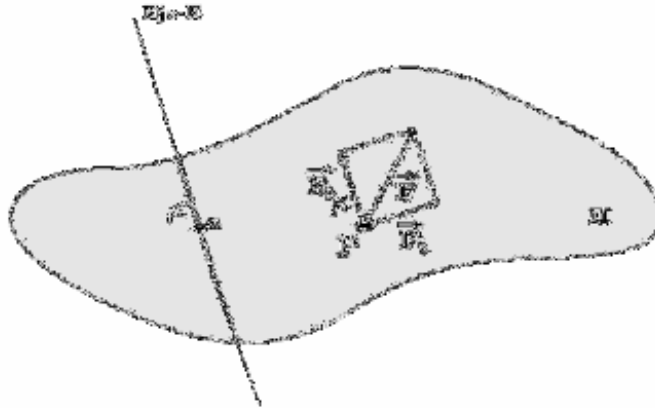


Figura 1.8

- En el gráfico se puede observar que el eje es perpendicular al plano II
- El punto P pertenece al plano II
- El punto a es la traza del eje en el plano
- \vec{F}_1 es la componente de \vec{F} contenida en el plano II
- \vec{F}_2 es la componente de \vec{F} paralela al eje

donde:

M_a = Momento de fuerza, respecto de **a** o cualquier punto de ese eje.

\vec{e}_E = Es el vector unitario en la dirección del eje.

Donde este momento se lo expresa como:

$$M_E = \vec{M}_a * \vec{e}_E$$

Se concluye de la definición de momento de una fuerza con respecto a un eje, que el momento de F con respecto a un eje coordenado es igual a la componente M_a con respecto a dicho eje. Sustituyendo sucesivamente cada uno de los vectores unitarios i, j, k, por e_E , comprobamos que las expresiones así obtenidas de los momentos de F con respecto a los ejes coordenados son, respectivamente, iguales a las expresiones de las componentes del momento M_a de F con respecto a P.



Ejercicio #4

Los Puntos $P_1 (0,-2,1)$ metros y $P_2 (3,-2,1)$ definen un eje en el espacio, cierta fuerza $\vec{F} [2, 3, 1]$ Kg. pasa por el punto $P_0 (-1,-2,0)$. Determinar el momento de la fuerza respecto del eje.

Solución.-

$\vec{P_2 P_1} \Leftrightarrow [-3, 0, 1]$

$$|\vec{P_2 P_1}| = \sqrt{10} = 3,2 \Leftrightarrow \frac{\vec{e}}{P_1 P_2} = [-0,94; 0; 0,31]$$

$$\vec{P_1 P_2} \Leftrightarrow [3, 0, -1]$$

$$|\vec{P_1 P_2}| = \sqrt{10} = 3,2 \Leftrightarrow \frac{\vec{e}}{P_1 P_2} = [0,94; 0; -0,31]$$

$$\vec{\delta_{10}} = [-1, 0, -2]$$

$$\vec{M_{P1}} = \vec{\delta_{10}} * \vec{F}$$

$$= [-1, 0, -2] * [2, 3, 1]$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6i - 3j - 3k$$

$$\vec{M_E} = \vec{M_{P1}} * \vec{e_{p2p1}} * E = [6, -3, -3] * [-0,94; 0; -0,31]$$

$$= [-5.64 + 0.93]$$

$$= 6.54 \text{ Kg_m}$$

$$\vec{M_E} \Leftrightarrow [6, -3, -3] * [0.94; 0; -0.31] = 0.54 \text{ Kg_m}$$

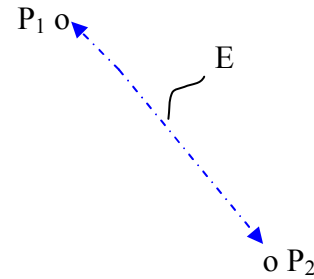
$$\vec{M_{P2}} \Leftrightarrow \vec{\delta_{20}} * \vec{F}$$

$$= [-4, 0, 1] * [2, 3, 1]$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ i & j & k \end{vmatrix} = 3i + 2j - 12k$$

$$\vec{M_E} \Leftrightarrow [3, 2, -12] * [-0.94; 0; 0.31]$$

$$= -2.82 + 0 + (-3.72)$$



$$= -6.54 \text{ Kg}_m.$$

$$M_E \Leftrightarrow [3, 2, -12] * [0.94; 0; -0.31]$$

$$= 2.82 + 3.72$$

$$= 6.54 \text{ Kg}_m.$$

1.8 TEOREMA DE VARIGNON.

La propiedad distributiva de los productos vectoriales puede utilizarse para determinar el momento de la resultante de varias fuerzas concurrentes. Si varias fuerzas F_1, F_2, \dots se aplican al mismo punto P, y si llamamos r al vector de posición de P, se concluye inmediatamente que:

$$r * (F_1 + F_2 + \dots) = r * F_1 + r * F_2 + \dots$$

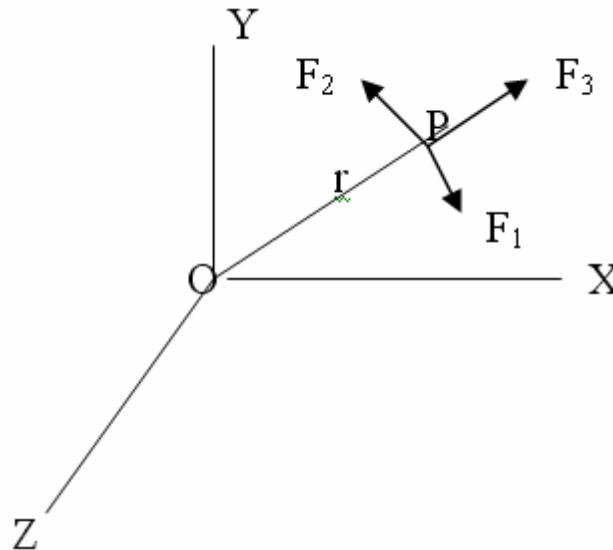


Figura 1.9

En palabras, el momento con respecto a un punto dado O de la misma resultante de varias fuerzas concurrentes es igual a la suma de los momentos de las fuerzas con respecto al mismo punto O. La relación de la grafica hace posible la determinación del momento de una fuerza F por el calculo de los momentos de dos o mas fuerzas componentes.

La fuerza F se descompone en $F = F_1 + F_2 + F_3$

$$\Rightarrow M_E = M * e = [r * (F_1 + F_2 + F_3)] * e$$

Donde:

$$M_E = (r * F_1) \cdot e + (r * F_2) \cdot e + (r * F_3) \cdot e$$

Teorema momento de una fuerza respecto de un punto

1.9 PAR DE FUERZAS – MOMENTO DEL PAR.

Se dice que dos fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ forman un par si tienen la misma magnitud, dirección pero sentido contrario, ver figura 1.10

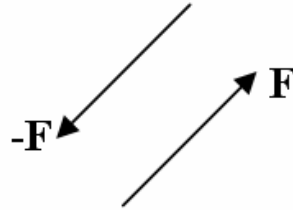


Figura 1.10

Es evidente que la suma de los componentes de las dos fuerzas en cualquier dirección es cero. Sin embargo, la suma de los momentos de las dos fuerzas con respecto a un punto dado no es cero. Aunque las fuerzas no desplazan al cuerpo sobre el que actúan ellas tienden a imprimirle un movimiento de rotación

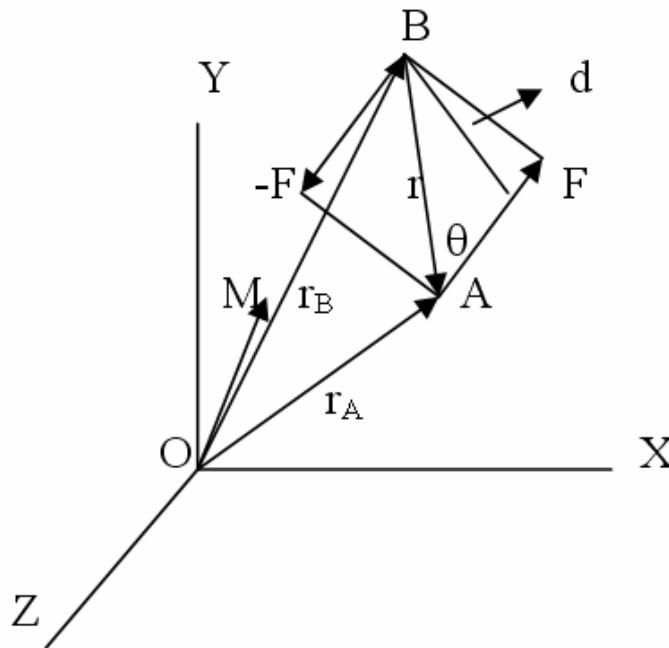


Figura 1.11

Representando por \mathbf{r}_A y \mathbf{r}_B los vectores de posición de los puntos de aplicación de \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ de la figura 1.11 encontramos que la suma de los momentos de las dos fuerzas con respecto a O es:

$$\mathbf{r}_A * \mathbf{F} + \mathbf{r}_B * (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) * \mathbf{F}$$

Remplazando $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = \mathbf{r}$, donde \mathbf{r} es el vector que une los puntos de aplicación de las dos fuerzas, concluimos que la suma de los momentos de \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ con respecto a O se representan por el vector:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} * \mathbf{F} \quad (1)$$

El vector \mathbf{M}_O se le llama momento del par; es un vector perpendicular al plano que contiene las dos fuerzas y su magnitud es:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \cdot \mathbf{F} \cdot \sin\theta = Fd \quad (2)$$

Donde d es la distancia perpendicular entre las líneas de acción de \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$, y el sentido de \mathbf{M}_O se encuentra mediante la regla de la mano derecha del grafico.

Como el vector \mathbf{r} en (1) es independiente de la elección del origen O de los ejes coordenados, se obtendría el mismo resultado si los momentos de \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ se hubieran calculado con respecto a un punto diferente O' . Por tanto, el momento M de un par es un vector libre que puede aplicarse en cualquier punto como se ve en la grafica.

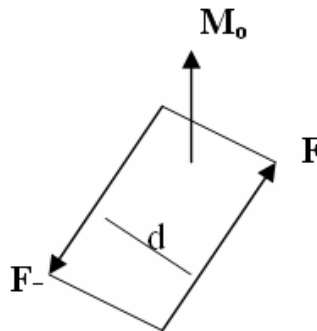


Figura 1.12

De la definición del momento de un par, se concluye que dos pares, uno formado por las fuerzas \mathbf{F}_1 y $-\mathbf{F}_1$, y el otro por las fuerzas \mathbf{F}_2 y $-\mathbf{F}_2$ como se ve en la figura 1.13 (a) y (b), tendrán momentos iguales si y solo si; los dos pares están en planos paralelos o en el mismo plano y tienen el mismo sentido:

$$F_1 d_1 = F_2 d_2$$

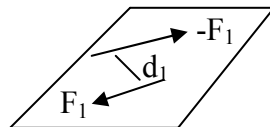


Figura 1.13 (a)

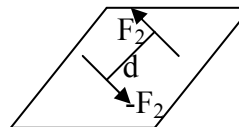


Figura 1.13 (b)

La expresión: $\vec{M}_O = \vec{\delta} * \vec{F}$ representa el momento del **PAR DE FUERZAS**

Ejercicio #5

Dados los pares de la figura 1.14 se pide determinar la suma de los momentos pares.

Donde: C_1 y C_3 pertenecen al plano YZ, C_2 pertenece al plano α paralelo XZ.

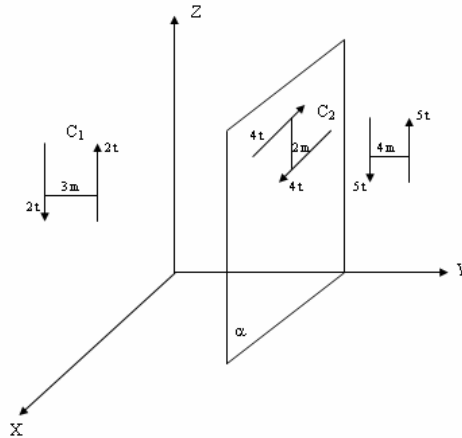


Figura 1.14

Se tiene:

a) Momento de los pares $\vec{M}_{C1} = 6 \vec{i} = [6, 0, 0] \text{ t.m}$

$\vec{M}_{C2} = -8 \vec{j} = [0, -8, 0] \text{ t.m}$

$\vec{M}_{C3} = 20 \vec{i} = [20, 0, 0] \text{ t.m}$

b) Suma de los pares

$\vec{S} = \vec{M}_{C1} + \vec{M}_{C2} + \vec{M}_{C3} = [26, -8, 0] \text{ t.m}$

Es decir: **para sumar pares se debe sumar los momentos de los pares**

1.10 TRASLACION DE UNA FUERZA A UNA POSICION PARALELA.

Se muestra una fuerza y se desea trasladarla a una posición paralela que pasa por el punto P. Como se ve en la figura 1.15

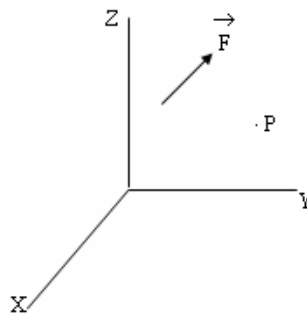
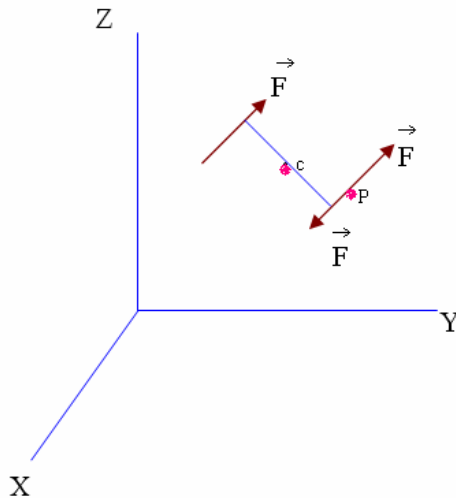


Figura 1.15

El procedimiento para trasladar una fuerza a cierta posición paralela dada consiste en los siguientes pasos:

- 1) Se traslada la fuerza a la nueva posición manteniendo su dirección, magnitud, y sentido.
- 2) Se añade la fuerza simétrica en la dirección de traslado
- 3) Se incluye el momento del par ocasionado por la fuerza y su simétrica.



c = es el par formado por \vec{F} y $-\vec{F}$

figura 1.16

Con estos pasos se origina un nuevo sistema, constituido por \vec{F} en la posición paralela y el par c formado por \vec{F} y $-\vec{F}$ como se ve en la fig 1.16.

Cuando se traslada una fuerza a una posición paralela dada, debe además de la fuerza, tomarse en cuenta el par.

Dos sistemas de fuerzas son equivalentes si tienen a producir el mismo efecto sobre un cuerpo. Se ha visto que una fuerza se puede desplazar sobre su línea de acción y el efecto sobre el cuerpo no se modifica tanto para traslación como para rotación. Así mismo se ha dicho que un Par, por ser un vector libre, se puede trasladar a cualquier posición sin que se cambie el efecto que produce sobre el cuerpo.

Ejercicio #6

Dada la fuerza $\vec{F} = [2, 1, 0]$ toneladas que pasa por el punto $P_1 (3, 2, -1)$ metros y el punto $P_2 (4, 0, 2)$ metros, se pide trasladar la fuerza a una posición paralela que pasa por P_2 :

a) traslación de \vec{F} a la posición paralela que pasa por P_2

$$\vec{F} \text{ en } P \quad \vec{F} = [2, 1, 0] \text{ t}$$

$$\vec{P_2P_1} = \vec{\delta} = [-1, 2, -3] \text{ t}$$

$$\vec{M_{P_2}} = \vec{\delta} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ i & j & k \end{vmatrix} = [3, -6, -5] \text{ t.m}$$

Por lo tanto, el nuevo sistema queda constituido por $\vec{F} = [2, 1, 0] \text{ ton}$ trasladada a la posición paralela que pasa por P_2 y el momento del Par $\vec{M_{P_2}} = [3, -6, -5]$.

1.11 RESULTANTE DE FUERZAS Y MOMENTOS.

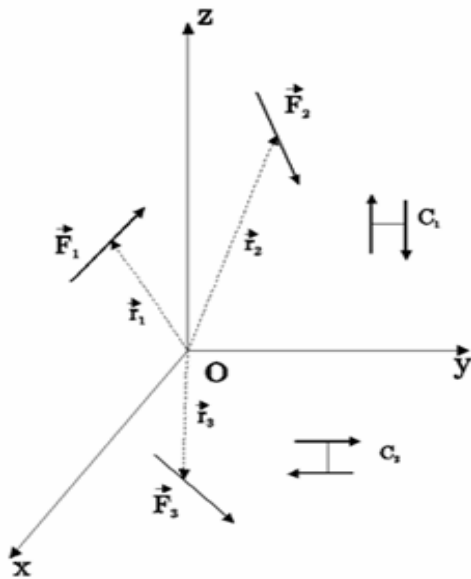


Figura 1.17 (a)

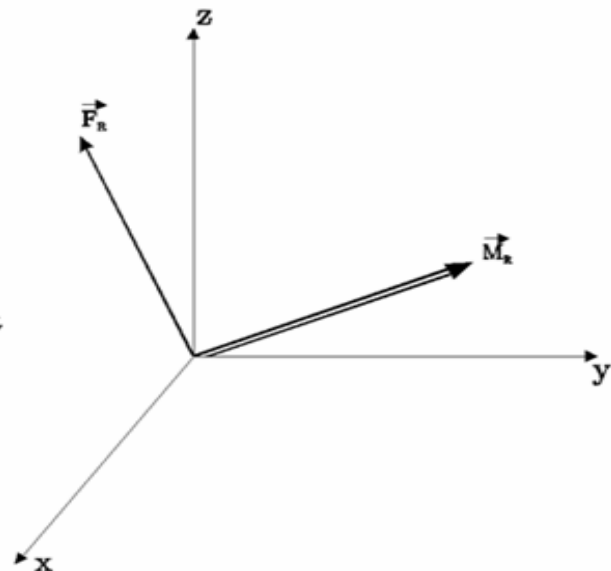


Figura 1.17 (b)

En la figura 1.17 (a) se observa un sistema general de fuerzas, constituido por fuerzas y momentos de pares.

Mediante el procedimiento descrito en el anterior título. Siempre es posible trasladar las fuerzas a una posición paralela que pasa por el origen, obviamente teniendo en cuenta los momentos correspondientes y recordando que los momentos de los pares son vectores libres.

En la figura 1.17 (b) se tiene:

$$\vec{F_R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$$

$$\vec{M_R} = \vec{r_1} \times \vec{F_1} + \vec{r_2} \times \vec{F_2} + \vec{r_3} \times \vec{F_3} + \vec{C_1} + \vec{C_2}$$

Claramente, los sistemas de las figuras 1.17 (a) y (b) son **EQUIVALENTES PARA CIERTA CAPACIDAD.**

Sin importar la complejidad de un sistema de fuerzas y momentos, este siempre puede ser reducido a una sola fuerza \vec{F}_R y a un solo momento \vec{M}_R .

\vec{F}_R = se denomina Resultante de fuerzas

\vec{M}_R = se denomina Resultante de momentos

Entonces: La resultante de un sistema es la EQUIVALENCIA más simple.

Ejercicio #7

Dado el sistema de la figura 1.18 determinar la resultante de momentos.

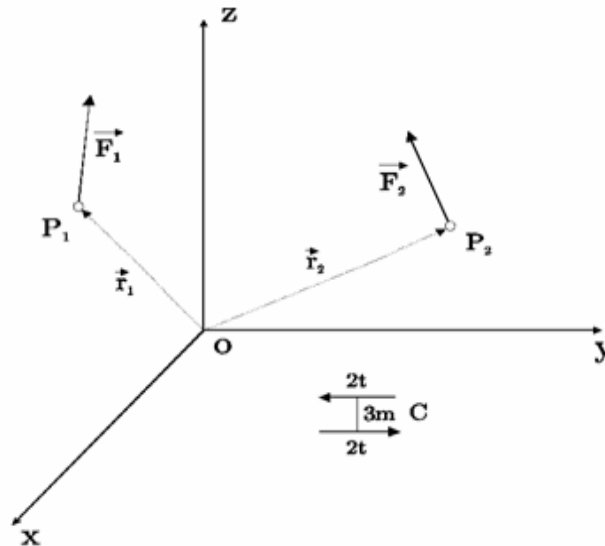


Figura 1.18

Donde: $\vec{F}_1 = [3, 2, 1] \text{ t}$ y $\vec{F}_2 = [-4, 1, 3] \text{ m}$; $P_2 (4, 5, 6) \text{ m}$ y el Par C se encuentra en el plano xy; se pide:

a) Resultante de fuerzas en el origen:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = [-1, 3, 4] \text{ t}$$

b) Resultante de momentos en el origen:

$$\vec{r}_1 = [2, -2, 1] ; \vec{r}_2 = [4, 5, 6]$$

Por tanto:

$$\vec{M}_R = [2, -2, 1] * [3, 2, 1] + [4, 5, 6] * [-4, 1, 3] + [0, 0, 6]$$

$$\vec{M}_R = [5, -35, 40] \text{ ton}_m$$

c) Resultante del sistema:

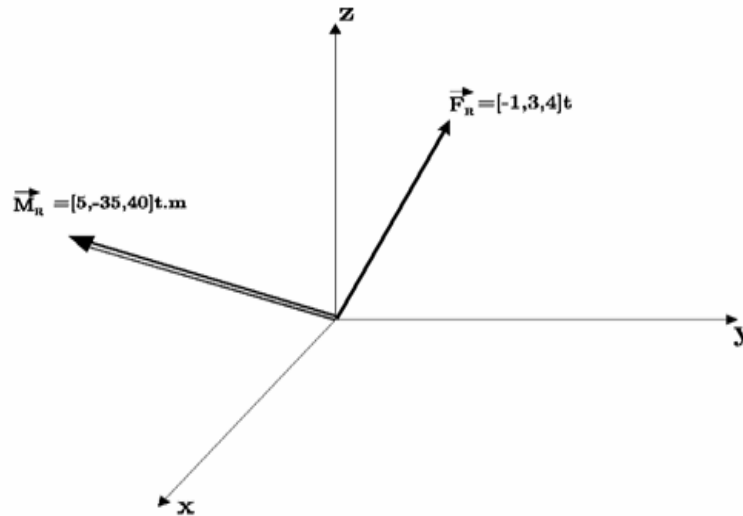


Figura 1.19

Obviamente; el sistema de la figura 1.19 es EQUIVALENTE al sistema de la figura 1.18 para cierta capacidad.

Ejercicio #8

Verificar la igualdad de los desplazamientos entre los puntos $P_1 \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix}$ (m) y $P_2 \begin{vmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{vmatrix}$ (m)

Solución.-

a) $\vec{\delta}_{12}$ vector de desplazamiento

$$\vec{\delta}_{12} \Rightarrow \vec{r}_1 = [2, 0, 3] ; \vec{r}_2 = [-3, 4, 1]$$

$$\vec{\delta}_{12} \Leftrightarrow \vec{r}_2 + (-\vec{r}_1) \Leftrightarrow [-3, 4, 1] + (-)[2, 0, 3]$$

$$\vec{\delta}_{12} \Leftrightarrow [-5, 4, -2]$$

b) $\vec{\delta}_{21} \Leftrightarrow \vec{r}_1 + (-\vec{r}_2) \Leftrightarrow [5, -4, 2]$

$$\vec{\delta}_{21} = [5, -4, 2]$$

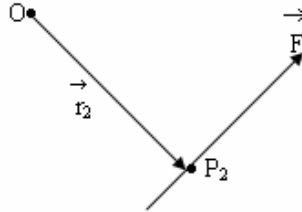
$$\vec{\delta}_{12} \neq \vec{\delta}_{21}$$

Ejercicio #9

La fuerza $\vec{F} \Leftrightarrow [0, 3, -2]$ t. pasa por el punto $P_2 \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ (m) determinar el momento de \vec{F}

Solución.-

a) Respecto del origen (0,0,0) m



$$\Rightarrow \vec{r}_2 \Leftrightarrow [-1, 2, 3]$$

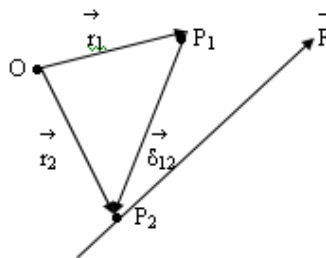
$$M_O = \vec{r}_2 * \vec{F} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ i & j & k \end{vmatrix}$$

$$M_O = -9 + (-4)*\hat{i} + (-2)*\hat{j} + (-3)*\hat{k}$$

$$M_O = -13\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$M_O = [-13, -2, -3] \text{ ton}_m$$

b) Respecto de $P_1 (-4, 2, 0)$ m



$$M_{P1} = \vec{\delta}_{12} * \vec{F}$$

$$\vec{r}_1 = [-4, -2, 0] ; \vec{r}_2 = [-1, 2, 3]$$

$$\vec{\delta}_{12} \Leftrightarrow [3, 0, 3]$$

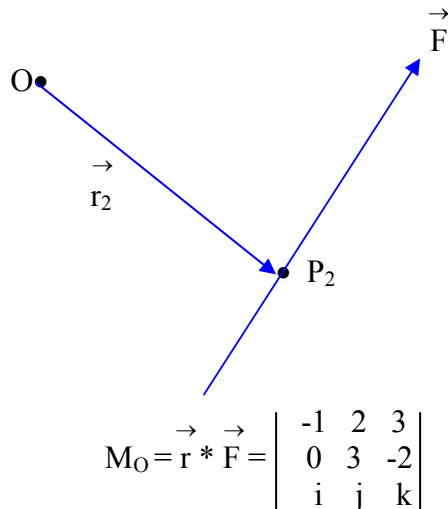
$$M_{P1} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = [-9, 6, 9] \text{ ton}_m$$

Ejercicio #10

Dada la fuerza $\vec{F} \Leftrightarrow [-1, 2, 3]$ t que pasa por el punto $P \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} m$ Determinar el momento de \vec{F}

Solución.-

a) Respecto del origen (0, 0,0) m.

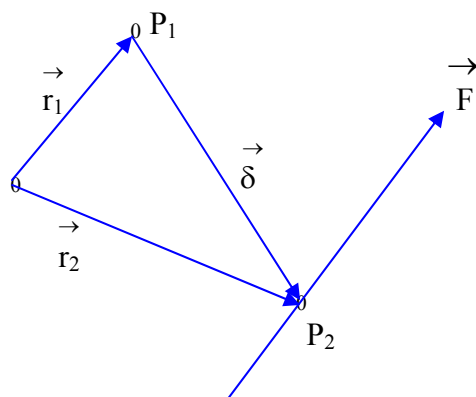


$$= -9 + (-4) i + (-2) j + (-3) k$$

$$= -13 i - 2 j - 3 k$$

$$\Rightarrow \vec{M}_O = [-13, -2, -3] \text{ ton}_m$$

b) Respecto de $P_1 (-4, 2, 0) M$



$$\vec{M}_{p1} = \vec{\delta}_{12} * \vec{F}$$

$$\vec{r}_1 = [-4, 2, 0] ; \vec{r}_2 = [-1, 2, 3]$$

$$\vec{\delta}_{12} \Leftrightarrow [3, 0, 3]$$

$$\vec{M}_{p1} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = [-9, 6, 9] \text{ ton}_m$$

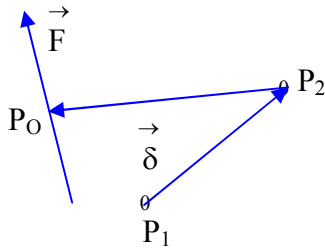
Ejercicio #11

Cierta línea está definida por los puntos $P_1 \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \text{ (m)} \\ 0 \end{vmatrix}$ y $P_2 \begin{vmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$

$\vec{F} \Leftrightarrow [4, 0, 1] \text{ Kg}$ que pasa por el punto $P_0 \begin{vmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix}$

Determinar el momento de la fuerza respecto del eje.

Solución.-



$$\vec{P_1P_2} \Leftrightarrow [-5, -1, 1]$$

$$|\vec{P_1P_2}| = 5 \cdot 19$$

$$\vec{e} = \frac{1}{5 \cdot 19}$$

$$\vec{e}_E = \frac{1}{5 \cdot 19} * [-5, -1, 1] \Leftrightarrow [-0.96, -0.19, 0.19]$$

$$\vec{\delta_{20}} \Leftrightarrow [7, -4, -2]$$

$$M_{p_2} \Leftrightarrow \vec{\delta_{20}} * \vec{F} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 7 & -4 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ i & j & k \end{vmatrix}$$

$$M_{p_2} = [-4, -15, 16]$$

$$\vec{M_E} = M_{p_2} * \vec{e}_E$$

$$\therefore M_E = M_{p_2} * \vec{e}_E$$

$$\Rightarrow M_E = [(-4) (-0.96) + (-15) (-0.19) + (16) (0.19)]$$

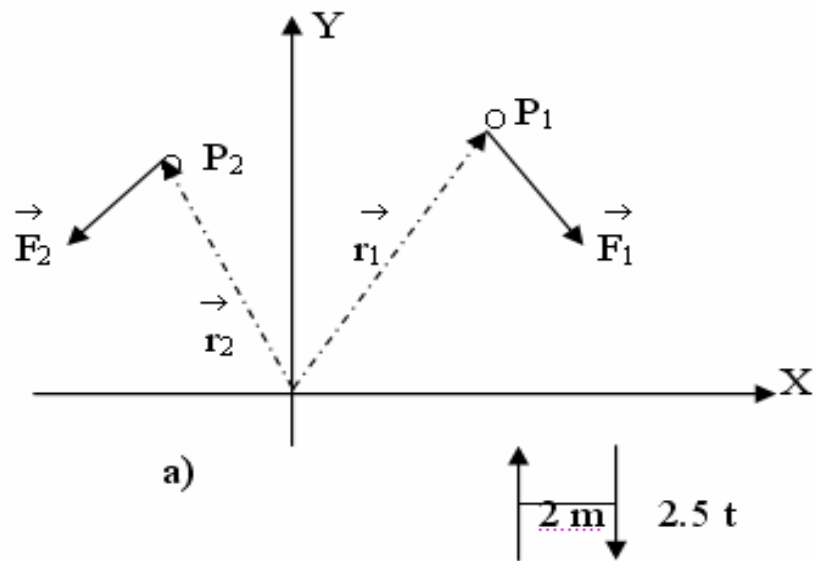
$$\therefore M_E = 9.73 \text{ Kg.m}$$

Ejercicio #12

Se pide determinar la resultante más simple del sistema a) definido en forma coplanar

$$F_1 \Leftrightarrow [3, -2, 0] ; P_1 (2, 4, 0)$$

$$F_2 \Leftrightarrow [-1, -1.5, 0] ; P_2 (-1, 3, 0)$$



Solución.-

$$\vec{r}_1 \Leftrightarrow [2, 4, 0]$$

$$\vec{r}_2 \Leftrightarrow [-1, 3, 0]$$

$$\vec{M}_R \Leftrightarrow$$

$$\vec{r}_1 * \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = [0, 0, -16] \text{ ton}_m$$

$$\vec{r}_2 * \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1.5 & 0 \end{vmatrix} = [0, 0, 4.5] \text{ ton}_m$$

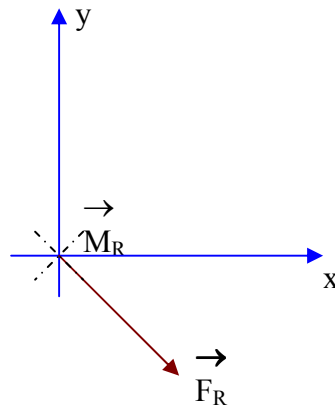
$$\vec{P}_R = [0, 0, 4.5] \text{ ton}_m$$

$$\vec{M}_R = \vec{r}_1 * \vec{F}_1 + \vec{r}_2 * \vec{F}_2 + \vec{P}_R$$

$$\vec{M}_R = [0, 0, -16] + [0, 0, 4.5] + [0, 0, -5]$$

$$\vec{M}_R = [0, 0, -16.5] \text{ ton}_m$$

Momento de $\vec{F}_R \Leftrightarrow$ Momento del sistema



$$\vec{r}_R * \vec{F}_R \Leftrightarrow \vec{M}_R$$

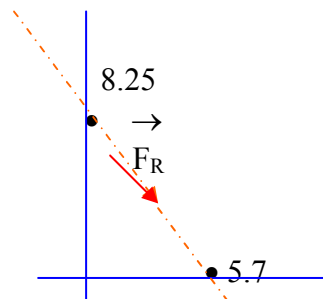
Sea P de coordenadas (x, y, 0) m un punto de la línea de acción de \vec{F}_R

$$P(x, y, 0) \Rightarrow \vec{r}_R \Leftrightarrow [x, y, 0]$$

$$\Rightarrow \vec{r}_R * \vec{F}_R \Leftrightarrow \vec{M}_R \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 0 \\ -2 & -3.5 & 0 \\ i & j & k \end{vmatrix} = [0, 0, -16.5]$$

$$\Leftrightarrow [0, 0, -3.5x - 2y] \quad *$$

La expresión * representa la ecuación de una recta que define la línea de acción de la resultante.



$$3.5x + 2y = 16.5$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y = 8.25$$

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow x = 5.7$$

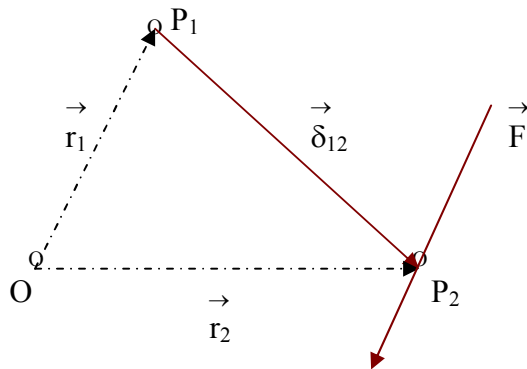
SISTEMA MÁS REDUCIDO

Ejercicio #13

La fuerza $\vec{F} \Leftrightarrow [2, 3, -3]$ t pasa por el punto $P_2 \begin{vmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{vmatrix}$ (m); Determinar el momento

de dicha fuerza respecto del punto $P_1 \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{vmatrix}$ (m).

Solución.-



$$\vec{\delta}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\vec{r}_2 = [X_2, Y_2, Z_2] \Leftrightarrow [-1, -2, 3]$$

$$\vec{r}_1 = [X_1, Y_1, Z_1] \Leftrightarrow [0, -2, 2]$$

$$\vec{\delta}_{12} = [-1, 0, 1]; \quad \vec{M}_{P1} = \vec{\delta}_{12} * \vec{F}$$

$$\Rightarrow M_{P1} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ i & j & k \end{vmatrix} = [-3, -1, -3] \text{ ton}_m$$

$$\vec{M}_P = \vec{r} * \vec{F} \Leftrightarrow \vec{r} * (\vec{F}_X + \vec{F}_Y + \vec{F}_Z)$$

$$\vec{M}_P = \vec{r} * \vec{F}_X + \vec{r} * \vec{F}_Y + \vec{r} * \vec{F}_Z \quad \text{TEOREMA DE VARIGNON}$$

Ejercicio #14

Los puntos $P_1 \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ (m) y $P_2 \begin{vmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ (m) definen un eje en el espacio, una fuerza \vec{F}

en Kg. pasa por el punto $P(3, 2, -4)$. Se pide determinar el momento de \vec{F} respecto del eje.

Solución.-

$$P_1 \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ y } P_2 \begin{vmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}; \quad \vec{F} \Leftrightarrow [2, 3, 1] \text{ kg}; \quad P \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{vmatrix} \text{ (m)}$$

Suponer una orientación:

$$\vec{P_1P_2} \Leftrightarrow [(-3-0), (1-2), (0-1)] \Leftrightarrow [-3, -1, -1] \text{ m}$$

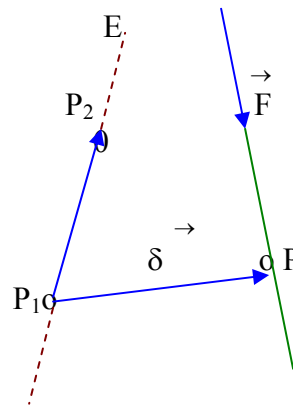
$$|\vec{P_1P_2}| \Leftrightarrow \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2} = 3.32 \text{ m}$$

$$\vec{U_E} = \frac{1}{3.32} [-3, -1, 1] = [-0.90, -0.30, 0.30]$$

$$\vec{\delta_{P_1P}} \Leftrightarrow [3, 0, -5]$$

$$\Rightarrow \vec{M_{P_1}} \Leftrightarrow \vec{\delta_{P_1P}} * \vec{F} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & 1 \\ i & j & k \end{vmatrix} \Leftrightarrow [15, -13, 9]$$

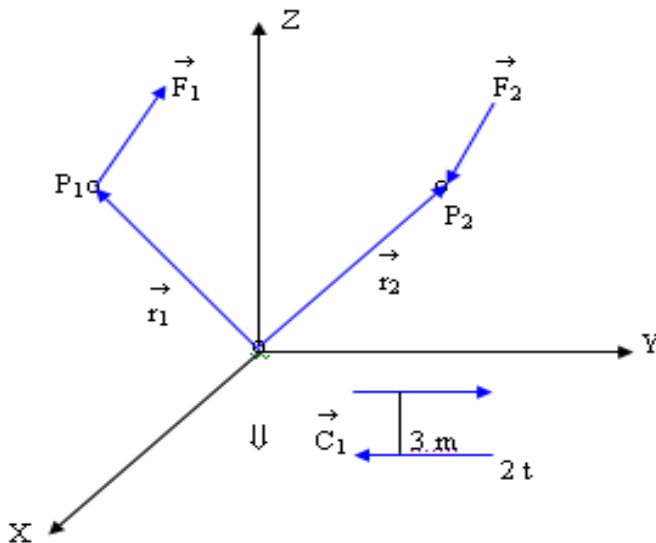
$$\begin{aligned} \therefore M_E &\Leftrightarrow [15, -13, 9] * [-0.90, -0.30, -0.30] \Leftrightarrow [15*(-0.90) + (-13)*(-0.30) + 9*(-0.30)] \\ &= [-13.5 + 3.9 - 2.7] \\ M_E &= -12.3 \text{ kg}_m \end{aligned}$$



EL TEOREMA DE VARIGNON DEMOSTRADO EN EL EJERCICIO ANTERIOR ES TAMBIEN VALIDO EN EL CASO DE MOMENTO DE UNA FUERZA RESPECTO DE UN EJE (SE DEJA AL ESTUDIANTE SU DEMOSTRACION).

Ejercicio #15

Dado el sistema (a) constituido por dos fuerzas y un par; Se pide determinar un sistema resultante constituido por una sola fuerza en el origen y un solo momento.



$$\begin{aligned} \vec{F_1} &\Leftrightarrow [4, 2, 0] \text{ t}; P_1 \begin{vmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{vmatrix} \text{ (m)} \\ \vec{F_2} &\Leftrightarrow [-3, 2, 1] \text{ t}; P_2 \begin{vmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ (m)} \end{aligned}$$

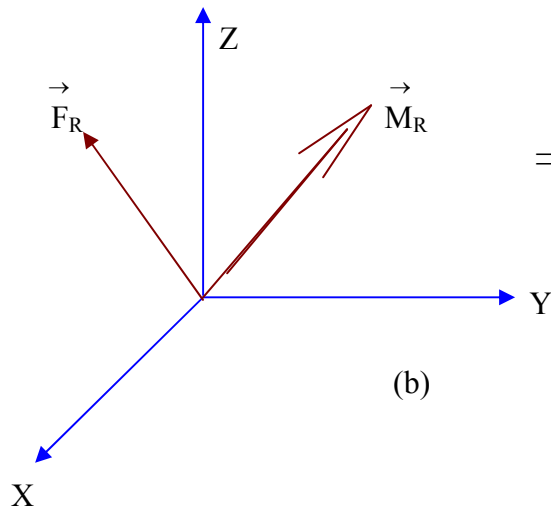
Solución.-

\vec{C}_1 Pertenece al Plano XY

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Leftrightarrow [1, 4, 1]$$

$$\vec{r}_1 \Leftrightarrow [-3, -1, 2] ; \vec{r}_2 \Leftrightarrow [5, 3, 1]$$

$$\vec{M}_R \Leftrightarrow \vec{r}_1 * \vec{F}_1 + \vec{r}_2 * \vec{F}_2 + \vec{C}_1 ; \quad |\vec{C}_1| = |\vec{F}| * d = 2 * 3 = 6 \text{ ton}_m$$



$$\Rightarrow \vec{r}_1 * \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -2 \\ i & j & k \end{vmatrix} = [4, -8, -2]$$

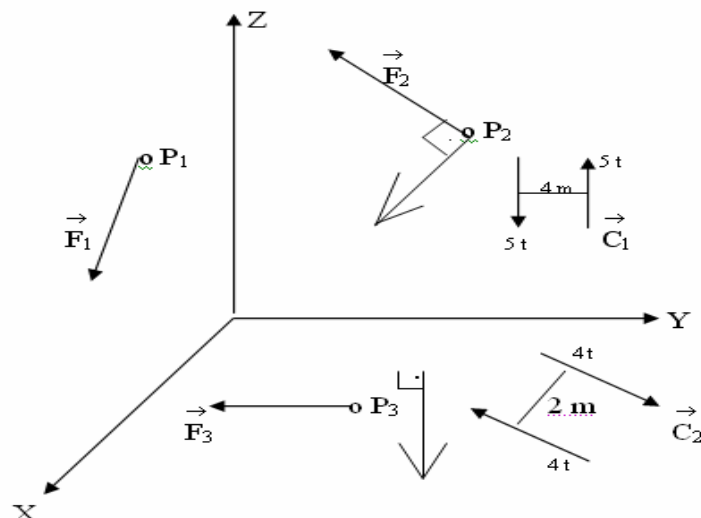
$$\vec{r}_2 * \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ i & j & k \end{vmatrix} = [1, -8, 19]$$

$$\vec{C}_1 = [0, 0, -6]$$

$$\vec{M}_R = [5, -16, 11] \text{ ton}_m$$

Ejercicio #16

Dadas las 3 fuerzas y los 2 pares. Hallar un sistema resultante.





$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &\Leftrightarrow [2, 0, 4] \text{ t}; P_1 \begin{vmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{vmatrix} \text{ (m)} \\ \vec{F}_2 &\Leftrightarrow [5, -1, 1] \text{ t}; P_2 \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix} \text{ (m)} \\ \vec{F}_3 &\Leftrightarrow [2, 4, -1] \text{ t}; P_3 \begin{vmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ (m)}\end{aligned}$$

Solucion.-

\vec{C}_1 Pertenece al plano YZ

\vec{C}_2 Pertenece al plano XY

$$\vec{F}_R \Leftrightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \Leftrightarrow [9, 3, 4] \text{ t}$$

$$\vec{r}_1 \Leftrightarrow [-3, -1, -2]; \vec{r}_2 \Leftrightarrow [2, -1, 2]; \vec{r}_3 \Leftrightarrow [5, 3, 1]$$

$$\vec{r}_1 * \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ i & j & k \end{vmatrix} = [-4, -8, 2]$$

$$\vec{r}_2 * \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \\ i & j & k \end{vmatrix} = [1, 8, 3]$$

$$\vec{r}_3 * \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ i & j & k \end{vmatrix} = [-7, 7, 14]$$

$$\vec{M}_R = \vec{r}_1 * \vec{F}_1 + \vec{r}_2 * \vec{F}_2 + \vec{r}_3 * \vec{F}_3 + \vec{C}_1 + \vec{C}_2$$

$$\Rightarrow |\vec{C}_1| = 5 * 4 = 20 \quad ; \quad \vec{C}_1 = [20, 0, 0]$$

$$\Rightarrow |\vec{C}_2| = 4 * 2 = 8 \quad ; \quad \vec{C}_2 = [0, 0, -8]$$

$$\therefore \vec{M}_R = [10, 7, 11] \text{ ton}_m$$

Ejercicio #17

Dada la fuerza $\vec{F} = [3, -2, 4]$ en toneladas, se pide determinar:



Solución.-

a) Componentes escalares $\Leftrightarrow 3 \text{ t}, -2 \text{ t}, 4 \text{ t}$

b) Componentes vectoriales $\Leftrightarrow 3 \vec{i}, -2 \vec{j}, 4 \vec{k}$

c) Magnitud de $F = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2} = 5.38 \text{ t}$

d) Vector unitario en la dirección de $F \Leftrightarrow \vec{e}_F$

$$\vec{e}_F = \frac{1}{5.38} * [3, -2, 4] = [0.55, -0.37, 0.74]$$

e) Cosenos directores:

$$\cos \alpha = \frac{3}{5.38} = 0.55 \quad \cos \beta = \frac{-2}{5.38} = -0.37 \quad \cos \gamma = \frac{4}{5.38} = 0.74$$

Ejercicio #18

Dados los puntos $P_1 (2, -3, -4)$ y $P_2 (0, 5, -1)$, en metros, se pide:

Solución.-

a) Vectores de posición de P_1 y P_2

$$\vec{r}_1 = [2, -3, -4] \text{ m}; \vec{r}_2 = [0, 5, -1]$$

b) Vector de desplazamiento entre P_1 y P_2

$$\vec{\delta} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = [0 - 2, 5 - (-3), -1 - (-4)] = [-2, 8, 3] \text{ m}$$

c) Distancia entre P_1 y $P_2 \Leftrightarrow |\vec{\delta}|$

$$|\vec{\delta}| = \sqrt{(-2)^2 + 8^2 + 3^2} = 8.77 \text{ m}$$

Ejercicio #19

Dado el punto $(2, 3, -5) \text{ m}$, y la fuerza $F_1 = [0, -4, 3] \text{ t}$, que pasa por el punto $P_2 (6, -4, 2) \text{ m}$, se pide:

Solución.-

a) Momento de F_1 respecto del origen O (0, 0, 0)

$$\begin{aligned} \vec{OP}_2 &= [6, -4, 2] \Leftrightarrow \vec{r} \Leftrightarrow \text{vector de posición de } P_2 \\ \vec{M}_O &= \vec{r} * \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = [-4, -18, -24] \text{ ton}_m \end{aligned}$$

$$\text{Magnitud de } \vec{M}_O \Leftrightarrow |\vec{M}_O| = 30.26 \text{ ton}_m$$

b) Momento de F_1 respecto de P_1

$$\begin{aligned} \vec{P_1P_2} &= [4, -7, 7] \Leftrightarrow \vec{\delta} \Leftrightarrow \text{vector de desplazamiento de } P_1 \text{ a } P_2 \\ \vec{M}_{P_1} &= \vec{\delta} * \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -7 & 7 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = [7, -12, -16] \text{ ton}_m \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \vec{M}_X &= 7 \vec{i} \\ \vec{M}_Y &= 12 \vec{j} \\ \vec{M}_Z &= -16 \vec{k} \end{aligned} \quad \text{Componentes vectoriales de } \vec{M}_{P_1}$$

$$\text{Además: Magnitud de } \vec{M}_{P_1} = |\vec{M}_{P_1}| = 21.19 \text{ ton}_m$$

Ejercicio #20

Dados los puntos P_1 (2, 0, 3) m y P_2 (-4, 5, 0) m que definen un eje y la fuerza $\vec{F} = [5, 6, -2]$ t que pasa por P_3 (0, -2, 1) m, se pide:

Solución.-

a) Momento de \vec{F} respecto del eje $\Leftrightarrow M_E$

$$\begin{aligned} \vec{P_1P_3} &= \vec{\delta} = [-2, -2, -2] \text{ m} \\ \vec{P_2P_3} &= \vec{\delta}_1 = [4, -7, 1] \text{ m} \quad \text{entonces:} \\ \vec{M}_{P_1} &= \vec{\delta} * \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & -2 \\ 5 & 6 & -2 \end{vmatrix} = [16, -14, -2] \text{ ton}_m \end{aligned}$$



$$\vec{M}_{P_2} = \delta * \vec{F} = \begin{vmatrix} 4 & -7 & 1 \\ 5 & 6 & -2 \\ i & j & k \end{vmatrix} = [8, 13, 59] \text{ ton}_m$$

Además: $\vec{P_1 P_2} = [-6, 5, -3] \Rightarrow |\vec{P_1 P_2}| = 8.37 \text{ m}$, por tanto; $\vec{e}_E = [-0.72, 0.6, -0.36]$

entonces:

$$\vec{M}_E = \vec{M}_{P_1} * \vec{e}_E \quad \text{o bien} \quad \vec{M}_E = \vec{M}_{P_2} * \vec{e}_E$$

Es decir:

$$\vec{M}_E = [16, -14, -2] * [-0.72, 0.6, -0.36] = -19.2 \text{ ton}_m$$

o bien

$$\vec{M}_E = [8, 13, 59] * [-0.72, 0.6, 0.36] = -19.2 \text{ ton}_m$$

Ejercicio #21

Con los datos del anterior ejemplo se pide:

Solución.-

a) Momento de F respecto a tres ejes ortogonales concurrentes en P_1 y a los ejes cartesianos

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \vec{M}_{EJES} & \rightarrow \vec{M}_{P_1} = [16, -14, -2] \\ \vec{M}_{EJE X} & = [16, 0, 0] * [i, 0, 0] = 16 \text{ ton}_m \\ \vec{M}_{EJE Y} & = [0, -14, 0] * [0, j, 0] = -14 \text{ ton}_m \\ \vec{M}_{EJE Z} & = [0, 0, -2] * [0, 0, k] = -2 \text{ ton}_m \end{aligned}$$

Se nota además; que el momento de una fuerza respecto de un punto, es igual a la suma de los momentos de dicha fuerza, respecto de tres ejes ortogonales que pasan por el punto; es decir:

$$\vec{M}_{P_1} = \vec{M}_{EJE X} + \vec{M}_{EJE Y} + \vec{M}_{EJE Z} = [16, -14, -2] \text{ ton}_m$$

1.12 PROBLEMAS PROPUESTOS.

Problema #1

$\vec{F} = [3, 4, -2] \text{ t}$ y $P(4, 0, -3) \text{ m}$ un punto de la línea de acción de F, además un punto arbitrario $P_1(5, -3, -1) \text{ m}$ Se pide:

a) Momento de \vec{F} respecto del origen.



b) Momento de \vec{F} respecto de P_1

Respuesta: a) $M_O = [12, -1, 16] \text{ ton_m}$, b) $M_{P_1} = 2 \text{ i} - 8 \text{ j} - 13 \text{ k ton_m}$

Problema #2

Los del ejercicio 1.1 y el punto arbitrario $P_2 (0, 4, -2) \text{ m}$ Se pide:

a) Momento de \vec{F} respecto del eje $P_1 P_2$.

Respuesta: a) $M_E = -621 \text{ ton_m}$

Problema #3

$\vec{F} = [-3, 5, 0] \text{ t}$ y $P (0, 2, 4) \text{ m}$ un punto de la línea de acción de \vec{F} , además un punto arbitrario $P_1 (2, 3, -1) \text{ m}$ Se pide:

a) Momento de F respecto a tres ejes ortogonales concurrentes en P_1 y paralelos a los ejes cartesianos.

Respuesta: a) $M_x = -25 \text{ ton_m}$; $M_y = -15 \text{ ton_m}$; $M_z = -13 \text{ ton_m}$

Problema #4

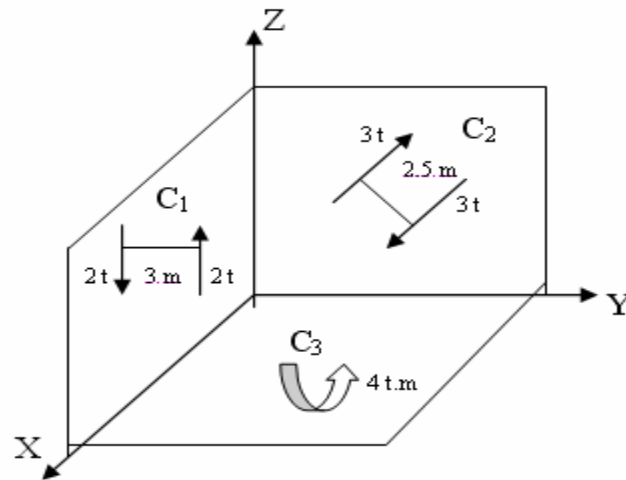
Demostrar el teorema de Varignon, para el caso del momento de una fuerza respecto de un punto.

Problema #5

Para la siguiente figura se pide determinar:

a) Los momentos de los pares C_1 , C_2 y C_3 .

b) La suma de los momentos de los pares



Respuesta: a) $\vec{M}_1 = 6 \text{ j}$; $\vec{M}_2 = -7.5 \text{ i}$; $\vec{M}_3 = 4 \text{ k}$ en ton_m , b) $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = [-7.5, 6, 4] \text{ ton}_m$

Problema #6

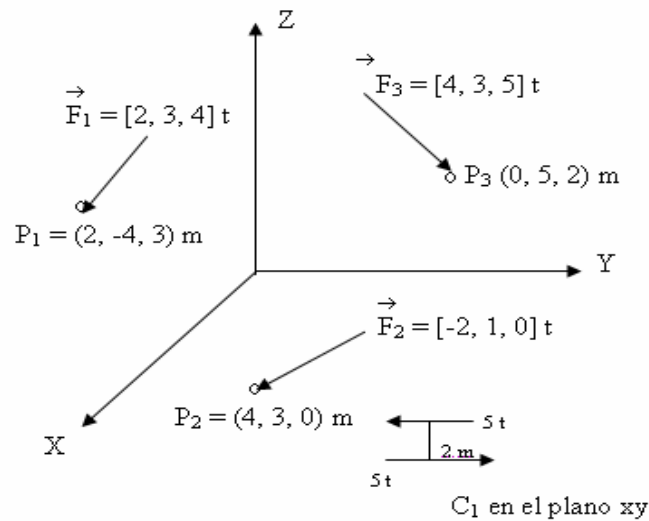
Con los datos del problema 3 se pide:

- Trasladar \vec{F} a una posición paralela que pase por P_1 .
- Indicar la composición del nuevo sistema.

Respuesta: a) \vec{F} traslada a P_1 en forma paralela, b) \vec{F} en P_1 mas $M_{P_1} = [-25, -15, -13] \text{ ton}_m$

Problema #7

El sistema de la figura:



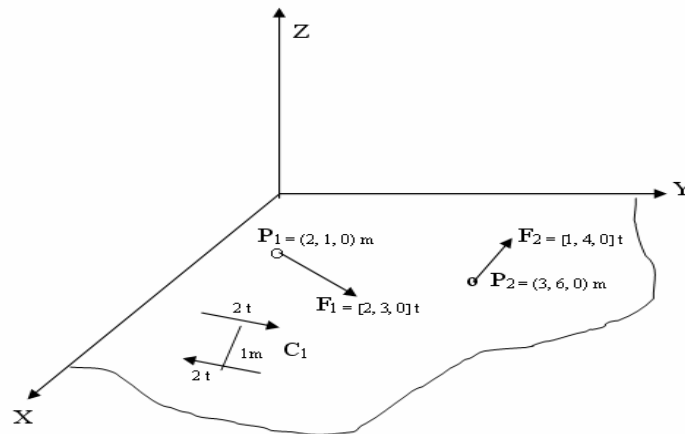
Se pide: a) Resultante de fuerzas en el origen.

b) Resultante de momentos.

Respuesta: a) $F_R = [4, 7, 9] \text{ t}$, b) $M_R = [-6, 6, 14] \text{ ton}_m$

Problema #8

En el sistema coplanar de la figura



Se pide:

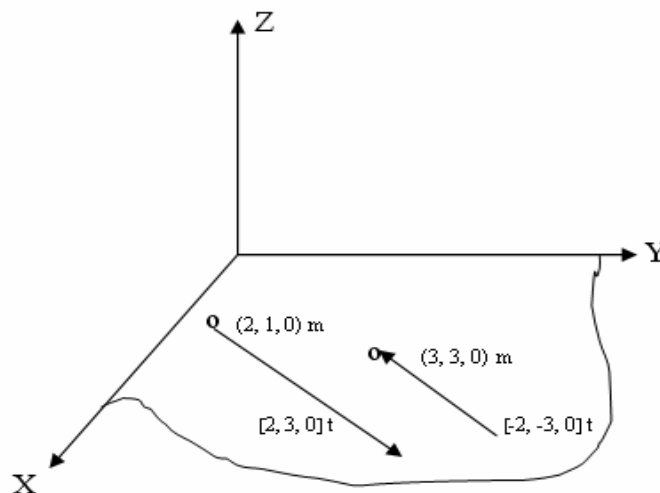
a) Resultante del sistema.

b) Línea de acción de la resultante.

Respuesta: a) $F_R = [3, 7, 0] \text{ t}$, b) según la recta $7x - 3y = 8$

Problema #9

El sistema coplanar de la figura



Se pide:

- a) Resultante del sistema.

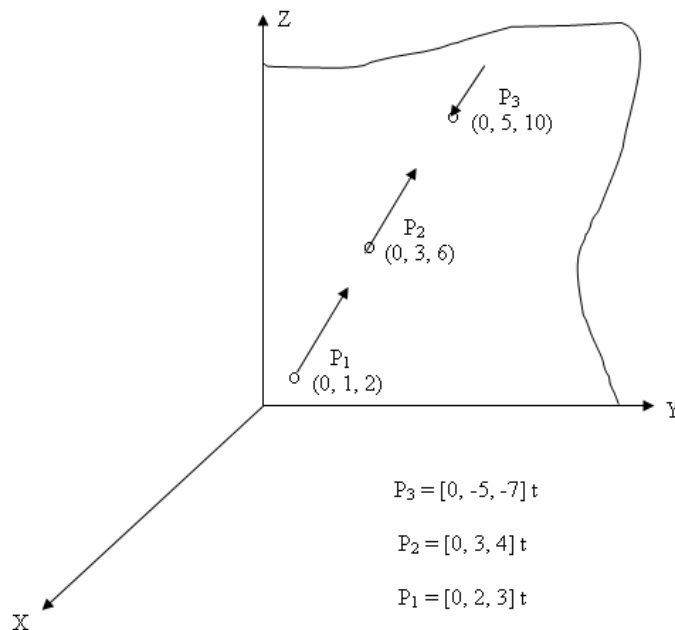
Respuesta: **a)** el par $\vec{M}_O = [0, 0, 1] \text{ ton}_m$

1.13 EVALUACION DIAGNOSTICO DEL CAPITULO.

En este apartado se propone que el estudiante realice una evaluación de todo lo aprendido en este capítulo, para lo cual se necesita que responda las siguientes preguntas sin revisar el contenido del presente capítulo.

- Como se encuentra el desplazamiento de un punto respecto del origen?
- Que es la magnitud de un vector?
- Definiendo la magnitud, como se encuentra la distancia entre el origen y un punto?
- Como se define el momento de una fuerza con respecto a un punto?
- Demostrar el teorema de **VARIGNON** respecto de un eje.
- Definir que es un par de fuerzas.

Para concluir este diagnostico se pide hallar la resultante del siguiente sistema de fuerzas.





CAPÍTULO 2

INTRODUCCION AL ANÁLISIS DE LAS ESTRUCTURAS

2.1 OBJETIVO GENERAL.

El objetivo fundamental de este capítulo es hacer que el estudiante conozca el concepto de estructura como también los diferentes tipos de cargas y apoyos que actúan en un sistema estructural.

2.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS.

Al terminar el capítulo el estudiante podrá:

- Clasificará las estructuras por su forma geométrica, por su sistema de cargas, por su sistema de apoyos y por sus condiciones de isostaticidad.
- Determinara las resultantes de cargas distribuidas y la posición en la que esta actúa.
- Determinara las reacciones de apoyo de distintos tipos de estructuras (vigas, pórticos, arcos, estructuras mixtas).

2.3 INTRODUCCION.

Con un razonamiento lógico y ordenado se le proporciona al lector los elementos de análisis para que, a partir de la definición del concepto de estructura; las clasifique; de la misma forma por sus condiciones de isostaticidad, identificando a: las estructuras hipostáticas (inestables), cuando el número de las incógnitas del sistema es menor a las condiciones del equilibrio estático; estructuras isostáticas (estables) cuando el número de las incógnitas del sistema es igual al número de las

ecuaciones de equilibrio estático; estructuras hiperestáticas, cuando el número de las incógnitas es mayor al número de las ecuaciones del equilibrio estático.

2.4 CONCEPTOS BÁSICOS Y DEFINICIONES.

Durante el proceso de formación del ingeniero civil, el concepto de estructura se encuentra referido a un conjunto de elementos que la conforman; empero, ésta aseveración no demuestra una definición para entenderlo en toda la extensión de su significado. Por ende, al plantearse la pregunta de que es una estructura, la respuesta puede darse un tanto subjetiva. Por lo que, para entenderlo y asimilarlo es necesario considerar como premisa el entorno que la rodea.

Si tuviéramos curiosidad de ser observadores teniendo únicamente nuestro medio ambiente como límite, o en otras palabras, el límite de nuestra vista y razonamiento; nos daríamos cuenta que podemos identificar diferentes estructuras, diferenciándolas por su utilización para lo que fueron diseñadas; así, en el ámbito científico de la ingeniería civil, en forma natural discriminaríamos: Casas habitaciones, edificios de oficinas, escuelas, puentes, tanques, edificios departamentales, anuncios espectaculares, aeropuertos, presas, distrito de riego, carreteras, alcantarillado, líneas de conducción y distribución de agua potable, entre otras, todas ellas cumpliendo un propósito particular para lo que fueron diseñadas.

Por lo tanto:

- **ESTRUCTURA, ES UN CONJUNTO DE ELEMENTOS CON FORMA GEOMÉTRICA QUE, UNIDOS ENTRE SÍ POR MEDIO DE NODOS, SOPORTAN CARGAS QUE SON TRANSMITIDAS A SUS APOYOS A TRAVÉS DE LOS ELEMENTOS ESTRUCTURALES QUE LA INTEGRAN.**
- **APOYO, ES UN DISPOSITIVO CONSTRUCTIVO QUE PERMITE ENLAZAR ENTRE SI LOS ELEMENTOS ESTRUCTURALES Y/O SUJECCIÓN ENTRE LA ESTRUCTURA Y EL SISTEMA TIERRA, CON EL PROPÓSITO DE EVITAR DESPLAZAMIENTOS.**

De ser aceptada la definición, el conjunto de elementos que integran una estructura debe de contener simultáneamente: forma geométrica, sistema de cargas y sistema de apoyos, referencias que facilitan tener elementos de análisis para plantear una clasificación en función de su geometría, de sus apoyos y de sus cargas.

2.5 TIPOS DE ESTRUCTURAS.

La clasificación en el entorno de las estructuras, se da en función de la ubicación de sus elementos, que pueden estar localizados en el plano o en el espacio; en consecuencia, las estructuras se dividen en:

2.5.1 Estructuras planas.

Son aquellas cuando sus elementos se encuentran en un plano; una representación de éstas se ejemplifica idealizando una viga simplemente apoyada que se encuentra localizada sobre el plano XY, como se muestra en la figura 2.1 con la barra AB.

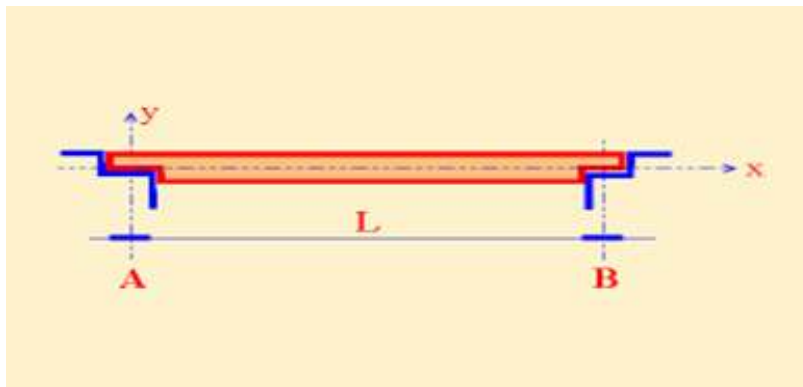


Figura 2.1

2.5.2 Estructuras en el espacio.

Se identifican como tales cuando al menos, uno de sus elementos se encuentra en el espacio. Si se observa la figura 2.2, el marco AB-OE se encuentra en el plano XY; y perpendicular a éste, sobre el eje Z se ubica el marco GH-KL resultando en consecuencia una estructura en el espacio.

Tomando de referencia el alcance que se pretende en el análisis de las estructuras isostáticas, se abordan únicamente las estructuras planas; identificando entre ellas la siguiente clasificación:

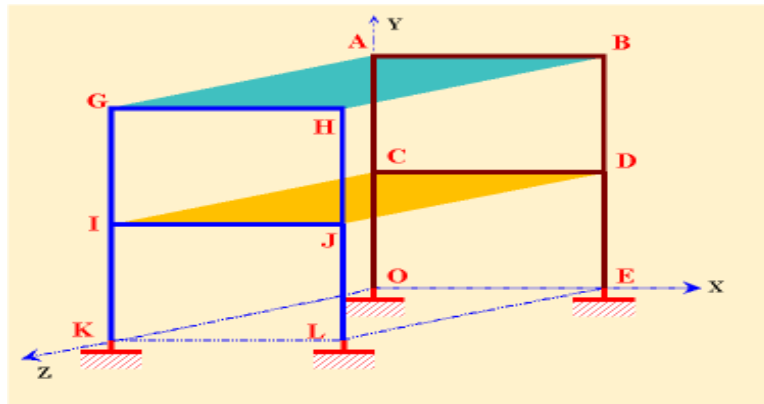


Figura 2.2

2.6 CLASIFICACION DE LAS ESTRUCTURAS

Las clasificaremos por su forma geométrica, por su sistema de apoyos, por su sistema de cargas.

2.7 POR SU FORMA GEOMÉTRICA.

Las estructuras por su forma geométrica en el contexto de sus elementos que las integran se clasifican en rectas, curvas y de contacto; para su identificación se indicarán en algunas las cargas y apoyos únicamente para su identificación, ya que para su definición se exponen en las siguientes secciones de éste capítulo.

2.7.1 Viga Horizontal. La figura representa una viga simplemente apoyada con carga concentrada "P" y una carga uniformemente distribuida "W".(ver fig.2.3).

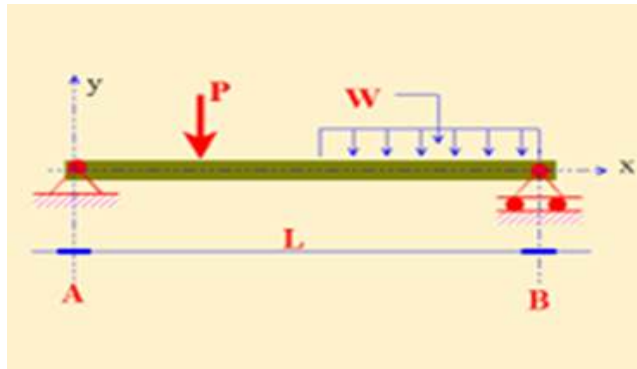


Figura 2.3

2.7.2 Viga Inclinada. La figura 2.6 representa a una viga simplemente apoyada con carga concentrada, observando que la barra AB tiene una dirección respecto al eje horizontal en función del ángulo α

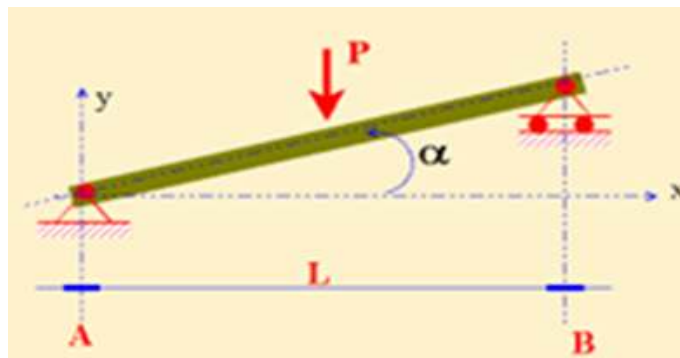


Figura 2.4

2.7.3 Columnas. Es un elemento estructural vertical o inclinado. Con la figura 2.5 que se muestra se esquematiza una columna vertical AB con carga concentrada axial.

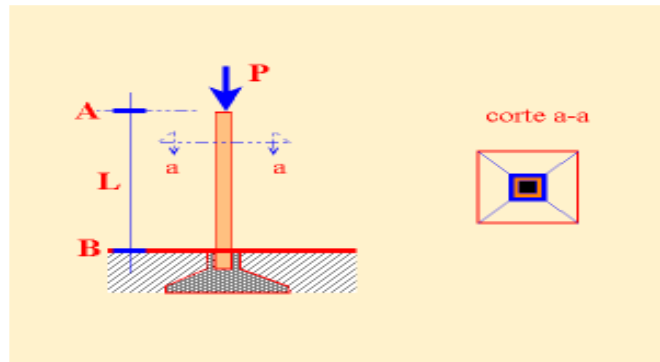


Figura 2.5

2.7.4 Marcos o Pórticos. Están constituidos por un conjunto de elementos rectilíneos, horizontales, verticales y/o inclinados. Elementos que soportan cargas concentradas o distribuidas como se muestra en las siguientes figuras.

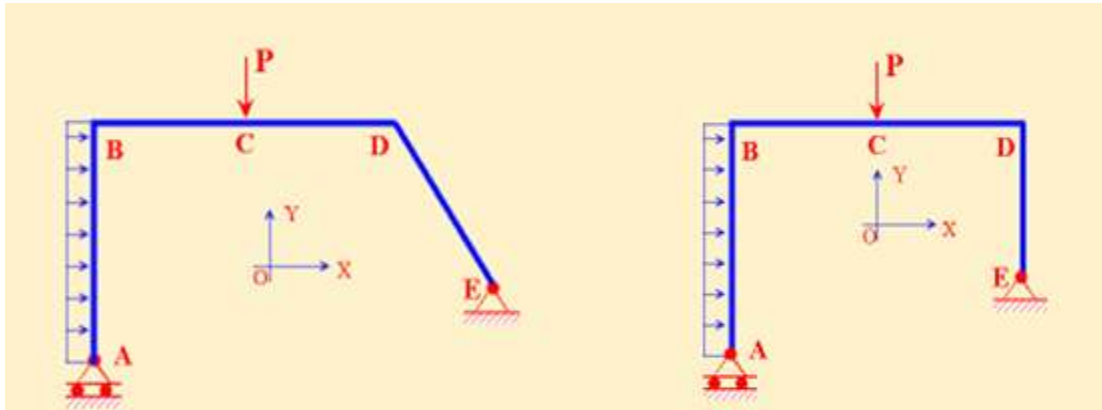


Fig 2.6 (a)

Fig 2.6 (b)

2.7.5 Armaduras. Las integran un conjunto de elementos rectilíneos relativamente esbeltos que están unidos rígidamente en sus extremos que soportan cargas concentradas directamente sobre las uniones o nodos como se muestra en la figura.

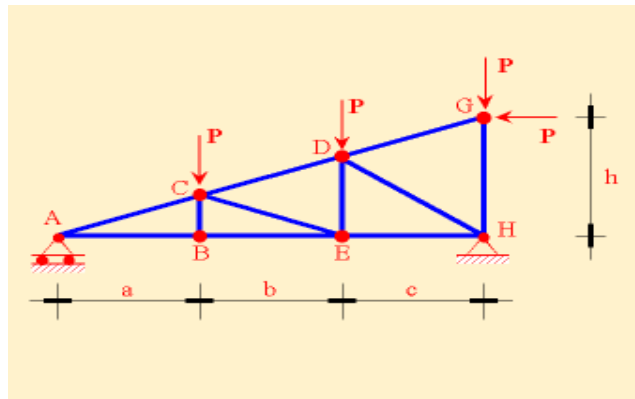


Figura 2.7

2.7.6 Arcos. Están integradas por un conjunto de elementos curvos de forma circular, elíptica o parabólica. Al respecto se muestran las siguientes figuras:

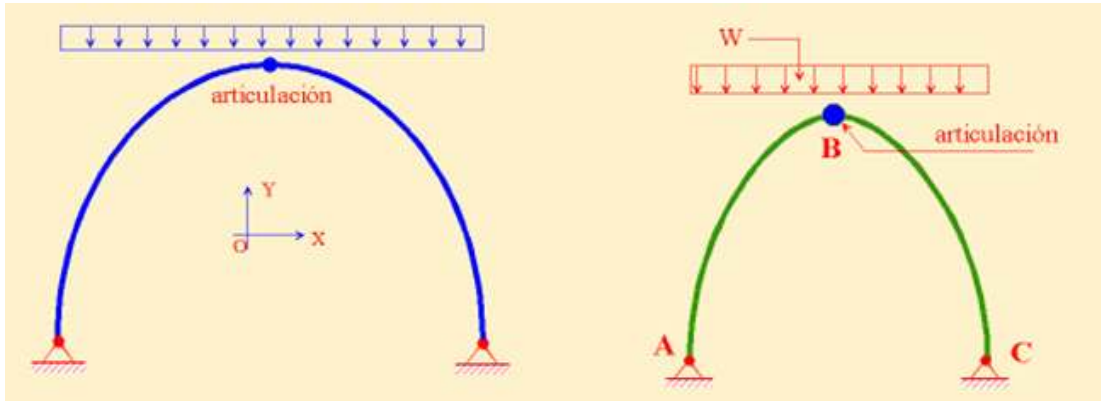


Fig 2.8 (a)

Fig 2.8 (b)

2.7.7 Cables. Rectilíneos en cuyos puntos de inflexión soportan cargas concentradas. Parabólicos que soportan cargas repartidas, Cables que soportan su peso propio.

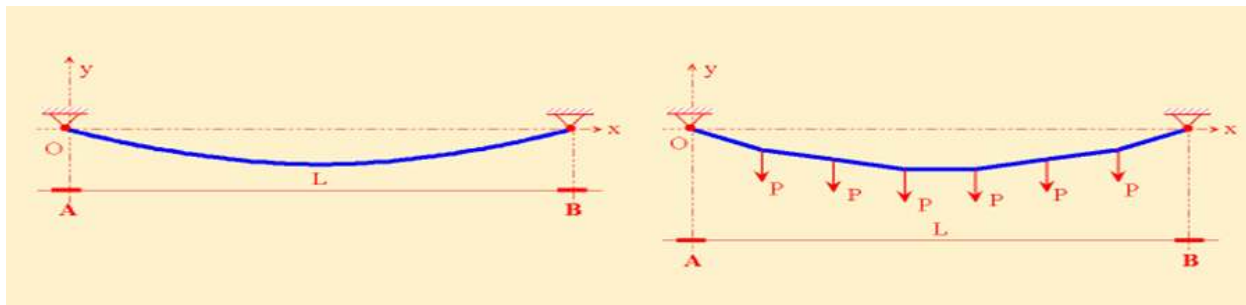


Fig 2.9 (a)

Fig 2.9 (b)

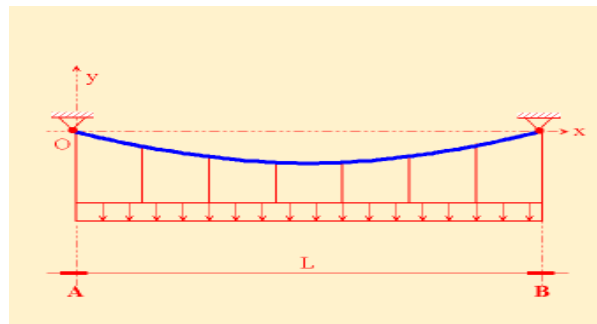


Fig 2.9 (c)





2.8 POR SU SISTEMA DE APOYOS

¿QUE ES UN APOYO?

Como ya habíamos mencionado un apoyo es un dispositivo constructivo que permite enlazar entre si los elementos estructurales y/o sujeción entre la estructura y el sistema tierra, con el propósito de evitar desplazamientos.

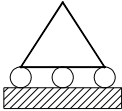


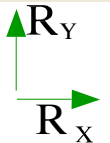
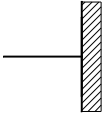
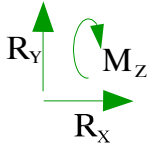
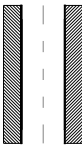
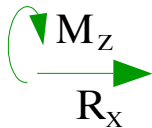
Estos apoyos tienen por objeto restringir los desplazamientos en alguno de los ejes en los que este ubicado, y según a los tipos de apoyo con las restricciones respectivas las clasificaremos en el plano de la siguiente manera:

Tabla 2.1 Sistemas de apoyos

Nombre del apoyo	Vínculos	Grados de libertad	diagrama
Móvil	Uno	Dos	
Fijo	Dos	Uno	
Empotramiento	Tres	Cero	
Guía	Dos	Uno	

Para la mejor concepción del sentido de las reacciones de apoyo en el plano proponemos la siguiente tabla:

Tabla 2.2 Grados de libertad en apoyos

Esquema	Nombre	Grados de libertad	Diagrama
	Móvil	Dos	
	Fijo	Uno	
	Empotramiento	Cero	
	Guía	Uno	

2.9 POR SU SISTEMA DE CARGAS

Una primera clasificación de las estructuras por su sistema de cargas se identifican:

- Las cargas externas: actúan sobre la superficie del elemento estructural.
- Las cargas internas: actúan dentro del elemento estructural (como es el caso de los elementos mecánicos que se analizan en el siguiente capítulo)

Con base en lo anterior, cuando la estructura soporta un sistema de cargas externo se identifican: Por el tipo de carga, por su permanencia y por la forma en que actúa.

2.9.1 Por el tipo de carga.

2.9.1.1 Cargas concentradas. Son aquellas que tienen un solo punto de aplicación

2.9.1.2 Cargas Axiales. Son aquellas que están actuando en el centro geométrico de una sección transversal.

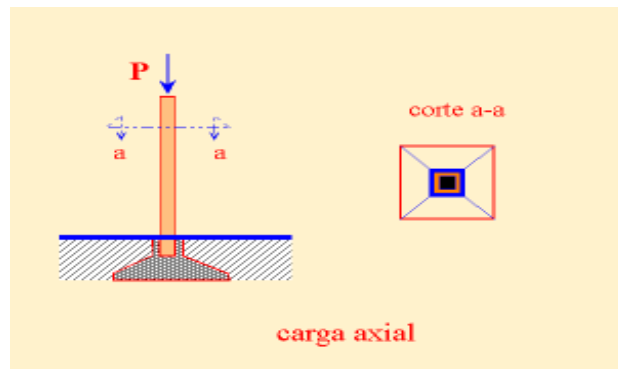


Figura 2.10

2.9.1.3 Cargas no axiales. Son aquellas que actúan fuera del centro geométrico de una sección transversal, generando una excentricidad (e). ver fig 2.11

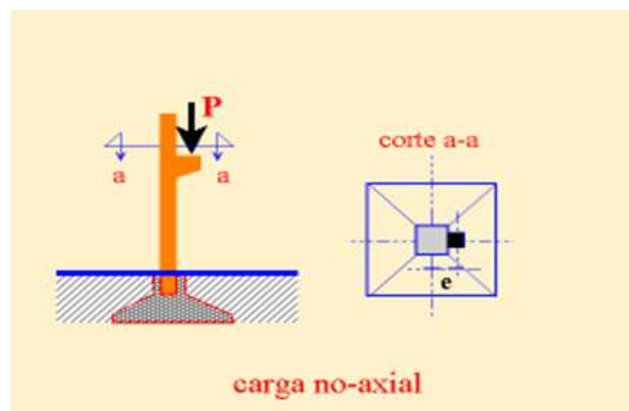


Figura 2.11

2.9.1.4 Cargas distribuidas. La variación de la carga es constante sobre el claro "L" donde esta actuando como se observa en la figura:

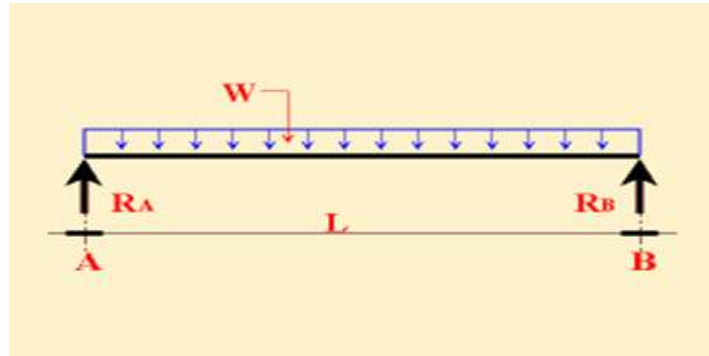


Figura 2.12

2.9.1.5 Carga no uniforme. La variación de la carga no es constante sobre el claro "L" donde esta actuando. Por ejemplo, en la figura que se muestra se distingue una carga de variación lineal sobre el tramo "a" y con una variación cuadrática sobre el tramo "b".

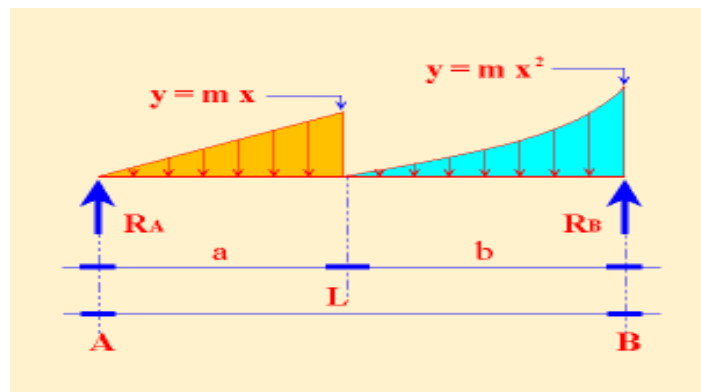


Figura 2.13

2.9.2 Por su permanencia. Se clasifican en cargas vivas, cargas muertas y cargas accidentales.

2.9.2.1 Cargas vivas. Para una simple identificación y un tanto coloquial, se definen como aquellas que se mueven; por ejemplo en un salón de clases la carga viva esta representada por el peso de los alumnos que se expresan en unidades de longitud al cuadrado.

2.9.2.2 Cargas muertas. Están representadas por el peso propio del elemento estructural

2.9.2.3 Cargas accidentales. Son aquellas que están representadas por la fuerza sísmica, por la fuerza del viento, por el peso de la nieve, etc.

2.9.3 Por la forma en que actúan.

Son las cargas activas, las cargas reactivas y las cargas internas.(ver figura 2.14)

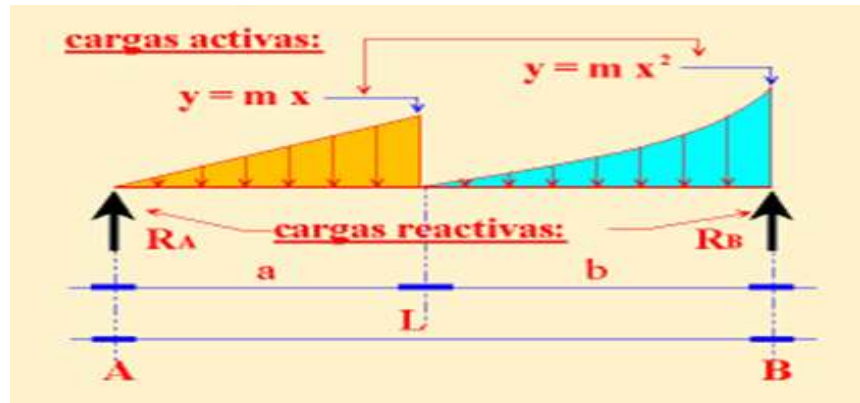


Figura 2.14

2.9.3.1 Cargas activas. Están representadas por el sistema de cargas externo ($y = mx$; $y = mx^2$) que están actuando sobre el elemento estructural.

2.9.3.2 Cargas reactivas. Están representadas por las componentes de cada uno de los apoyos que soportan al elemento estructural (R_A ; R_B) identificándose también como vínculos o reacciones.

2.9.3.3 Cargas internas. Son las que actúan dentro del elemento estructural, mismas que se oponen a la acción de las cargas externas. Dentro de ésta clasificación se distinguen: La fuerza normal, es una fuerza interna que esta actuando perpendicularmente a la sección transversal del elemento estructural. La fuerza cortante, es una fuerza interna que esta actuando paralelamente a la sección transversal del elemento estructural. Por los efectos que generan éstas fuerzas internas, se les asocia con los elementos mecánicos del elemento estructural; conceptos que se analizan en el siguiente capítulo.

2.10 CONDICIONES DE EQUILIBRIO.

En el contexto de la teoría de la Estática, se dice que un sistema de fuerzas se encuentra en equilibrio cuando su resultante es igual a cero; esto es:

$$\sum F = F_R = 0 \quad y \quad \sum M = M_R = 0$$

O bien desde el punto de vista escalar:

* En el espacio existen 6 ecuaciones:

$$\begin{array}{l} \sum F_X = 0 \quad ; \sum F_Y = 0 \quad ; \sum F_Z = 0 \\ \sum M_X = 0 \quad ; \sum M_Y = 0 \quad ; \sum M_Z = 0 \end{array}$$

* En el plano existen 3 ecuaciones:

$$\sum F_X = 0 \quad ; \sum F_Y = 0 \quad ; \sum F_Z = 0$$

En base de lo anterior, las condiciones de equilibrio para una estructura en el plano están representadas por tres ecuaciones que nos servirán para determinar las reacciones de apoyo.

Sin embargo, a estas ecuaciones de la estática, usualmente pueden añadirse otras ecuaciones, llamadas “especiales” originadas por la presencia de “articulaciones” ver fig 2.15

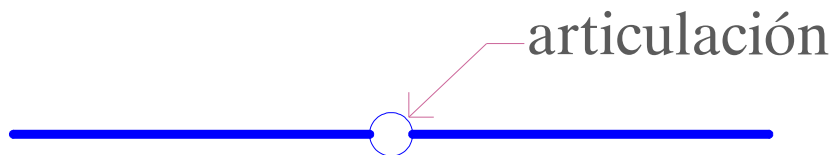


Figura 2.15

La articulación introduce una ecuación especial, a saber:

$$\sum M = 0 ; \text{ a la izquierda o derecha de la articulación}$$

2.11 GRADO DE ISOSTATICIDAD.

El “grado de ISOSTATICIDAD” de una estructura se define mediante la siguiente expresión:

$$G = R - E - e$$

Donde:

$R \Rightarrow$ Numero de reacciones (depende del numero y del tipo de apoyos)

$E \Rightarrow$ Ecuaciones de la estática (en el plano 3 y en el espacio 6)

$e \Rightarrow$ Ecuaciones especiales

De lo anteriormente expuesto, se ha podido demostrar los tres escenarios que se pueden presentar en el análisis de una estructura para determinar las condiciones de isostaticidad, que a manera de resumen se expone a continuación:

Tabla 2.3 Grados de isostaticidad de una estructura

Condiciones de isostaticidad:	Diferencia entre las incógnitas y ecuaciones de equilibrio	Tipo de estructura
$G < 0$	$E - I =$ grado de libertad de la estructura	HIPOSTÁTICA o estructura inestable
$G = 0$	CERO	ISOSTÁTICA o estáticamente determinada
$G > 0$	$I - E =$ grado de isostaticidad de la estructura	HIPERESTÁTICA o estáticamente indeterminada

Donde:

$I \Rightarrow$ numero de incógnitas

$E \Rightarrow$ numero de ecuaciones de la estática

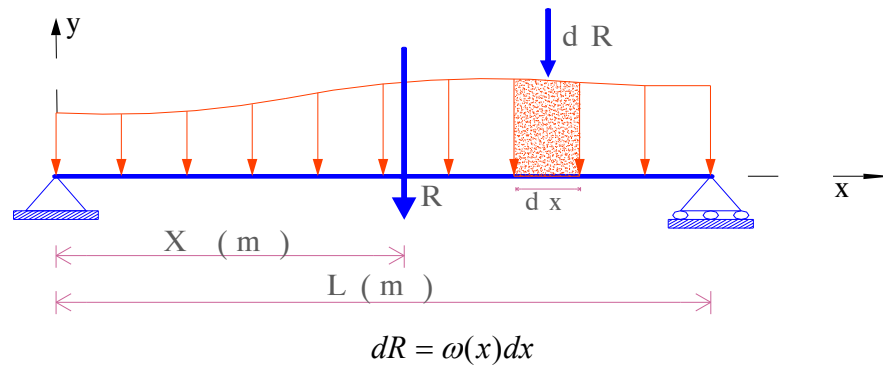
2.12 CARACTERIZACION DE LAS CARGAS.

Como ya habíamos mencionado en el análisis de estructuras las cargas se pueden analizar como cargas puntuales o concentradas, cargas axiales, cargas no axiales (con excentricidad), cargas distribuidas y cargas no uniformes.

2.13 RESULTANTE DE CARGAS DISTRIBUIDAS LINEALMENTE.

Para algunos propósitos es conveniente sustituir una carga distribuida linealmente, por una fuerza concentrada (puntual) según sea la línea de acción, y de la misma manera saber cual es la posición de dicha carga.

Dentro las relaciones matemáticas que se aplican para el cálculo de la resultante de una carga distribuida linealmente lo expresamos de la siguiente manera:



$$dR = \omega(x)dx$$

$$R = \int_0^l \omega(x)dx \quad [t]$$

Además:

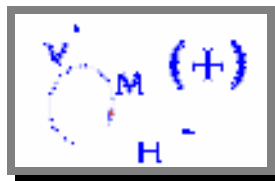
$$\bar{x} = \frac{\int_0^l x \cdot \omega(x)dx}{\int_0^l \omega(x)dx} \quad [m]$$

Donde:

$\bar{x} \Rightarrow$ es la posición aproximada donde se encuentra la carga resultante R a lo largo de la viga.

2.14 DETERMINACIÓN DE REACCIONES DE APOYO.

En este subtítulo se mostrará el procedimiento que se sigue para determinar las reacciones en los apoyos de las estructuras, PERO ANTES DE INTRODUCIRNOS EN ESTE AMBITO estamos obligados a regirnos a una **convención de signos**, que nos permita solucionar las ecuaciones estáticas de una manera mas sencilla especialmente si seguimos un procedimiento análisis escalar.



Esta es la convención de signos de la estática, pero cuando se desconoce el sentido de la reacción es conveniente asumir para ella el sentido positivo, y si al realizar el cálculo obtenemos un resultado positivo significara que el sentido asumido será el contrario.

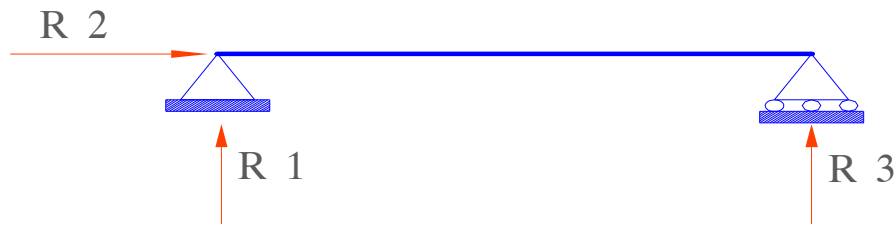
2.15 EJERCICIOS RESUELTOS.

Para poder tener una mejor percepción de la introducción al análisis de las estructuras presentaremos a continuación a una serie de ejercicios resueltos, por los métodos ya mencionados anteriormente, para así realizar verificar el tipo de estructura y también hallar reacciones de apoyos en los distintos tipos de estructuras que se muestran a continuación.

Ejercicio #1

Dadas las siguientes estructuras en el plano, determinar su grado de ISOSTATICIDAD.

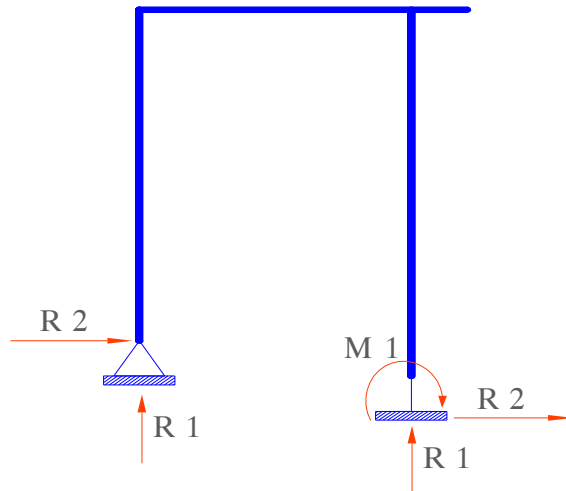
a)



Como el grado de isostaticidad esta definido por el número de reacciones menos el número de ecuaciones de la estática tenemos:

$$G = 3 - 3 = 0; \text{ Estructura ISOSTATICA}$$

b)

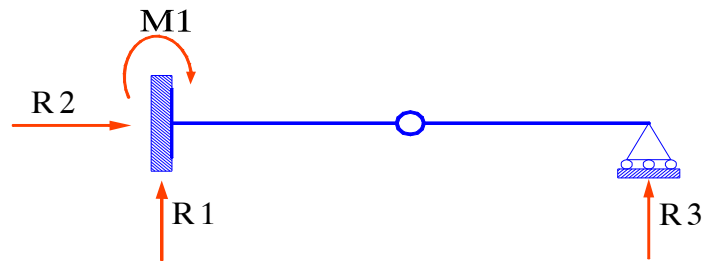


Realizamos el mismo análisis: $G = R - E - e$

$$G = 5 - 3 = 2; \text{ Estructura HIPERESTATICA}$$

Esta es una estructura Hiperestática de grado 2 o estáticamente indeterminada.

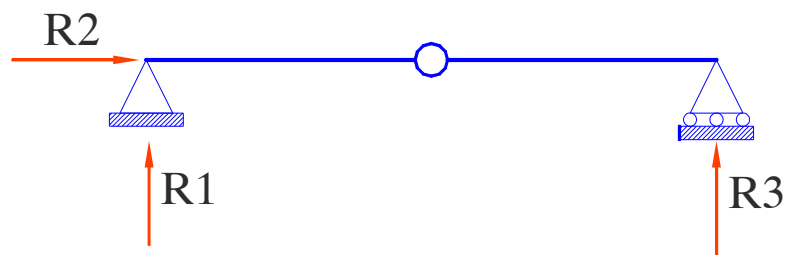
c)



Recordemos que con la presencia de una articulación se añade un ecuación especial (e)

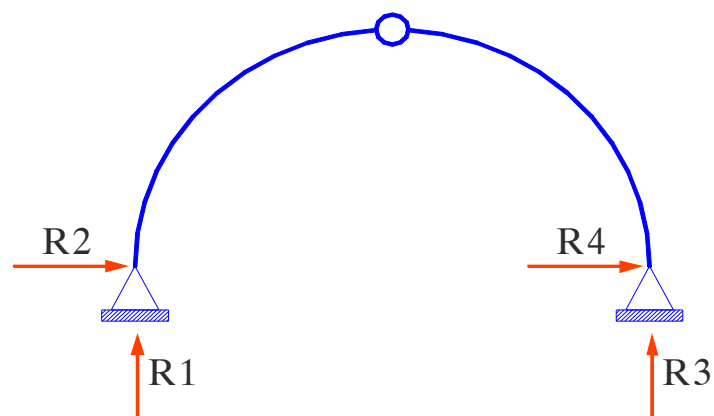
$$G = 4 - 3 - 1 = 0 ; \text{Estructura ISOSTÁTICA}$$

d)



$$G = 3 - 3 - 1 = 0 ; \text{Estructura HIPO-ESTÁTICA}$$

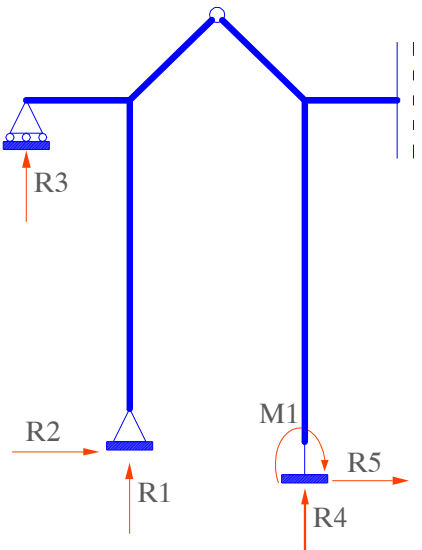
e)



$$G = 4 - 3 - 1 = 0 ; \text{Estructura ISOSTÁTICA}$$

o arco ISOSTÁTICO

f)

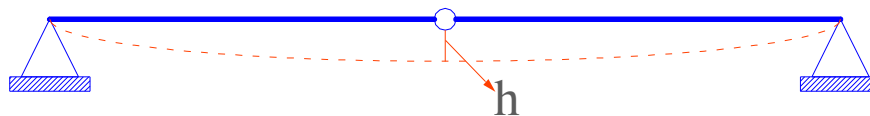


$$G = 8 - 3 - 1 = 4; \text{ Estructura HIPERESTATICA DE GRADO 4}$$

Ejercicio #2

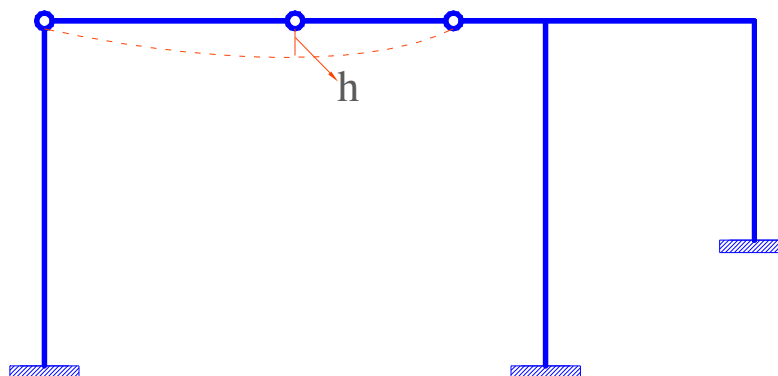
Las siguientes estructuras no son adecuadas para soportar cargas, ya que se las considera GEOMETRICAMENTE INESTABLES.

a)



Esta estructura si bien tiene un grado de isostaticidad igual a cero ($G=0$) carece de propiedades geométricas de estabilidad.

b)

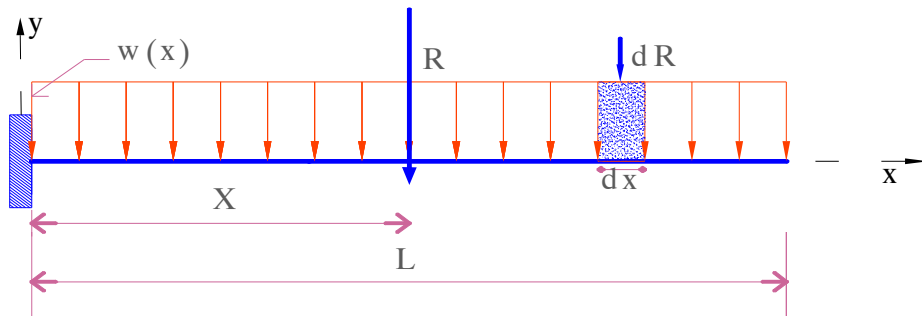


En este tipo de estructura podemos ver que tiene un grado isostático de $G = 6$ pero de igual manera presenta una INESTABILIDAD GEOMÉTRICA.

Ejercicio #3

Para las siguientes estructuras que presentan carga distribuida, determinar el valor de la resultante y la ubicación exacta de la misma:

a)



La ecuación de $w(x)$ corresponde claramente a la de una recta paralela al eje x , entonces $w(x) = \text{constante} \Leftrightarrow q$. Por lo tanto:

$$dR = q \cdot dx \Rightarrow R = \int_0^l q \cdot dx = q \cdot x \Big|_0^l = q \cdot l \Rightarrow \boxed{R = q \cdot l}$$

En este caso el valor de R , coincide con el valor de la superficie RECTANGULAR definida por la carga distribuida, además:

$$\int_0^l q \cdot x dx = q \frac{x^2}{2} \Big|_0^l = \frac{q \cdot l^2}{2}$$

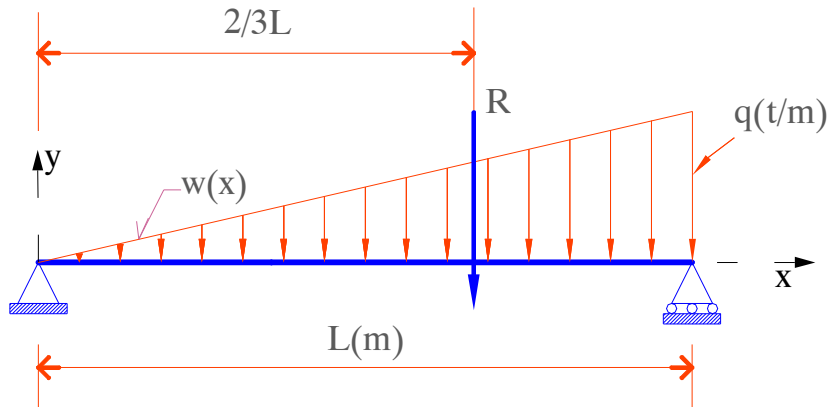
Ahora solo reemplazamos en la formula anteriormente enunciada y obtenemos la posición exacta donde se esta aplicando la resultante de la carga distribuida.

$$\bar{x} = \frac{\int_0^l x \cdot \omega(x) dx}{\int_0^l \omega(x) dx} = \frac{\frac{q \cdot l^2}{2}}{q \cdot l} = \frac{l}{2} [m]$$

Por lo tanto la ecuación de la línea de acción de R será: $\bar{x} = \frac{l}{2} [m]$ recta paralela al eje “y”.

La línea de acción de R pasa por el CENTRO DE GRAVEDAD de la superficie RECTANGULAR definida por la carga distribuida.

b)



$w(x)$ representa a una recta cuya ecuación tiene la forma $w(x) = \frac{q}{l} \cdot x$, entonces:

$$R = \int_0^l \frac{q}{l} \cdot x dx = \frac{q}{l} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^l = \frac{q}{l} \cdot \frac{l^2}{2} \Rightarrow \boxed{R = \frac{q \cdot l}{2}}$$

Nuevamente el valor de la resultante R coincide con el valor de la superficie TRIANGULAR definida por la carga distribuida, para hallar la posición exacta de la carga distribuida integramos nuevamente y reemplazamos en la formula ya mencionada:

$$R = \int_0^l \frac{q}{l} \cdot x \cdot x dx = \frac{q}{l} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^l \Rightarrow \boxed{R = \frac{q \cdot l^2}{3}}$$

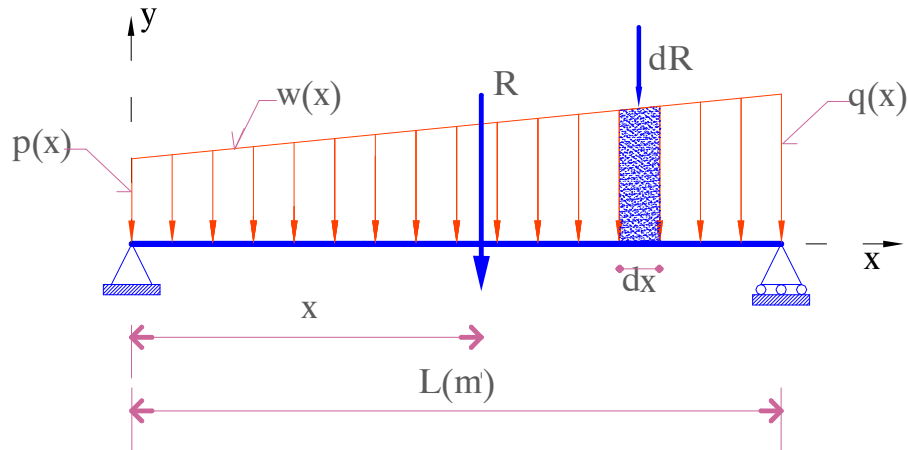
Por tanto la posición de la resultante será:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^l x \cdot w(x) dx}{\int_0^l w(x) dx} = \frac{\frac{q \cdot l^2}{3}}{\frac{q \cdot l}{2}} = \frac{2}{3} l [m]$$

Por tanto la ecuación de la línea de acción de R será $\bar{x} = \frac{2l}{3} [m]$

Si nos damos cuenta la posición de la resultante R pasa por el centro de gravedad de la superficie triangular definida por la carga distribuida.

c)



Dentro de la experiencia en asignaturas anteriores sabemos que $w(x)$ representa una ecuación que esta representada por la siguiente ecuación:

$$w(x) = p + \frac{q-p}{l} \cdot x$$

$$dR = \int_0^l (p + \frac{q-p}{l} x) dx \Rightarrow R = (q + p) \frac{l}{2}$$

Una vez más como en los casos anteriores, el valor de la resultante coincide con el valor de la superficie trapezoidal definida por la carga distribuida, para hallar la posición exacta de la carga distribuida integramos nuevamente y reemplazamos en la formula ya mencionada:

$$dR = \int_0^l (p + \frac{q-p}{l} x) x dx \Rightarrow (q + \frac{p}{2}) \frac{l^2}{3}$$

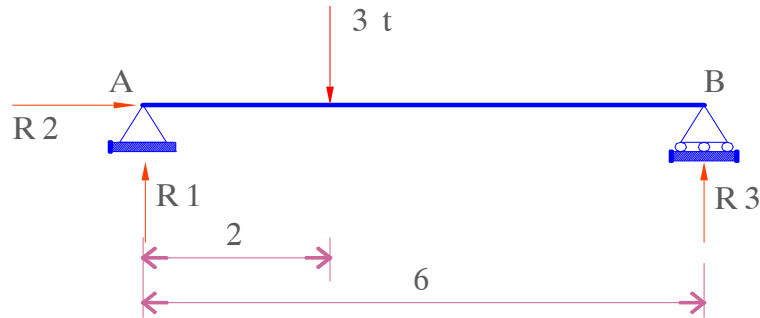
Por tanto la posición exacta de la resultante será:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^l x \cdot w(x) dx}{\int_0^l w(x) dx} = \frac{(q + \frac{p}{2}) \frac{l^2}{3}}{\frac{(q + p)l}{2}} = \frac{2}{3} \frac{(q + \frac{p}{2})l}{(q + p)} [m]$$

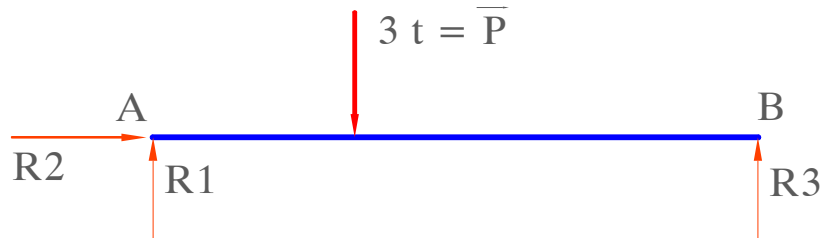
La línea de acción de R pasa por el centro de gravedad de la superficie trapezoidal definida por la carga distribuida.

Ejercicio #4

Para la siguiente estructura, determinar el valor de las reacciones de apoyo (resolver por el método vectorial y escalar).



a partir de esta estructura es conveniente construir un diagrama de cuerpo libre (D.C.L.), para así poder ubicarnos de mejor manera en el análisis de esta estructura



➤ Procedimiento Vectorial:

$$\vec{R}_1 = |R_1, 0, 0| \text{ t} ; \quad \vec{R}_2 = |0, R_2, 0| \text{ t} ; \quad \vec{R}_3 = |0, R_3, 0| \text{ t} ; \quad \vec{P} = |0, -3, 0|$$

Como solamente nos corresponde analizar en el plano, utilizamos la siguiente condición de equilibrio:

$$\vec{F}_R = 0$$

por tanto reemplazando obtenemos la siguiente ecuación:

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}_3 + \vec{P} = 0 \quad \text{ec.(1)}$$

Ahora recurrimos a una segunda condición de equilibrio para estructuras coplanáreas: $\vec{M}_A = 0$

$$[2, 0, 0] \times [0, -3, 0] + [6, 0, 0] \times [0, R_3, 0] = 0$$

Donde $[2,0,0]$ m es un vector de posición de un punto de P y $[6,0,0]$ m es un vector de posición de un punto de \vec{R}_3 , entonces resolviendo el sistema vectorial tenemos:

$$\begin{aligned} [0,0,6R_3 - 6] &= 0 \\ \Rightarrow \vec{R}_3 &= 1t \Rightarrow \vec{R}_3 = [0,1,0] \end{aligned}$$

Como ya tenemos calculado el valor de la reacción en B (R_3), reemplacemos este valor en la ecuación 1, así se tiene:

$$\begin{aligned} |R_1, 0, 0| + |0, R_2, 0| + |0, 1, 0| + |0, -3, 0| &= |0, 0, 0| \\ \Rightarrow [R_1, (R_2 + 1 - 3), 0] &= [0, 0, 0] \Leftrightarrow R_1 = 0t \text{ y } R_2 = 2t \end{aligned}$$

Por tanto tenemos los siguientes resultados:

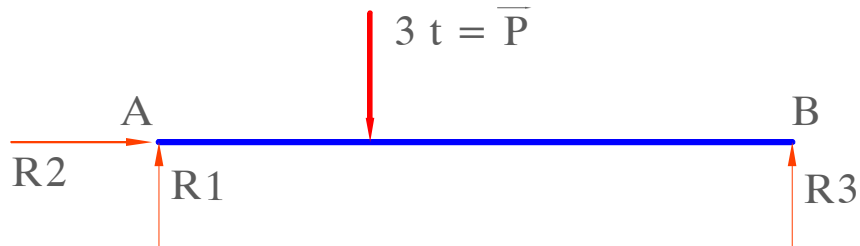
$$\vec{R}_1 = [0, 0, 0] \text{ t}$$

$$\vec{R}_2 = [0, 2, 0] \text{ t}$$

$$\vec{R}_3 = [0, 1, 0] \text{ t}$$

➤ Procedimiento Escalar:

Para la solución de esta estructura por el método escalar es necesario que recordemos la convención de signos asumidos a principio de este capítulo.



Empecemos analizando las ecuaciones fundamentales de equilibrio:

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow \sum H = 0 \Rightarrow H_A = 0 \quad \text{ec.(1)}$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow \sum V = 0 \Rightarrow V_A - 3 + V_B = 0 \quad \text{ec.(2)}$$

$$\sum M_Z = 0 \Leftrightarrow \sum M_A = 0 \Rightarrow (3)(2) - 6(V_B) = 0 \Rightarrow V_B = 1[t] \quad \text{ec.(3)}$$

Sustituyendo las ecuaciones (3) y (1) en la ecuación (2) tenemos:

$$V_A = 2 \text{ t}$$

Nótese que al calcular el valor de la reacción V_A , dependió del cálculo de la reacción V_B , ósea que si se hubiera cometido un error al calcular la primera reacción, se transmitiría como un gran error para la segunda reacción, para evitar esa incógnita se plantea el siguiente procedimiento de análisis:

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow \sum H = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow (3)(2) - 6(V_B) = 0 \Rightarrow V_B = 1[t]$$

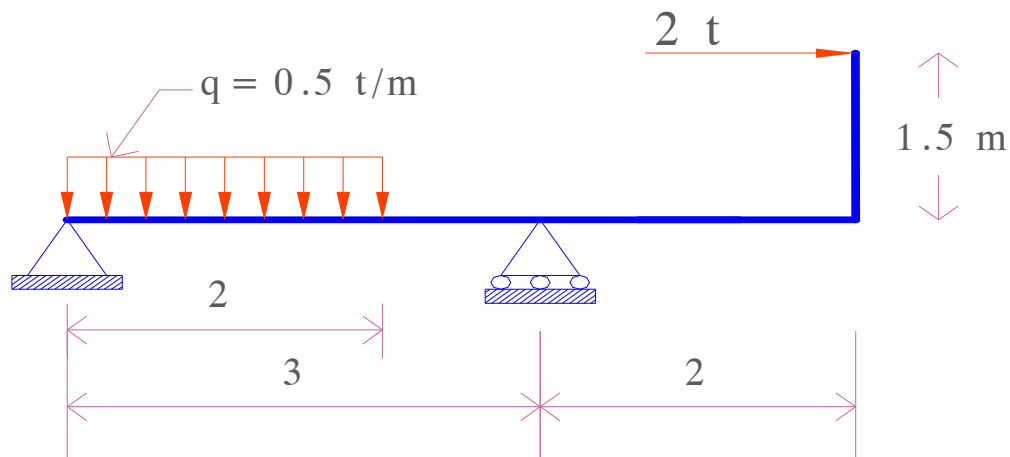
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow (3)(4) - 6(V_A) = 0 \Rightarrow V_A = 2[t]$$

$$\text{CONTROL } \sum V = 0 \Rightarrow 2 - 3 + 1 = 0$$

Este procedimiento de verificación consiste en realizar una sumatoria de todos los esfuerzos existentes en el eje “y” o todas las componentes de cargas en sentido vertical, dicha sumatoria debe dar por resultado cero (0), por que así estará confirmado que los esfuerzos de las cargas activas estarán compensadas por las cargas reactivas (reacciones), mostrando que existe un equilibrio tanto geométrico como interno. Dentro de marcos aceptables se puede aceptar que en la verificación de equilibrio un pequeño margen de error: ± 0.02 , pasado este error la estructura será considerada como estáticamente inestable.

Ejercicio #5

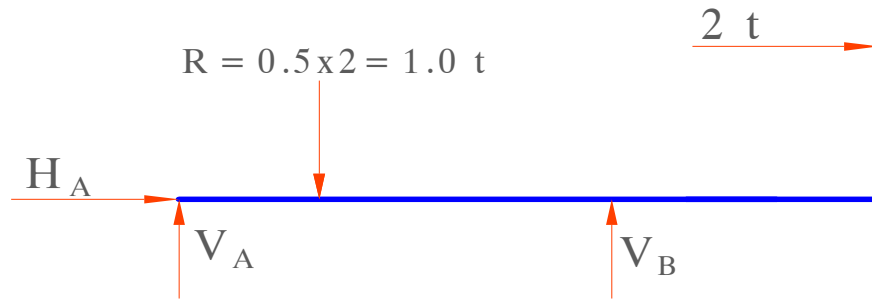
Para la siguiente estructura, determinar el valor de las reacciones de apoyo.



Primeramente realizamos un análisis para verificar el grado de isostaticidad

$$G = 3 - 3 = 0 ; \text{ Estructura ISOSTATICA}$$

Para efectos de facilidad de calculo presentamos en el siguiente DCL, nótese que se realiza el análisis solo con la resultante de la carga distribuida, esta es equivalente a la anterior estructura pero solo para efectos de calculo de reacciones, pero las estructuras NO SON IGUALES.



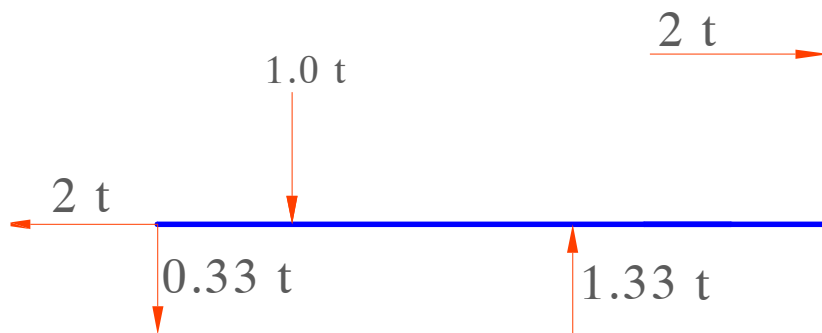
Empecemos analizando las ecuaciones fundamentales de equilibrio:

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow \sum H = 0 \Rightarrow H_A + 2 = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow (1)(1) - 3(V_B) + (2)(1.5) = 0 \Rightarrow V_B = 1.33[t]$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow (2)(1.5) - 3(V_A) - (1)(2) = 0 \Rightarrow V_A = -0.33[t]$$

Nótese el signo (-) de la reacción V_A , esto no quiere decir que hayamos realizado de manera errónea los cálculos de estática, solo que se tiene que cambiar el sentido que habíamos asumido para dicha reacción en primera instancia.



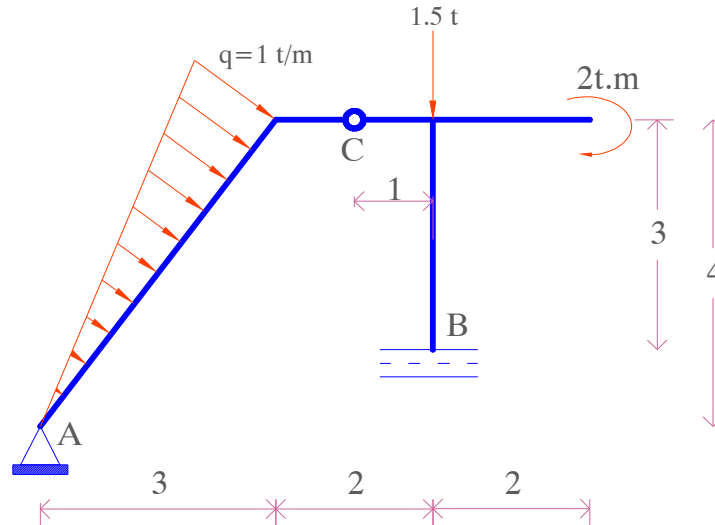
$$\text{CONTROL } \sum V = 0 \Rightarrow 1.33 - 1 + 0.33 = 0$$

Este procedimiento de verificación consiste en realizar una sumatoria de todos los esfuerzos existentes en el eje “y” o todas las componentes de cargas en sentido vertical, dicha sumatoria debe dar por resultado cero (0), por que así estará confirmado que los esfuerzos de las cargas activas estarán compensadas por las cargas reactivas (reacciones), mostrando que existe un equilibrio tanto geométrico como interno. Dentro de marcos aceptables se puede aceptar que en la verificación de

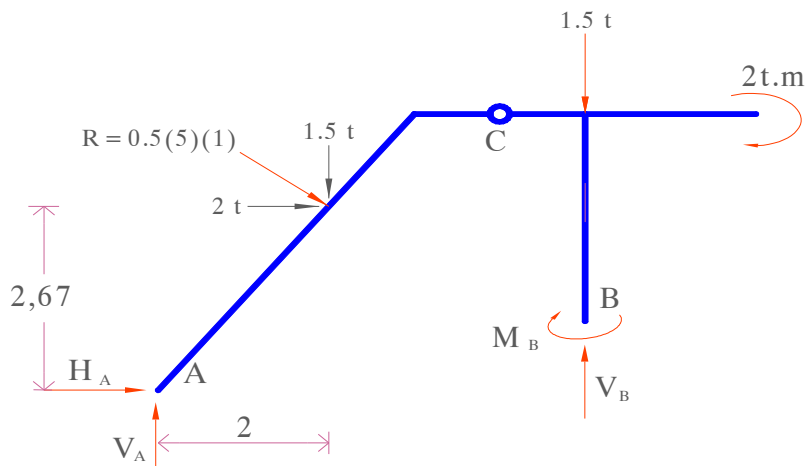
equilibrio un pequeño margen de error: ± 0.01 , pasado este error la estructura será considerada como estáticamente inestable.

Ejercicio #6

Para la siguiente estructura, determinar el valor de las reacciones de apoyo.



Para efectos de facilidad de calculo y observación realizamos el D.C.L. de la estructura tomando en cuenta solo las resultantes de la carga distribuida pero verificando siempre el grado de isostaticidad.



$$G = 4 - 3 - 1 = 0 ; \text{ Estructura ISOSTATICA}$$

En este caso observamos cuatro incógnitas provenientes por cada una de las reacciones encontradas, para determinar su valor contamos con tres ecuaciones de la estática y una ecuación especial que esta dada por la articulación en el punto C.

Empecemos analizando las ecuaciones fundamentales de equilibrio:

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A + 2 = 0 \Rightarrow H_A = -2 \text{ t}$$

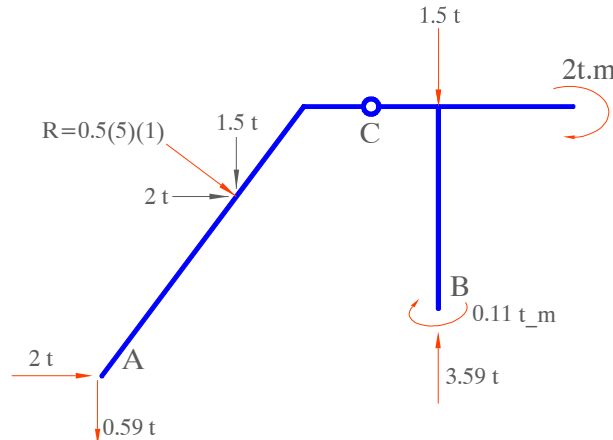
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2(2.67) + 1.5(2) + 1.5(5) + 2 + M_B - V_B = 0$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -(-2)(1) + 5V_A + 2(1.67) - 1.5(3) + 2 + M_B = 0$$

Como ya habíamos mencionado, estas tres ecuaciones de la estática no son suficientes para realizar los cálculos necesarios, pero si debemos usar la ecuación especial que esta dada por la articulación en el punto C, tomando esta ecuación especial podemos analizar hacia el lado que más te convenga para facilidad de cálculo (izquierda o derecha).

$$\sum M_{DERECHA}^C = 0 \Rightarrow 1.5(1) + 2 + M_B - 1(V_B) = 0$$

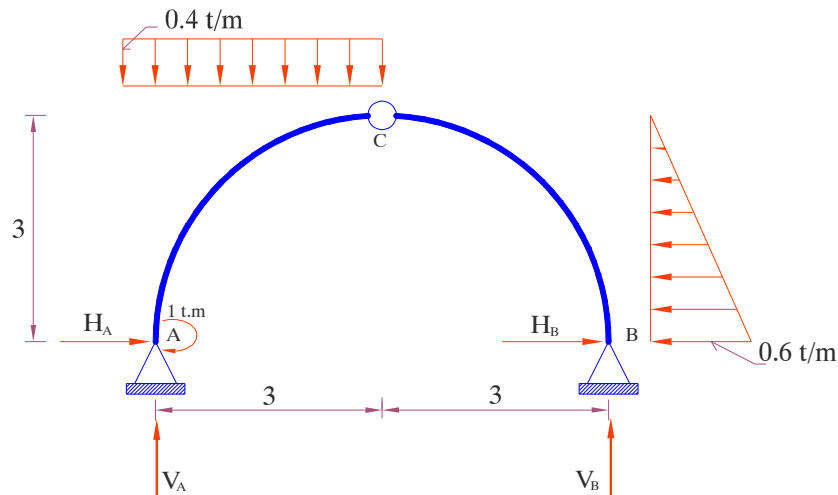
Con esta ecuación podemos resolver el sistema, luego tenemos los siguientes resultados:



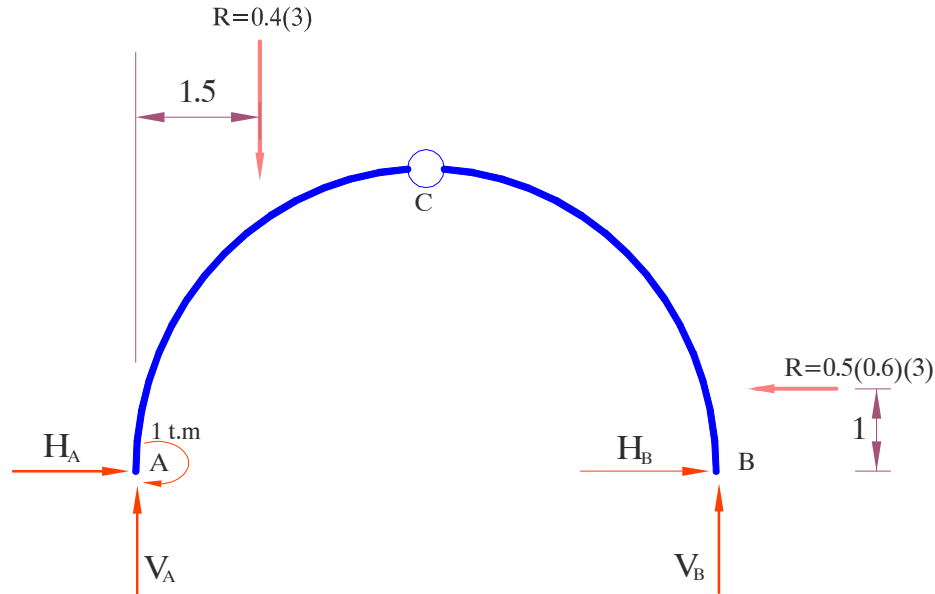
$$\text{CONTROL } \sum V = 0 \Rightarrow -0.59 - 1.5 - 1.5 + 3.59 = 0$$

Ejercicio #7

Para la siguiente estructura, determinar el valor de las reacciones de apoyo.



Realizamos el D.C.L. de la estructura tomando en cuenta solo las resultantes de la carga distribuida y verificando siempre el grado de isostaticidad.



La articulación introduce al sistema una ecuación de momento, que debe tomarse a la izquierda o a la derecha de la articulación pero no a ambos lados.

$$G = 4 - 3 - 1 = 0 ; \text{ Estructura ISOSTATICA}$$

Analizando las ecuaciones fundamentales de equilibrio tenemos:

$$\sum H = 0 ; H_A + H_B - 0.9 = 0$$

$$\sum M_A = 0 ; 1 + 1.2(1.5) - 0.9(1) - 6V_B = 0$$

$$\Rightarrow V_B = 0.32 \text{ t}$$

$$\sum M_B = 0 ; 1 - 1.2(4.5) - 0.9(1) + 6V_A = 0$$

$$\Rightarrow V_A = 0.88 \text{ t}$$

Ecuación especial; $\sum M_{DERECHA}^C = 0$

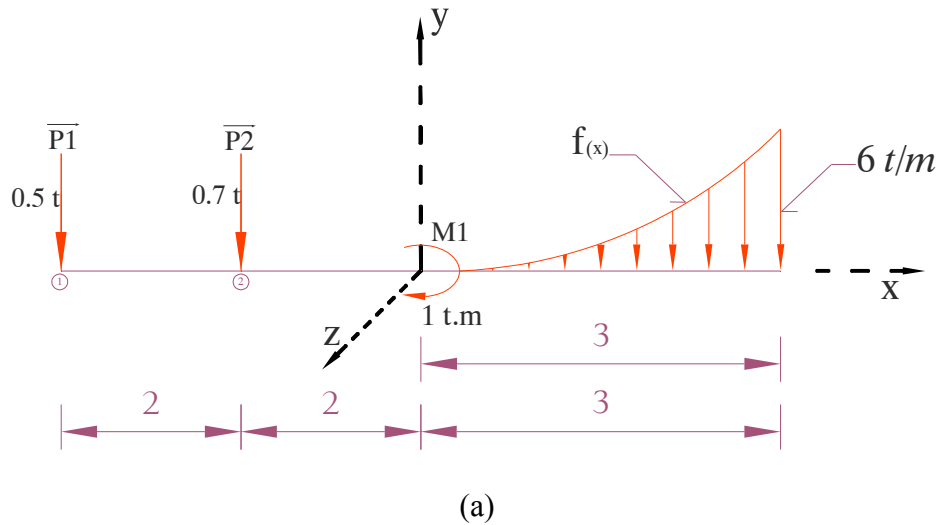
$$\Rightarrow 0.9(2) - 3(0.32) - 3H_B = 0 \Rightarrow H_B = 0.28 \text{ t} ; H_A = 0.62 \text{ t}$$

Para verificar realizamos el control correspondiente.

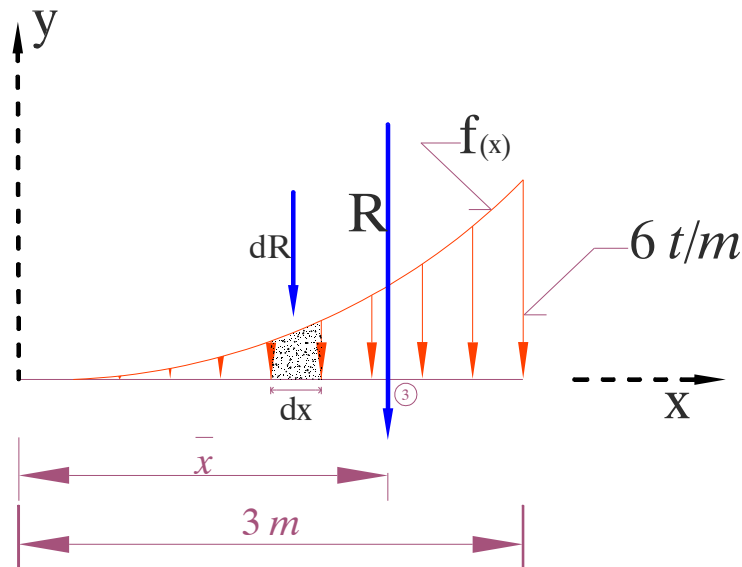
$$\text{CONTROL } \sum V = 0 \Rightarrow 0.88 - 1.2 + 0.32 = 0$$

Ejercicio #8

Para la siguiente estructura, determinar el valor de la fuerza resultante y su línea de acción para el sistema (a) sabiendo que $f(x)$ = parábola de 2do grado.



La línea de acción esta representada por una ecuación, de modo que es preciso decidir un sistema de coordenadas, el origen de dicho sistema puede situarse en cualquier punto del plano que contiene a las fuerzas, pero es preferible que este se situara en el lugar mas adecuado.



Realizamos un cálculo previo:

$$dR = f(x) dx$$

$$y = f(x) = k x^2$$

$$6 = k * 3^2 \Rightarrow k = 6/9$$

$$\Rightarrow k = 0.67$$

$$\Rightarrow f_{(x)} = 0.67 * x^2 [t/m]$$

Integrando tenemos el valor de la resultante:

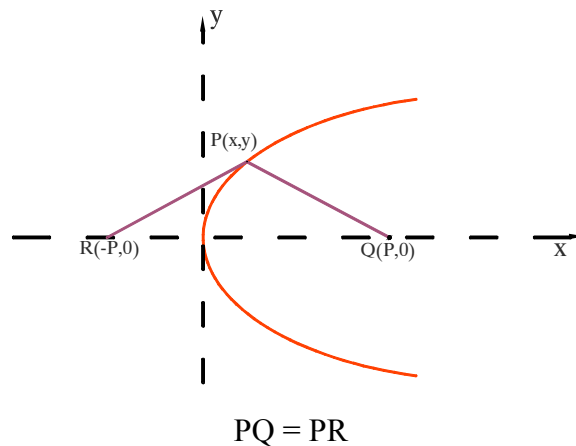
$$R = \int_0^3 0.67 * x^2 dx$$

$$\Rightarrow R = 0.67 * 9 \Rightarrow R = 6t \quad ; \text{ Coincidencia}$$

Ahora hallamos la posición exacta de la resultante de la carga.

$$\bar{x} = \frac{\int_0^3 x(0.67x^2)dx}{R} = \frac{3^4 / 4 * 0.67}{6} = \frac{13.57}{6} = 2.26 \text{ m}$$

Para imaginarnos de mejor manera:



Ahora procedemos a vectorializar las fuerzas.

$$\vec{P}_1 = [0, -0.5, 0]t \quad ; \quad \vec{r}_1 = [-4, 0, 0]$$

$$\vec{P}_2 = [0, -0.7, 0]t \quad ; \quad \vec{r}_2 = [-2, 0, 0]$$

$$\vec{M}_1 = [0, 0, 1]t \text{ _m}$$

$$\vec{R}_1 = [0, -6, 0]t \quad ; \quad \vec{r}_3 = [2.26, 0, 0]$$

Sabemos que: $\vec{F}_R = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{R}_1 \Leftrightarrow [0, -7.2, 0] \text{ t}$

$$\vec{M}_R = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{P}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{R}_1 + \vec{M}_1$$

$$\therefore \vec{M}_R = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7 & 0 \\ \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2.26 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{vmatrix} + [0, 0, 1]$$

$$\vec{F}_R \Leftrightarrow [0, 0, 2] + [0, 0, 1.4] + [0, 0, -13.56] + [0, 0, 1] = [0, 0, -9.16] \text{ t _m}$$

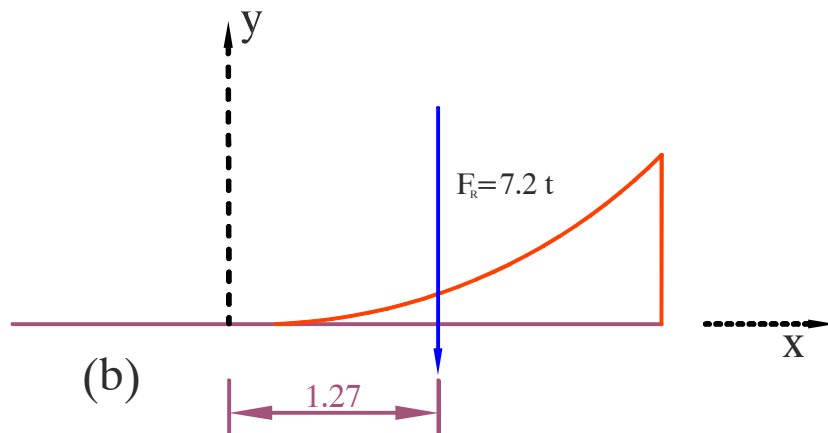
Sea el punto P de coordenadas $P = [x, 0, 0]$ m, un elemento de la línea de acción de \vec{F}_R , entonces $\vec{r}_P \times \vec{F}_R = \vec{M}_R$; Es decir el momento de la fuerza resultante F_R debe ser igual a la resultante de momentos.

$$\therefore \vec{M}_R = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -7.2 & 0 \\ \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{vmatrix} \Rightarrow [0, 0, -7.2x] = [0, 0, -9.16]$$

$$\Rightarrow -7.2x = -9.16$$

$$\Rightarrow x = 1.27 \text{ m}$$

Esta es la ecuación de una recta paralela al eje y .



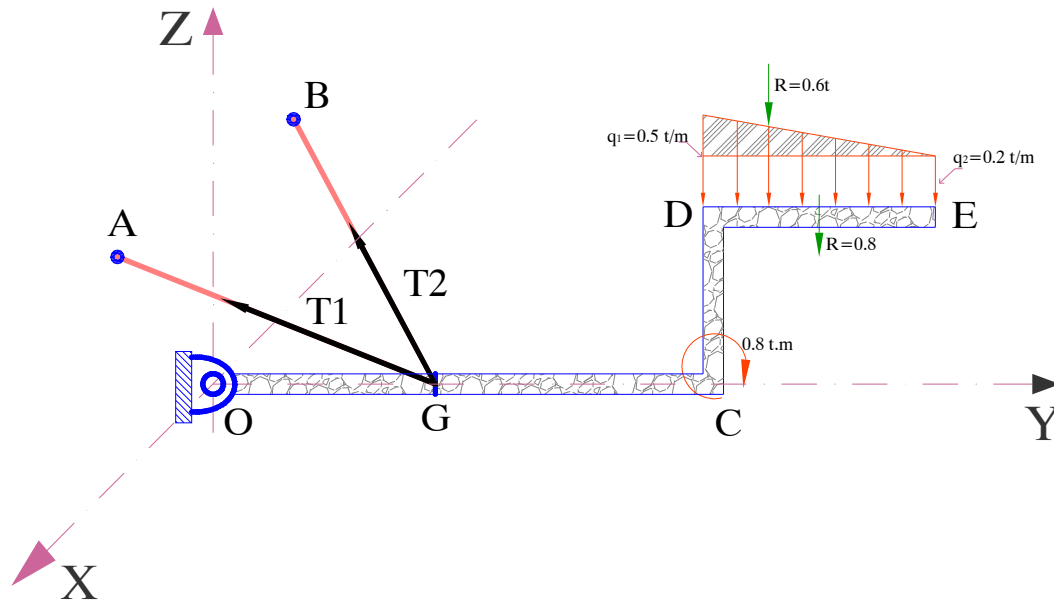
Por tanto el sistema (a) (complejo) puede ser sustituido por el sistema (b) (simple), sin embargo ambos sistemas no son iguales, son equivalentes para ciertos efectos de cálculo.

Ejercicio #9

La figura muestra una manivela OE, esa pieza esta sujeta al plano XZ mediante 2 cables (tensores), el extremo O es una pasador en el espacio, se pide determinar las reacciones de apoyo en el pasador y en los tensores.

Las coordenadas de los puntos en el espacio son:

$$\begin{matrix} A & \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix} [m] & B & \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix} [m] & C & \begin{vmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{vmatrix} [m] & D & \begin{vmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \end{vmatrix} [m] & E & \begin{vmatrix} 0 \\ 13 \\ 3 \end{vmatrix} [m] & G & \begin{vmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{vmatrix} [m] \end{matrix}$$



Vectorializar:

$$\vec{GA} \Leftrightarrow [2, -4, 3] \Rightarrow |\vec{GA}| = 5.38$$

$$\vec{u}_{GA} \Leftrightarrow [0.37, -0.74, 0.56]$$

$$\Rightarrow \vec{T}_1 \Leftrightarrow \underbrace{[\vec{T}_1]}_a \cdot \vec{u}_{GA} \Rightarrow \vec{T}_1 \Leftrightarrow [0.37a, -0.74a, 0.56a]$$

$$\vec{GB} \Leftrightarrow [-2, -4, 3] \Rightarrow |\vec{GB}| = 5.38$$

$$\vec{u}_{GB} \Leftrightarrow [-0.37, -0.74, 0.56]$$

$$\Rightarrow \vec{T}_2 \Leftrightarrow \underbrace{[\vec{T}_2]}_b \cdot \vec{u}_{GB} \Rightarrow \vec{T}_2 \Leftrightarrow [-0.37b, -0.74b, 0.56b]$$

$$\vec{R}_1 = [R_1, 0, 0] \quad ; \quad \vec{M}_1 = [-0.8, 0, 0]$$

$$\vec{R}_2 = [0, R_2, 0] \quad ; \quad \vec{R}_\Delta = [0, 0, -0.6]$$

$$\vec{R}_3 = [0, 0, R_3] \quad ; \quad \vec{R}_{rec} = [0, 0, -0.8]$$

$$\vec{Q} = [0, 0, -0.6]$$

$$* F_R = 0 \Rightarrow [0.37a - 0.37b + \underbrace{R_1}_0, -0.74a - 0.74b + \underbrace{R_2}_{6t}, 0.56a + 0.56b + \underbrace{R_3}_{-2.55} - 0.6 - 0.6 - 0.8] = [0, 0, 0,]$$

** $\vec{M}_R = 0 \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0.37a & -0.74a & 0.56a \\ \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -0.37b & -0.74b & 0.56b \\ \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6 \\ \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 10.33 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6 \\ \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8 \\ \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{vmatrix} + [-0.8, 0, 0] = 0$$

$$\therefore [2.24a, 0, -1.48a] + [2.24b, 0, +1.48b] + [-2.4, 0, 0] + [-6.198, 0, 0] + [-8.8, 0, 0] + [-0.8, 0, 0] = 0$$

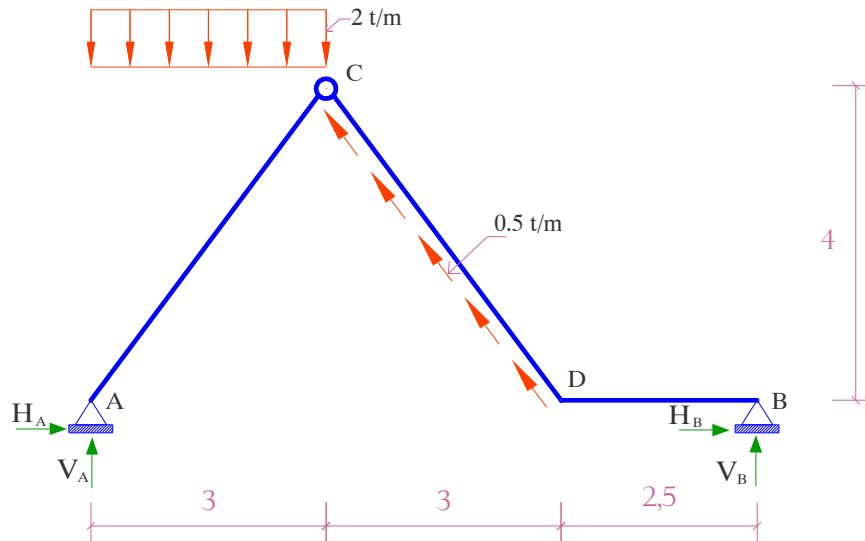
$$\Rightarrow [2.24(a+b) - 18.198, 0, 1.48(b-a)] = [0, 0, 0]$$

$$\Rightarrow a = b$$

Sol. $\Rightarrow a = |\vec{T}_1| = 4.06 \quad t \Leftrightarrow b = |\vec{T}_2|$

Ejercicio #10

Se pide determinar las reacciones de apoyo para la siguiente figura.



Verificamos el grado de isostaticidad

$$G = 4 - 3 - 1 = 0 ; \text{ Estructura ISOSTATICA}$$

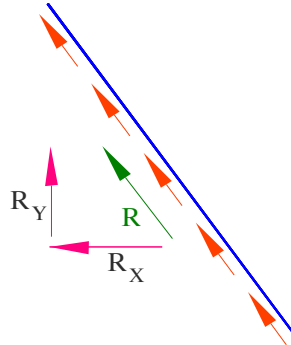
Realizamos el siguiente cálculo previo.

$$L = \sqrt{3^2 + 4^2} \Rightarrow L = 5m$$

El ángulo de inclinación será:

$$\text{sen } \theta = \frac{4}{5} \Rightarrow \theta = \arcsen \frac{4}{5} = 53.3^\circ$$

Realizamos el cálculo de la resultante de la carga distribuida linealmente a lo largo del tramo CD luego realizamos el cálculo de las componentes verticales y horizontales.



$$\text{sen} 53.3^\circ = \frac{R_Y}{2.5} \Rightarrow R_Y = (0.80) * 2.5 = 2t$$

$$\text{cos} 53.3^\circ = \frac{R_X}{2.5} \Rightarrow R_X = (0.598) * 2.5 = 1.5t$$

Aplicando las ecuaciones de equilibrio tenemos:

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A - 1.5 = 0 \Rightarrow H_A = 1.5t$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 6 * 1.5 - 2 * 4.5 - 1.5 * 2 + 1 - 8.5V_B \Rightarrow V_B = -0.23t$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -6 * 7 + 8.5V_A - 1.5 * 2 + 2 * 4 + 1 = 0 \Rightarrow V_A = 4.23t$$

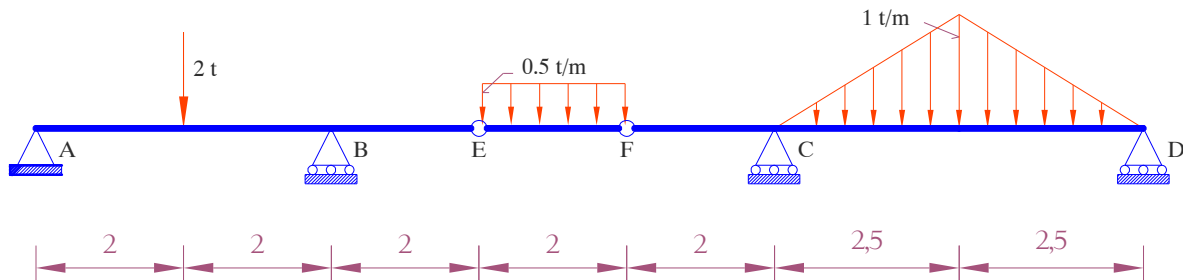
Realizamos el control respectivo.

$$\text{CONTROL } \sum V = 0 \Rightarrow 4.23 - 6 + 2 - 0.23 = 0$$

2.16 EJERCICIOS PROPUESTOS.

Problema #1

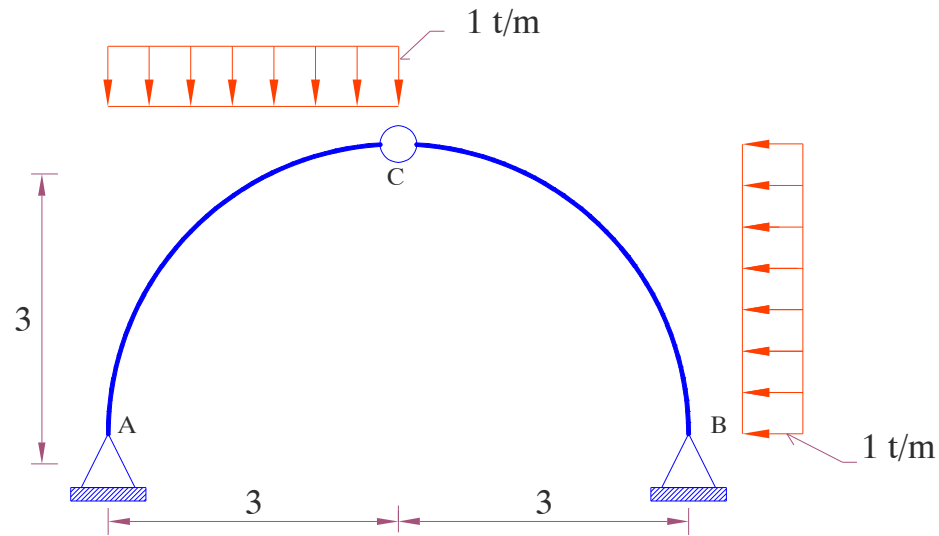
Determinar las reacciones de apoyo de la siguiente figura



Respuesta:

$$\begin{aligned} H_A &= 0t & ; & & V_A &= 0.75t \\ V_B &= 1.75t & ; & & V_C &= 1.95t & ; & & V_D &= 1.05t \end{aligned}$$

Problema #2



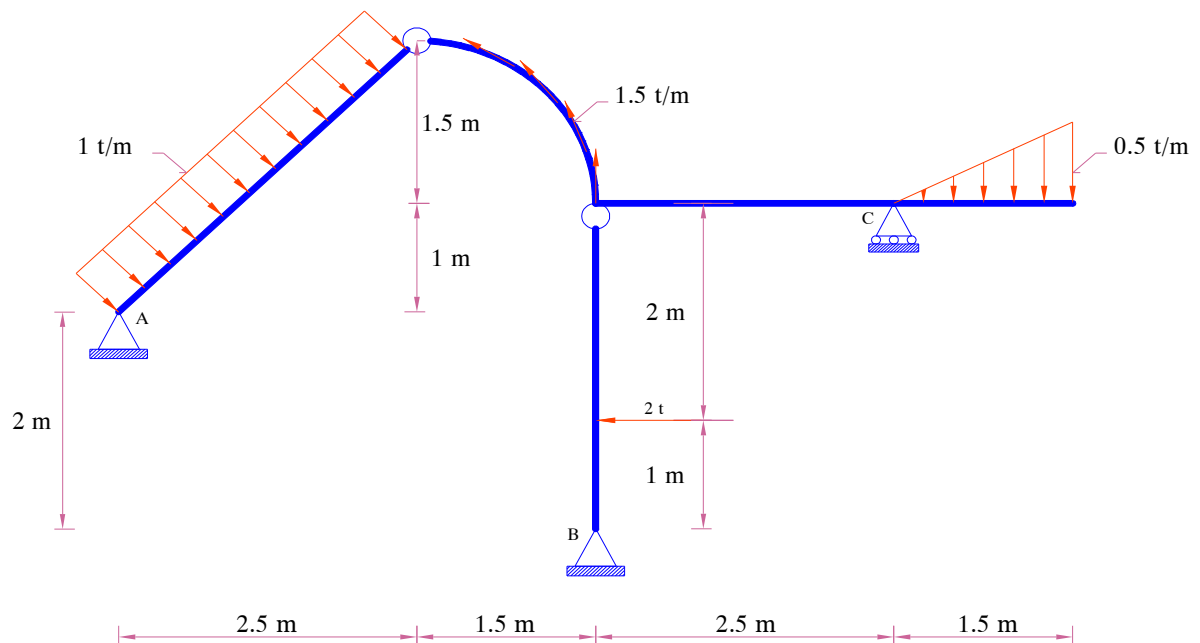
Respuesta:

$$H_A = 1.5 \text{ t} ; H_B = 1.5 \text{ t}$$

$$V_A = 3 \text{ t} ; V_B = 0 \text{ t}$$

Problema #3

Determinar las reacciones de apoyo:



Respuesta:

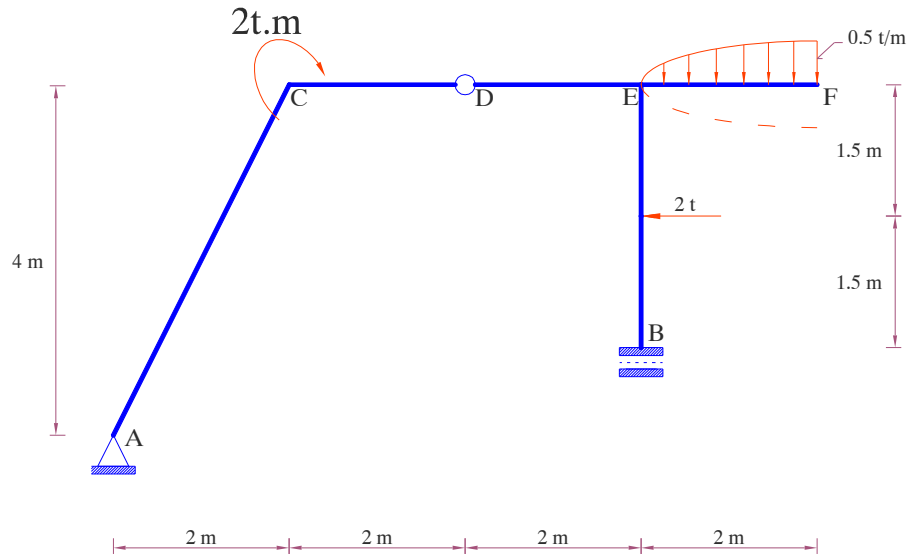
$$H_A = 0.42 \text{ t} ; H_B = 1.33 \text{ t}$$

$$V_A = 2.91 \text{ t} ; V_B = -4.246 \text{ t}$$

$$V_C = 1.957 \text{ t}$$

Problema #4

Determinar las reacciones de apoyo de la siguiente figura

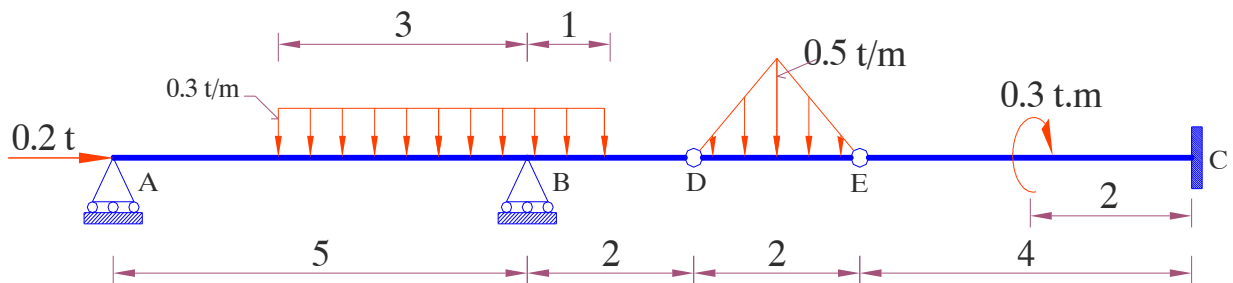


Respuesta:

$$\begin{aligned} H_A &= 2 \text{ t} \\ V_A &= 1.75 \text{ t} \\ V_B &= 1.083 \text{ t} \\ M_B &= 7.298 \text{ t} \end{aligned}$$

Problema #5

Determinar las reacciones de apoyo de la siguiente figura

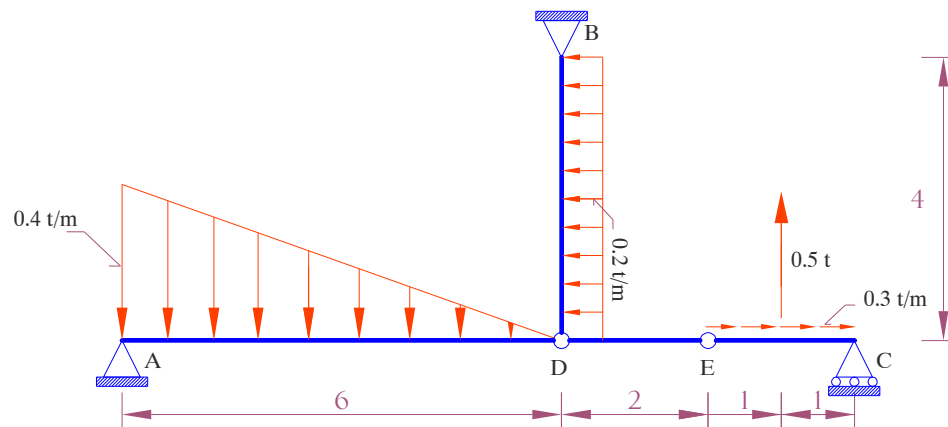


Respuesta:

$$\begin{aligned} H_C &= 0.2 \text{ t} \\ M_C &= 0.7 \text{ t.m} \\ V_B &= 1.31 \text{ t} \\ V_A &= 0.14 \text{ t} \\ V_C &= 0.25 \text{ t} \end{aligned}$$

Problema #6

Determinar las reacciones de apoyo de la siguiente figura

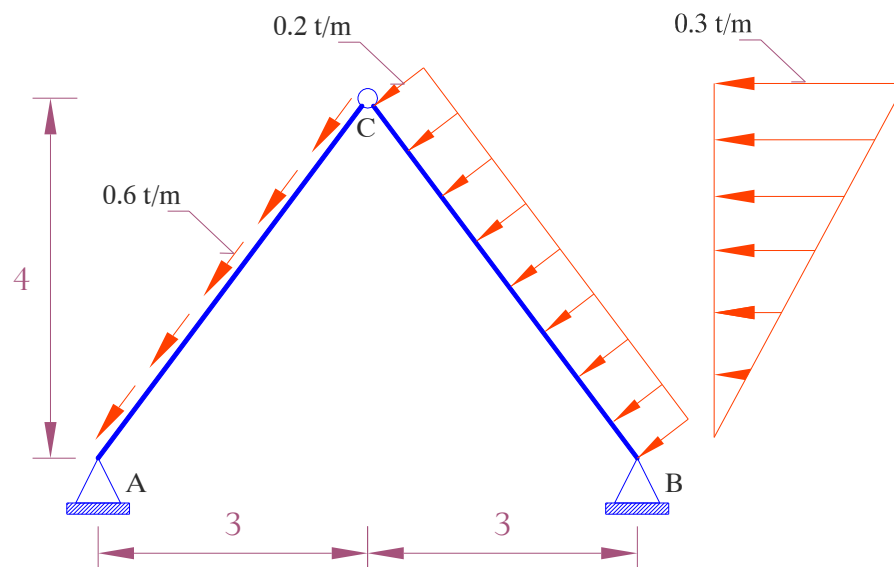


Respuesta:

$$\begin{aligned} H_A &= 1.1 \text{ t} \\ V_A &= 0.8 \text{ t} \\ V_B &= 0.17 \text{ t} \\ V_C &= 0.27 \text{ t} \end{aligned}$$

Problema #7

Determinar las reacciones de apoyo de la siguiente figura

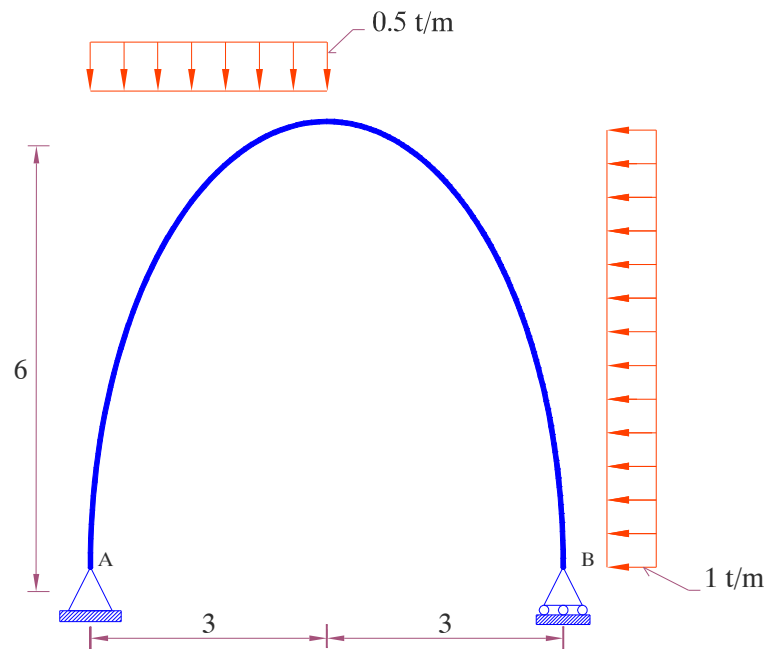


Respuesta:

$$\begin{aligned} H_A &= 2.30 \text{ t} ; V_A = 3.06 \text{ t} \\ H_B &= 0.7 \text{ t} ; V_C = 0.13 \text{ t} \end{aligned}$$

Problema #8

Determinar las reacciones de apoyo de la siguiente figura

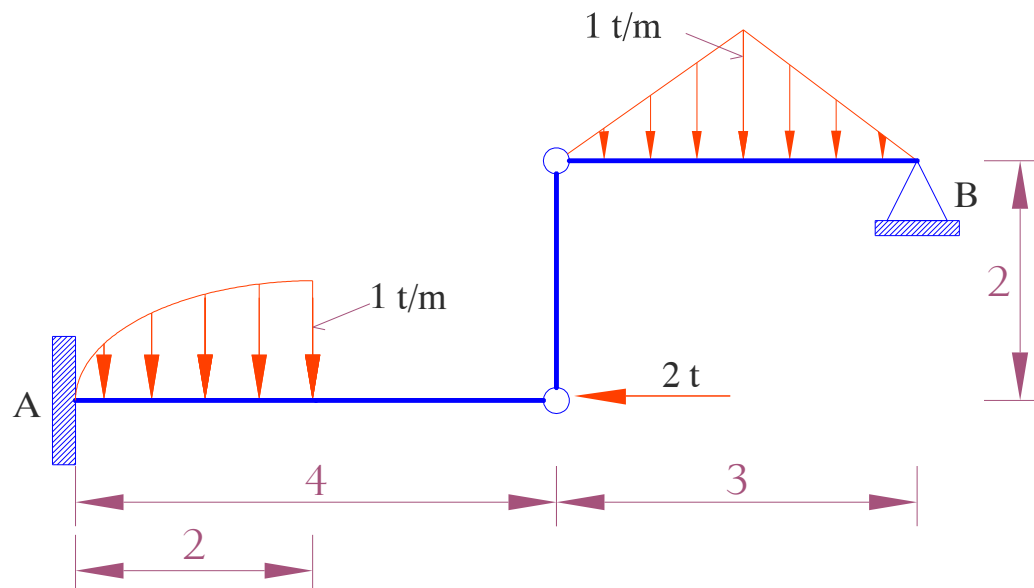


Respuesta:

$$\begin{aligned} H_A &= 6 \text{ t} \\ V_A &= 5.25 \text{ t} \\ V_B &= 2.25 \text{ t} \end{aligned}$$

Problema #9

Determinar las reacciones de apoyo de la siguiente figura

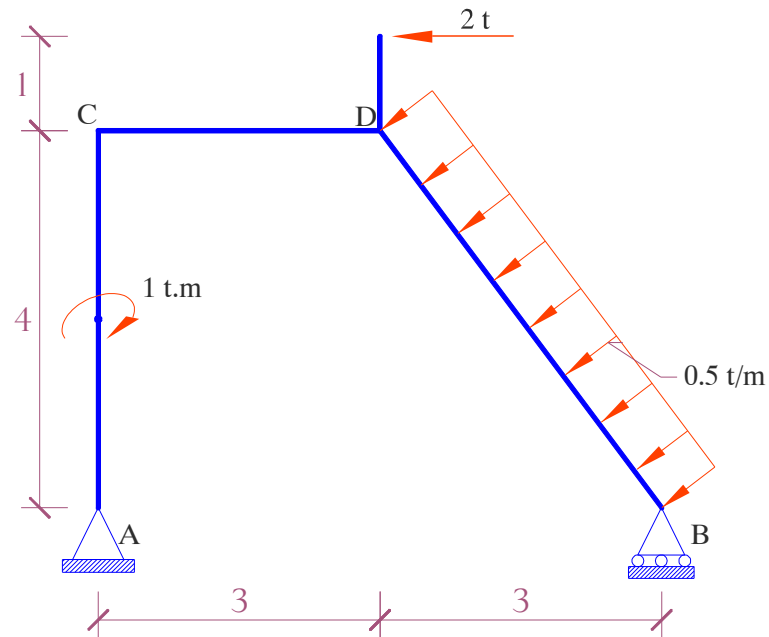


Respuesta:

$$\begin{aligned} H_A &= 2 \text{ t} \quad ; \quad V_A = 2.08 \text{ t} \\ H_B &= 0 \text{ t} \quad ; \quad V_B = 0.75 \text{ t} \\ M_A &= 4.6 \text{ t}_m \end{aligned}$$

Problema #10

Determinar las reacciones de apoyo de la siguiente figura

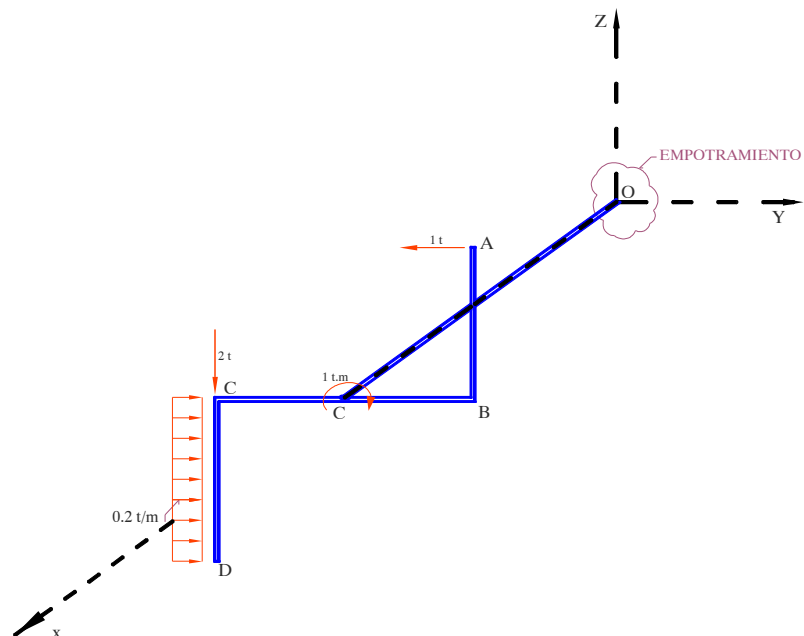


Respuesta:

$$H_A = 4t \quad ; \quad V_A = 2.54t \\ V_B = 1.04t$$

Problema #11

Determinar las reacciones de apoyo de la siguiente figura

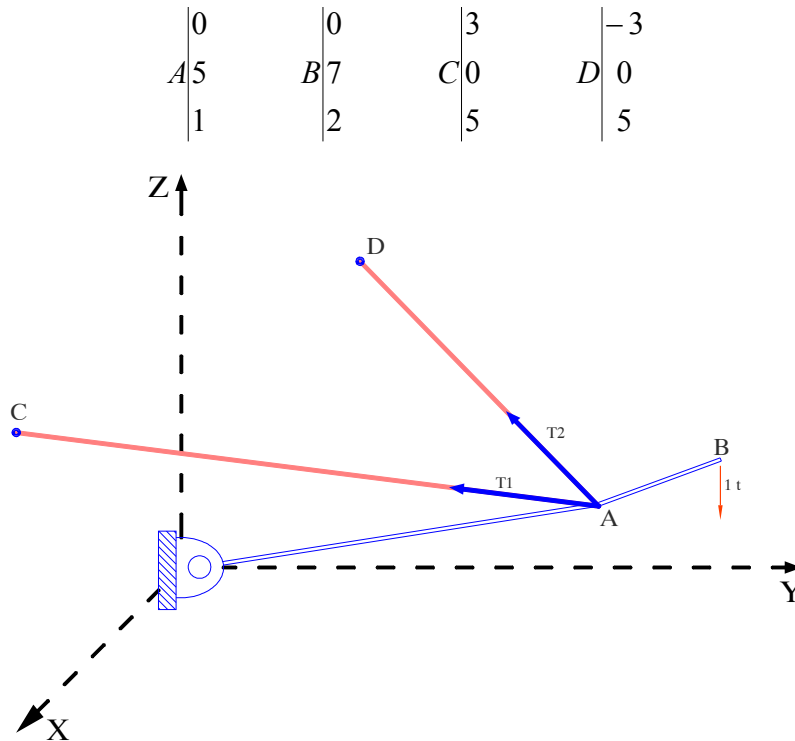


Respuesta:

$$\begin{aligned} R_x &= 2.5 \text{ t} ; & M_x &= 8.25 \text{ t}_m \\ R_y &= -0.5 \text{ t} ; & M_y &= 15.5 \text{ t}_m \\ R_z &= 2 \text{ t} ; & M_z &= -3.0 \text{ t}_m \end{aligned}$$

Problema #12

Determinar las reacciones de apoyo de la siguiente figura dados los siguientes datos:



Respuesta:

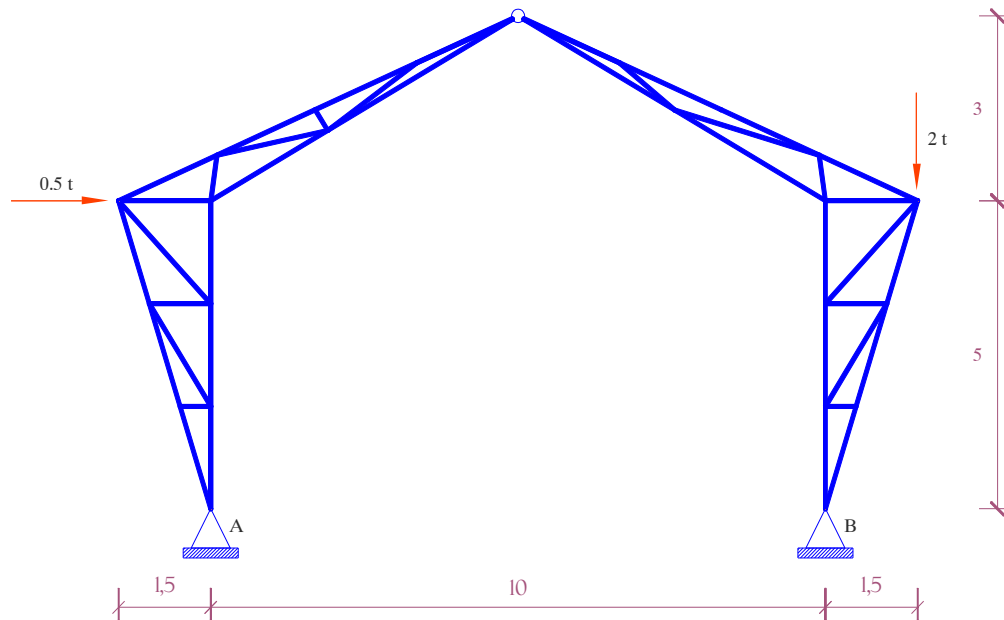
$$\begin{aligned} H_A &= 0.531 ; & V_A &= 0.55 \text{ t} \\ H_B &= 0.031 \text{ t} ; & V_B &= 2.55 \text{ t} \end{aligned}$$

2.17 EVALUACION DIAGNOSTICO DEL CAPITULO.

Para realizar una evaluación diagnostico referente al presente capítulo, se propone al estudiante responder las siguientes preguntas.

- Definir el concepto de *ESTRUCTURA*.
- Que es un apoyo?
- Que tipo de estructuras existen?
- Cual es la clasificación de las estructuras?
- Que tipos de apoyos existen y cuales son los grados de libertad de cada uno?
- Que es el grado de isostaticidad?

Para concluir este diagnostico se pide determinar las reacciones de apoyo de la siguiente figura.





CAPÍTULO 3

ESFUERZOS INTERNOS EN LAS ESTRUCTURAS

3.1 OBJETIVO GENERAL.

El estudiante aprenderá a elaborar los diagramas de variación de los elementos mecánicos que se presentan en cualquier punto de una estructura isostática a través de la deducción de sus funciones y de la relación que existe entre las cargas externas con las fuerzas internas de la estructura.

3.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS.

- Aprenderá cuales son los esfuerzos internos de una estructura y sabrá en que dirección actúan estas (normal, cortante y momento).
- El estudiante aplicara una convención de signos apropiada para aplicar al cálculo de los elementos ya mencionados.
- El estudiante aprenderá los distintos métodos de análisis para la determinación de los esfuerzos internos de los diferentes tipos de estructuras (vigas, pórticos, arcos, estructuras mixtas).
- Según cada método aprendido realizara de manera combinada la elaboración de los diagramas de esfuerzos internos.
- El estudiante con los métodos de análisis mencionados, demostrara que las estructuras analizadas están en equilibrio estático.

3.3 INTRODUCCION.

Si un elemento bajo la acción de un sistema de fuerzas externo se encuentra en equilibrio, cualquier porción del mismo, también deberá de encontrarse en equilibrio. Este es el principio de punto de referencia para que el lector entienda la causa-efecto de un sistema de fuerzas externo con un sistema de fuerzas interno; principio que nos demuestra la frontera entre la mecánica de los cuerpos rígidos asociándola al equilibrio externo y la mecánica de los cuerpos deformables, con el equilibrio interno.

En este capítulo se demuestra como encontrar el equilibrio interno a través de la relación entre las fuerzas externas y las fuerzas internas; resultando de esta relación los elementos mecánicos que son generados por la acción del sistema de fuerzas externo; y que, por sus efectos se clasifican en: Fuerza normal “N” como la fuerza interna que actúa perpendicular a la sección transversal, con un efecto de tensión o de compresión. Fuerza cortante “V”, como una fuerza interna que actúa paralela a la sección transversal, con un efecto de corte o deformación de la sección transversal. Momento flexionante “M”, como un momento interno que actúa paralelo a la sección, generando un efecto de flexión, por lo tanto, las fibras del elemento estructural están sometidas a compresión o tensión. Momento torsionante “T”, como un momento interno que actúa perpendicular a la sección transversal, identificándose por su efecto de “torcer” al eje longitudinal sobre el cual esta actuando.

Con la definición, identificación y clasificación de los elementos mecánicos por sus efectos, se le proporciona al lector elementos de análisis para encontrar la variación de los elementos mecánicos sobre estructuras en forma de vigas, pórticos simples y arcos, considerando cargas repartidas en forma rectangular, en forma triangular, cargas concentradas y momentos, a través de la deducción de las funciones de los elementos mecánicos señalando los puntos de discontinuidad de las cargas externas; y por la relación, entre la carga externa con la fuerza cortante, y la fuerza cortante con el momento flexionante.

3.4 DEFINICION Y ANÁLISIS DE LOS ELEMENTOS MECANICOS INTERNOS.

Si idealizamos un elemento estructural que se encuentra en equilibrio bajo la acción del sistema de fuerzas externo representados por las cargas “P”; como se muestra en la figura 3.1(a) y (b), ¿Que sucede si sobre el plano de corte imaginario separamos el cuerpo?:

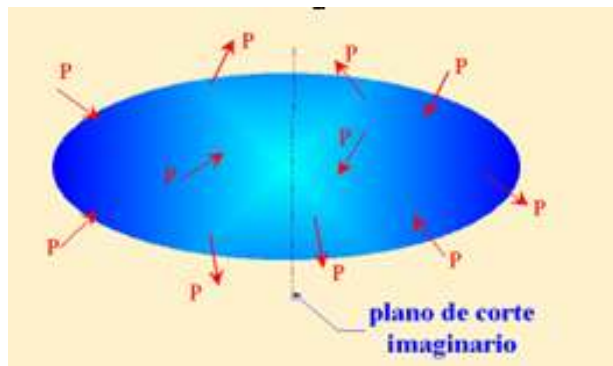


Figura 3.1 (a)

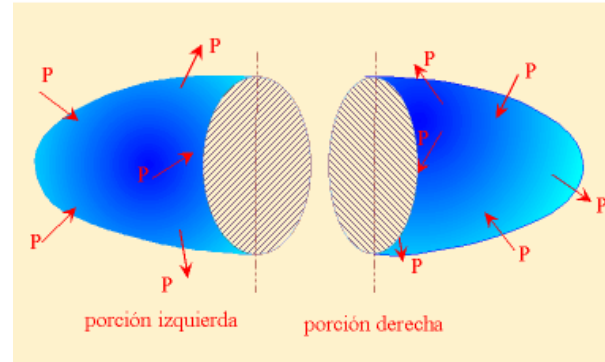


Figura 3.1 (b)

¿Estaría de acuerdo en aceptar que el efecto que se genera al separar el cuerpo sobre el plano de corte imaginario es el rompimiento del equilibrio externo?, si es así, entonces no se cumple el principio de que “si un cuerpo bajo la acción de un sistema de fuerzas externo se encuentra en equilibrio, cualquier porción del cuerpo también deberá de encontrarse en equilibrio”; por lo tanto, será necesario equilibrar la porción izquierda y derecha a través de un sistema resultante interno localizado en el centroide de la sección transversal que sea equivalente a la acción del sistema de fuerzas externo de cada porción. Para lo anterior observe la figura 3.2:

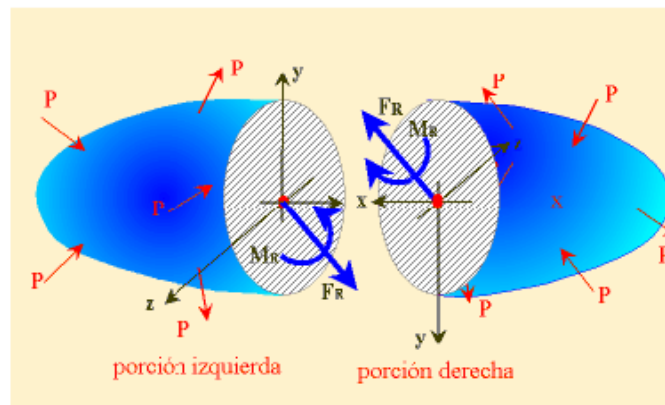


Figura 3.2

Porción izquierda: Sobre el centroide de la sección transversal se localiza un sistema resultante interno integrado por la fuerza resultante F_{Ri} y por el momento resultante interno M_{Ri} , equivalente a la acción del sistema de fuerzas externo que actúa en la misma porción izquierda.

Porción derecha: En forma análoga y sobre el centroide de la sección transversal, se localiza un sistema resultante interno equivalente a la acción de las fuerzas externas que actúan sobre la porción derecha; distinguiéndose éste sistema resultante interno, por tener sentido contrario al de la porción izquierda para que exista el equilibrio interno entre ambas secciones.

En base de lo anterior y dado que estamos abordando el concepto de resultante, es de suponerse que éste tiene sus componentes en la dirección de los ejes X, Y, y Z respectivamente, tanto para la fuerza como para el momento resultante; tomando como referente la porción izquierda, las componentes se observan en la figura 3.3:

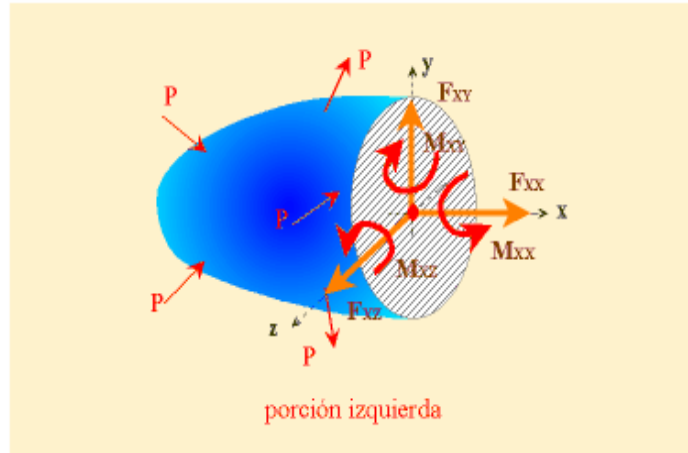


Figura 3.3

En consecuencia, las componentes del resultante interno (tres fuerzas componentes internas y tres momentos componentes internos); se les define como elementos mecánicos; que por sus efectos se identifican:

Fuerza normal (N): También reconocida como F_{xx} es la fuerza componente interna que actúa perpendicular a la sección transversal; se identifica por dos efectos: tensión o compresión, ver fig 3.4.

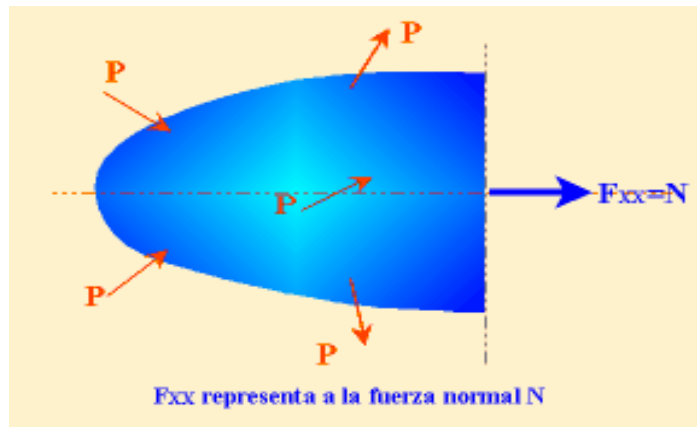


Figura 3.4

Fuerza cortante (V): Esta representada por F_{XY} F_{XZ} (este ultimo en el espacio); componentes internas que actúan paralelamente a la sección transversal; se identifican por su efecto de corte. ver fig 3.5.

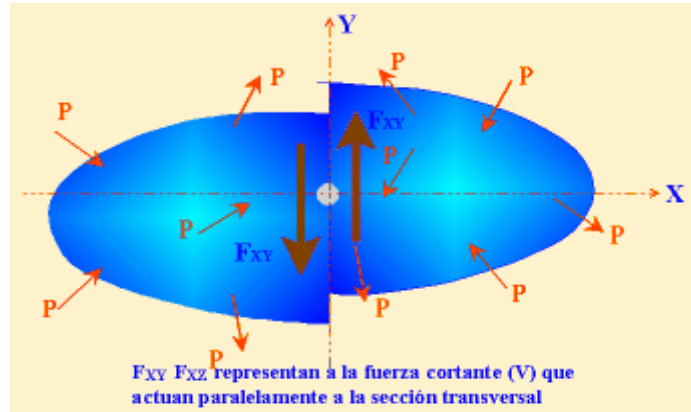


Figura 3.5

Momento torsionante (T): M_{XX} momento componente interno que actúa perpendicular a la sección transversal; se le identifica por su efecto de torsión al eje longitudinal del elemento estructural.

Momento flexionante (M): M_{XY} M_{XZ} momentos componentes internos que actúan paralelamente al eje longitudinal, que se les asocia un efecto de flexión.

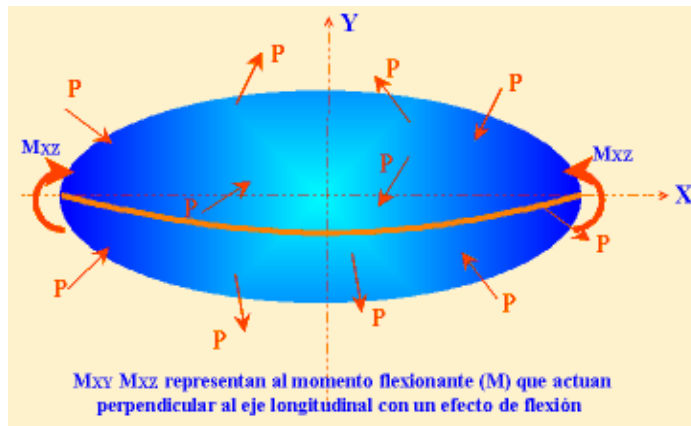


Figura 3.6

3.5 CONVENCIÓN DE SIGNOS DE ESFUERZOS INTERNOS.

A continuación presentamos la convención de signos para los elementos mecánicos y sus efectos, éste será de acuerdo al efecto que genera sobre el elemento estructural. Para ello,

consideremos una viga simplemente apoyada con carga concentrada al centro del claro como se muestra en la figura 3.7(a).

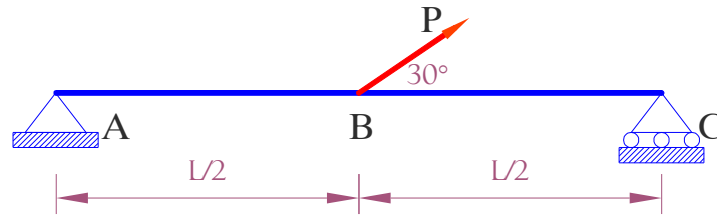


Figura 3.7(a)

Con un diagrama de cuerpo libre, nos permitirá identificar el sistema activo y el sistema reactivo ver fig 3.7 (b)

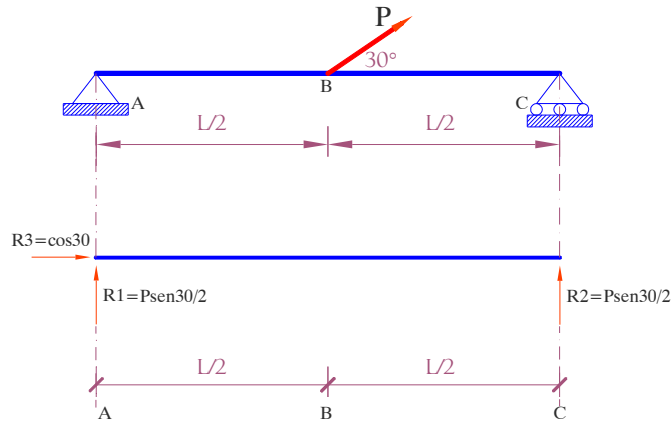


Figura 3.7 (b)

Tomando de referencia el diagrama de cuerpo libre, sobre el tramo AB se localiza una sección perpendicular al eje longitudinal a una distancia X del eje A, la porción izquierda de la estructura se observa en la figura 3.8.

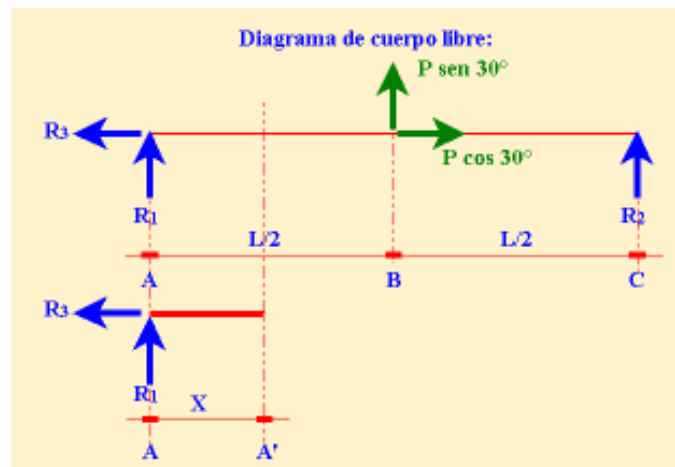


Figura 3.8

En base de lo anterior, la porción izquierda no se encuentra en equilibrio; por lo que, para equilibrarla se requiere un sistema interno integrado por diferentes elementos mecánicos, esto es: La acción de R_1 genera una fuerza interna vertical que actúa paralelamente a la sección transversal la que se define como fuerza cortante $V_{A'}$; asimismo, la fuerza externa R_1 , y la interna $V_{A'}$ producen un giro a la porción de la estructura generando un par interno representado por $M_{A'}$, que se define como momento flexionante; finalmente, la acción de la fuerza externa R_3 genera una fuerza interna perpendicular a la sección transversal $N_{A'}$, que se define como la fuerza normal; lo anterior se representa en la *fig 3.9*:

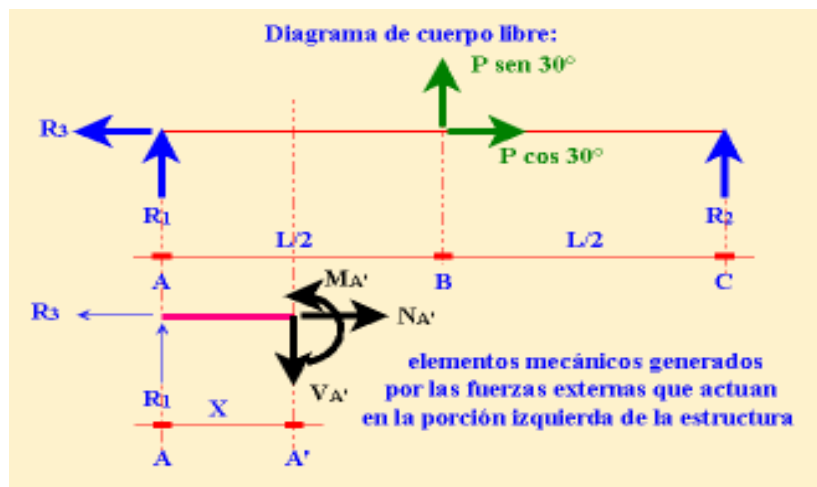


Figura 3.9

De lo anterior se deduce que los elementos mecánicos generados por el sistema externo que actúa sobre la porción derecha de la estructura, se equilibran con los generados en la porción izquierda; esto es:

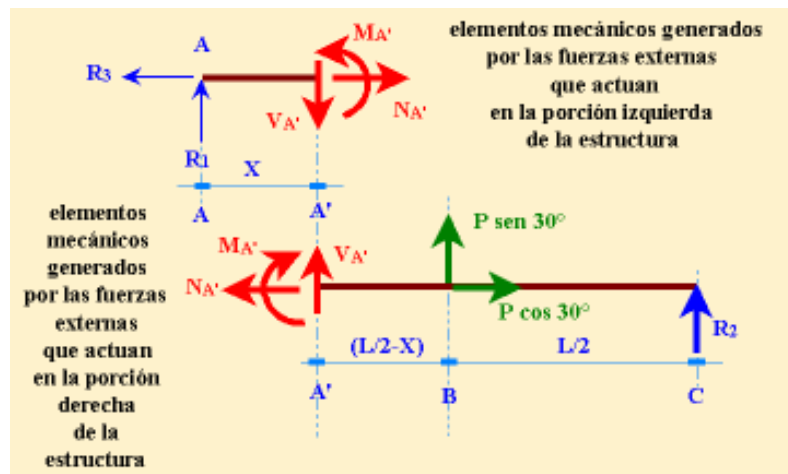


Figura 3.10

Idealizando sobre la sección A' un elemento de longitud dx , los elementos mecánicos generados por el sistema externo de cada porción se muestra en la *fig 3.11*:

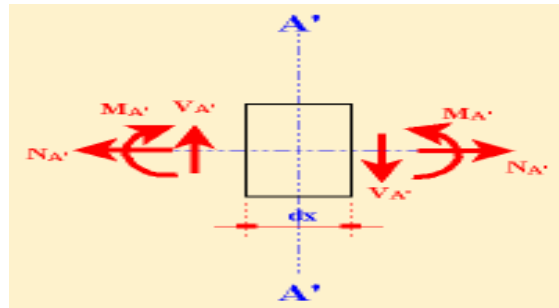


Figura 3.11

A continuación abordaremos cada uno de los elementos mecánicos para visualizar sus efectos que nos permitan asociarle el signo correspondiente:

3.5.1 Fuerza normal: A la fuerza normal se le asocia el signo positivo cuando el efecto de las fuerzas externas que actúan sobre ella son de tensión.

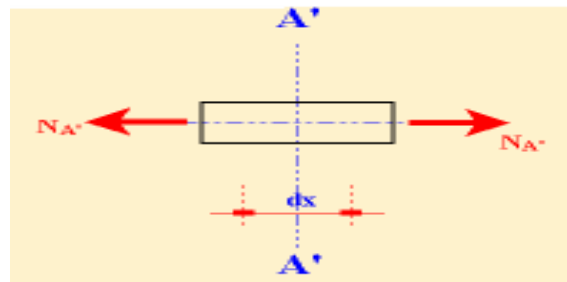


Figura 3.12

3.5.2 Fuerza cortante: A la fuerza cortante se le asocia el signo positivo cuando la carga externa que actúa sobre la porción izquierda de la estructura tiene una dirección vertical con sentido ascendente.

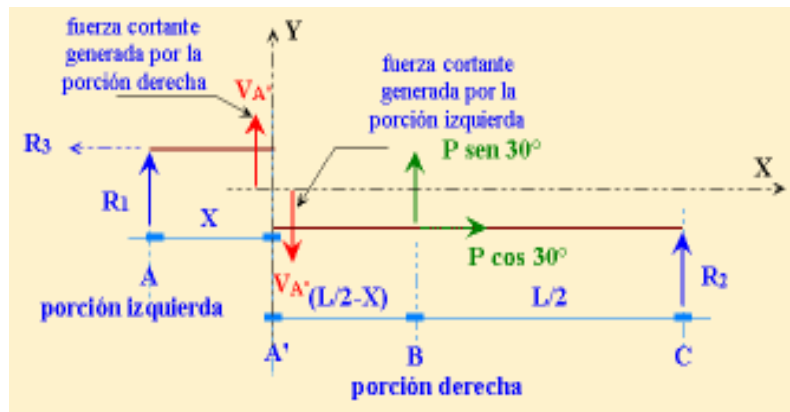


Figura 3.13

3.5.3 Momento flexionante: Al momento flexionante se le asigna el signo positivo cuando el efecto sobre la fibra superior es de compresión.

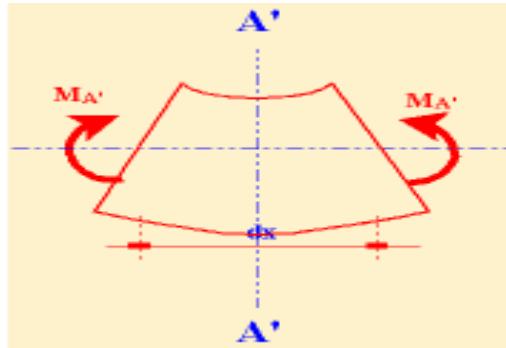


Figura 3.14

En resumen tenemos que **la convención de signos en sentido positivo** será:

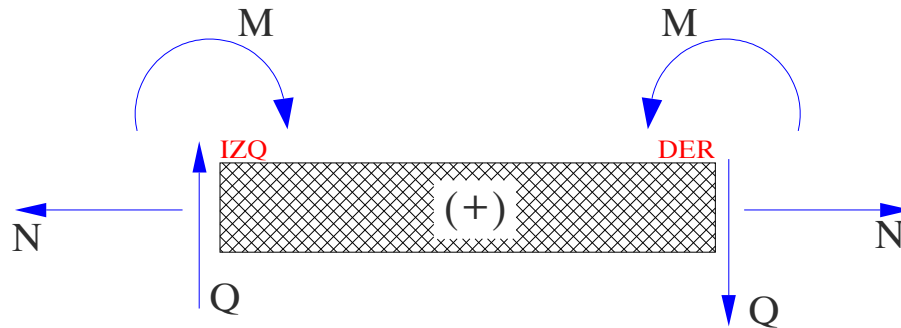


Figura 3.15

3.6 ANÁLISIS DE LAS ESTRUCTURAS.

El análisis de las estructuras, puede en general sub-dividirse en:

- **Análisis de vigas.** Las vigas son barras, en las cuales la dirección del eje centroidal es paralela al horizonte geográfico.
- **Análisis de pórticos.** Los pórticos son estructuras en las cuales, la dirección de los ejes centroidales de las barras no es paralela al horizonte geográfico sino que el eje x coincide con el eje local de la barra.
- **Análisis de arcos.** Los arcos son estructuras en las cuales la ecuación del eje centroidal corresponde a una curva (no lineal).
- **Análisis de estructuras mixtas.** Son las que están compuestas por vigas, pórticos y arcos.

3.7 ANÁLISIS DE VIGAS.

3.7.1 PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Una vez entendido que los elementos mecánicos son generados por la acción de un sistema de fuerzas externo que actúa en una estructura, en éste apartado plantaremos el procedimiento de análisis para trazar los diagramas de variación correspondiente, contemplando para ello dos procedimientos; la deducción de las funciones de los elementos mecánicos (método de las secciones o análisis funcional) y la relación de la carga externa con la fuerza cortante y la fuerza cortante con el momento flexionante (método de suma de áreas o análisis relacional). Para ello, y tomando de base la aplicación de una carga concentrada, de una carga uniformemente distribuida y de una carga distribuida de forma triangular sobre una estructura (viga o barra), identificaremos la variación de la fuerza cortante, la fuerza normal y el momento flexionante expresándola en su respectivo diagrama.

3.7.1.1 MÉTODO DE LAS SECCIONES. Tiene como objetivo encontrar la magnitud de los elementos mecánicos que se presentan en una estructura isostática a través de la deducción de sus funciones respectivas en el contexto de un parámetro definido; en consecuencia, el análisis para determinar éstas funciones está limitado por la variación de las cargas externas que actúan en la estructura. Para demostrar lo anterior proponemos:

PRIMERO.- A partir de la estructura planteada, se construye un diagrama de cuerpo libre para identificar:

- **El sistema de fuerzas.-** Dado que se analizan estructuras planas, el sistema de fuerzas en su conjunto podrá ser un sistema de fuerzas paralelo o un sistema de fuerzas generales en el plano.
- **El número de ecuaciones de equilibrio estático.-** En consecuencia de lo anterior, el número de las ecuaciones de equilibrio estático para el sistema de fuerzas en su conjunto, se identificarán DOS para el sistema de fuerzas paralelo o TRES para el sistema de fuerzas generales en el plano.
- **El número de incógnitas.-** Están representadas por las componentes reactivas o reacciones en cada uno de los apoyos de la estructura y considerando su sistema de apoyos se podrá identificar: UNA incógnita representada por la componente reactiva de un apoyo móvil; DOS incógnitas representadas por las componentes reactivas en

un apoyo fijo; y TRES incógnitas cuando se tiene un apoyo identificado como empotramiento.

- **Las condiciones de isostaticidad.-** Identificado el número de las incógnitas y el número de las ecuaciones de equilibrio estático que contiene el sistema en su conjunto, se tendrán elementos de análisis para abordar estructuras cuando las condiciones de isostaticidad sean iguales; esto es: $I = E$.
- **El tipo de estructura.-** Con el resultado anterior, estaremos en condiciones para abordar el análisis de una estructura que se define como Isostática.

SEGUNDO.- Aplicando las condiciones de equilibrio sobre el diagrama de cuerpo libre, se determinan las reacciones para encontrar el equilibrio externo.

TERCERO.- Analizando la estructura de izquierda a derecha o viceversa según sea el caso se identifican los tramos que presenten cambios de forma en la carga externa, para que, sobre cada uno de ellos, se construya un diagrama de cuerpo libre indicando la acción de las cargas externas (que actúan sobre la porción que se analice) las que se habrán de equilibrar con un resultante interno, identificando en éste, las componentes que definen a los elementos mecánicos que actúan en el tramo respectivo.

CUARTO.- Aplicando las condiciones del equilibrio estático se deducen las funciones de los elementos mecánicos que se presentan en cada tramo, y al sustituir en éstas los parámetros de variación de la distancia X se obtienen las magnitudes respectivas.

QUINTO.- Con el resultado del punto anterior se procederá a trazar el diagrama de variación para cada elemento mecánico considerando:

- **Línea base** de la fuerza normal, fuerza cortante o momento flexionante: A partir de un marco de referencia, sobre el eje horizontal se traza la línea base sobre la que se indicarán los parámetros de variación de la distancia “ X ”; que se relacionarán sobre el eje vertical en el que se localizarán las magnitudes de los elementos mecánicos respectivos.
- **Trazo de la variación de los elementos mecánicos.-** Con los puntos encontrados del resultado anterior, se une punto a punto obteniéndose la variación que estará definida

por las funciones de los elementos mecánicos, identificándose en éstas, las siguientes características:

Para cuando la **carga externa es nula**, la función del diagrama de la fuerza cortante es una línea horizontal y paralela al eje longitudinal a través de una ecuación de la forma “ $y =$ ” y la del diagrama del momento flexionante se representa por una línea inclinada que obedece a una ecuación de la forma” $y = mx + b$ ”; .

Para cuando la **carga externa es uniformemente distribuida** la función del diagrama de la fuerza cortante se representa por una línea inclinada por estar condicionada a una ecuación de la forma “ $y = mx + b$ ” y la del diagrama del momento flexionante por una línea curva de segundo grado mediante una ecuación de la forma “ $y = ax^2 + bx + c$ ”

Para cuando la **carga externa es repartida de forma triangular**, la función del diagrama de la fuerza cortante se representa por una línea curva de segundo grado por contener una ecuación de la forma “ $y = ax^2 + bx + c$ ” y la del diagrama del momento flexionante por una línea curva de tercer grado con una ecuación “ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ”.

➤ **Valores críticos.-** En cada diagrama de variación de los elementos mecánicos como resultado del punto anterior, se habrá de identificar el **valor máximo** (positivo y negativo), **mínimo** y **cero** todos, referidos a la línea base respectiva; en éste supuesto se tiene: Cuando la fuerza cortante pase por cero, se asocia en el diagrama del momento flexionante un valor máximo que puede ser positivo o negativo; y cuando el momento flexionante pase por cero el punto se define como punto de inflexión.

3.7.1.2 ANÁLISIS RELACIONAL. Es un procedimiento de análisis para determinar la variación de los elementos mecánicos relacionando la carga externa con la fuerza cortante; y la fuerza cortante con el momento flexionante, entre dos puntos definidos en una estructura.

Para demostrar lo anterior, tomaremos de referencia la estructura idealizada que a continuación se muestra:

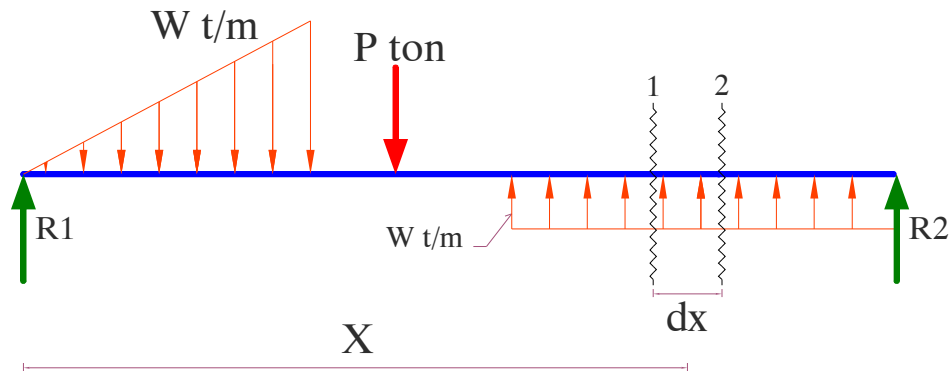


Figura 3.16

Partiendo del supuesto que la estructura se encuentra en equilibrio, esta se define como una viga simplemente apoyada con carga repartida (de forma triangular y uniforme) y carga concentrada las que en su conjunto, representan al sistema reactivo; y el sistema reactivo esta representado por las reacciones R_1 y R_2 .

Iniciaremos el análisis a partir de un elemento diferencial de la carga uniformemente distribuida localizado a una distancia “X” y limitado por dos secciones (1 y 2) perpendiculares al eje longitudinal y separadas una distancia dx. Los elementos mecánicos que se presentan en cada una de las secciones señaladas, se muestran en la siguiente figura:

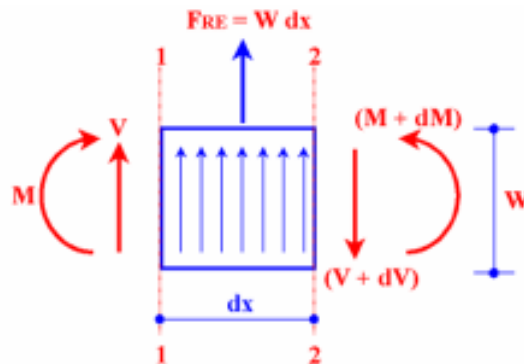


Figura 3.17

El sistema mostrado esta compuesto por un **sistema externo**, representado por la fuerza resultante equivalente a la carga uniformemente distribuida $F_R = W dx$ y por un **sistema interno** representado por los elementos mecánicos M y V que se presentan en la sección 1, y por $(V + dV)$ y $(M + dM)$ en la sección 2; en consecuencia, el sistema en su conjunto se define como un sistema de fuerzas paralelo en el plano.

Aplicando las ecuaciones de equilibrio externo: Suma de fuerzas verticales.

$$V + Wdx - (V + dV) = 0 \quad ; \quad V + Wdx - V - dV = 0$$

$$Wdx - dV = 0 \quad \therefore \quad \boxed{Wdx = dV} \quad \text{ec.(1)}$$

De la ecuación (1) obtenemos $W = \frac{dV}{dx}$, por lo tanto se puede afirmar que:

“La pendiente de la fuerza cortante esta representada por la carga externa”.

Integrando la ecuación (1) podemos obtener:

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = \int_{x_1}^{x_2} Wdx$$

Si la primer integral representa la variación de la fuerza cortante entre las secciones 1 y 2, y la segunda, el área bajo la forma de la carga externa entre las secciones 1 y 2; entonces:

“La variación de la fuerza cortante entre las secciones 1 y 2 es igual al área bajo la forma de la carga externa entre ambas secciones”.

Con base en lo anterior se tiene que:

$$\Delta V = V_2 - V_1 \quad ; \quad \text{área de la carga externa entre 1-2}$$

Aplicando ahora la segunda condición del equilibrio estático, con suma de momentos:

$$M + Vdx + Wdx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0 \quad ; \quad M + Vdx + 0 - M - dM = 0$$

$$\therefore \quad \boxed{Vdx = dM} \quad \text{ec.(2)}$$

De la ecuación (2) obtenemos $V = \frac{dM}{dx}$, por lo tanto se puede afirmar que:

“La pendiente del momento flexionante esta representado por la fuerza cortante”.

Integrando la ecuación 2:

$$\int_1^2 dM = \int_{x_1}^{x_2} Vdx$$



La primera integral representa la variación del momento flexionante entre las secciones 1 y 2; y la segunda el área de la fuerza cortante entre las mismas secciones 1 y 2; por lo tanto:

“La variación del momento flexionante entre las secciones 1 y 2 es igual al área del diagrama de la fuerza cortante entre ambas secciones respectivamente”.

Esto es:

$$\Delta M = M_2 - M_1 ; \text{área del diagrama de fuerza cortante entre 1-2}$$

Con base de lo anterior, la relación entre la carga externa y la fuerza cortante; y la fuerza cortante con el momento flexionante, para determinar la variación de los elementos mecánicos entre dos puntos se resume:

PRIMERO.- La pendiente de la fuerza cortante, esta representada por la carga externa.

SEGUNDO.- La variación de la fuerza cortante entre dos puntos, es igual al área de la carga externa entre los mismos puntos de referencia.

TERCERO.- La pendiente del momento flexionante, esta representada por la fuerza cortante.

CUARTO.- La variación del momento flexionante entre dos puntos, es igual al área del diagrama de variación de la fuerza cortante entre los mismos puntos de referencia.

Para tener una concepción grafica de las aplicaciones de vigas en estructuras complejas ver anexos del capítulo 3.

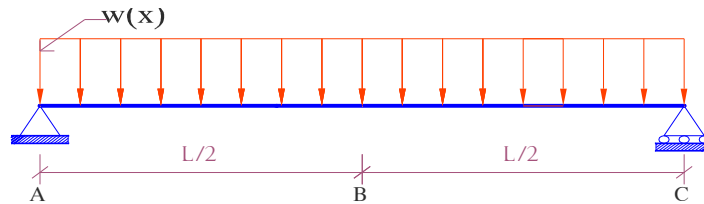
EJERCICIOS RESUELTOS.

Para poder tener una mejor percepción de la introducción al análisis de las estructuras presentaremos a continuación a una serie de ejercicios resueltos por los métodos ya mencionados anteriormente, para así realizar la verificación de cada tipo de estructura y analizar el comportamiento estructural de cada viga, también aprender a graficar los diagramas de N, Q y M.

Ejercicio #1

Para demostrar lo anteriormente expuesto, se propone a continuación aplicar el análisis funcional o método de secciones juntamente con el método relacional.

a) Método de las secciones o análisis funcional.



Primeramente realizamos un análisis para verificar el grado de isostaticidad

$$G = 3 - 3 = 0 ; \text{Estructura ISOSTATICA}$$

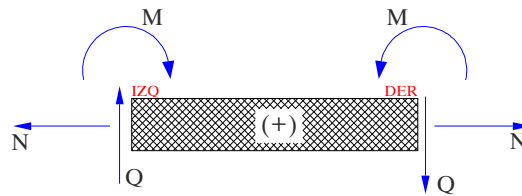
Realizamos el cálculo de las reacciones de apoyo:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -0.5(WL) + (V_A) = 0 \Rightarrow V_A = \frac{WL}{2} [t]$$

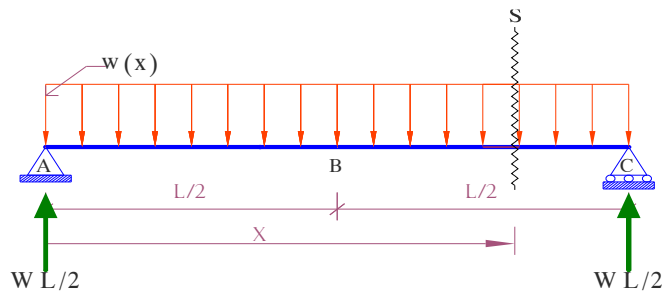
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow (WL)0.5 - V_C = 0 \Rightarrow V_C = \frac{WL}{2} [t]$$

$$\text{CONTROL } \sum V = 0 \Rightarrow WL - WL/2 - WL/2 = 0$$

Ahora seguimos con la obtención de las ecuaciones de esfuerzos internos basándonos en la convención de signos que ya hemos mostrado.

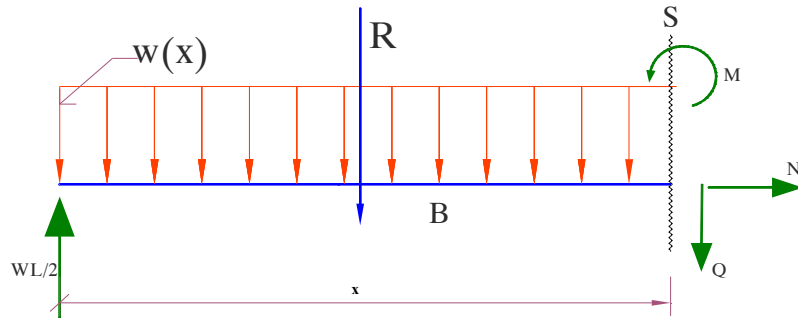


Ahora, es conveniente establecer un sistema de referencia, haciendo coincidir el eje x con la dirección del eje centroidal de la viga



Se efectúa un corte en la viga, “S”, misma que se analizara una longitud X en un rango de longitud de viga “L”.

Observemos el primero corte, sección “S”



DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < L$

$$\text{Cortante } Q \Rightarrow \frac{WL}{2} - WX \Rightarrow \text{Para } \begin{cases} x = L \Rightarrow Q = -\frac{WL}{2} \\ x = 0 \Rightarrow Q = \frac{WL}{2} \end{cases}$$

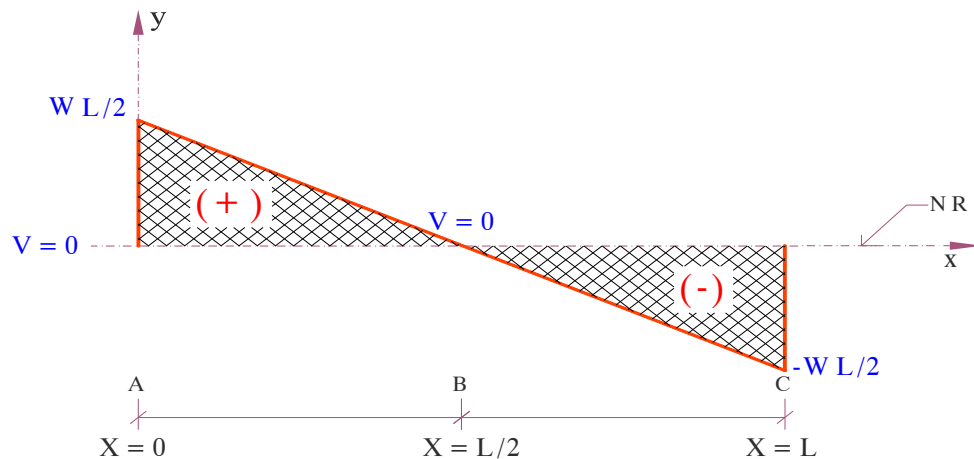
Se observa que cuando $X=0$, la fuerza cortante tiene un efecto, positivo, y cuando $X=L$ negativo. Por lo anterior se deduce que la fuerza cortante de A a C, sobre algún punto habrá de pasar por cero; en consecuencia, la distancia donde ocurre lo anterior, la función de la fuerza cortante se iguala a cero, para determinar eso es:

$$\frac{WL}{2} - WX = V \quad \text{pero cuando } V=0, \text{ tenemos que:}$$

$$\frac{WL}{2} = WX \Rightarrow X = \frac{L}{2}$$

Procedemos al **trazo del diagrama de la fuerza cortante** primero se traza un marco de referencia compuesto por un eje horizontal “X” y un eje vertical “Y”, sobre el eje horizontal se localiza los primeros parámetros de la variable “X” y sobre el eje vertical se localiza la magnitud de la fuerza cortante para cada parámetro de la variable “X”.

Uniendo los puntos desde A con $X=0$ y $V=0$ hasta, resulta la variación de la fuerza cortante que obedece a la función que se obtuvo.

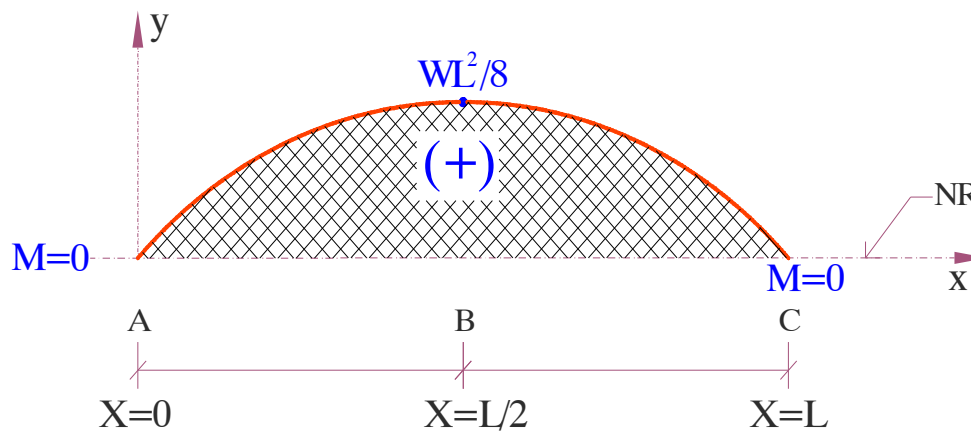


$$\text{Momento } M \Rightarrow \frac{WL}{2}X - \frac{WX^2}{2} \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=L & \Rightarrow M=0 \\ x=0 & \Rightarrow M=0 \end{cases}$$

Para tal efecto debemos tener conocimiento que cuando se observe un valor mínimo de la cortante (0), es ahí donde se encuentra el valor máximo del diagrama de momentos.

$$\text{Momento } M \Rightarrow \frac{WL}{2}X - \frac{WX^2}{2} \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=L/2 & \Rightarrow M = \frac{WL^2}{8} \end{cases}$$

Procedemos al **trazo del diagrama del momento flexionante**, como ya mencionamos trazando un eje horizontal "X" y un eje vertical "Y", sobre el eje horizontal se localiza los primeros parámetros de la variable "X" y sobre el eje vertical la magnitud del momento flexionante para cada parámetro de la variable "X".



Una vez realizado el gráfico de los esfuerzos internos de la estructura procedemos a anotar los valores críticos de la estructura.

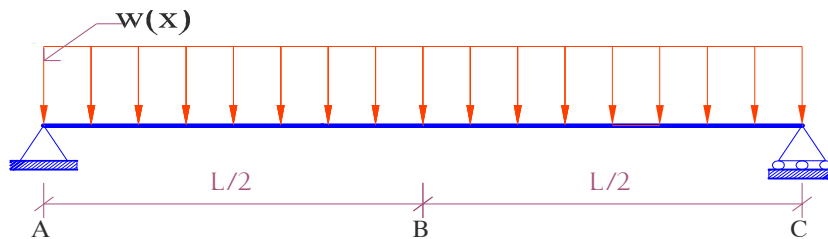
Fuerza cortante máxima: esta representada en los apoyos en $X=0$ con signo positivo y en $X=L$ con signo negativo, en ambos casos con un valor de $WL/2$

Fuerza cortante cero: se representa al centro del claro de la viga, punto en que el diagrama del momento flexionante es un valor máximo.

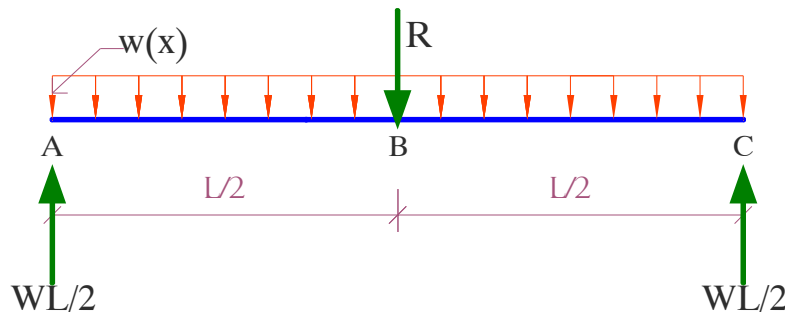
Momento flexionante cero: se presenta en los apoyos respectivos.

Momento flexionante máximo: se presenta al centro del claro con un efecto positivo (la fibra superior esta sometida a un efecto de compresión) punto que, en el diagrama de fuerza cortante esta pasa por cero.

b) Método relacional.



Realicemos un diagrama de cuerpo libre que nos permita identificar las fuerzas existen en la viga.



Por dato sabes que las reacciones de apoyo en V_A y V_C son:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -0.5(WL) + (V_A) = 0 \Rightarrow V_A = \frac{WL}{2} [t]$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow (WL)0.5 - V_C = 0 \Rightarrow V_C = \frac{WL}{2} [t]$$

Tomando de referencia el diagrama que representa a la estructura equilibrada realizamos *el diagrama de variación de la fuerza cortante*:

Cuando $X=0$, la fuerza cortante en A es:

$$V_A = V_A = WL/2$$

Cuando $X=L/2$, la fuerza cortante en B es:

$V_B = V_A + (\text{área de la carga externa actuando de A a B})$ esto es:

$$V_B = WL/2 + (-W * L/2) = WL/2 - WL/2 = 0$$

Cuando $X=L$, considerando un punto diferencial antes del punto C es:

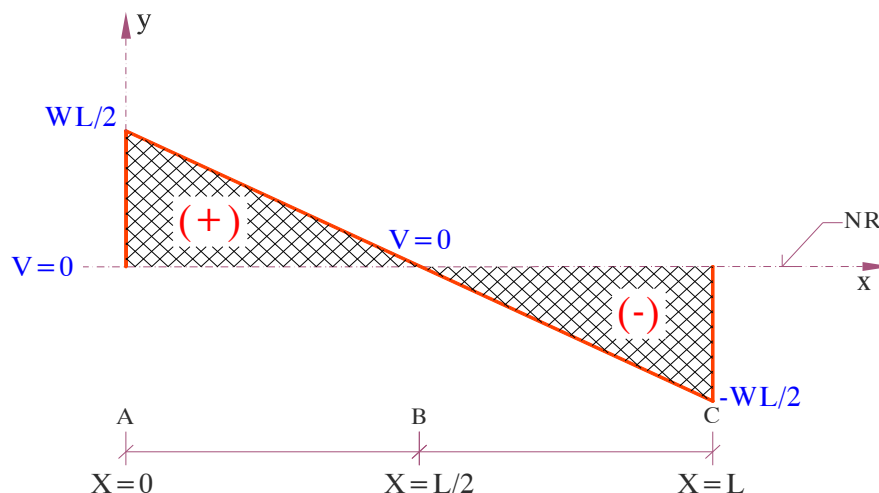
$V_C = V_B + (\text{área de la carga externa actuando de B a C})$ esto es:

$$V'_c = 0 + (-W * L/2) = -WL/2 \text{ antes de C}$$

FINALMENTE la fuerza cortante en C es: $V_C = V'_c + (\text{reacción en C})$

$$V_C = -WL/2 + WL/2 = 0$$

Con los resultados anteriores, el diagrama de variación de esfuerzos de la fuerza cortante se muestra en la siguiente figura:



Tomando como referencia el diagrama de variación de la fuerza cortante realizamos ahora *el diagrama de variación del momento flexionante*

Cuando $X=0$, el momento en A es: $M_A = 0$

Cuando $X=L/2$, el momento en B es:

$M_B = M_A + (\text{área del diagrama de la fuerza cortante de A a B})$ esto es:

$$M_B = 0 + (WL/2)(L/2)(1/2) = WL^2/8$$

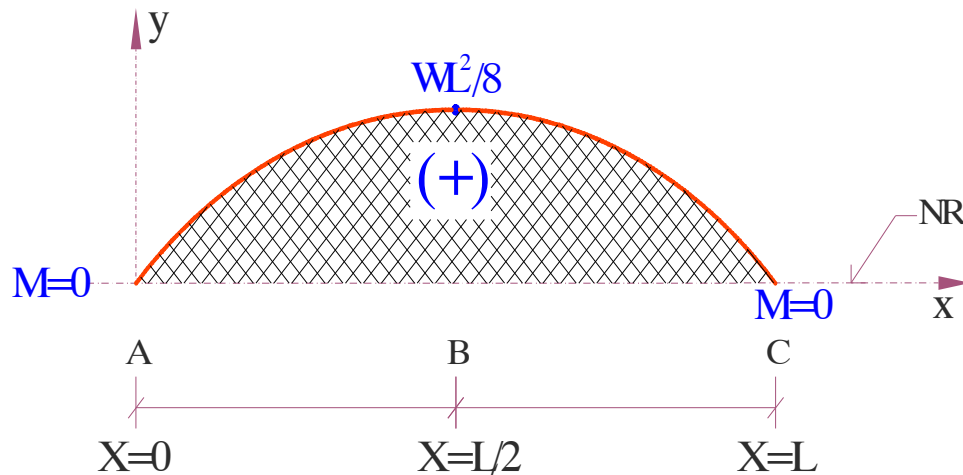
Cuando $X=L$, el momento en C es:

$M_C = M_B + (\text{área del diagrama de la fuerza cortante de B a C})$ esto es:

$$M_C = WL^2/8 + (-WL/2)(L/2)(1/2) = WL^2/8 - WL^2/8 = 0$$

$$M_C = 0$$

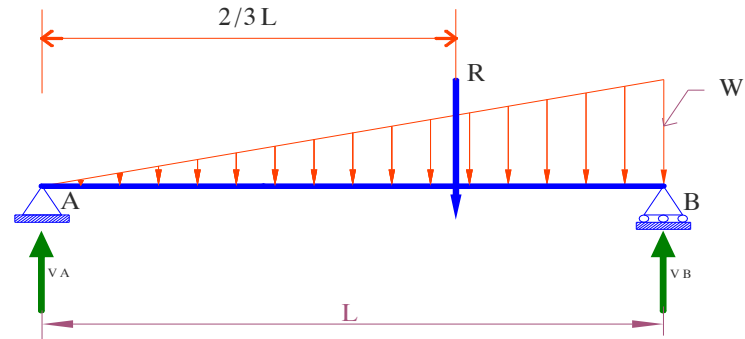
El diagrama de variación del momento flexionante que se presenta en la viga, se muestra en la siguiente figura:



Ejercicio #2

Se pide analizar la siguiente estructura por el método de secciones o análisis funcional juntamente con el método relacional.

a) **Método de las secciones o análisis funcional.**



Primeramente realizamos un análisis para verificar el grado de isostaticidad

$$G = 3 - 3 = 0 ; \text{Estructura ISOSTATICA}$$

Realizamos el cálculo de las reacciones de apoyo:

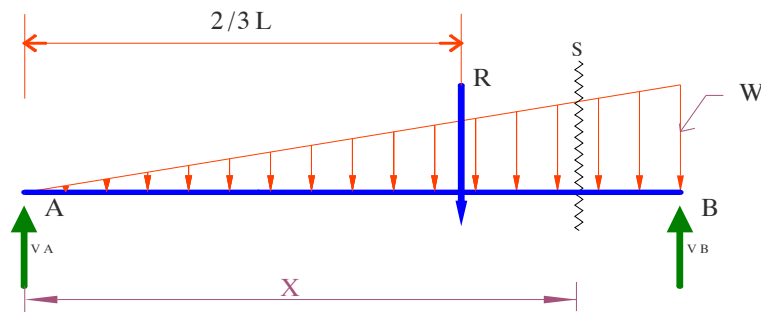
$$R = \frac{1}{2} * L * W \Rightarrow R = WL/2$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \frac{2}{3} L \frac{WL}{2} - V_B L = 0 \Rightarrow V_B = \frac{WL}{3} [t]$$

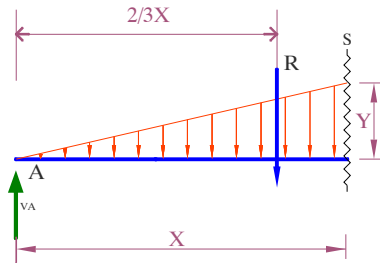
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} L \frac{WL}{2} + V_A L = 0 \Rightarrow V_A = \frac{WL}{6} [t]$$

$$\text{CONTROL } \sum V = 0 \Rightarrow -\frac{WL}{2} + \frac{WL}{6} + \frac{WL}{3} = 0$$

Se efectúa un corte en la viga, “S”, misma que se analizara una longitud X en un rango de longitud de viga “L”.



Observemos el primer corte, sección "S"



Aplicando las ecuaciones de equilibrio TENEMOS:

$$V'A = WL/6 - YX/2$$

Por triángulos semejantes tenemos: $W/L = Y/X$

Entonces: $Y = \frac{W}{L} X$, sustituyendo en la función de cortante referida al punto A'

$$V_c' = \frac{WL}{6} - \frac{W}{L} X \frac{X}{2} \quad \therefore \quad V_c' = \frac{WL}{6} - \frac{W}{L} \frac{X^2}{2}$$

DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < L$

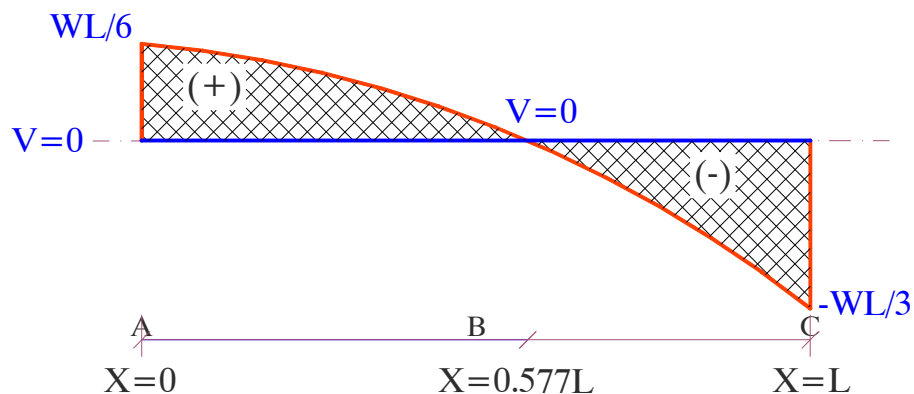
$$\text{Cortante } Q \Rightarrow \frac{WL}{6} - \frac{W}{L} \frac{X^2}{2} \Rightarrow \text{Para } \begin{cases} x = L \Rightarrow Q = -\frac{WL}{3} \\ x = 0 \Rightarrow Q = \frac{WL}{6} \end{cases}$$

Determinamos la distancia horizontal por donde se efectúa el cambio de positivo a negativo en la cortante.

$$\frac{WL}{6} - \frac{WX^2}{2L} = V \quad \text{pero cuando } V=0, \text{ tenemos que:}$$

$$X^2 = \frac{WL}{6} \frac{2L}{W} \Rightarrow X = \sqrt{\frac{1}{3}} L \quad \text{o} \quad X = 0.577L$$

Procedemos al trazo del diagrama de la fuerza cortante.

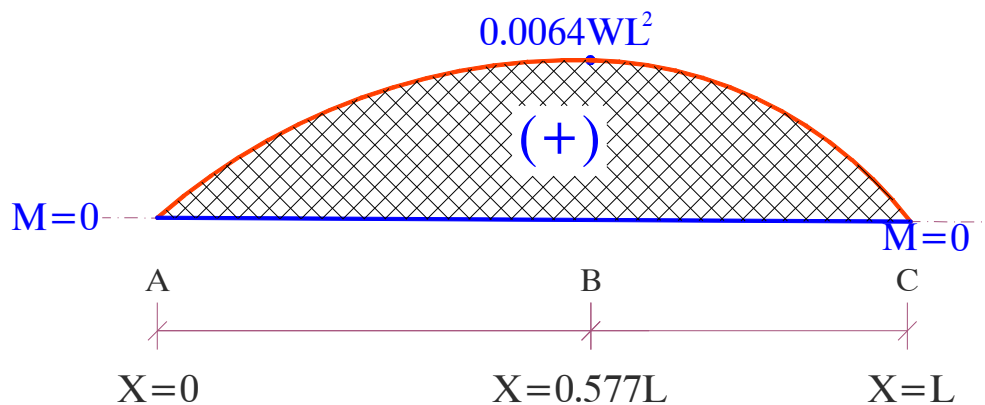


$$\text{Momento } M \Rightarrow \frac{WL}{6}X - \frac{WX^3}{6L} \Rightarrow \text{Para } \begin{cases} x = L \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = 0 \\ M = 0 \end{cases}$$

Para tal efecto debemos tener conocimiento que cuando se observe un valor mínimo de la cortante (0), es ahí donde se encuentra el valor máximo del diagrama de momentos.

$$\text{Momento } M \Rightarrow \frac{WL}{2}X - \frac{WX^2}{2} \Rightarrow \text{Para } \{x = 0.577L \Rightarrow M = 0.064WL^2$$

Procedemos al **trazo del diagrama del momento flexionante**, como ya mencionamos trazando un eje horizontal “X” y un eje vertical “Y”, sobre el eje horizontal se localiza los primeros parámetros de la variable “X” y sobre el eje vertical la magnitud del momento flexionante para cada parámetro de la variable “X”.



Una vez realizado el gráfico de los esfuerzos internos de la estructura procedemos a anotar los valores críticos de la estructura.

Fuerza cortante máxima: cuando $X=L$ con magnitud $WL/3$.

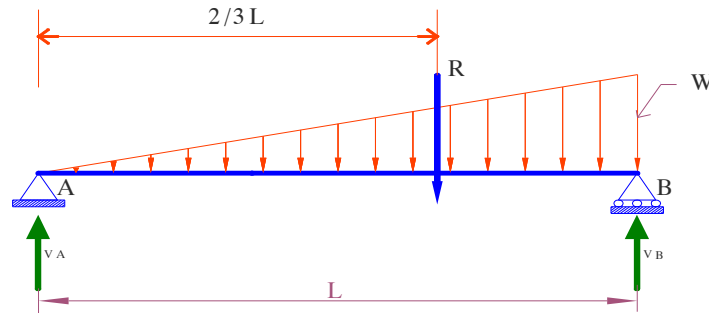
Fuerza cortante mínima: cuando $X=0$ con magnitud $WL/6$

Fuerza cortante cero: se presenta cuando $X = 0.577 L$ distancia que se asocia en el diagrama del momento flexionante con un valor máximo de este.

Momento flexionante cero: se presenta en los apoyos respectivos.

Momento flexionante máximo: se presenta cuando $X=0.577 L$ distancia que en la que el diagrama de fuerza cortante pasa por cero.

b) Solución por el método relacional.



En vista de que el cálculo de las reacciones de apoyo es el mismo, se tendrán los siguientes valores:

$$R = \frac{1}{2} * L * W \Rightarrow R = WL/2$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \frac{2}{3} L \frac{WL}{2} - V_B L = 0 \Rightarrow V_B = \frac{WL}{3} [t]$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} L \frac{WL}{2} + V_A L = 0 \Rightarrow V_A = \frac{WL}{6} [t]$$

Realizamos el cálculo de los elementos de corte.

Cuando $X=0$, la fuerza cortante en A es:

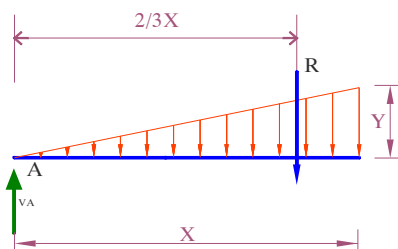
$$V_A = WL/6$$

Cuando $X=L$, considerando un punto diferencial antes del punto B es:

$$V_C = V_A + (\text{área de la carga externa actuando de A a B}) \text{ esto es:}$$

$$V_B' = WL/6 + (-W * L/2) = -WL/3 \text{ antes de B}$$

En base a lo anterior se observa también que cuando $X=0$, la fuerza cortante tiene un efecto, positivo, y cuando $X=L$ negativo. Por lo anterior se deduce que la fuerza cortante de A a B, sobre algún punto habrá de pasar por cero; en consecuencia, la distancia donde ocurre lo anterior, la función de la fuerza cortante se iguala a cero, para determinar eso es:



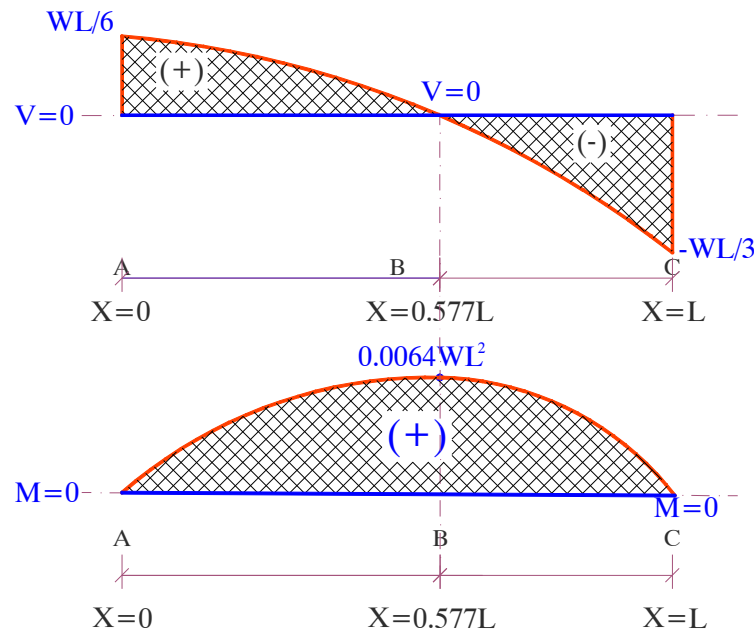
La función de la fuerza cortante igualada a cero es:

$$\frac{WL}{6} - \frac{1}{2} \frac{WX^2}{L} = 0 \Rightarrow X = 0.577 L$$

Analizando de igual manera para el momento flexionante:

$$M = \frac{WL}{6}X - \frac{WX^3}{6L} = 0 \Rightarrow \begin{cases} X = L & \therefore M = 0. \\ X = 0.577L & \therefore M = 0.064WL^2 \\ X = 0 & \therefore M = 0 \end{cases}$$

Graficando tenemos:

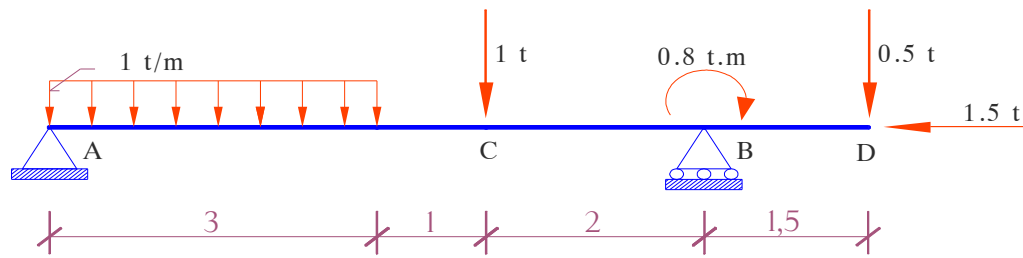


CONCLUSIÓN: La variación del diagrama tanto de la fuerza cortante como del momento flexionante son similares, independientemente del análisis que se aborde; es decir, del análisis funcional o el análisis relacional. Otro aspecto importante a señalar: cuando la carga externa es uniformemente repartida, la función de la fuerza cortante es una línea recta e inclinada y la función del momento flexionante es una línea curva de segundo grado; asimismo, cuando sobre la estructura esta actuando una carga puntual, ésta genera un cambio brusco de la fuerza cortante y finalmente, el momento en A, también genera un cambio brusco del momento flexionante.

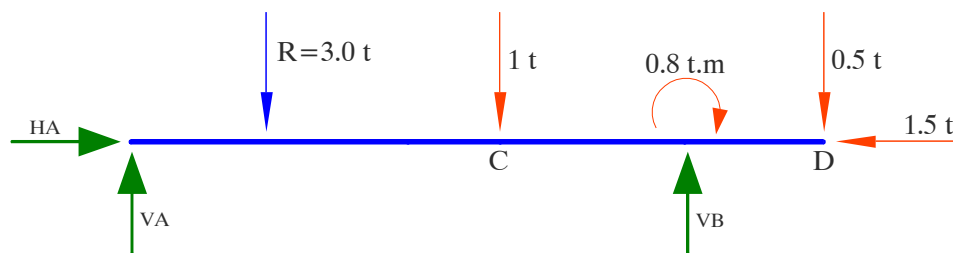
Para poder realizar un análisis un poco más metódico planteamos al lector, un recetario para la resolución de vigas isostáticas, mismo que será explicado a continuación.

Ejercicio #3

Se pide analizar la siguiente estructura por el método de secciones o análisis funcional juntamente con el método relacional.



Paso 1) Realizamos el cálculo de reacciones de apoyo, pero solo para efectos de cálculo realizamos el cambio de la carga distribuida a carga puntual.



$$R = 3 \cdot 1 \Rightarrow R = 3.0 \text{ t}$$

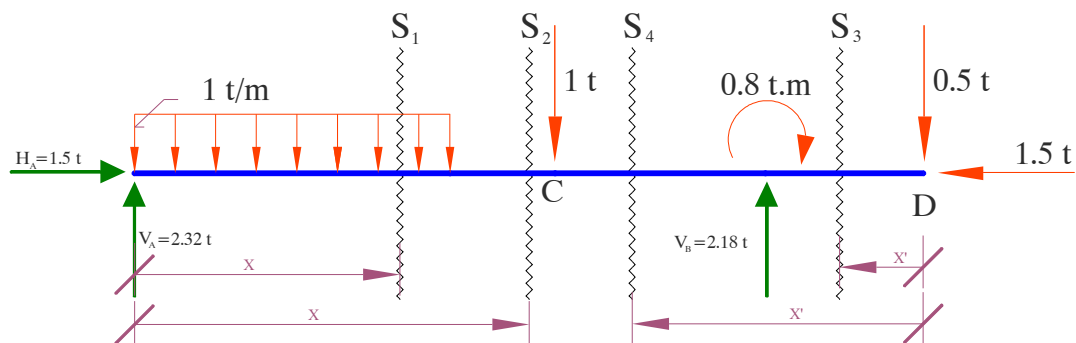
$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A - 1.5 = 0 \Rightarrow H_A = 1.5$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow (3)(1.5) + 1(4) + 0.8 - 6(V_B) + 0.5(7.5) = 0 \Rightarrow V_B = 2.18 \text{ t}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 6(V_A) - 3(4.5) - 1(2) + 0.8 + 0.5(1.5) = 0 \Rightarrow V_A = 2.32 \text{ t}$$

$$\text{CONTROL } \sum V = 0 \Rightarrow 2.32 - 3 - 1 + 2.18 - 0.5 = 0$$

Paso 2) Realizamos la obtención de las ecuaciones de esfuerzos internos



El DCL que se muestra en el paso 1 realizamos el cambio de la carga distribuida a cargas puntuales, pero solo para efectos de facilidad de cálculo, para la obtención de esfuerzos internos es necesario trabajar con la carga distribuida.

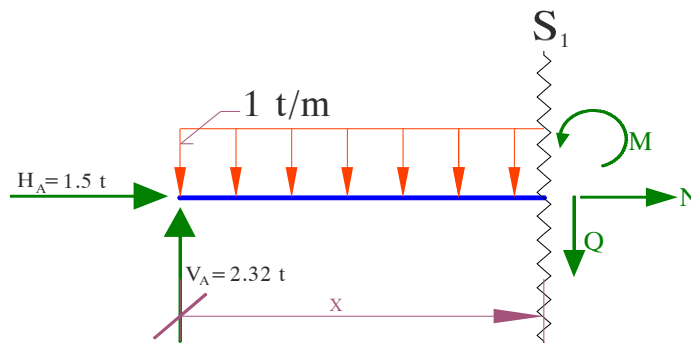
En este se han introducido 4 secciones para su análisis, y a diferencia de los ejercicios anteriores este, se analizara de ambos lados de la viga y se realizara un control en el nudo intermedio C. para lo cual introducimos un eje de coordenadas $x - y$ que ira de izquierda a derecha, y otro $x' - y'$, que ira de derecha a izquierda.

SECCIÓN S_1 DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < 3$

$$\text{Normal } N \Rightarrow -1.5 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=3 \Rightarrow Q = -1.5 \text{ t} \\ x=0 \Rightarrow Q = -1.5 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Cortante } Q \Rightarrow 2.32 - 1 \cdot x \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q = 2.32 \text{ t} \\ x=3 \Rightarrow Q = -0.68 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Momento } M \Rightarrow 2.32 \cdot x - 1 \cdot x \cdot \frac{x}{2} \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q = 0 \text{ t} \cdot m \\ x=3 \Rightarrow Q = 2.46 \text{ t} \cdot m \end{cases}$$

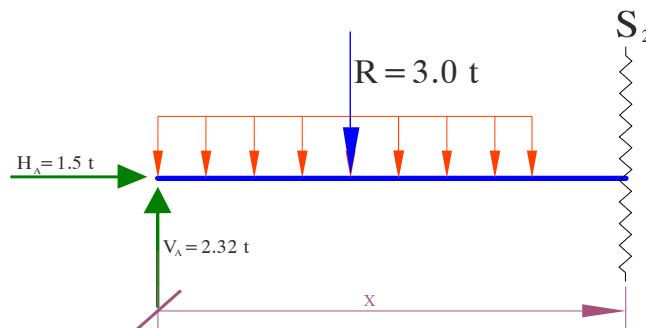


SECCIÓN S_2 DOMINIO $\Leftrightarrow 3 < x < 4$

$$\text{Normal } N \Rightarrow -1.5 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=3 \Rightarrow Q = -1.5 \text{ t} \\ x=4 \Rightarrow Q = -1.5 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Cortante } Q \Rightarrow 2.32 - 3 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=3 \Rightarrow Q = -0.68 \text{ t} \\ x=4 \Rightarrow Q = -0.68 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Momento } M \Rightarrow 2.32 \cdot x - 3(x - 1.5) \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=3 \Rightarrow M = 2.46 \text{ t} \cdot m \\ x=4 \Rightarrow M = 1.78 \text{ t} \cdot m \end{cases}$$

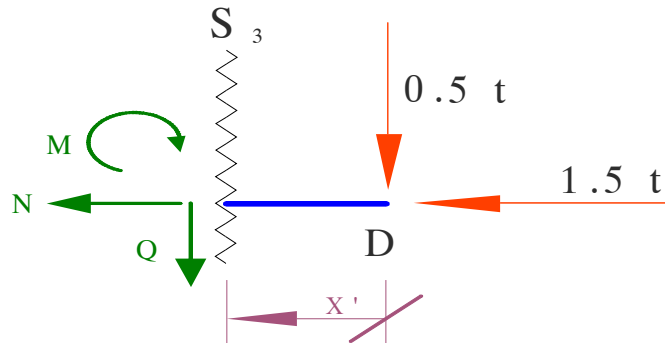


SECCIÓN S₃ DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x' < 1.5$

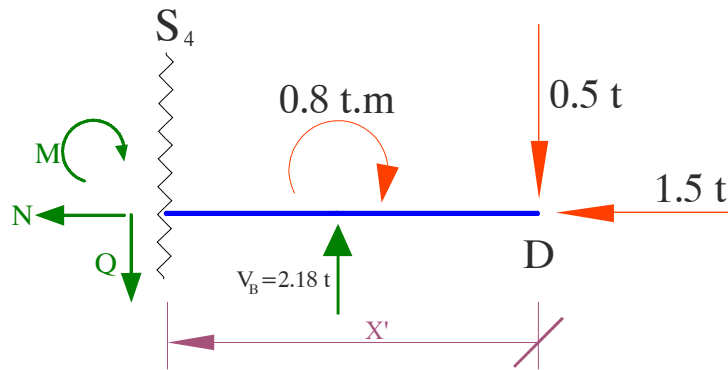
Normal $N \Rightarrow -1.5 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x'=0 \Rightarrow N = -1.5 \text{ t} \\ x'=1.5 \Rightarrow N = -1.5 \text{ t} \end{cases}$

Cortante $Q \Rightarrow 0.5 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x'=0 \Rightarrow Q = 0.5 \text{ t} \\ x'=1.5 \Rightarrow Q = 0.5 \text{ t} \end{cases}$

Momento $M \Rightarrow -0.5x' \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x'=0 \Rightarrow M = 0 \text{ t} \cdot \text{m} \\ x'=1.5 \Rightarrow M = -0.75 \text{ t} \cdot \text{m} \end{cases}$



SECCIÓN S₄ DOMINIO $\Leftrightarrow 1.5 < x' < 3.5$

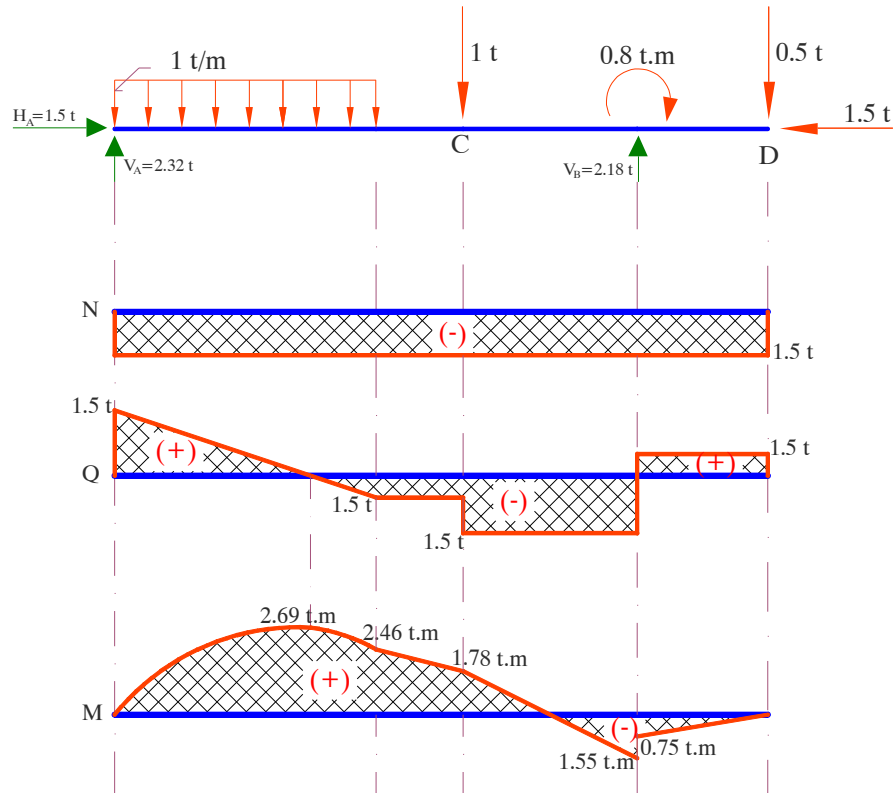


Normal $N \Rightarrow -1.5 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x'=1.5 \Rightarrow N = -1.5 \text{ t} \\ x'=3.5 \Rightarrow N = -1.5 \text{ t} \end{cases}$

Cortante $Q \Rightarrow 0.5 - 2.18 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x'=1.5 \Rightarrow Q = -1.68 \text{ t} \\ x'=3.5 \Rightarrow Q = -1.68 \text{ t} \end{cases}$

Momento $M \Rightarrow -0.5x' - 0.8 + 2.18(x' - 1.5) \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x'=1.5 \Rightarrow M = -1.55 \text{ t} \cdot \text{m} \\ x'=3.5 \Rightarrow M = 1.780 \text{ t} \cdot \text{m} \end{cases}$

Paso 3) Realizamos el **DIAGRAMA DE ESFUERZOS INTERNOS**

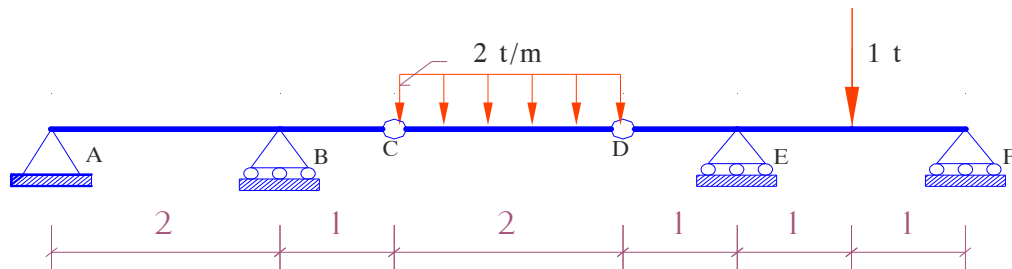


Paso 4) Verificación de los esfuerzos extremos según a los métodos ya mencionados en el procedimiento de cálculo.

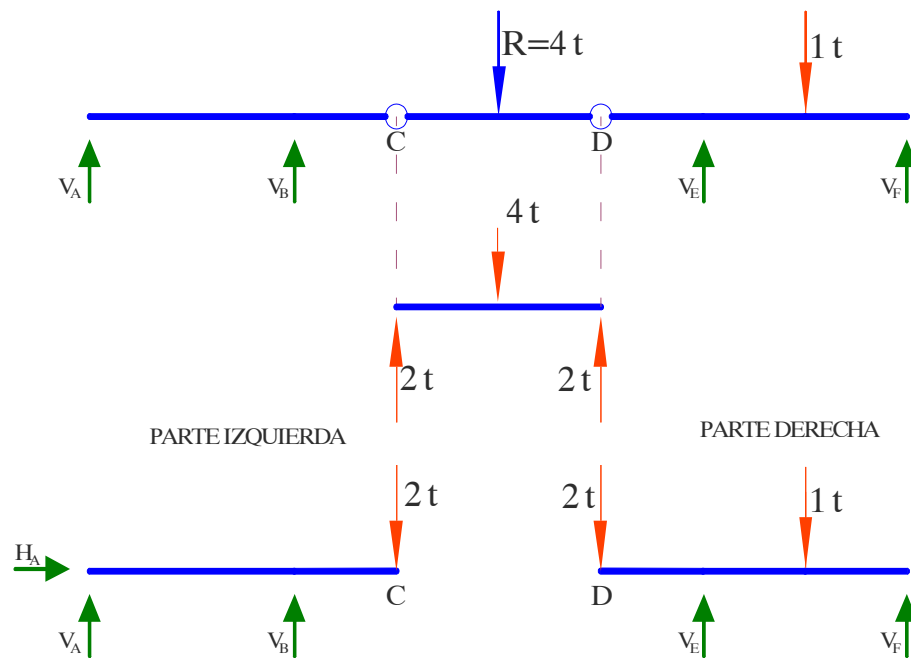
$$N \Rightarrow \begin{matrix} \text{Max} = 0 \text{ t} \\ \text{Min} = -1.5 \text{ t} \end{matrix} \quad Q \Rightarrow \begin{matrix} \text{Max} = 2.32 \text{ t} \\ \text{Min} = -1.68 \text{ t} \end{matrix} \quad M \Rightarrow \begin{matrix} \text{Max} = 2.69 \text{ t} \\ \text{Min} = -1.55 \text{ t} \end{matrix}$$

Ejercicio #4

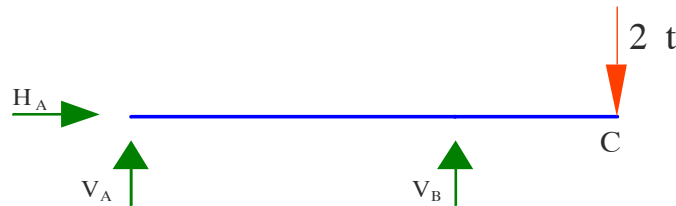
Se pide analizar la siguiente estructura por el método de secciones o análisis funcional juntamente con el método relacional.



Paso 1) CÁLCULO DE REACCIONES DE APOYO.



PARTE IZQUIERDA

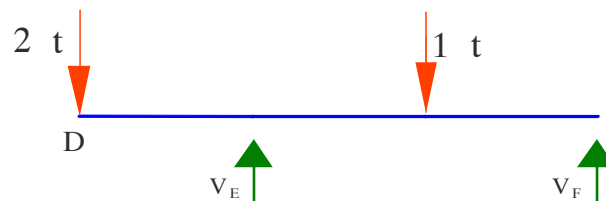


$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A = 0 \quad t$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2(V_B) + (2)(3) = 0 \Rightarrow V_B = 3 \quad t$$

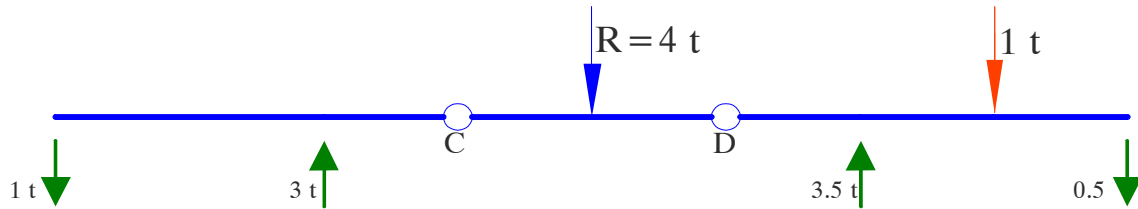
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 2(V_A) + (1)(2) = 0 \Rightarrow V_A = -1 \quad t$$

PARTE DERECHA



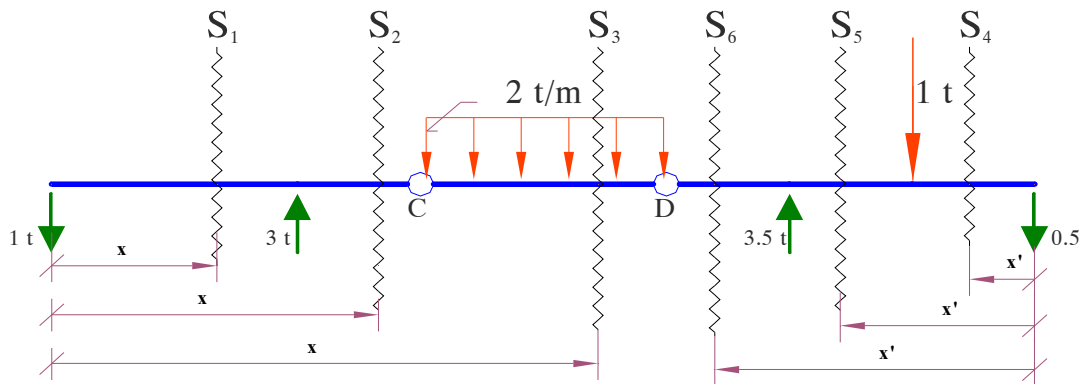
$$\sum M_E = 0 \Rightarrow -2(1) + 1(1) - 2(V_F) = 0 \Rightarrow V_F = -0.5 \quad t$$

$$\sum M_F = 0 \Rightarrow 2(V_E) - 2(3) - 1(1) = 0 \Rightarrow V_E = 3.5 \quad t$$



CONTROL $\sum V = 0 \Rightarrow -1 + 3 - 4 + 3.5 - 1 - 0.5 = 0$

Paso 2) OBTENCION DE ECUACIONES DE ESFUERZOS INTERNOS



De igual manera se introducirá dos sistemas de coordenadas para que pueda ser analizado por ambos lados, un eje de coordenadas $x - y$ que ira de izquierda a derecha, y otro $x' - y'$, que ira de derecha a izquierda.

SECCIÓN S₁ DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < 2$

Normal $N \Rightarrow 0 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q=0 \text{ t} \\ x=2 \Rightarrow Q=0 \text{ t} \end{cases}; N=0 \text{ para todas las secciones}$

Cortante $Q \Rightarrow -1 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q=-1 \text{ t} \\ x=2 \Rightarrow Q=-1 \text{ t} \end{cases}$

Momento $M \Rightarrow -1x \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow M=0 \text{ t} \cdot \text{m} \\ x=2 \Rightarrow M=-2 \text{ t} \cdot \text{m} \end{cases}$

SECCIÓN S₂ DOMINIO $\Leftrightarrow 2 < x < 3$

Cortante $Q \Rightarrow -1 + 3 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=2 \Rightarrow Q=2 \text{ t} \\ x=3 \Rightarrow Q=2 \text{ t} \end{cases}$

Momento $M \Rightarrow -1(x) + 3(x-2) \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=2 \Rightarrow M=-2 \text{ t} \cdot \text{m} \\ x=3 \Rightarrow M=0 \text{ t} \cdot \text{m} \end{cases}$



El valor de $M=0$ en $x=3$, se da por que se encuentra en la articulación, como recordaremos una articulación ocasiona un ecuación especial de libertad de momento a un de los lados.

SECCIÓN S₃ DOMINIO $\Leftrightarrow 3 < x < 5$

$$\text{Cortante } Q \Rightarrow -1 + 3 - 2(x-3) \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=3 \Rightarrow Q=2 \text{ t} \\ x=5 \Rightarrow Q=-2 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Momento } M \Rightarrow -1x + 3(x-2) - 2(x-3)\frac{(x-3)}{2} \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=3 \Rightarrow M=0 \text{ t} \cdot m \\ x=5 \Rightarrow M=0 \text{ t} \cdot m \end{cases}$$

SECCIÓN S₄ DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x' < 1$

$$\text{Cortante } Q \Rightarrow 0.5 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x'=0 \Rightarrow Q=0.5 \text{ t} \\ x'=1 \Rightarrow Q=0.5 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Momento } M \Rightarrow -0.5x' \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x'=0 \Rightarrow M=0 \text{ t} \cdot m \\ x'=1 \Rightarrow M=-0.5 \text{ t} \cdot m \end{cases}$$

SECCIÓN S₅ DOMINIO $\Leftrightarrow 1 < x' < 2$

$$\text{Cortante } Q \Rightarrow 0.5 + 1 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x'=1 \Rightarrow Q=1.5 \text{ t} \\ x'=2 \Rightarrow Q=1.5 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Momento } M \Rightarrow -0.5x' - 1(x'-1) \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x'=1 \Rightarrow M=-0.5 \text{ t} \cdot m \\ x'=2 \Rightarrow M=-2 \text{ t} \cdot m \end{cases}$$

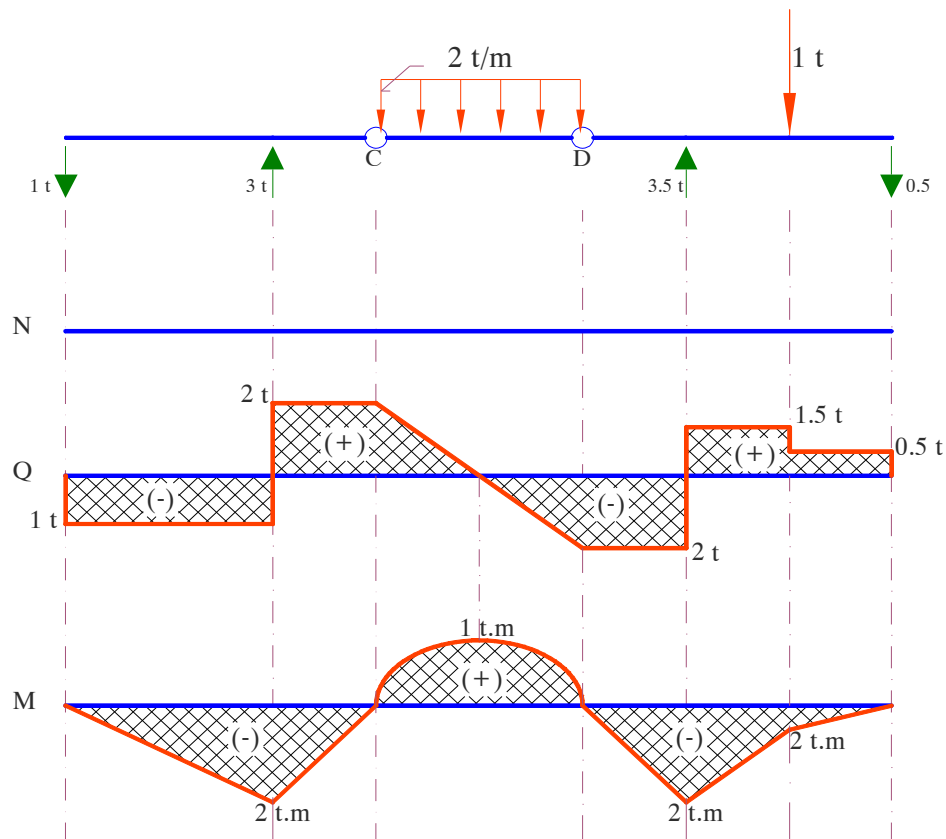
SECCIÓN S₆ DOMINIO $\Leftrightarrow 2 < x' < 3$

$$\text{Cortante } Q \Rightarrow 0.5 + 1 - 3.5 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x'=2 \Rightarrow Q=-2 \text{ t} \\ x'=3 \Rightarrow Q=-2 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Momento } M \Rightarrow -0.5x' - 1(x'-1) + 3.5(x'-2) \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x'=2 \Rightarrow M=-2 \text{ t} \cdot m \\ x'=3 \Rightarrow M=0 \text{ t} \cdot m \end{cases}$$

Nuevamente el valor de $M=0$ cuando llegamos a la articulación.

Paso 3) DIAGRAMA DE ESFUERZOS INTERNOS

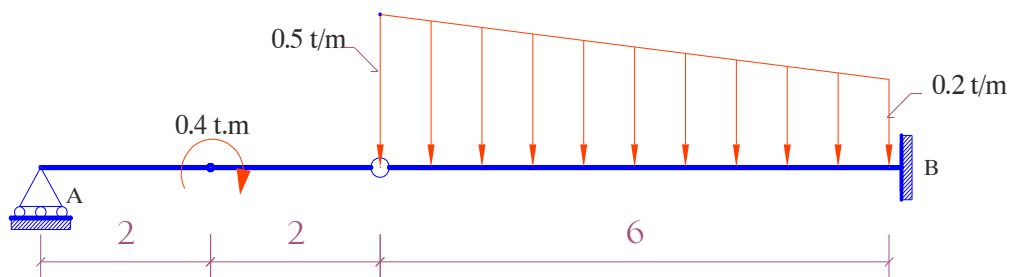


Paso 4) Verificación de los esfuerzos extremos según a los métodos ya mencionados en el procedimiento de cálculo.

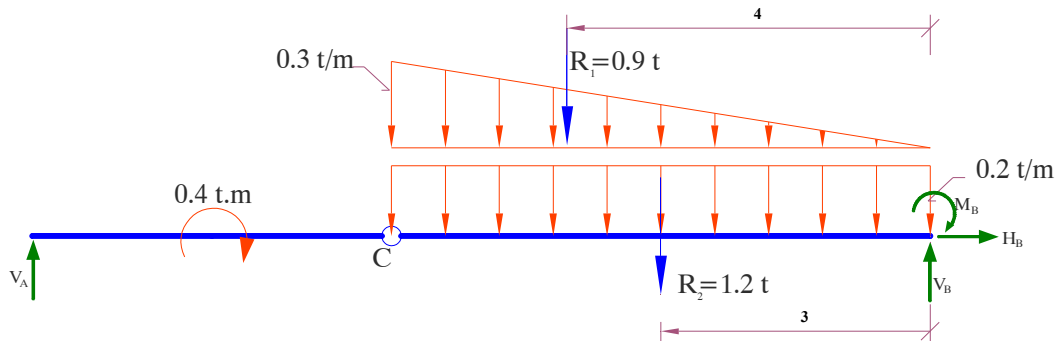
$$N \Rightarrow \begin{matrix} Max = 0 & t \\ Min = 0 & t \end{matrix} \quad Q \Rightarrow \begin{matrix} Max = 2 & t \\ Min = -2 & t \end{matrix} \quad M \Rightarrow \begin{matrix} Max = 1 & t \\ Min = -2 & t \end{matrix}$$

Ejercicio #5

Se pide analizar la siguiente estructura por el método de secciones o análisis funcional juntamente con el método relacional.



Paso 1) CÁLCULO DE REACCIONES DE APOYO.



Para facilitar el cálculo separemos la carga trapezoidal en 2 cargas distribuidas, una triangular y una rectangular, las que tendrán las siguientes resultantes, como se muestra en la figura anterior:

$$R_1 = \frac{1}{2} \cdot (6) \cdot (0.3) \Rightarrow R_1 = 0.9 \text{ t}$$

$$R_2 = (6) \cdot (0.2) \Rightarrow R_2 = 1.2 \text{ t}$$

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_B = 0 \text{ t}$$

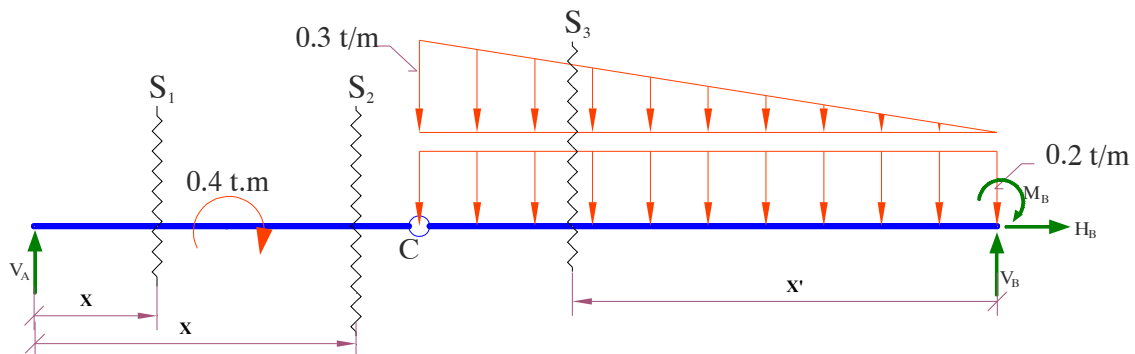
$$\sum M_C^{IZQ} = 0 \Rightarrow 4(V_A) + (0.1)(10) = 0 \Rightarrow V_A = -0.1 \text{ t}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow M_B - 0.1(10) + 0.4 - R_1(2/3)(6) - R_2(6)(1/2) = 0 \Rightarrow M_B = 7.8 \text{ t} \cdot m$$

$$\sum M_C^{DER} = 0 \Rightarrow (0.9)/3 + (1/2)1.2 + 7.8 - 6V_B = 0 \Rightarrow V_B = 2.2 \text{ t}$$

$$\text{CONTROL } \sum V = 0 \Rightarrow -0.1 - 0.9 - 1.2 + 2.2 = 0$$

Paso 2) OBTENCION DE ECUACIONES DE ESFUERZOS INTERNOS



SECCIÓN S₁ DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < 2$

$$\text{Normal } N \Rightarrow 0 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q=0 \text{ t} \\ x=2 \Rightarrow Q=0 \text{ t} \end{cases}; N=0 \text{ para todas las secciones}$$

$$\text{Cortante } Q \Rightarrow -0.1 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q=-0.1 \text{ t} \\ x=2 \Rightarrow Q=-0.1 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Momento } M \Rightarrow -0.1x \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow M=0.0 \text{ t} \cdot m \\ x=2 \Rightarrow M=-0.2 \text{ t} \cdot m \end{cases}$$

SECCIÓN S₂ DOMINIO $\Leftrightarrow 2 < x < 4$

$$\text{Cortante } Q \Rightarrow -0.1 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=2 \Rightarrow Q=-0.1 \text{ t} \\ x=4 \Rightarrow Q=-0.1 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Momento } M \Rightarrow -0.1(x) + 0.4 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=2 \Rightarrow M=0.2 \text{ t} \cdot m \\ x=4 \Rightarrow M=0 \text{ t} \cdot m \end{cases}$$

SECCIÓN S₃ DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x' < 6$

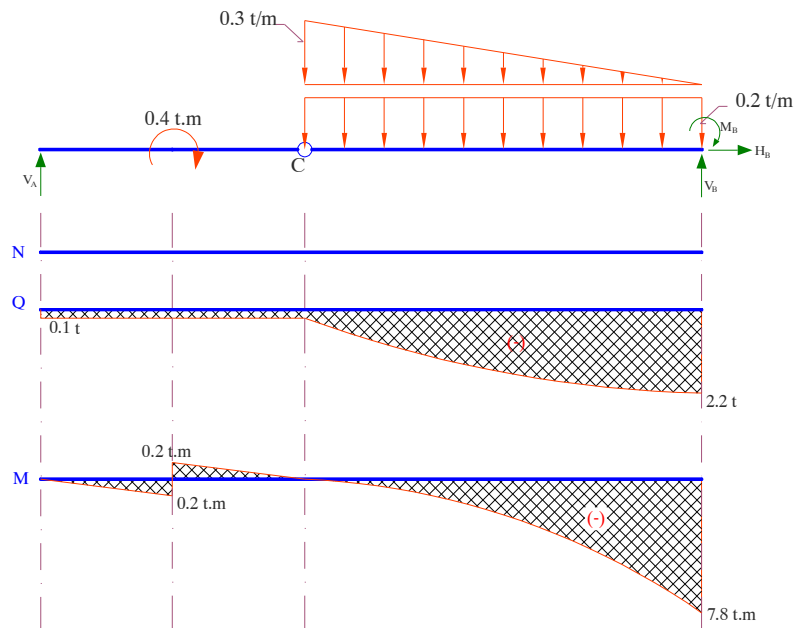
$$\text{Cortante } Q \Rightarrow -2.2 + 0.2 \cdot x' + 0.025 \cdot X'^2 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x'=0 \Rightarrow Q=-2.2 \text{ t} \\ x'=6 \Rightarrow Q=-0.1 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Momento } M \Rightarrow 2.2x' - 0.2x' \cdot \frac{x'}{2} - 0.025 \cdot x'^2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot x'\right) - 7.8 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x'=0 \Rightarrow M=-7.8 \text{ t} \cdot m \\ x'=6 \Rightarrow M=0 \text{ t} \cdot m \end{cases}$$

Nuevamente el valor de $M=0$ cuando llegamos a la articulación.

Paso 3) DIAGRAMA DE ESFUERZOS INTERNOS

Observemos el diagrama de variación de esfuerzos internos, en la figura siguiente:



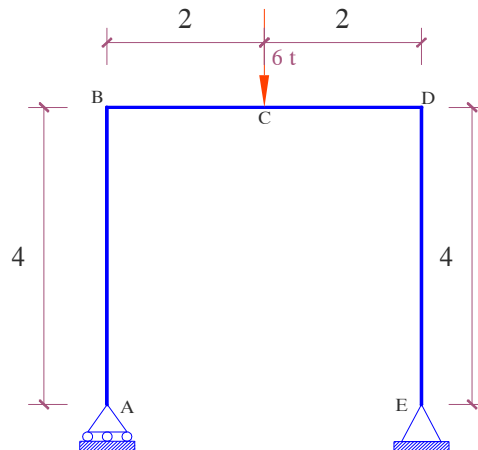
Paso 4) Verificación de los esfuerzos extremos según a los métodos ya mencionados en el procedimiento de cálculo.

$$N \Rightarrow \begin{matrix} Max = 0 & t \\ Min = 0 & t \end{matrix} \quad Q \Rightarrow \begin{matrix} Max = -2.2 & t \\ Min = -0.1 & t \end{matrix} \quad M \Rightarrow \begin{matrix} Max = 0.2 & t \\ Min = -7.8 & t \end{matrix}$$

3.8 ANÁLISIS DE PÓRTICOS

Ejercicio #6

Tomando como referencia el marco que se muestra en la siguiente figura; determinar la variación de los elementos mecánicos que se presentan en la estructura, que son generados por la acción de la carga puntual de 6 ton. Actuando en el punto C.



3.8.1 PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS.

Los criterios de análisis para determinar el diagrama de variación de los elementos mecánicos que se presentan en una estructura en el contexto geométrico de un marco, son similares a los que se aplicaron en los apartados 6.1.1 y 6.1.2 respectivamente; es decir, utilizando el análisis funcional o el análisis relacional, en estructuras en forma de viga, pero, es importante señalar dos variantes mas que se utilizan para ello:

- **Primera:** Se define un marco de referencia general en el contexto de la estructura, integrado por dos ejes rectangulares: uno horizontal: X y el otro vertical: Y, teniendo como origen el nodo A tal como se muestra en la figura.
- **Segunda:** El análisis de los elementos que integran la estructura (tramo AB, tramo BC, tramo CD, y tramo DE), se abordan considerando un sentido de recorrido por la parte interna de la estructura y de izquierda a derecha definiéndole a cada uno de ellos un marco de referencia particular; por ejemplo, para el tramo BC, su origen está localizado en el nodo B de tal manera que en el sentido de B a C, se identifica el eje horizontal positivo X; y en el sentido vertical a partir de B el eje Y.

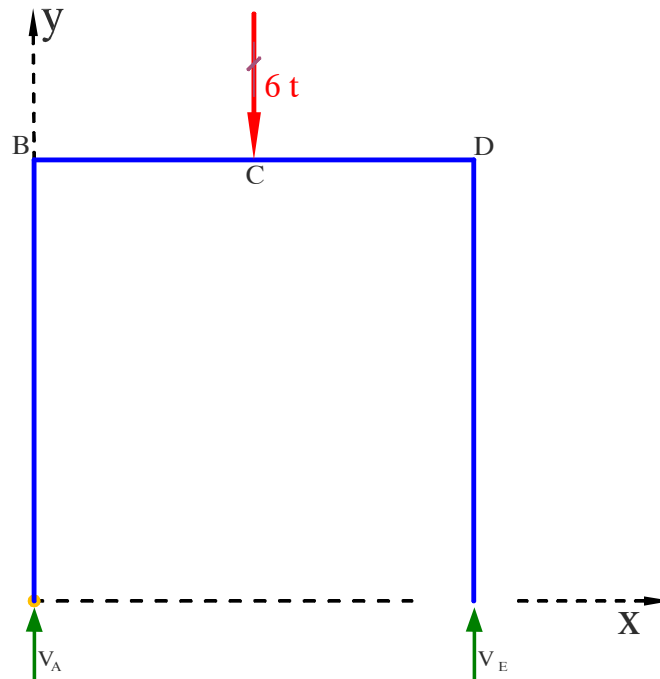
3.8.2 DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

Nos permite identificar: Las cargas activas y las cargas reactivas. El sistema de fuerzas que se asocia con la estructura. El número de las ecuaciones de equilibrio para el sistema de fuerzas determinado. El número de las incógnitas que contiene el sistema. Las condiciones de isostaticidad para determinar el tipo de estructura que se está analizando.

- **Cargas activas:** Se identifica únicamente la carga puntual de 6 ton. actuando en el punto C.
- **Cargas reactivas:** Están representadas por las reacciones en cada uno de los apoyos; esto es: en A el apoyo móvil que contiene una componente reactiva en la dirección vertical RA. En E, el apoyo fijo, que contiene dos componentes reactivas; una, en la dirección vertical y la otra, en la dirección horizontal, pero, dado que no existe carga externa en ésta dirección, la componente es igual a cero.
- Sistema de fuerzas sobre la estructura: Paralelo en el plano.
- **Número de ecuaciones que contiene el sistema:** Dos; suma de fuerzas verticales y suma de momentos.

- **Número de incógnitas en el sistema:** Dos; la reacción vertical en A, R_A , y la reacción vertical en E: R_E .
- **Condiciones de isostaticidad:** Iguales; esto es: si el número de incógnitas $I = 2$, y el número de ecuaciones $E = 2$, en consecuencia: $I = E$; por lo tanto se trata de una estructura isostática.

Tomando como referencia lo anterior, el diagrama de cuerpo libre de la estructura es:



Paso 1) Cálculo de reacciones: Aplicando las condiciones de equilibrio sobre el diagrama de cuerpo libre:

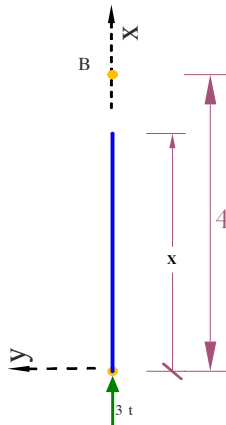
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2(6) - 4(V_E) = 0 \Rightarrow V_E = 3 \quad t$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow -2(6) - 4V_A = 0 \Rightarrow V_A = 3 \quad t \cdot m$$

Paso 2) Análisis de los elementos estructurales.

Análisis del tramo AB: Tomando como referencia el análisis funcional, las funciones de los elementos mecánicos se obtienen aplicando sobre el diagrama de cuerpo libre del tramo, las condiciones de equilibrio del sistema de fuerzas que se le asocia en su conjunto. Para demostrar lo anterior tomemos como referencia la figura que a continuación se muestra:

TRAMO A-B DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < 4$



$$\begin{aligned} \text{Normal } N &\Rightarrow -3 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q = -3 \text{ t} \\ x=4 \Rightarrow Q = -3 \text{ t} \end{cases} \\ \text{Cortante } Q &\Rightarrow 0 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q = 0 \text{ t} \\ x=4 \Rightarrow Q = 0 \text{ t} \end{cases} \\ \text{Momento } M &\Rightarrow 0 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow M = 0 \text{ t} \cdot m \\ x=4 \Rightarrow M = 0 \text{ t} \cdot m \end{cases} \end{aligned}$$

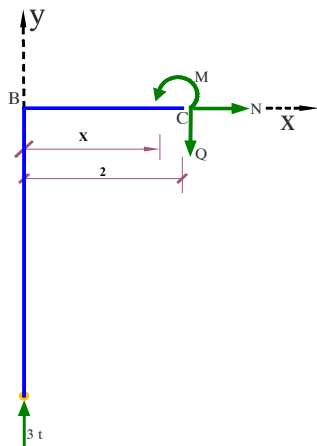
Análisis del tramo BC: Para el efecto, tomaremos como referencia la estructura equilibrada:

El diagrama de cuerpo libre para el tramo BC se muestra a continuación:

Considerando el marco de referencia particular para el tramo BC y con origen en el punto B: el sistema de fuerzas que se integra en el diagrama de cuerpo libre es: *paralelo en la dirección del eje Y incluyendo pares*.

Tomando como referencia el diagrama de cuerpo libre, y aplicando sobre éste las condiciones de equilibrio estático para un sistema de fuerzas paralelo, se obtienen las funciones de los elementos mecánicos que se presentan en el tramo BC, que al sustituir en éstas los parámetros de la distancia X, resulta en consecuencia la magnitud de cada uno de los elementos mecánicos que se presentan en el tramo:

TRAMO B-C DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < 2$



$$\begin{aligned} \text{Normal } N &\Rightarrow 0 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q = 0 \text{ t} \\ x=2 \Rightarrow Q = 0 \text{ t} \end{cases} \\ \text{Cortante } Q &\Rightarrow 3 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q = 3 \text{ t} \\ x=2 \Rightarrow Q = 3 \text{ t} \end{cases} \\ \text{Momento } M &\Rightarrow 3 \cdot x \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow M = 0 \text{ t} \cdot m \\ x=2 \Rightarrow M = 6 \text{ t} \cdot m \end{cases} \end{aligned}$$

Análisis del tramo CD: El diagrama de cuerpo libre para el tramo CD es:

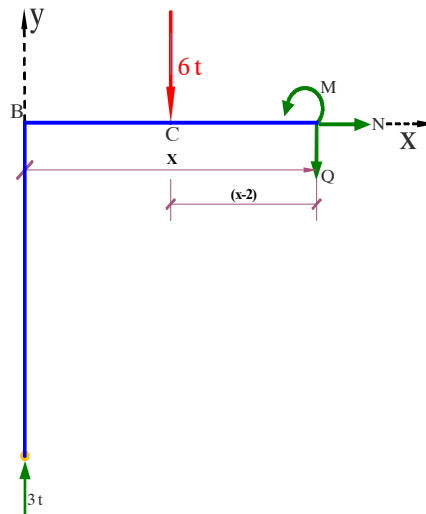
Función de los elementos mecánicos: Si el diagrama de cuerpo libre integra un sistema de fuerzas paralelo en el plano incluyendo pares, las funciones de la fuerza cortante y del momento flexionante se determinan aplicando las condiciones de equilibrio sustituyendo en las funciones respectivas, los parámetros de la distancia X:

TRAMO C-D DOMINIO $\Leftrightarrow 2 < x < 4$

$$\text{Normal } N \Rightarrow 0 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=2 \Rightarrow Q=0 \text{ t} \\ x=4 \Rightarrow Q=0 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Cortante } Q \Rightarrow -3 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=2 \Rightarrow Q=-3 \text{ t} \\ x=4 \Rightarrow Q=-3 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Momento } M \Rightarrow -3 \cdot x + 12 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=2 \Rightarrow M=6 \text{ t} \cdot \text{m} \\ x=4 \Rightarrow M=0 \text{ t} \cdot \text{m} \end{cases}$$



Análisis del tramo DE: Nuevamente tomaremos como referencia el diagrama de la estructura equilibrada, para que a partir de ésta, se defina un diagrama de cuerpo libre del tramo; esto es:

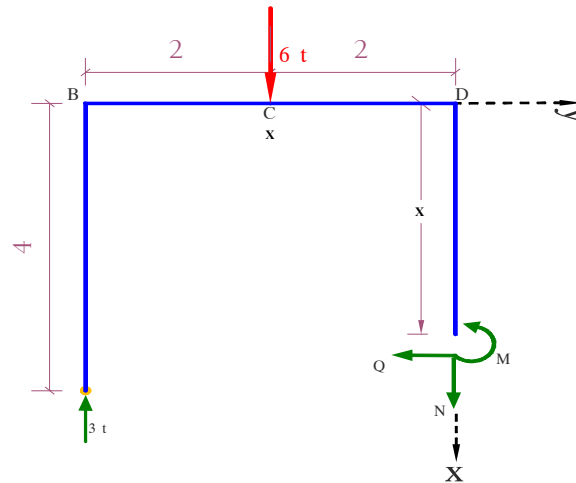
Funciones de los elementos mecánicos: Considerando que el diagrama de cuerpo libre que se obtuvo está integrado por un sistema de fuerzas paralelo en el plano que incluye pares, las funciones de los elementos mecánicos, se obtienen al aplicar las condiciones de equilibrio. Con base en lo anterior y tomando como referencia los parámetros de la distancia X, la magnitud de los elementos mecánicos se determinan al sustituir respectivamente en las funciones la distancia X:

TRAMO D-E DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < 4$

$$\text{Normal } N \Rightarrow 0 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q=0 \text{ t} \\ x=4 \Rightarrow Q=0 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Cortante } Q \Rightarrow 3 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q=3 \text{ t} \\ x=4 \Rightarrow Q=3 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Momento } M \Rightarrow 0 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow M=0 \text{ t} \cdot \text{m} \\ x=4 \Rightarrow M=0 \text{ t} \cdot \text{m} \end{cases}$$



Paso 3) DIAGRAMA DE ESFUERZOS INTERNOS: Para el efecto, se toma como referencia los valores anotados en los análisis de cada tramo. Para tal realizaremos estos diagramas en el pórtico por separado.

Diagrama de variación de la fuerza normal:

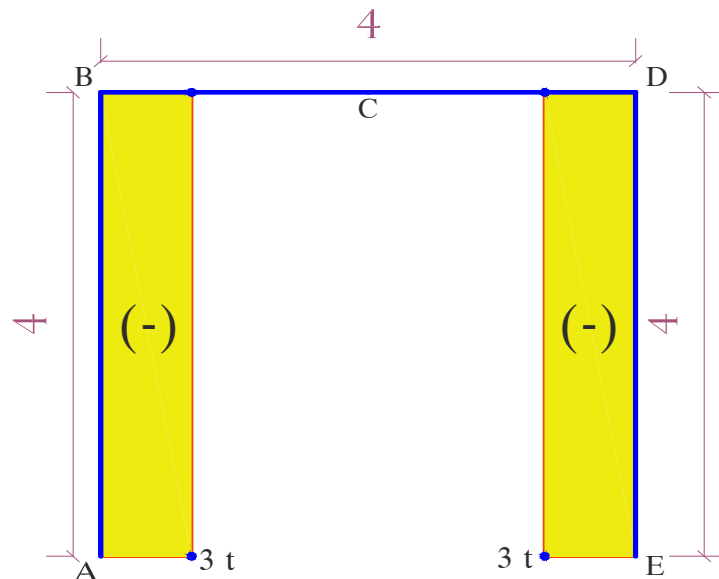


Diagrama de variación de la fuerza cortante:

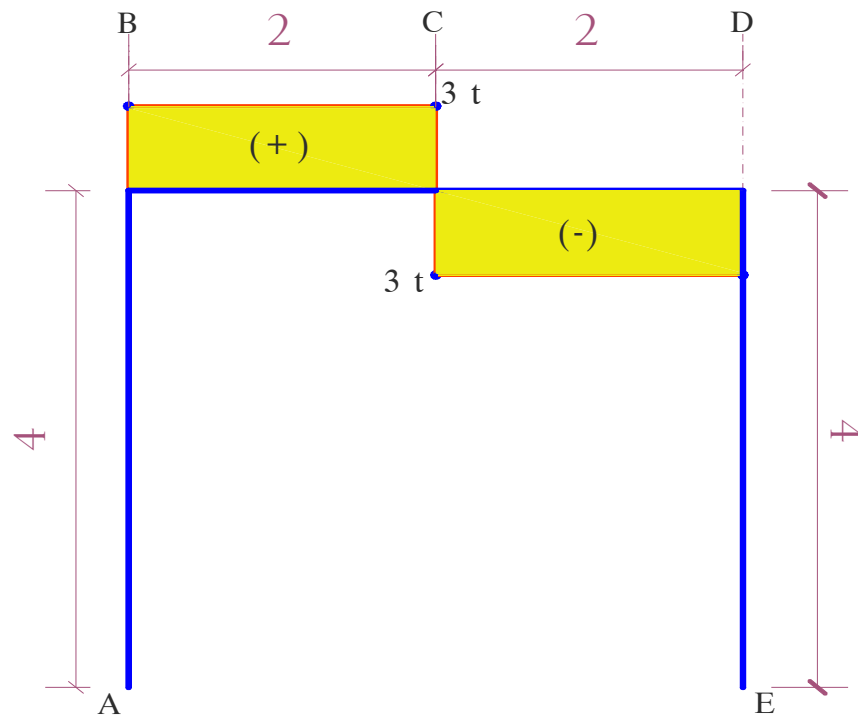
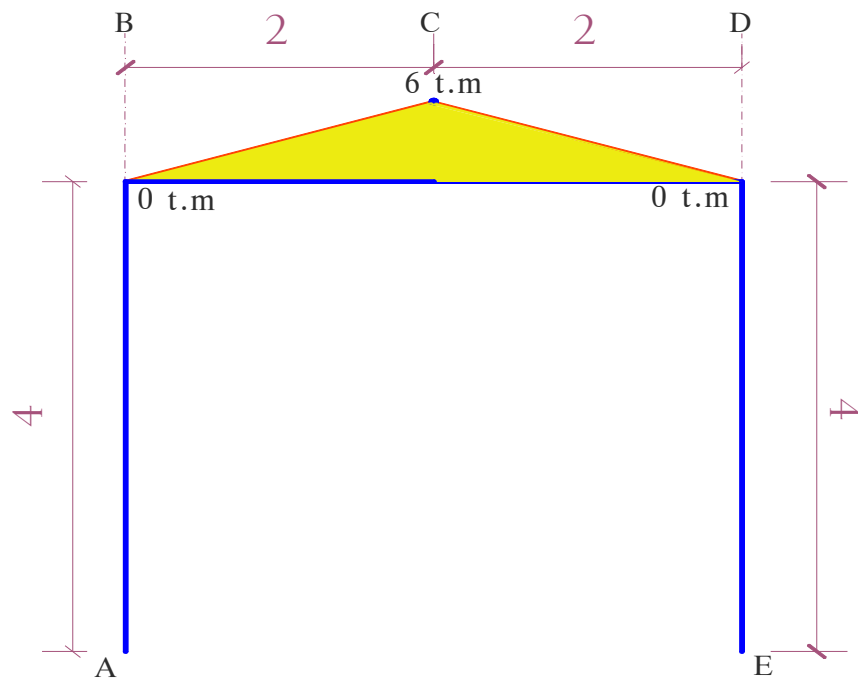
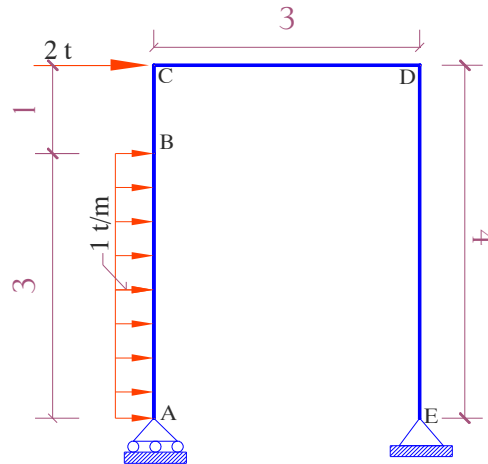


Diagrama de variación del momento flexionante:



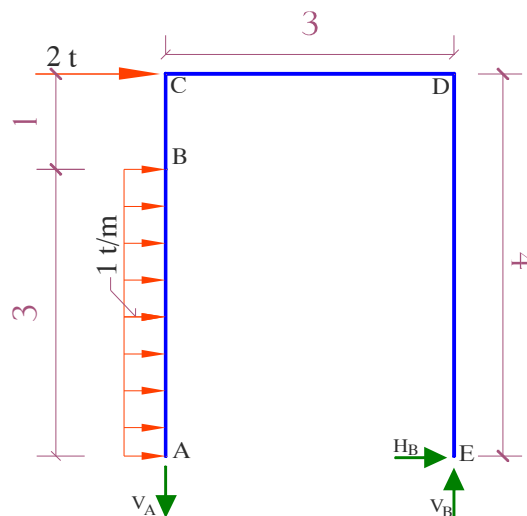
Ejercicio #7

Tomando como referencia el marco que se muestra en la siguiente figura; determinar la variación de los elementos mecánicos que se presentan en la estructura:



Procedimiento de análisis: Aplicaremos el análisis relacional para determinar los elementos mecánicos.

Primero: Se construye un diagrama de cuerpo libre de la estructura, para identificar las cargas activas y las cargas reactivas, de tal forma que nos permita identificar el sistema de fuerzas en su conjunto; el número de ecuaciones de equilibrio que se le asocie; el número de incógnitas que contenga el sistema en general; las condiciones de isostaticidad para verificar si la estructura se puede analizar como isostática; esto es:



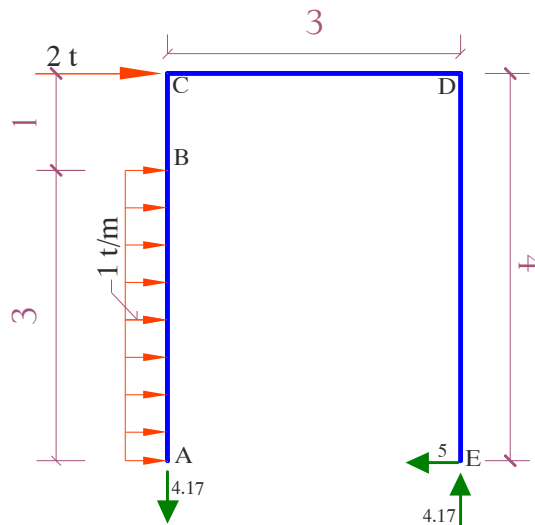
Segundo: Cálculo de reacciones; se obtienen aplicando sobre el diagrama de cuerpo libre las condiciones de equilibrio:

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_E + 2 + 3 \Rightarrow H_E = 5 \quad t$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 1.5(3) + 2(4) - 3(V_E) = 0 \Rightarrow V_E = 4.17 \quad t$$

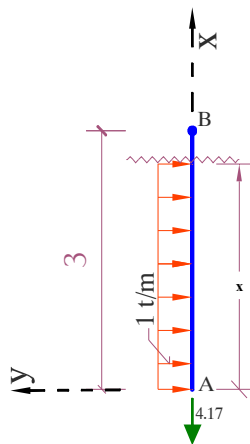
$$\sum M_E = 0 \Rightarrow 1.5(3) + 2(4) - 3(V_A) \Rightarrow V_A = 4.17 \quad t$$

Tercero: Con el valor de las reacciones, se define la estructura equilibrada tal como se muestra en la siguiente figura:



Cuarto: Aplicando el análisis relacional, y tomando como referencia la estructura equilibrada, se determinarán los diagramas de variación de la fuerza normal, fuerza cortante y momento flexionante:

TRAMO A-B DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < 3$



$$\text{Normal } N \Rightarrow 4.17 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q=4.17 \quad t \\ x=3 \Rightarrow Q=4.17 \quad t \end{cases}$$

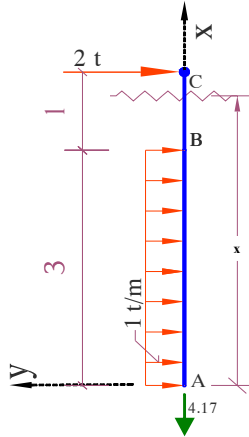
$$\text{Cortante } Q \Rightarrow -1 \cdot x \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q=0 \quad t \\ x=3 \Rightarrow Q=-3 \quad t \end{cases}$$

$$\text{Momento } M \Rightarrow \frac{x}{2} \cdot x \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow M=0 \quad t \cdot m \\ x=3 \Rightarrow M=-4.5 \quad t \cdot m \end{cases}$$

Análisis del tramo BC: Para el efecto, tomaremos como referencia la estructura equilibrada:

El diagrama de cuerpo libre para el tramo BC se muestra a continuación:

TRAMO B-C DOMINIO $\Leftrightarrow 3 < x < 4$



$$\text{Normal } N \Rightarrow 4.17 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=3 \Rightarrow Q=4.17 \text{ t} \\ x=4 \Rightarrow Q=4.17 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Cortante } Q \Rightarrow -3 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=3 \Rightarrow Q=-3 \text{ t} \\ x=4 \Rightarrow Q=-3 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Momento } M \Rightarrow 3 \cdot (x - 1.5) \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=3 \Rightarrow M=-4.5 \text{ t} \cdot \text{m} \\ x=4 \Rightarrow M=-7.5 \text{ t} \cdot \text{m} \end{cases}$$

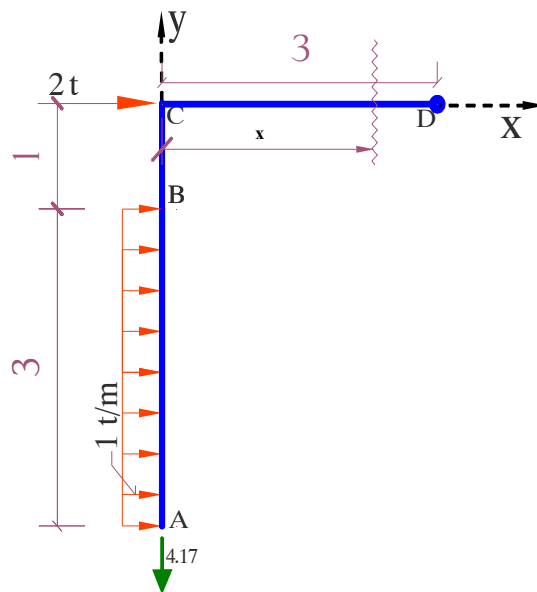
Análisis del tramo CD: El diagrama de cuerpo libre para el tramo CD es:

TRAMO C-D DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < 3$

$$\text{Normal } N \Rightarrow -5 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q=-5 \text{ t} \\ x=3 \Rightarrow Q=-5 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Cortante } Q \Rightarrow -4.17 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q=-4.17 \text{ t} \\ x=3 \Rightarrow Q=-4.17 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Momento } M \Rightarrow -4.17 \cdot x - 2.5(3) \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow M=-7.5 \text{ t} \cdot \text{m} \\ x=3 \Rightarrow M=-20 \text{ t} \cdot \text{m} \end{cases}$$



Análisis del tramo DE:

TRAMO D-E DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < 4$

$$\text{Normal } N \Rightarrow 0 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q=0 \text{ t} \\ x=4 \Rightarrow Q=0 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Cortante } Q \Rightarrow 3 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q=3 \text{ t} \\ x=4 \Rightarrow Q=3 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Momento } M \Rightarrow 0 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow M=0 \text{ t} \cdot \text{m} \\ x=4 \Rightarrow M=0 \text{ t} \cdot \text{m} \end{cases}$$

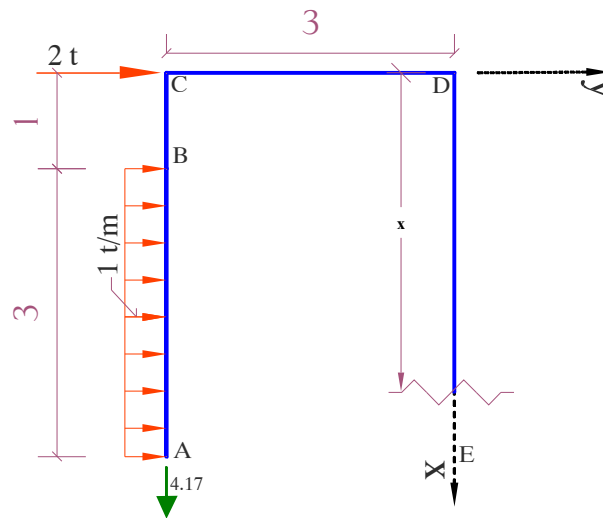


DIAGRAMA DE ESFUERZOS INTERNOS: Para el efecto, se toma como referencia los valores anotados en los análisis de cada tramo. Para tal realizaremos estos diagramas en el pórtico por separado. Ver las siguientes figuras.

Diagrama de variación de la fuerza normal:

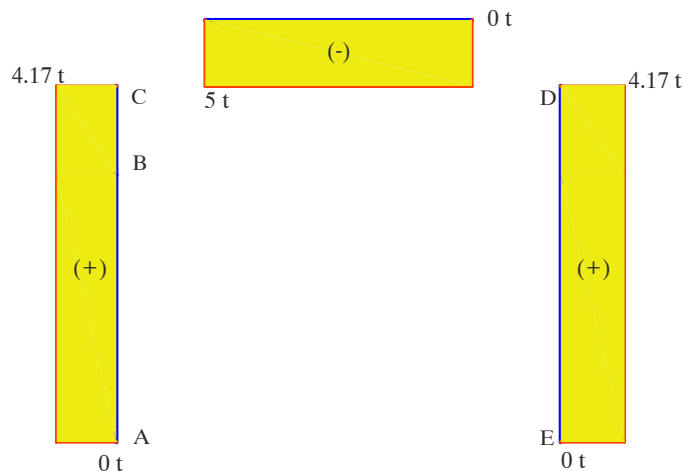


Diagrama de variación de la fuerza cortante:

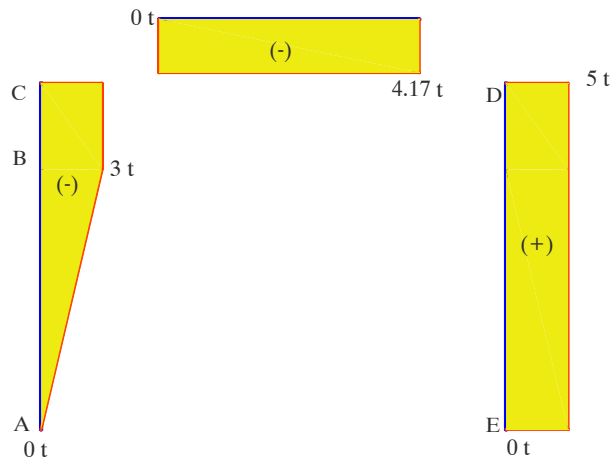
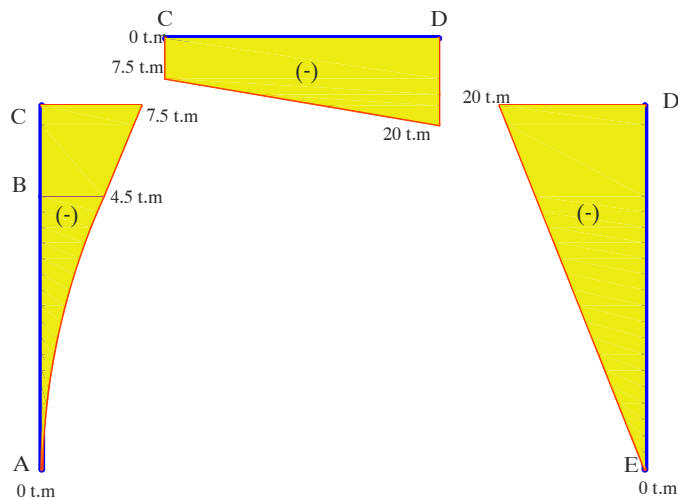


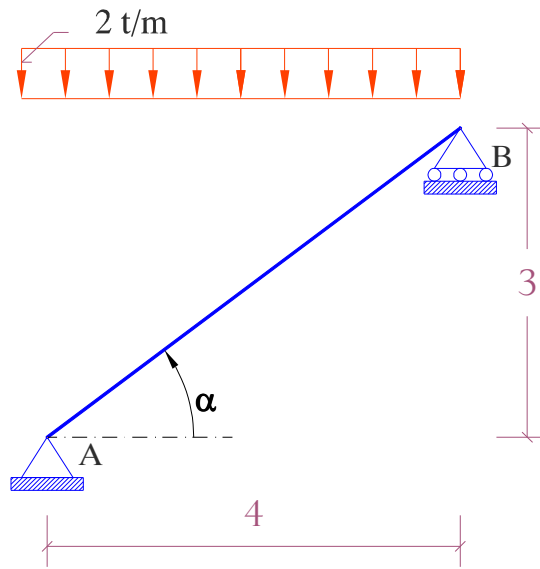
Diagrama de variación del momento flexionante:



Según el procedimiento ya mencionado, es conveniente escoger un punto intermedio de concentración del estudio. En este punto se realizara el control respectivo, ósea la verificación de todos los elementos estructurales (Normal, Cortante, Momento).

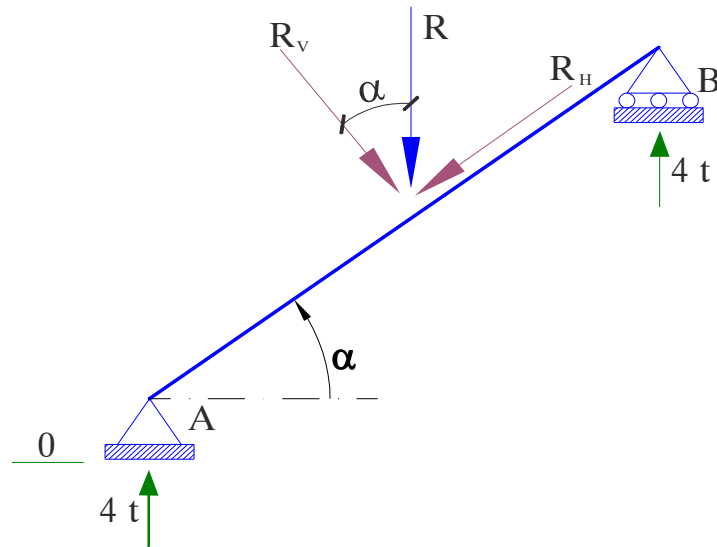
Ejercicio #8

Tomando como referencia el marco que se muestra en la siguiente figura; determinar la variación de los elementos mecánicos que se presentan en la estructura:



$$G = 3 - 3 = 0 ; \text{ Estructura ISOSTATICA}$$

Paso 1) Cálculo de reacciones de apoyo.



$$R = 2 \cdot 4 \Rightarrow R = 8 \text{ t}$$

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_B = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow (2)(8) - 4(V_B) = 0 \Rightarrow V_B = 4 \text{ t}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -4(V_A) - 8(2) = 0 \Rightarrow V_A = 0.8 \text{ t}$$

$$\text{CONTROL } \sum V = 0 \Rightarrow 0.8 + 0.4 - 1.2 = 0$$

Para realizar el análisis de la barra, distribuiremos la carga distribuida en dos direcciones, en la dirección de la barra y perpendicular a ella, para así determinar los esfuerzos internos.

$$\text{Barra L} \Rightarrow L = \sqrt{3^2 + 4^2} \Rightarrow L = 5 \text{ m}$$

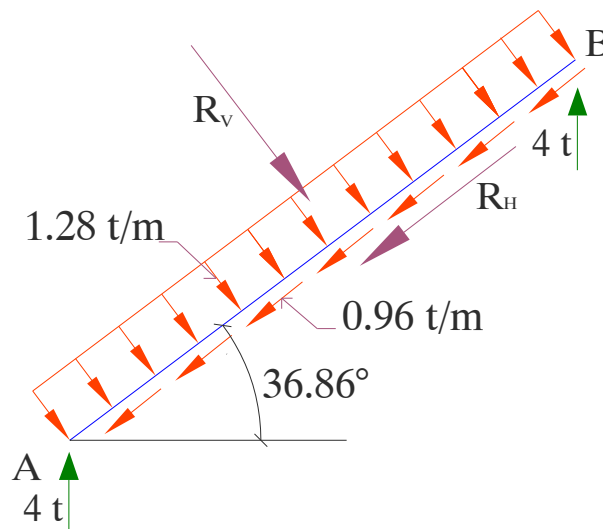
$$\tan \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = 36.86^\circ$$

$$R_V = 8 \cdot \cos \alpha = 6.4 \text{ t} ; R_H = 8 \cdot \sin \alpha = 4.8 \text{ t}$$

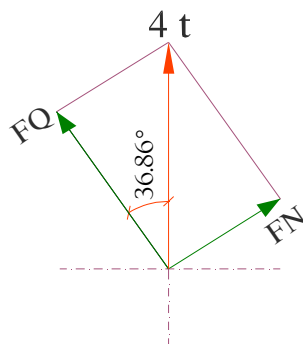
$$R_H = 5 * q_H \Rightarrow q_H = \frac{R_H}{5} = \frac{4.8}{5} \Rightarrow q_H = 0.96 \text{ t/m}$$

$$R_V = 5 * q_V \Rightarrow q_V = \frac{R_V}{5} = \frac{6.4}{5} \Rightarrow q_V = 1.28 \text{ t/m}$$

Paso 2) Obtención de las ecuaciones de esfuerzos internos.



Descomponemos también las reacciones de apoyo en dirección de la viga.



$$N = 4 * 0.6 = 2.4 \text{ t}$$

$$Q = 4 * 0.8 = 3.2 \text{ t}$$

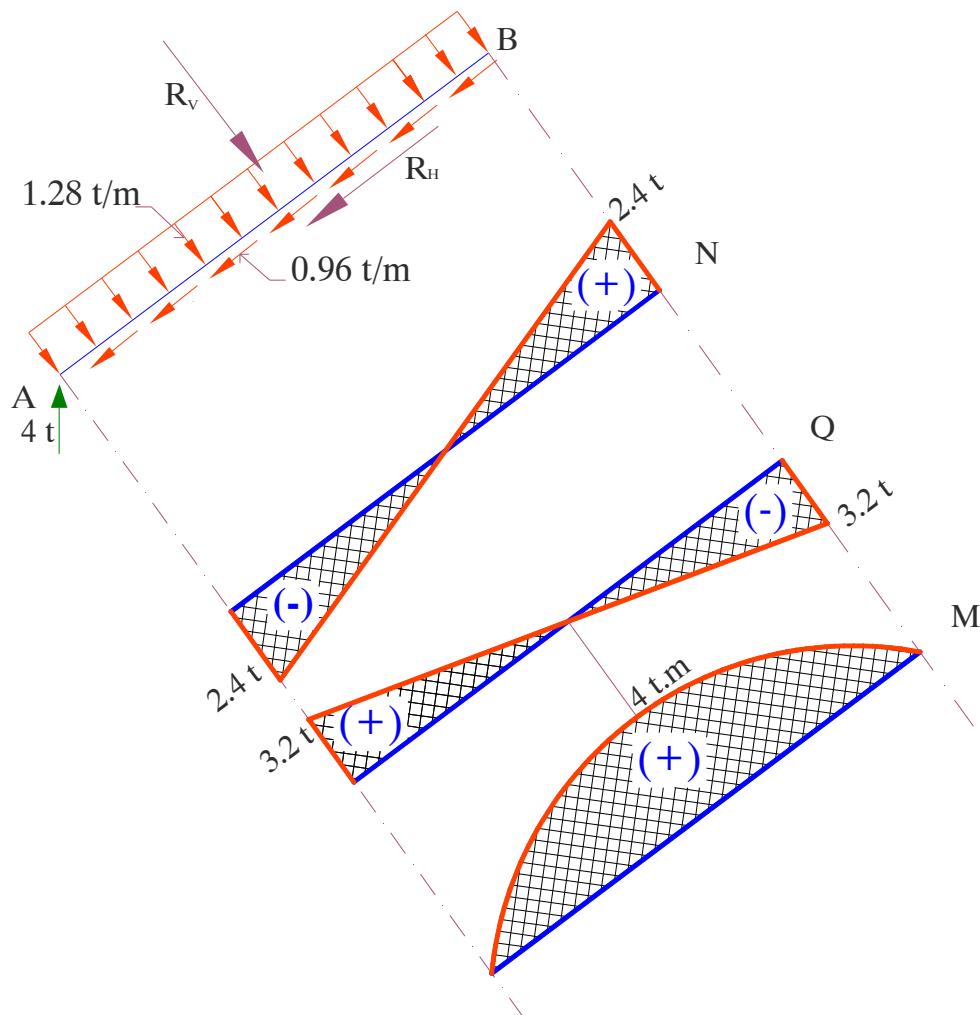
TRAMO A-B DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < 5$

$$\text{Normal } N \Rightarrow -2.4 + 0.96 \cdot x \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow N = -2.4 \text{ t} \\ x=5 \Rightarrow N = +2.4 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Cortante } Q \Rightarrow 3.2 - 1.28 \cdot x \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q = 3.2 \text{ t} \\ x=5 \Rightarrow Q = -3.2 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Momento } M \Rightarrow 3.2 \cdot x - \frac{1.28}{2} \cdot x^2 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow M = 0 \text{ t} \cdot \text{m} \\ x=5 \Rightarrow M = 0 \text{ t} \cdot \text{m} \end{cases}$$

Entonces el **DIAGRAMA DE ESFUERZOS INTERNOS** para el tramo A a B será:

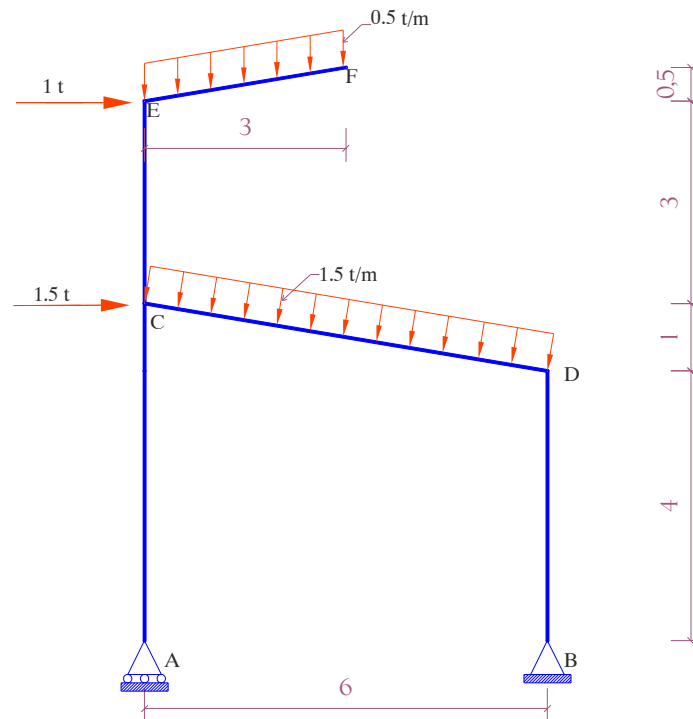


Presentamos a continuación un resumen de los valores extremos existentes en la barra.

$$N \Rightarrow \begin{matrix} \text{Max} = 2.4 \text{ t} \\ \text{Min} = -2.4 \text{ t} \end{matrix} ; \quad Q \Rightarrow \begin{matrix} \text{Max} = 3.2 \text{ t} \\ \text{Min} = -3.2 \text{ t} \end{matrix} ; \quad M \Rightarrow \begin{matrix} \text{Max} = 4 \text{ t} \cdot \text{m} \\ \text{Min} = 0 \text{ t} \cdot \text{m} \end{matrix}$$

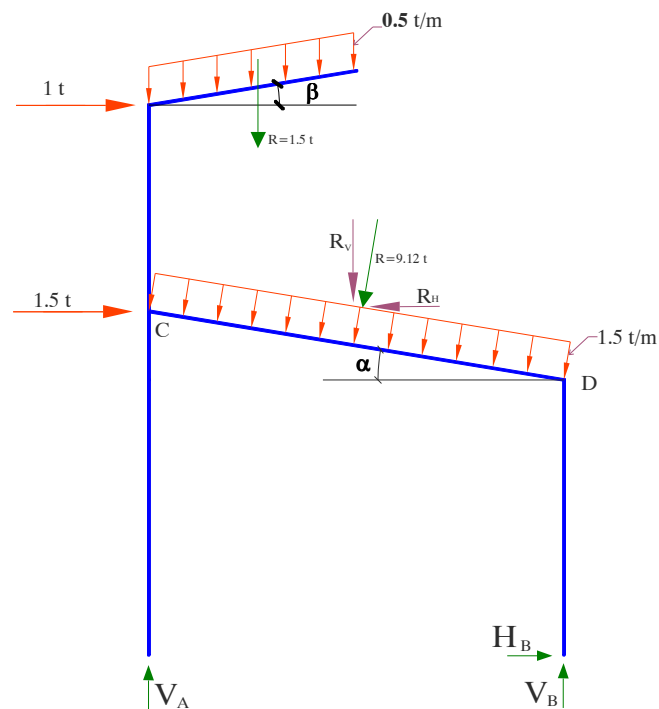
Ejercicio # 9

Se pide analizar la estructura.



$$G = 4 - 3 - 1 = 0 ; \text{ Estructura ISOSTATICA}$$

Paso 1) Cálculo de reacciones de apoyo.



$$\tan \alpha = \frac{1}{6} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = 0.16 \\ \cos \alpha = 0.99 \end{cases} \quad \tan \beta = \frac{0.5}{3} \Rightarrow \alpha = \beta$$

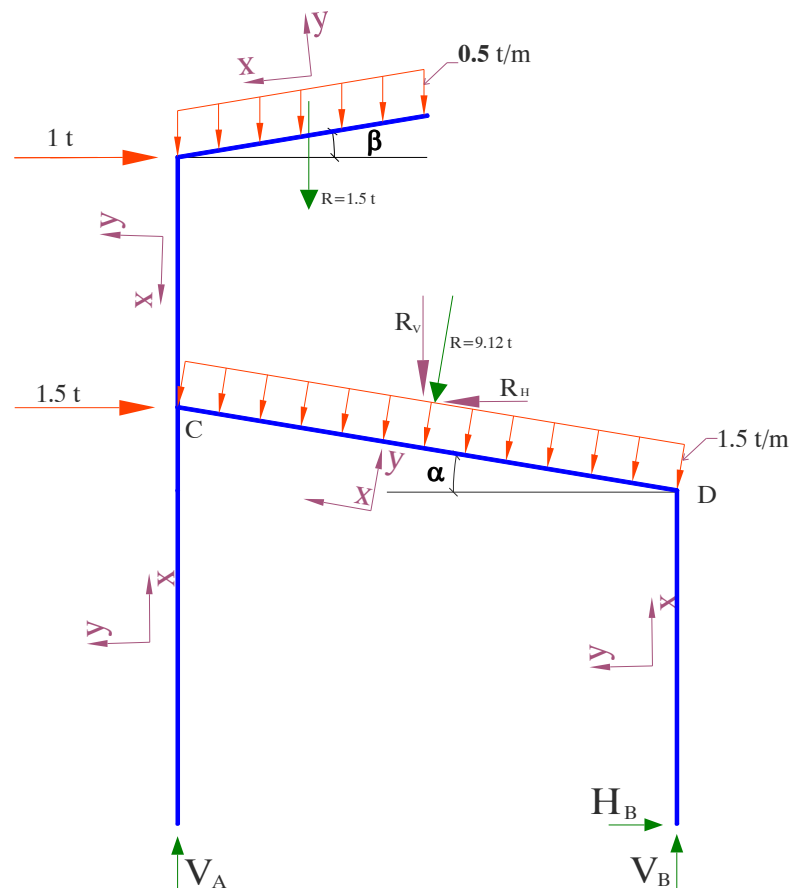
$$\sum H = 0 \Rightarrow 1 + 1.5 - 9.12(0.16) + H_B = 0 \Rightarrow H_B = -1.04 \quad t$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 1.5(5) + 1(8) + 1.5(1.5) - 9.12(0.16)(4.5) + 9.12(0.99)(3) - 6 \cdot V_B = 0 \Rightarrow V_B = 6.38 \quad t$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -9.12(0.16)(4.5) - 9.12(0.99)(3) - 1.5(4.5) + 1(8) + 1.5(5) + 6V_A = 0 \Rightarrow V_A = 4.15 \quad t$$

$$\text{CONTROL } \sum V = 0 \Rightarrow 6.38 - 1.5 - 9.12 \cdot 0.99 + 4.15 = 0$$

Paso 2) Obtención de las ecuaciones de esfuerzos internos



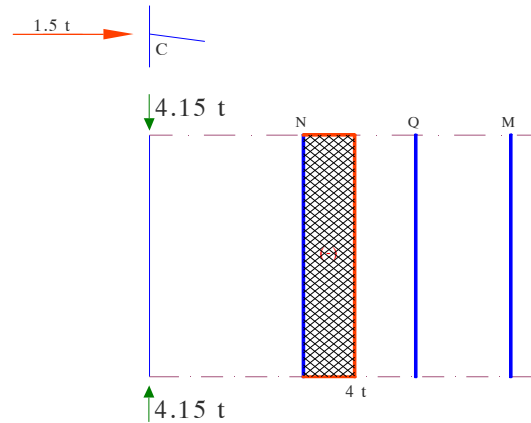
Se realiza un control final en el nudo C para verificación.

TRAMO A-C DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < 2.5$

Normal $N = -4.15 \quad t$

Cortante $Q = 0 \quad t$

Momento $M = 0 \quad t \cdot m$

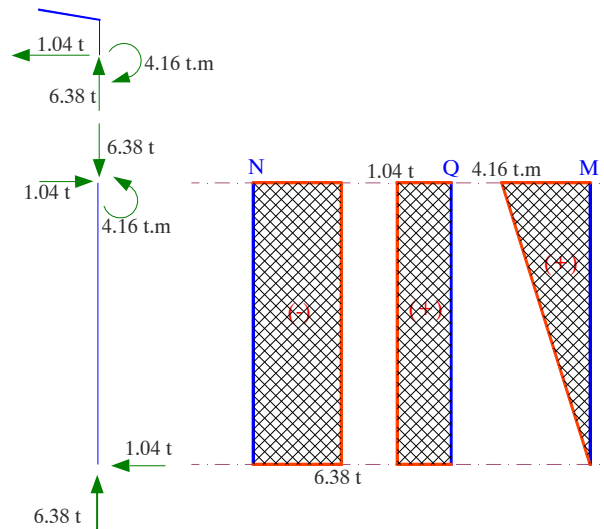


TRAMO B-D DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < 4$

Normal $N \Rightarrow -6.38 \text{ t}$

Cortante $Q \Rightarrow 1.04 \text{ t}$

Momento $M \Rightarrow 1.04 \cdot x \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow M=0 \text{ t} \cdot \text{m} \\ x=4 \Rightarrow M=4.16 \text{ t} \cdot \text{m} \end{cases}$

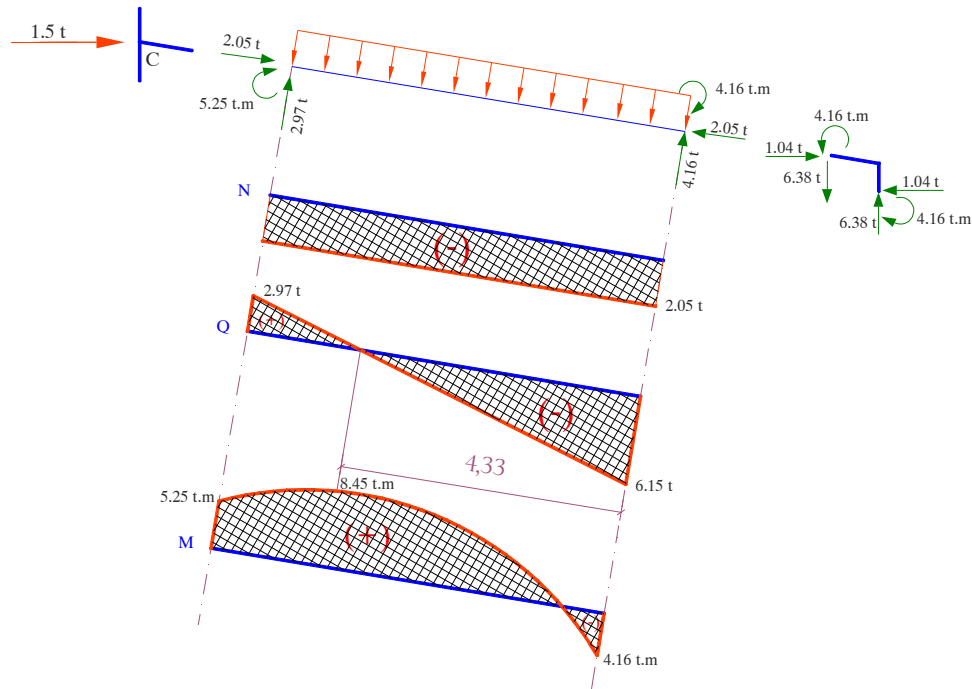


TRAMO D-C DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < 6.08$

Normal $N \Rightarrow -2.05 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow N=-2.05 \text{ t} \\ x=6.08 \Rightarrow N=-2.05 \text{ t} \end{cases}$

Cortante $Q \Rightarrow -6.15 + 1.5 \cdot x \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q=-6.15 \text{ t} \\ x=6.08 \Rightarrow Q=2.97 \text{ t} \end{cases}$

Momento $M \Rightarrow -4.16 + 6.15 \cdot x - 1.5 \cdot \frac{x^2}{2} \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow M=-4.16 \text{ t} \cdot \text{m} \\ x=6.08 \Rightarrow M=5.25 \text{ t} \cdot \text{m} \end{cases}$

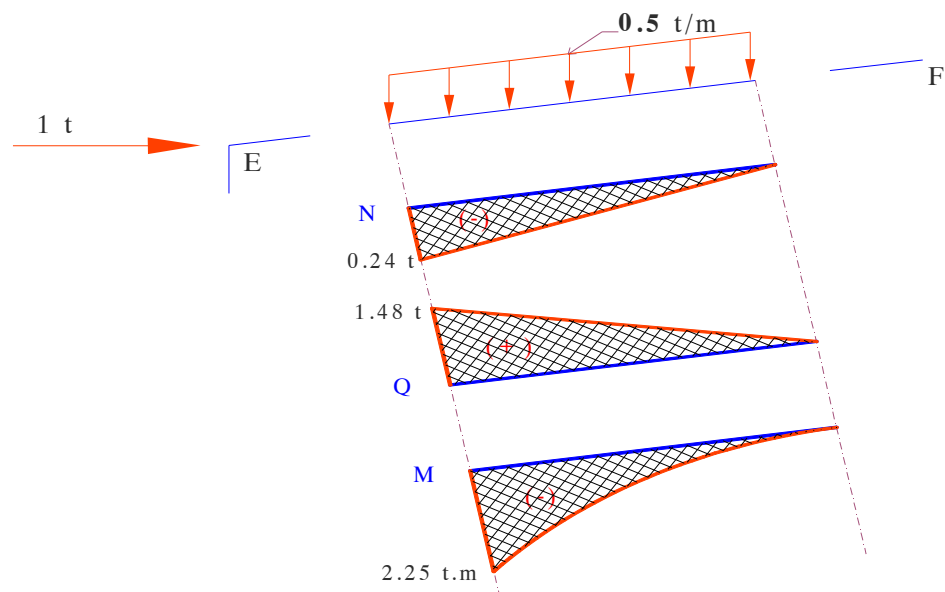


TRAMO F-E DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < 3$

$$\text{Normal } N \Rightarrow -0.5 \cdot x(\text{sen}\beta) \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow N=0 \text{ t} \\ x=3 \Rightarrow N=-0.24 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Cortante } Q \Rightarrow 0.5 \cdot x \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q=0 \text{ t} \\ x=3 \Rightarrow Q=1.48 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Momento } M \Rightarrow -0.5 \cdot \frac{x^2}{2} \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow M=0 \text{ t} \cdot \text{m} \\ x=3 \Rightarrow M=-2.25 \text{ t} \cdot \text{m} \end{cases}$$

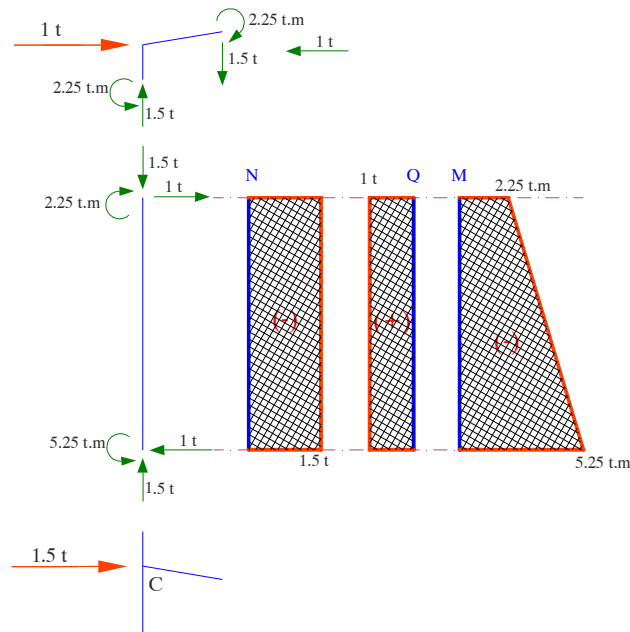


TRAMO E-C DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < 3$

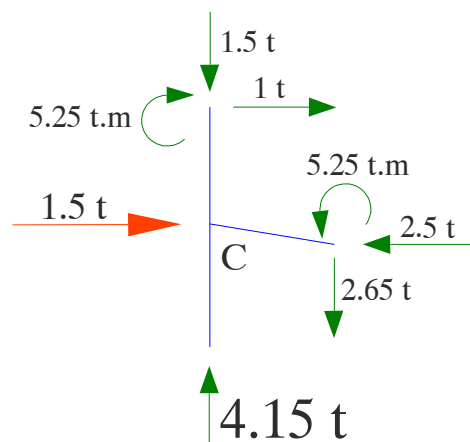
Normal $N \Rightarrow -1.5 \text{ t}$

Cortante $Q \Rightarrow 1 \text{ t}$

Momento $M \Rightarrow -2.25 - 1 \cdot x \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow M = -2.25 \text{ t} \cdot \text{m} \\ x=3 \Rightarrow M = -5.25 \text{ t} \cdot \text{m} \end{cases}$



Paso 3) Verificación en el nudo de control, nudo C:

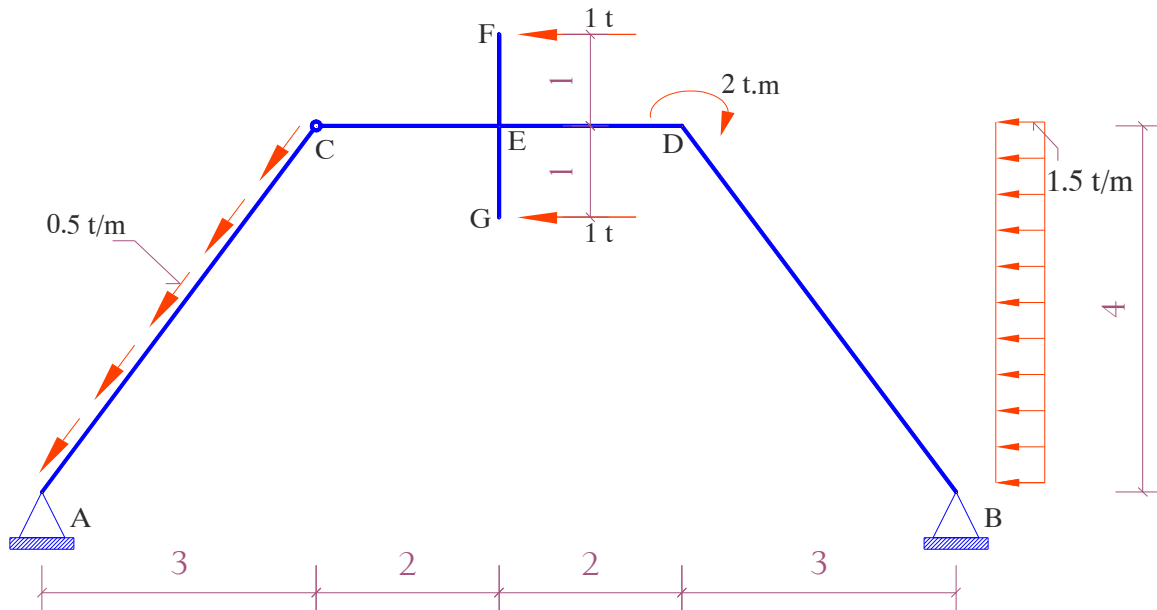


$$\sum H = 0 ; \sum V = 0 ; \sum M = 0$$

LA ESTRUCTURA ESTA EN EQUILIBRIO.

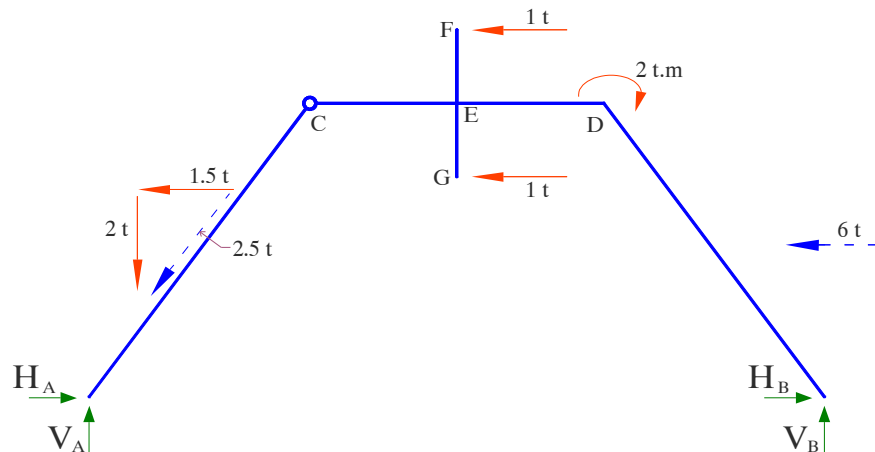
Ejercicio # 10

Se pide analizar la estructura.



$$G = 4 - 3 - 1 = 0 ; \text{ Estructura ISOSTATICA}$$

Paso 1) Cálculo de reacciones de apoyo.



$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A + H_B - 1.5 - 6 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow H_B = -H_A - 9.5 \quad t$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -1(5) - 1(3) + 2 - 6(2) - 10 \cdot V_B = 0 \Rightarrow V_B = -1.8 \quad t$$

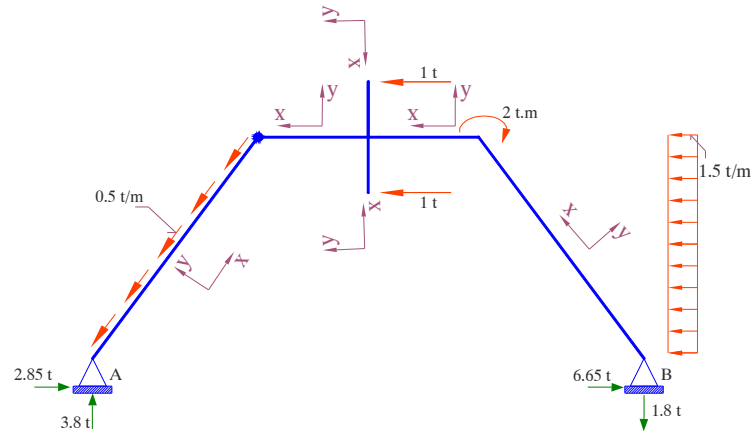
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 10(V_A) - 2.5(8) - 1(5) - 1(3) - 6(2) + 2 = 0 \Rightarrow V_A = 3.8 \quad t$$

$$\sum M_C^{IzQ} = 0 \Rightarrow 3 \cdot V_A - 4 \cdot H_A = 0 \Rightarrow H_A = 2.85 \quad t$$

$$\Rightarrow H_B = 6.65 \quad t$$

$$\text{CONTROL } \sum V = 0 \Rightarrow 3.8 - 2 - 1.8 = 0$$

Paso 2) Obtención de las ecuaciones de esfuerzos internos



Como ya hemos mencionado realizaremos un análisis por secciones, realizando un control final en un nudo, (nudo C) para verificación.

TRAMO A-C Se realizarán 2 secciones.

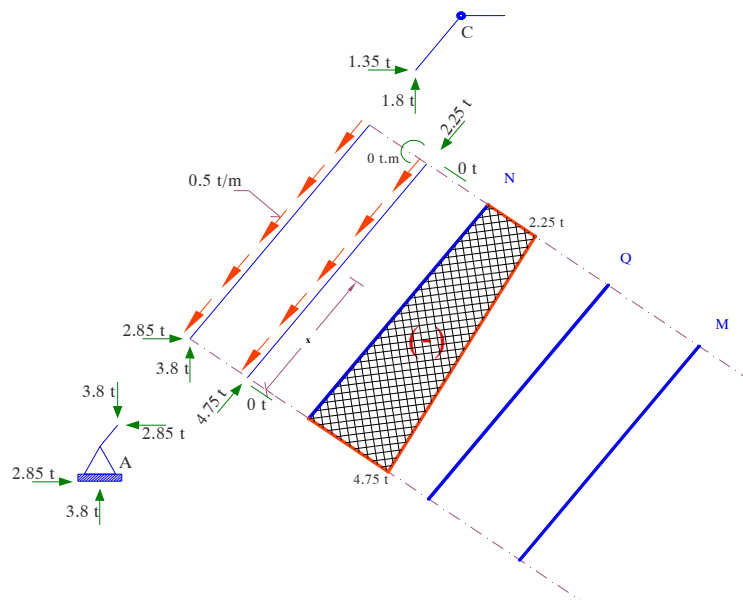
DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < 5$

$$\text{Normal } N \Rightarrow -4.75 + 0.5 \cdot x \Rightarrow \text{Para } \begin{cases} x=0 \Rightarrow N = -4.75 \text{ t} \\ x=5 \Rightarrow N = -2.25 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Cortante } Q \Rightarrow 0 \Rightarrow \text{Para } \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q = 0 \text{ t} \\ x=5 \Rightarrow Q = 0 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Momento } M \Rightarrow 0 \Rightarrow \text{Para } \begin{cases} x=0 \Rightarrow M = 0 \text{ t} \cdot \text{m} \\ x=5 \Rightarrow M = 0 \text{ t} \cdot \text{m} \end{cases}$$

Entonces el **DIAGRAMA DE ESFUERZOS INTERNOS** para el tramo A a C será:



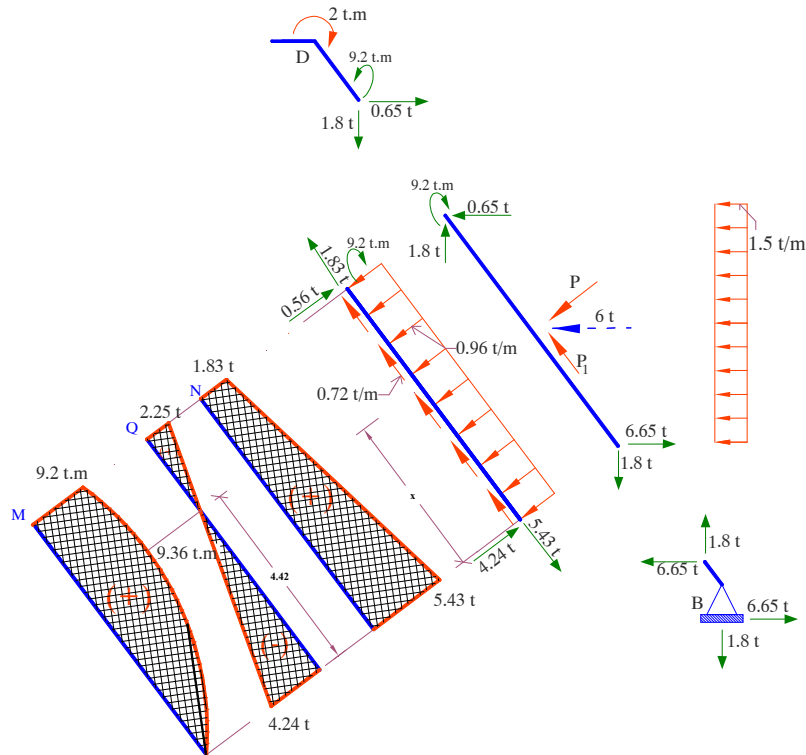
TRAMO B-D Se realizaran 2 secciones.

$$P = 6 \sin \alpha = 6(0.8) = 4.8 \quad t$$

$$P_1 = 6 \cos \alpha = 6(0.6) = 3.6 \quad t$$

$$q = \frac{4.8}{5} = 0.96 \quad t/m$$

$$q_1 = \frac{3.6}{5} = 0.72 \quad t/m$$



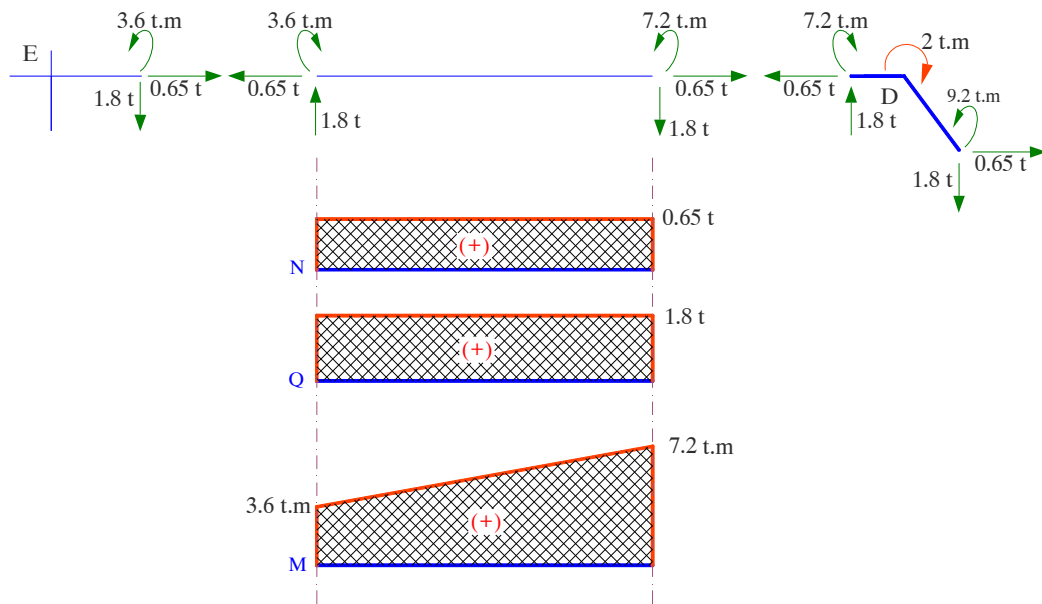
DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < 5$

$$\text{Normal } N \Rightarrow 5.43 - 0.72 \cdot x \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow N = 5.43 \quad t \\ x=5 \Rightarrow N = 1.83 \quad t \end{cases}$$

$$\text{Cortante } Q \Rightarrow -4.24 + 0.96 \cdot x \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q = -4.24 \quad t \\ x=5 \Rightarrow Q = 0.56 \quad t \end{cases}$$

$$\text{Momento } M \Rightarrow 4.24 - 0.96 \frac{x^2}{2} \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow M = 0 \quad t \cdot m \\ x=5 \Rightarrow M = 9.2 \quad t \cdot m \end{cases}$$

TRAMO D-E Se realizaran 2 secciones.



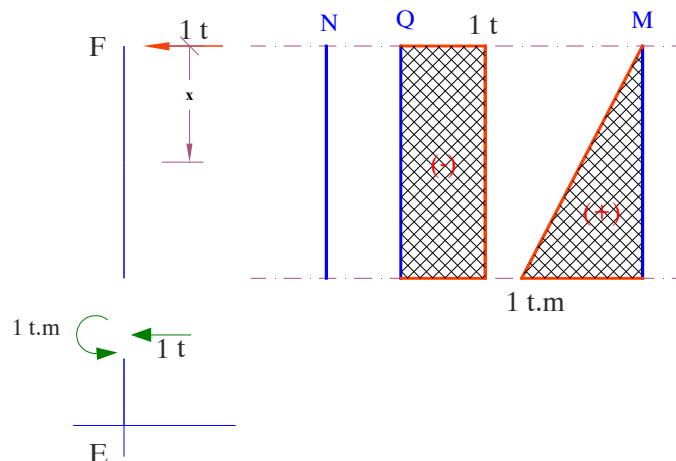
DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < 2$

Normal N $\Rightarrow -0.65$ t

Cortante Q \Rightarrow 1.8 t

$$\text{Momento } M \Rightarrow -1.8 + 7.2 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow M = 7.2 \text{ t} \cdot m \\ x=2 \Rightarrow M = 3.6 \text{ t} \cdot m \end{cases}$$

TRAMO F-E Se realizaran 2 secciones.



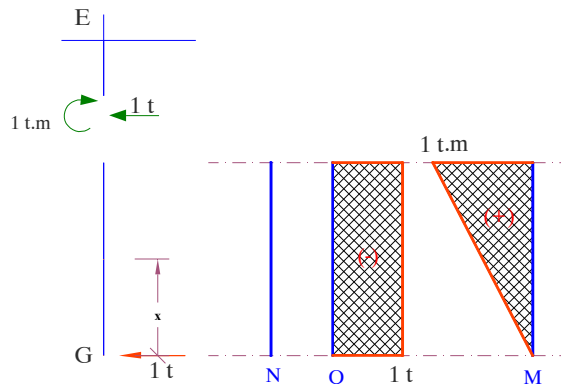
DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < 1$

$$Normal \quad N \Rightarrow \quad 0 \Rightarrow Para \begin{cases} x=0 \Rightarrow & N=0 \quad t \\ x=1 \Rightarrow & N=0 \quad t \end{cases}$$

$$\text{Cortante } Q \Rightarrow -1 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q = -1 \text{ t} \\ x=1 \Rightarrow Q = -1 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Momento } M \Rightarrow 1x \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow M = 0 \text{ t} \cdot \text{m} \\ x=1 \Rightarrow M = 1 \text{ t} \cdot \text{m} \end{cases}$$

TRAMO G-E Se realizaran 2 secciones.



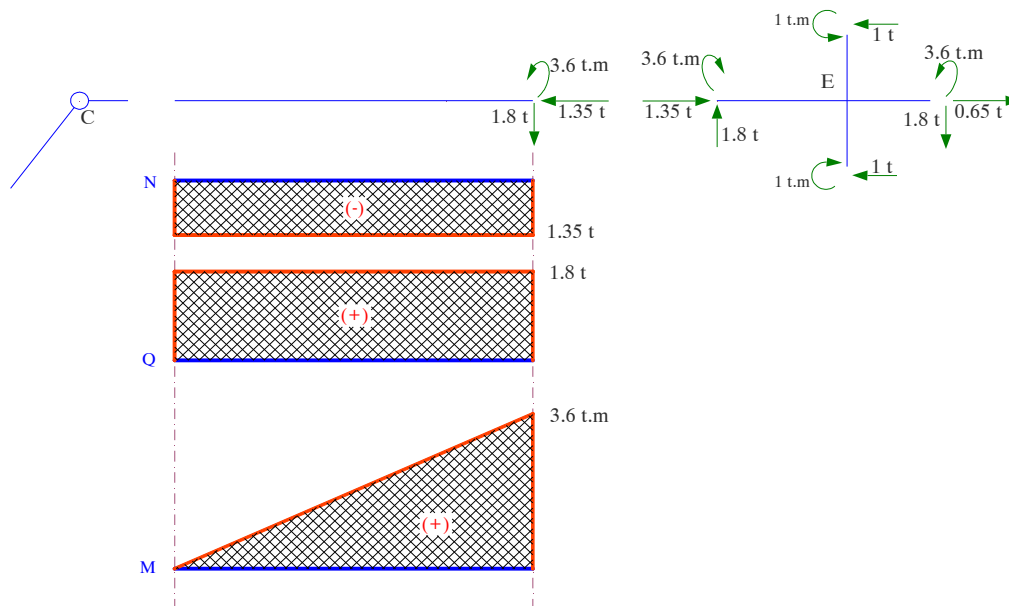
DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < 1$

$$\text{Normal } N \Rightarrow 0 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow N = 0 \text{ t} \\ x=1 \Rightarrow N = 0 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Cortante } Q \Rightarrow 1 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q = 1 \text{ t} \\ x=1 \Rightarrow Q = 1 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Momento } M \Rightarrow 1x \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow M = 0 \text{ t} \cdot \text{m} \\ x=1 \Rightarrow M = 1 \text{ t} \cdot \text{m} \end{cases}$$

TRAMO E-C Se realizaran 2 secciones.



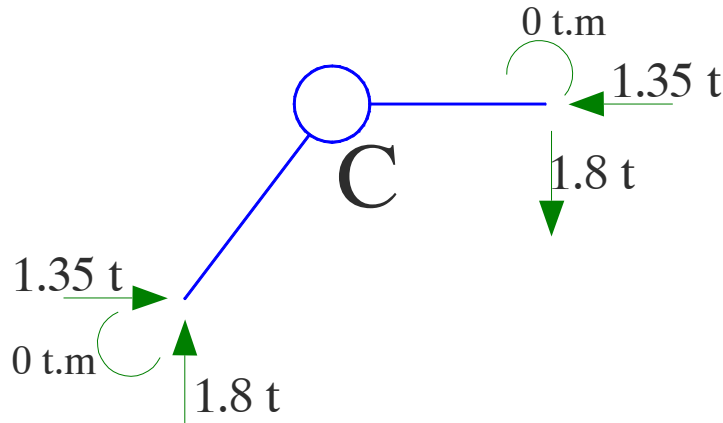
DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < 2$

Normal $N \Rightarrow -1.35 \text{ t}$

Cortante $Q \Rightarrow 1.8 \text{ t}$

Momento $M \Rightarrow -1.8 \cdot x + 3.6 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x = 0 \Rightarrow M = 3.6 \text{ t} \cdot \text{m} \\ x = 2 \Rightarrow M = 0 \text{ t} \cdot \text{m} \end{cases}$

Paso 3) Verificación en el nudo de control, nudo C:



$$\sum H = 0 ; \sum V = 0 ; \sum M = 0$$

EL NUDO SE ENCUENTRA EN EQUILIBRIO

Luego del análisis realizado, podemos afirmar que **la ESTRUCTURA ESTA EN EQUILIBRIO**.

Para tener una concepción grafica de la aplicación pórticos en la vida estructural ver anexos del capítulo 3

3.9 ANÁLISIS DE ARCOS

3.9.1 PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

En éste apartado aplicaremos el procedimiento de análisis para trazar los diagramas de variación correspondiente, contemplando para ello los procedimientos de análisis ya mencionados en los anteriores apartados; la deducción de las funciones de los elementos mecánicos se realizara bajo el cumplimiento de los siguientes pasos:

PRIMERO.- A partir de la estructura planteada, se construye un diagrama de cuerpo libre para identificar:

- **El sistema de fuerzas.-** Dado que se analizan estructuras planas, el sistema de fuerzas en su conjunto podrá ser un sistema de fuerzas paralelo o un sistema de fuerzas generales en el plano.
- **Las condiciones de isostaticidad.-** Identificado el número de las incógnitas y el número de las ecuaciones de equilibrio estático que contiene el sistema en su conjunto, se tendrán elementos de análisis para abordar estructuras cuando las condiciones de isostaticidad sean iguales; esto es: $I = E$.
- **El tipo de estructura.-** Con el resultado anterior, estaremos en condiciones para abordar el análisis de una estructura que se define como *Isostática*.

SEGUNDO.- Aplicando las condiciones de equilibrio sobre el diagrama de cuerpo libre, se determinan las reacciones para encontrar el equilibrio externo.

TERCERO.- Analizando la estructura de izquierda a derecha o viceversa según sea el caso se identifican los tramos que presenten cambios de forma en la carga externa, para que, sobre cada uno de ellos, se construya un diagrama de cuerpo libre indicando la acción de las cargas externas (que actúan sobre la porción que se analice) las que se habrán de equilibrar con un resultante interno, identificando en éste, las componentes que definen a los elementos mecánicos que actúan en el tramo respectivo.

CUARTO.- Aplicando las condiciones del equilibrio estático se deducen las funciones de los elementos mecánicos que se presentan en cada tramo, y al sustituir en éstas los parámetros de variación de la distancia angular " ϕ ", previa descomposición de los elementos de la carga externa obteniendo las magnitudes respectivas.

QUINTO.- Con el resultado del punto anterior se procederá a trazar el diagrama de variación para cada elemento mecánico considerando:

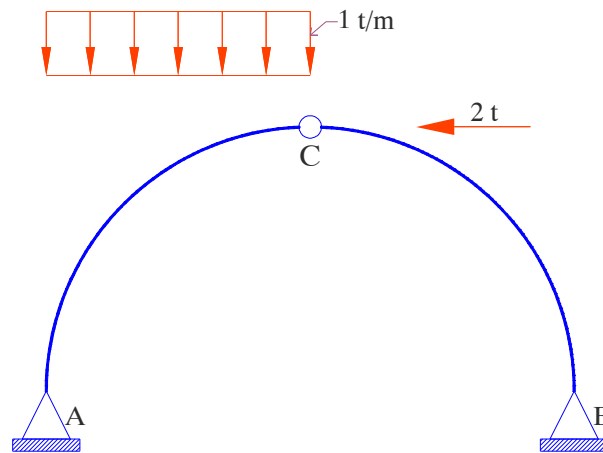
- **Línea base** de la fuerza normal, fuerza cortante o momento flexionante: A partir de un marco de referencia, mismo que será de forma del arco en análisis (circular o parabólico) por el cual se traza la línea base, sobre la que se indicarán los parámetros de variación de la distancia angular " ϕ "; que se relacionarán sobre la línea base, en el que se localizarán

las magnitudes de los elementos mecánicos respectivos (normal, cortante o momento flexionante).

- **Trazo de la variación de los elementos mecánicos.-** Con los puntos encontrados del resultado anterior, se une punto a punto obteniéndose la variación de esfuerzos que estará definida por las funciones de los elementos mecánicos hallados según la variación de la distancia angular correspondiente al arco.

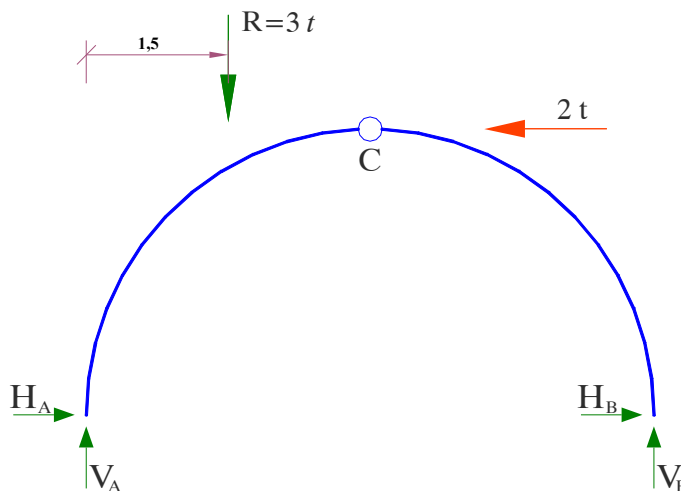
Ejercicio # 11

Determinar y graficar los elementos internos del siguiente arco.



$$G = 4 - 3 - 1 = 0 ; \text{ Estructura ISOSTATICA}$$

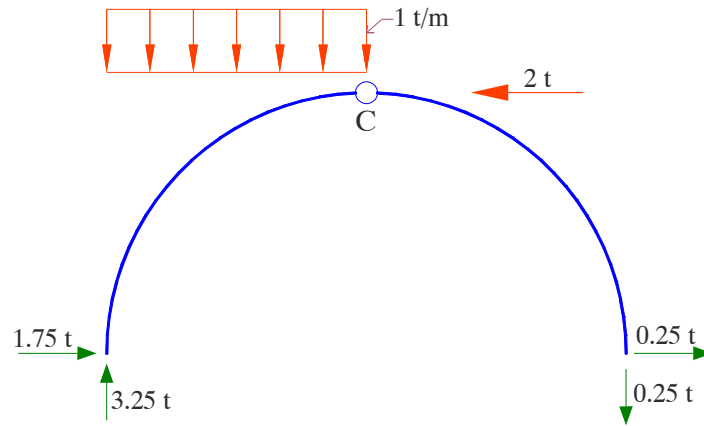
Paso 1) Cálculo de reacciones de apoyo.



$$\begin{aligned}\sum H &= 0 \Rightarrow H_A + H_B - 2 = 0 \Rightarrow H_B = -H_A + 2 \quad t \\ \sum M_A &= 0 \Rightarrow 3(1.5) - 2(3) - 6 \cdot V_B = 0 \Rightarrow V_B = -0.25 \quad t \\ \sum M_B &= 0 \Rightarrow 6(V_A) - 3(4.5) - 2(3) = 0 \Rightarrow V_A = 3.25 \quad t \\ \sum M_C^{DER} &= 0 \Rightarrow -8 - 0.25(3) - 3 \cdot H_B = 0 \Rightarrow H_B = 0.25 \quad t \\ &\Rightarrow H_A = 1.75 \quad t\end{aligned}$$

$$\text{CONTROL } \sum V = 0 \Rightarrow 3.25 - 3 - 0.25 = 0$$

Paso 2) Obtención de las ecuaciones de esfuerzos internos



En los arcos circulares es preferible utilizar ángulos para definir las secciones.

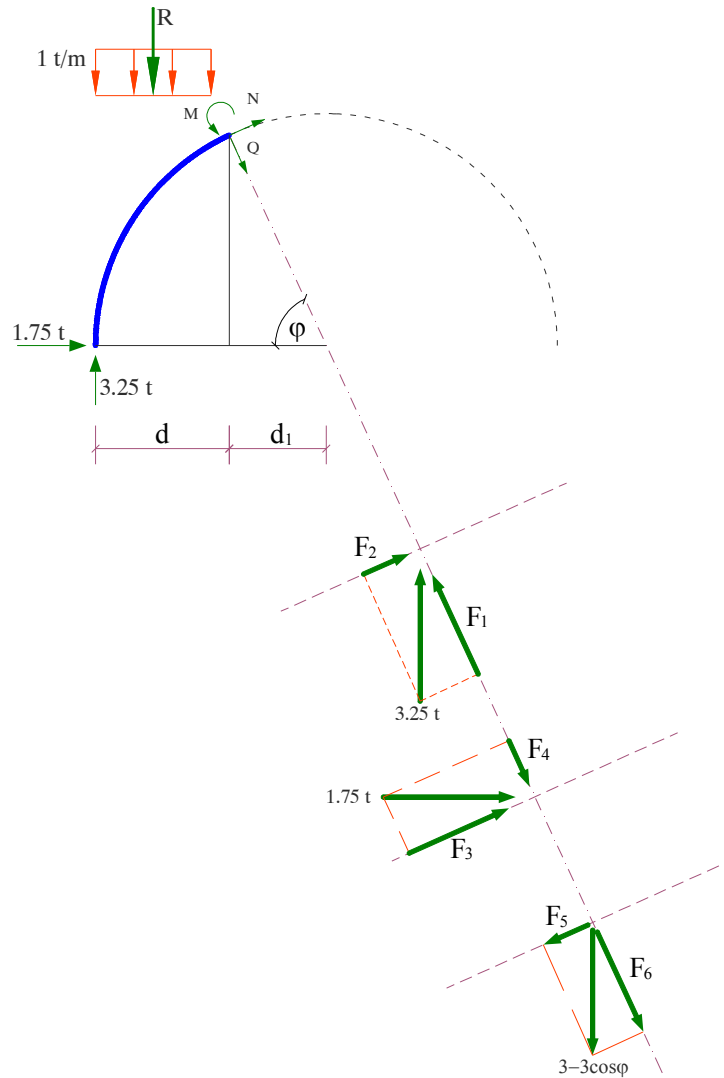
TRAMO A-C

Sabemos que:

$$\begin{aligned}d &= 3 - 3 \cdot \cos \varphi \\ d_1 &= 3 \cdot \cos \varphi \\ d_2 &= 3 \cdot \sin \varphi \\ R &= 1 \cdot (3 - 3 \cdot \cos \varphi)\end{aligned}$$

Sabemos también que de la descomposición de fuerzas resulta:

$$\begin{aligned}F_1 &= 3.25 \cdot \sin \varphi \\ F_2 &= 3.25 \cdot \cos \varphi \\ F_3 &= 1.75 \cdot \sin \varphi \\ F_4 &= 1.75 \cdot \cos \varphi \\ F_5 &= (3 - 3 \cos \varphi) \cdot \cos \varphi \\ F_6 &= (3 - 3 \cos \varphi) \cdot \sin \varphi\end{aligned}$$



DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < \varphi < 90^\circ$

$$\text{Normal} \Leftrightarrow \sum F_N = 0 \Rightarrow N + F_2 + F_3 - F_5 = 0$$

$$\therefore N = -0.25 \cos \varphi - 1.75 \sin \varphi - 3 \cos^2 \varphi$$

$$\text{Cortante} \Leftrightarrow \sum F_Q = 0 \Rightarrow Q - F_1 + F_4 + F_6 = 0$$

$$\therefore Q = 0.25 \sin \varphi - 1.75 \cos \varphi + 3 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\text{Momento} \Leftrightarrow \sum M_S = 0 \Rightarrow M - 3.25 \cdot d + 1.75 \cdot d_2 + R \cdot \frac{d}{2} = 0$$

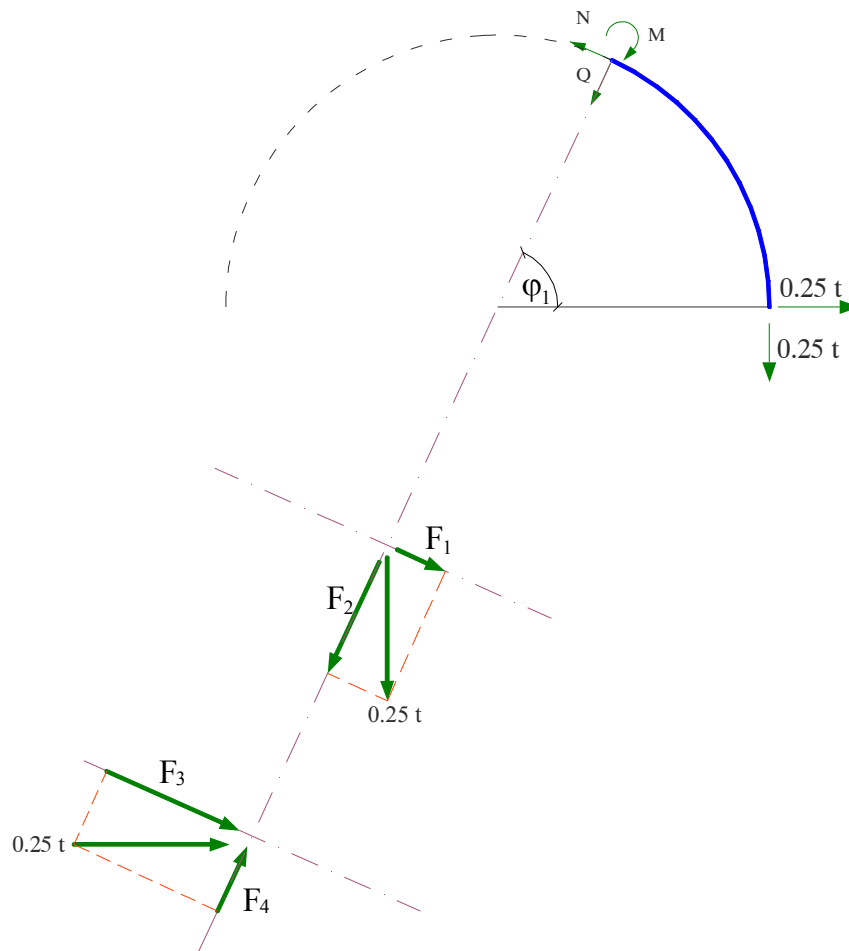
$$\therefore M = 3.25(3 - 3 \cos \varphi) - 1.75(3 \sin \varphi) - \frac{(3 - 3 \cos \varphi)^2}{2}$$

En la siguiente tabla mostramos la variación de valores que existen a lo largo del tramo A-C (se recomienda una variación cada 15°)

	Normal "N"	Cortante "Q"	Momento "M"
	[t]	[t]	[t_m]
0°	-3.25	-1.75	0
15°	-3.49	-0.88	-1.03
30°	-3.34	-0.09	-1.40
45°	-2.91	0.44	-1.24
60°	-2.39	0.64	-0.80
75°	-1.95	0.54	-0.32
90°	-1.75	0.25	0

TRAMO B-D

DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < \varphi_1 < 90^\circ$



Sabemos que:

$$F_1 = 0.25 \cdot \cos \varphi_1$$

$$F_2 = 0.25 \cdot \sen \varphi_1$$

$$F_3 = 0.25 \cdot \sen \varphi_1$$

$$F_4 = 0.25 \cdot \cos \varphi_1$$

$$\text{Normal} \Leftrightarrow \sum F_N = 0 \Rightarrow N - F_1 - F_3 = 0$$

$$\therefore N = 0.25 \cos \varphi_1 + 0.25 \sen \varphi_1$$

$$\text{Cortante} \Leftrightarrow \sum F_Q = 0 \Rightarrow Q - F_2 + F_4 = 0$$

$$\therefore Q = 0.25 \sen \varphi_1 - 0.25 \cos \varphi_1$$

$$\text{Momento} \Leftrightarrow \sum M_S = 0 \Rightarrow M + 0.25(3 - 3 \cdot \cos \varphi_1) - 0.25(3 \cdot \sen \varphi_1) = 0$$

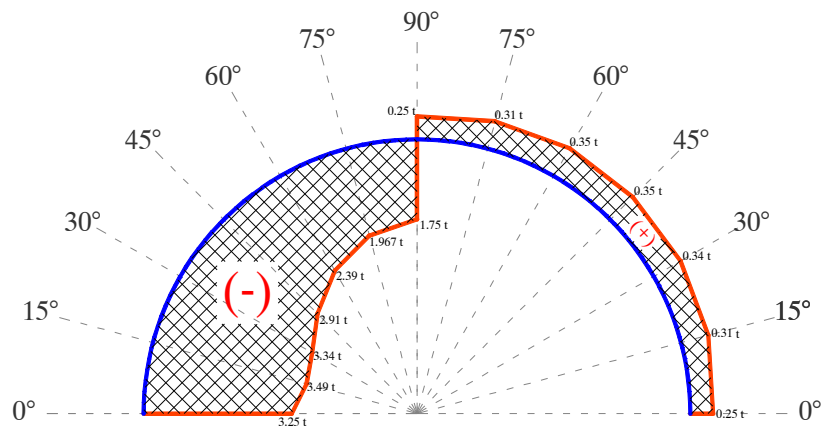
$$\therefore M = -0.25(3 - 3 \cdot \cos \varphi_1) + 0.25(3 \sen \varphi_1)$$

En la siguiente tabla mostramos la variación de valores que existen a lo largo del tramo B-C (se recomienda una variación cada 15°)

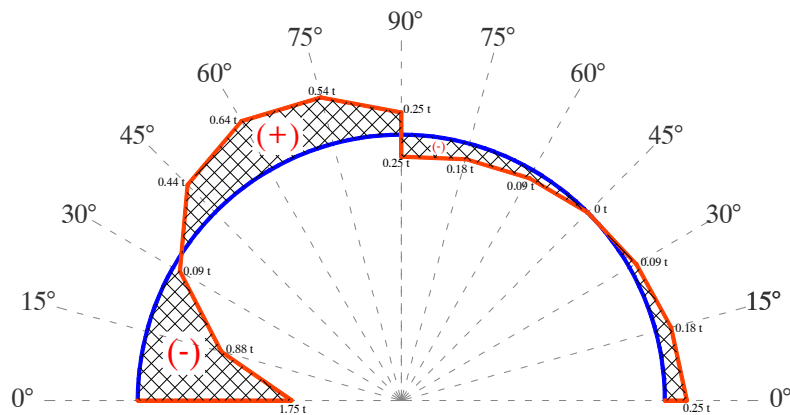
	Normal “N”	Cortante “Q”	Momento “M”
	[t]	[t]	[t_m]
0°	0.25	0.25	0
15°	0.31	0.18	0.17
30°	0.34	0.09	0.27
45°	0.35	0	0.31
60°	0.35	-0.09	0.27
75°	0.35	-0.18	0.17
90°	0.25	-0.25	0

Paso 3) DIAGRAMAS DE ESFUERZOS

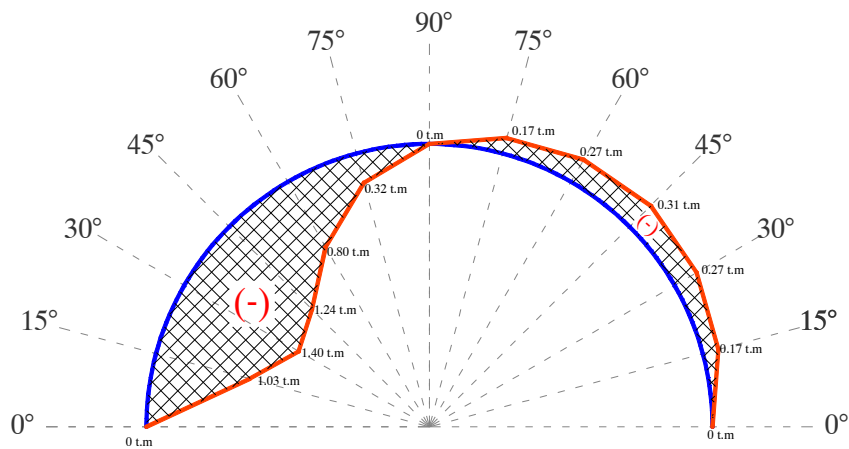
➤ **ESFUERZO NORMAL**



➤ **ESFUERZO CORTANTE**



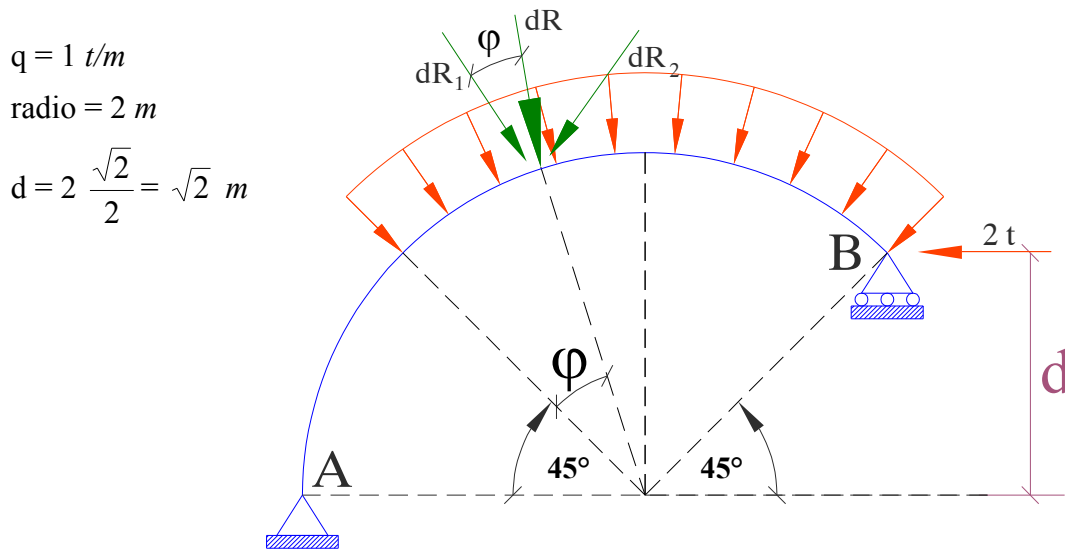
➤ **DIAGRAMA DE MOMENTOS**



Nota.- En la variación de los diagramas de esfuerzos internos (Normal, Cortante y Momento) cabe mencionar que no son rectas las que se van dibujando entre los puntos de variación, son curvas que se las observaría mejor si es que el ángulo de variación a lo largo del arco fuera mas reducido, por ejemplo cada 1° .

Ejercicio # 12

Determinar y graficar los elementos internos del siguiente arco.



Paso 1) Cálculo de reacciones de apoyo.

Previamente se determinara el valor de la resultante correspondiente a la carga distribuida $q = 1 \text{ t/m}$

$$dR = q \cdot ds = q \cdot r d\varphi$$

$$dR_1 = dR \cos \varphi \Rightarrow R_1 = \int_0^{90} \cos \varphi d\varphi$$

$$R_1 = qr$$

$$dR_2 = dR \sin \varphi \Rightarrow R_2 = \int_0^{90} \sin \varphi d\varphi$$

$$R_2 = qr$$

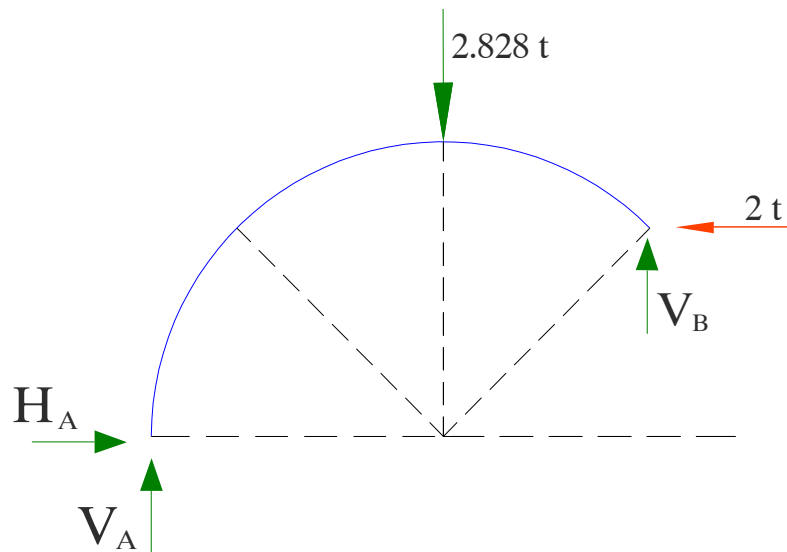
Por tanto:

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$$

Entonces:

$$R = \sqrt{2qr} = 2.828 \text{ t}$$

Realicemos un DCL para trabajar con mayor facilidad



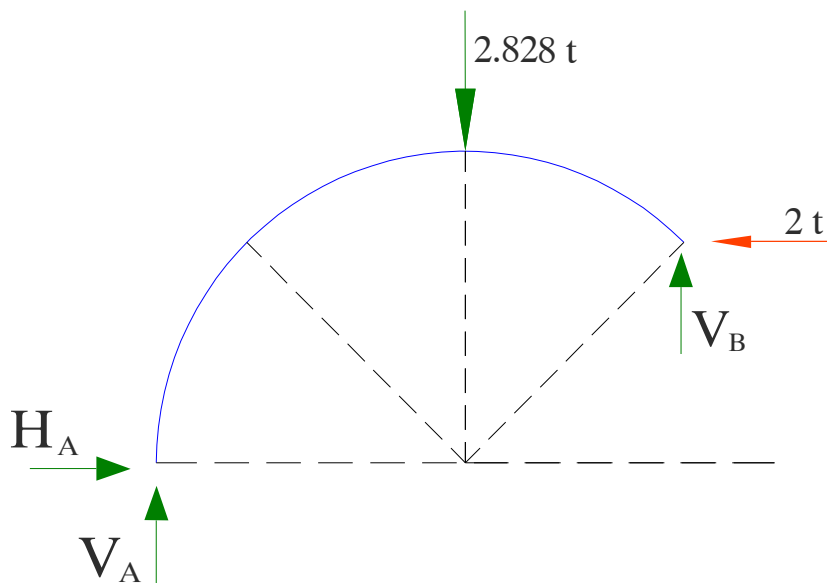
$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A - 2 = 0 \Rightarrow H_A = 2 \quad t$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2.828(2) - 2\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2})V_B = 0 \Rightarrow V_B = 0.828 \quad t$$

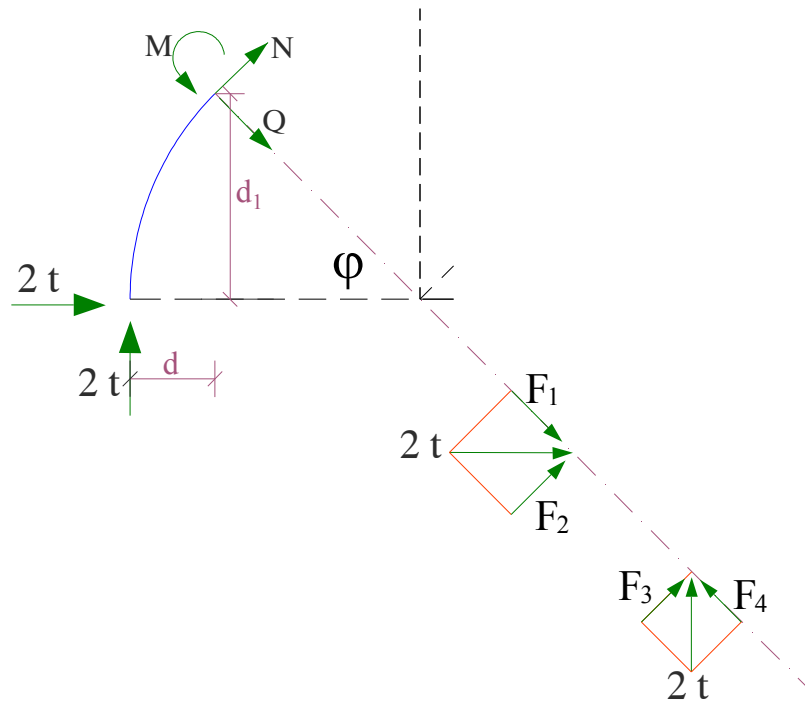
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow (2 + \sqrt{2})V_A - 2\sqrt{2} - 2.828\sqrt{2} = 0 \Rightarrow V_A = 2.00 \quad t$$

$$\text{CONTROL } \sum V = 0 \Rightarrow 2.00 - 2.828 + 0.828 = 0$$

Paso 2) Obtención de las ecuaciones de esfuerzos internos



DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < \varphi < 45^\circ$



Sabemos que:

$$d = 2 - 2 \cdot \cos \varphi$$

$$d_1 = 2 \cdot \sin \varphi$$

Sabemos también que de la descomposición de fuerzas resulta:

$$F_1 = 2 \cdot \cos \varphi$$

$$F_2 = 2 \cdot \sin \varphi$$

$$F_3 = 2 \cdot \cos \varphi$$

$$F_4 = 2 \cdot \sin \varphi$$

DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < \varphi < 45^\circ$

$$\text{Normal} \Leftrightarrow \sum F_N = 0 \Rightarrow N + F_2 + F_3 = 0$$

$$\therefore N = -2 \sin \varphi - 2 \cos \varphi$$

$$\text{Cortante} \Leftrightarrow \sum F_Q = 0 \Rightarrow Q + F_1 - F_4 = 0$$

$$\therefore Q = -2 \cos \varphi + 2 \sin \varphi$$

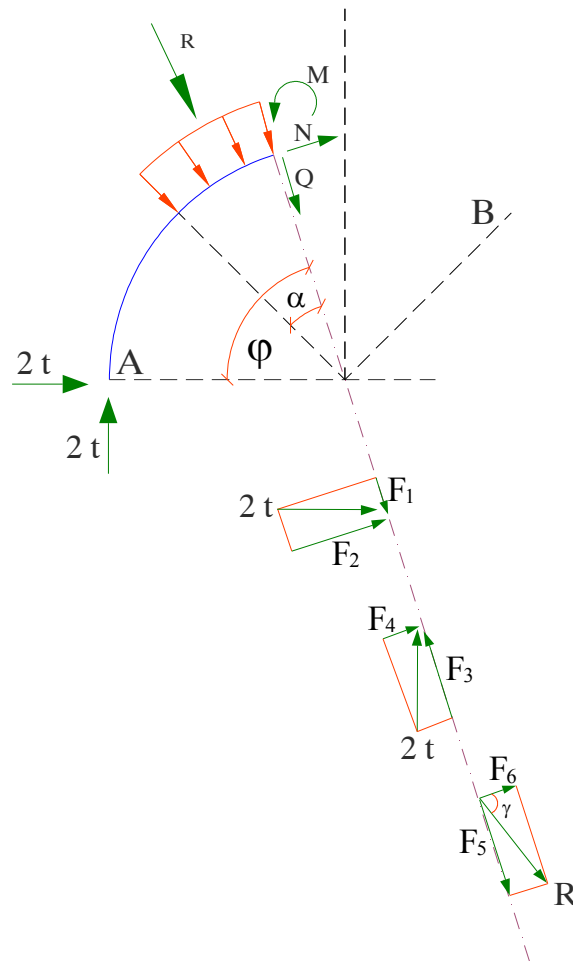
$$\text{Momento} \Leftrightarrow \sum M_s = 0 \Rightarrow M + 2d_1 - 2d = 0$$

$$\therefore M = -4\text{sen}\varphi + 2(2 - 2\cos\varphi)$$

En la siguiente tabla mostramos la variación de valores que existen a lo largo del tramo analizado de 0° a 45° (se recomienda una variación cada 15°)

	Normal "N"	Cortante "Q"	Momento "M"
	[t]	[t]	[t_m]
0°	-2	-2	0
15°	-2.45	-1.41	-0.9
30°	-2.73	-0.73	-1.46
45°	-2.83	0	-1.66

$$\text{DOMINIO} \Leftrightarrow 45 < \varphi_1 < 135^\circ$$





Sabemos que:

$$\alpha = \varphi - 45^\circ$$

Además;

$$F_1 = 2 \cdot \cos \varphi$$

$$F_3 = 2 \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

$$F_2 = 2 \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

$$F_4 = 2 \cdot \cos \varphi$$

Para la descomposición de la fuerza resultante será.

$$\gamma = 90 - \alpha / 2$$

$$F_5 = R \cdot \operatorname{sen} \gamma$$

$$F_6 = R \cdot \cos \gamma$$

Pero R es:

$$R_1 = qr \int_0^\alpha \cos \alpha \, d\alpha = qr \operatorname{sen} \alpha$$

$$R_2 = qr \int_0^\alpha \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha = qr(1 - \cos \alpha)$$

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$$

Tenemos:

$$\text{Normal} \Leftrightarrow \sum F_N = 0 \Rightarrow N + F_2 + F_4 + F_6 = 0$$

$$\therefore N = -(2 \operatorname{sen} \varphi + 2 \cos \varphi + R \cos \gamma)$$

$$\text{Cortante} \Leftrightarrow \sum F_Q = 0 \Rightarrow Q + F_1 - F_3 + F_5 = 0$$

$$\therefore Q = -2 \cos \varphi + 2 \operatorname{sen} \varphi - R \operatorname{sen} \gamma$$

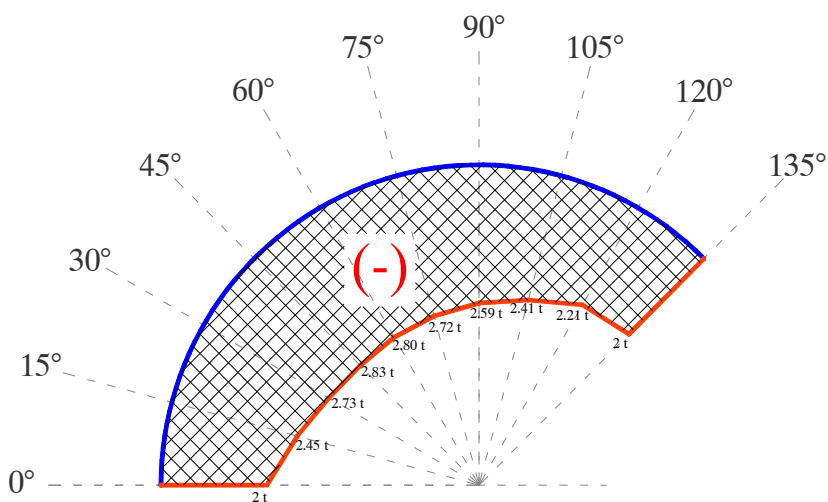
$$\text{Momento} \Leftrightarrow \sum M_S = 0 \Rightarrow M + 2r \operatorname{sen} \varphi - 2(r - r \cos \varphi) + R(r \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}) = 0$$

En la siguiente tabla mostramos la variación de valores que existen a lo largo del tramo analizado de 45° a 135° (se recomienda una variación cada 15°)

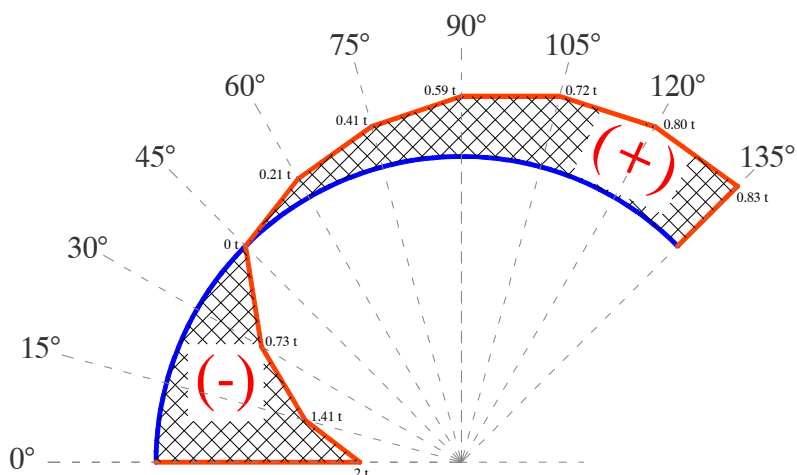
	Normal “N”	Cortante “Q”	Momento “M”
	[t]	[t]	[t_m]
45°	-2.83	0	-1.66
60°	-2.80	0.21	-1.60
75°	-2.72	0.41	-1.43
90°	-2.59	0.59	-1.17
105°	-2.41	0.72	-0.83
120°	-2.21	0.80	-0.43
135°	-2	0.83	0

Paso 3) DIAGRAMAS DE ESFUERZOS

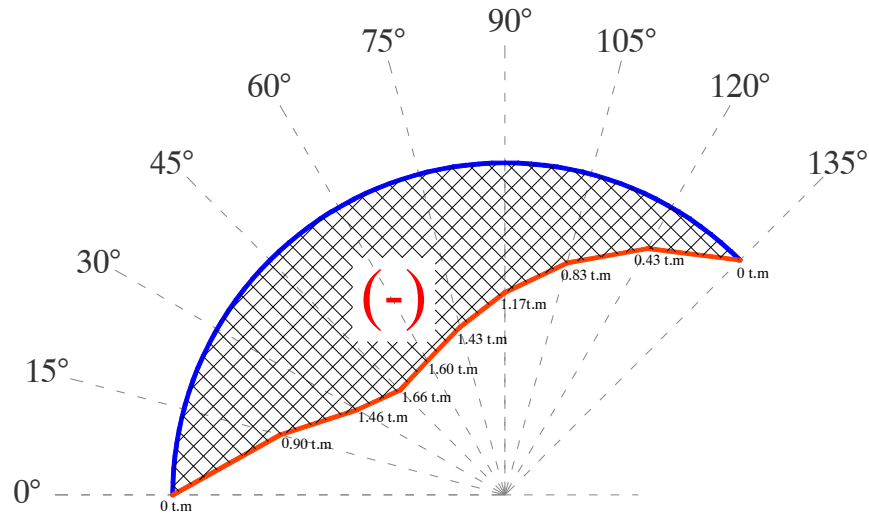
➤ ESFUERZO NORMAL



➤ ESFUERZO CORTANTE



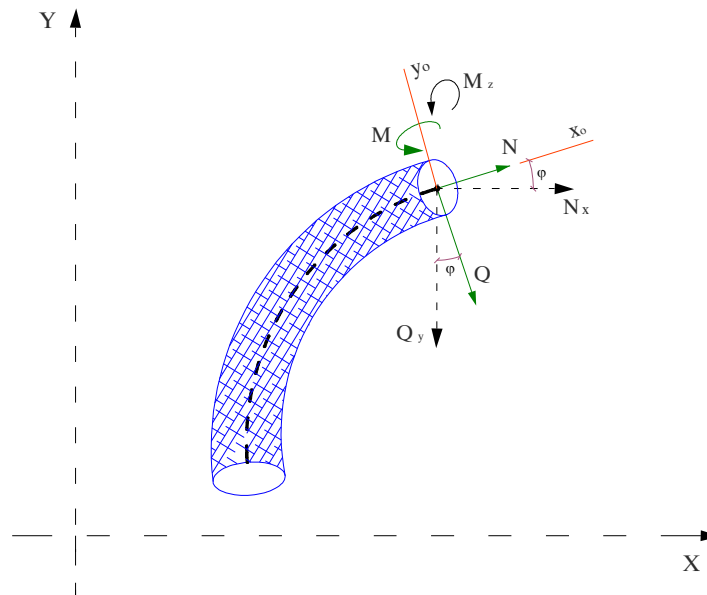
➤ DIAGRAMA DE MOMENTOS



Para tener una concepción grafica de la aplicación arcos en la vida estructural ver anexos del capítulo 3

3.10 TEORIA GENERAL DE ARCOS PARABOLICOS.

Para tener una visión mas clara sobre el análisis de *arcos parabólicos* y otros tipos de arcos es preferible desarrollar una teoría general, para poder facilitar el trabajo y trabajar de manera mas metódica.



La anterior grafica nos muestra una porción de una cierta viga seleccionada en la parte derecha, además N , Q , y M son los esfuerzos correspondientes al sistema local $x_0 - y_0$, y N_x , Q_y y M_z

son los correspondientes al sistema general $x - y$. Entonces realizando la rotación correspondiente tenemos.

$$N_x = N \cos \varphi + Q \sin \varphi$$

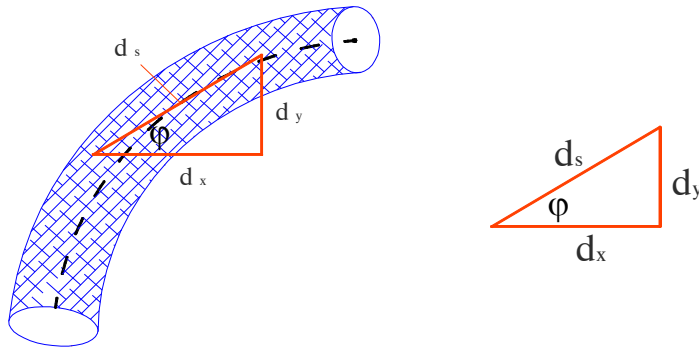
$$Q_y = -N \sin \varphi + Q \cos \varphi$$

$$M_z = M$$

O bien puede ser expresada en forma matricial.

$$\begin{bmatrix} N \\ Q \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ Q_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

Además, si realizamos el análisis de un pequeño segmento diferencial, tenemos:



Entonces:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad ; \quad \sin \varphi = \frac{dy}{ds} \quad ; \quad \cos \varphi = \frac{dx}{ds}$$

$$\tan \varphi = \frac{dy}{dx} = \omega$$

Luego:

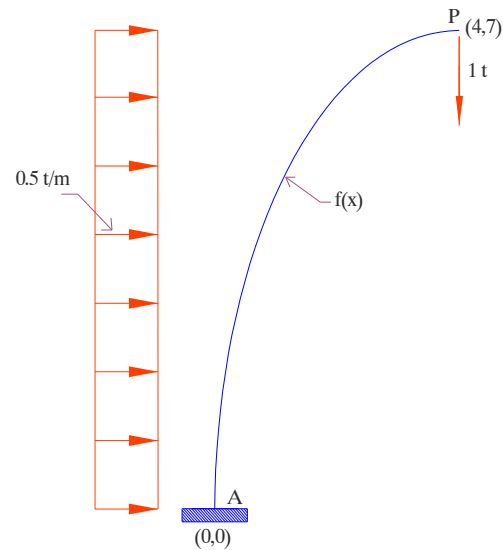
$$\sin \varphi = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \omega^2}} \quad ; \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}$$

Los valores obtenidos para $\sin \varphi$ y $\cos \varphi$ deben ser sustituidos en la disposición matricial.

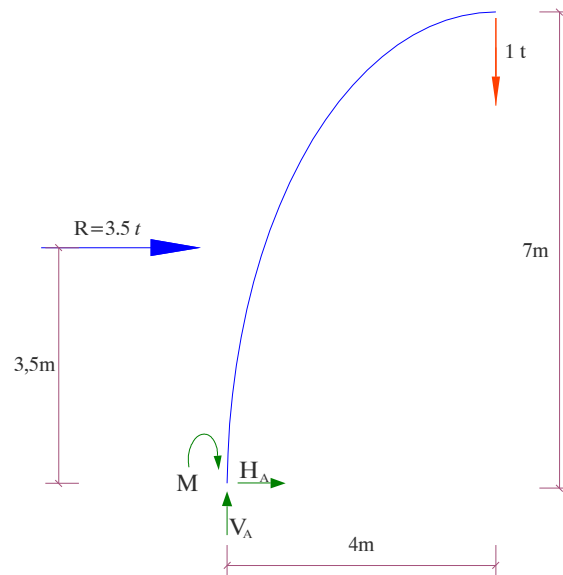
Para tener una mejor comprensión del cálculo de arcos y la aplicación de la teoría general de las mismas, planteamos a continuación una serie de ejemplos resueltos.

Ejercicio # 13

Determinar y graficar los elementos internos del siguiente arco parabólico.



Paso 1) Cálculo de reacciones de apoyo.



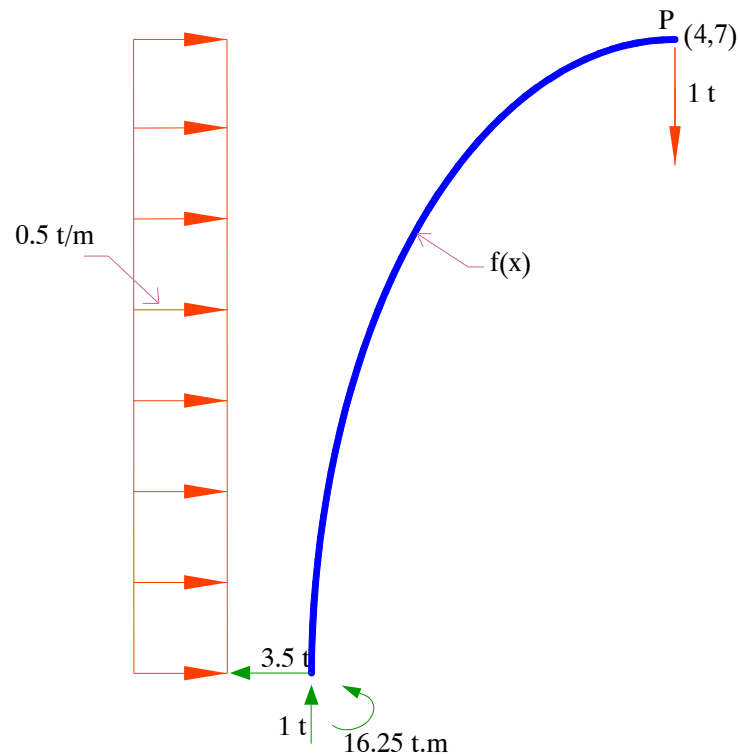
$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A + 3.5 = 0 \Rightarrow H_A = -3.5 \quad t$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + 3.5(3.5) + 1(4) = 0 \Rightarrow M_A = -16.25 \quad t \cdot m$$

$$\sum M_P = 0 \Rightarrow 4V_A - (-3.5)7 + (-16.25) - 3.5(3.5) = 0 \Rightarrow V_A = 1 \quad t$$

$$\text{CONTROL } \sum V = 0 \Rightarrow 1 - 1 = 0$$

Paso 2) Obtención de las ecuaciones de esfuerzos internos



Previamente, determinamos las condiciones geométricas de $f(x)$, entonces

$$y = ax^2 + bx + c \quad ; \quad \text{Para } O(0,0) \Rightarrow c = 0$$

Por lo tanto,

$$y = ax^2 + bx \Rightarrow y' = 2ax + b \quad ; \quad \text{cuando } x = 4 \Rightarrow y' = 0$$

Por lo tanto

$$8a + b = 0$$

Para $P(4,7)$, tenemos

$$16a + 4b = 7$$

Por lo tanto,

$$y = -\frac{7}{16}x^2 + \frac{7}{2}x$$

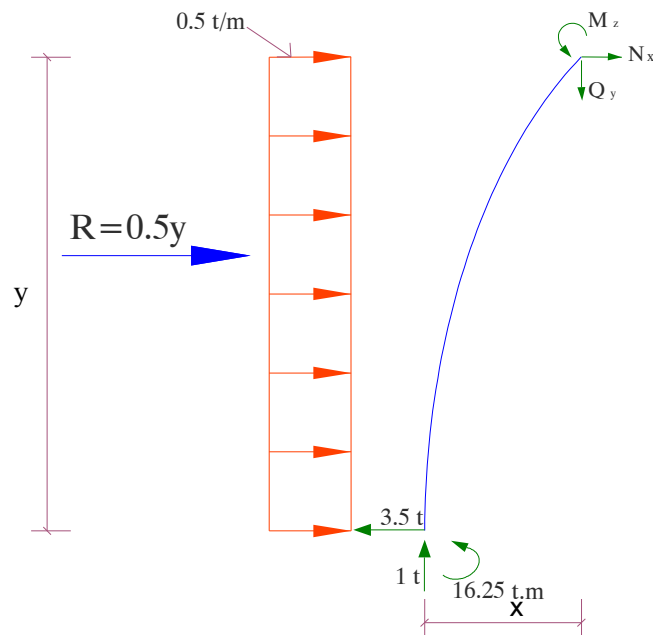
Entonces,

$$y' = \omega = -\frac{7}{8}x + \frac{7}{2}$$

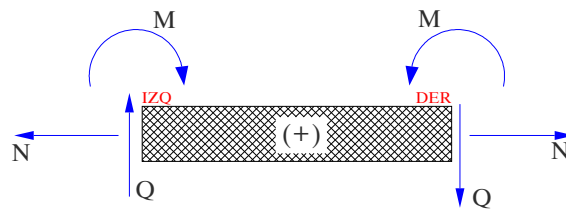
Por lo tanto,

$$\sin \varphi = \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} = \frac{-\frac{7}{8}x + \frac{7}{2}}{\sqrt{1+\left(-\frac{7}{8}x + \frac{7}{2}\right)^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{7}{8}x + \frac{7}{2}\right)^2}}$$



Recordemos que la convención de signos en sentido positivo es:



Entonces:

$$N_x = 3.5 - 0.5y$$

$$Q_y = 1$$

$$M_z = -0.5 \frac{y^2}{2} + 3.5y + x - 16.25$$

De la disposición matricial se tiene:

$$N = N_x \cos \varphi - Q_y \sin \varphi$$

$$Q = N_x \sin \varphi + Q_y \cos \varphi$$

$$M = M_z$$

Para el dominio $0 \leq x \leq 4$, tenemos:

$$\text{Normal} \Leftrightarrow N = \frac{\frac{7}{32}x^2 - \frac{7}{8}x}{\sqrt{1 + \left(-\frac{7}{8}x + \frac{7}{2}\right)^2}}$$

$$\text{Cortante} \Leftrightarrow Q = \frac{\left[\left(3.5 + \frac{7}{32}x^2 - \frac{7}{4}x \right) \left(-\frac{7}{8}x + \frac{7}{2} \right) \right] + 1}{\sqrt{1 + \left(-\frac{7}{8}x + \frac{7}{2}\right)^2}}$$

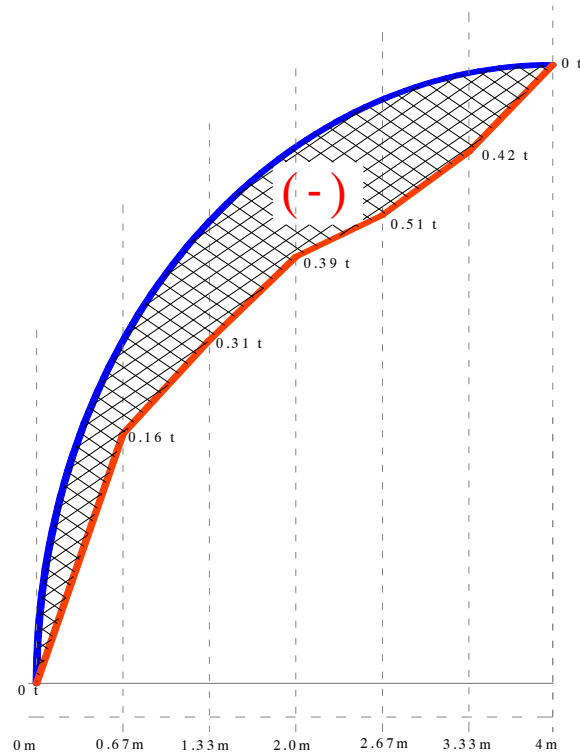
$$\text{Momento} \Leftrightarrow M = -\frac{0.5}{2} \left(-\frac{7}{16}x^2 + \frac{7}{2}x \right)^2 + 3.5 \left(-\frac{7}{16}x^2 + \frac{7}{2}x \right) + x - 16.25$$

En la siguiente tabla mostramos la variación de valores que existen a lo largo del tramo analizado.

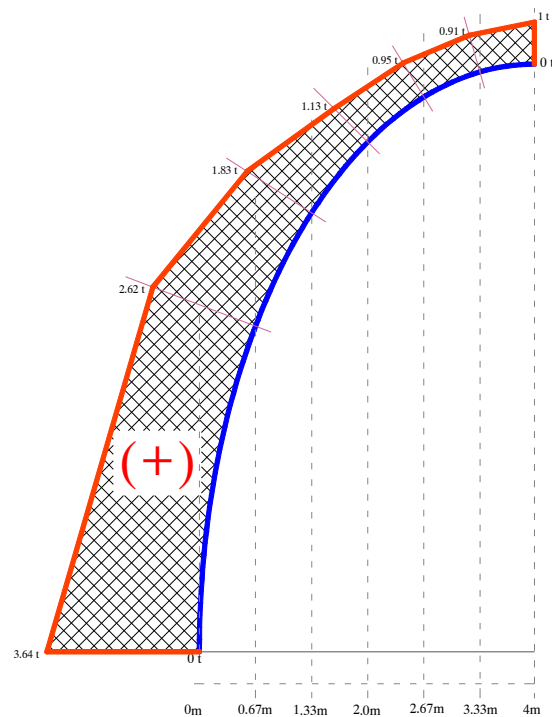
Distancia "m"	Normal "N" [t]	Cortante "Q" [t]	Momento "M" [t_m]
0	0	3.64	-16.25
0.67	-0.16	2.62	-8.95
1.33	-0.31	1.83	-5.10
2	-0.39	1.13	-2.77
2.67	-0.51	0.95	-1.48
3.33	-0.42	0.91	-0.68
4	0	1	0

Paso 3) DIAGRAMAS DE ESFUERZOS

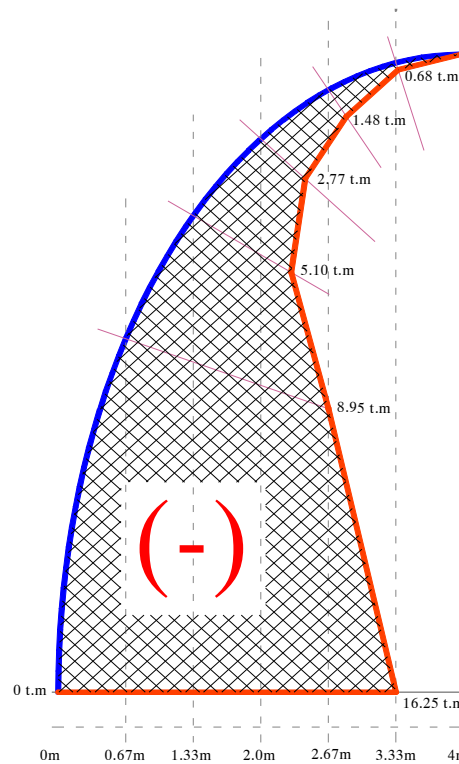
➤ ESFUERZO NORMAL



➤ ESFUERZO CORTANTE



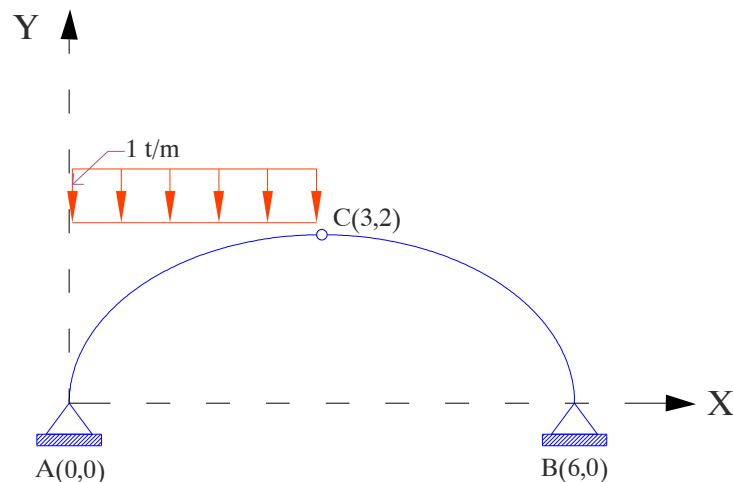
➤ DIAGRAMA DE MOMENTOS



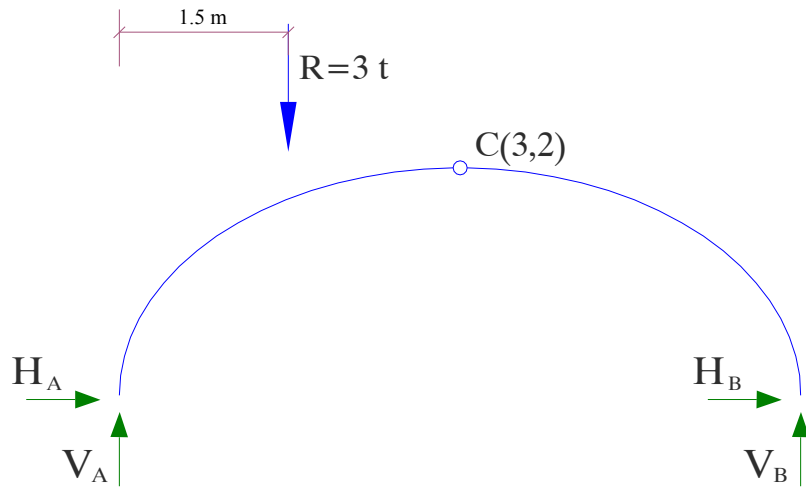
Nota.- En la variación de los diagramas de esfuerzos internos (Normal, Cortante y Momento) cabe mencionar que no son rectas las que se van dibujando entre los puntos de variación, son curvas que se las observaría mejor si es que la distancia de variación a lo largo del arco fuera mas reducido, por ejemplo cada $0.1m$.

Ejercicio # 14

Determinar y graficar los elementos internos del siguiente arco elíptico.



Paso 1) Cálculo de reacciones de apoyo.



$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A + H_B = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 3(1.5) - 6V_B = 0 \Rightarrow V_B = 0.75 \text{ t}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 6V_A - 3(4.5) = 0 \Rightarrow V_A = 2.25 \text{ t}$$

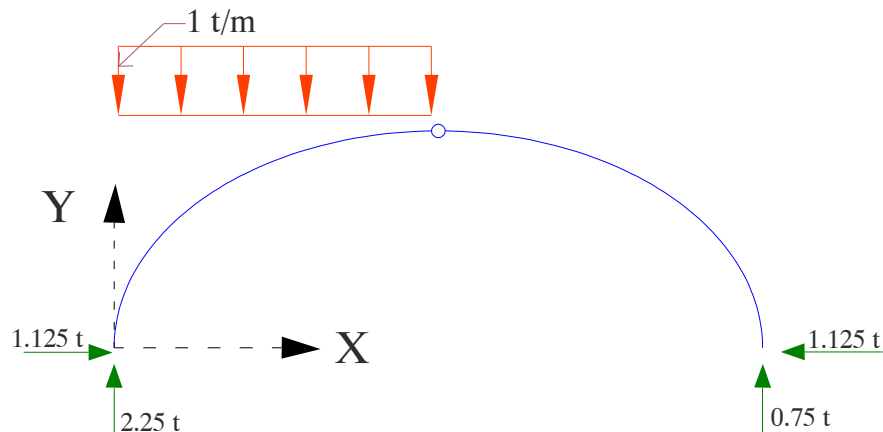
$$\sum M_C^{DER} = 0 \Rightarrow -3(0.75) - 2H_B = 0 \Rightarrow H_B = -1.125 \text{ t}$$

por tanto:

$$H_A = 1.125 \text{ t}$$

$$\text{CONTROL } \sum V = 0 \Rightarrow 2.25 - 3 + 0.75 = 0$$

Paso 2) Obtención de las ecuaciones de esfuerzos internos

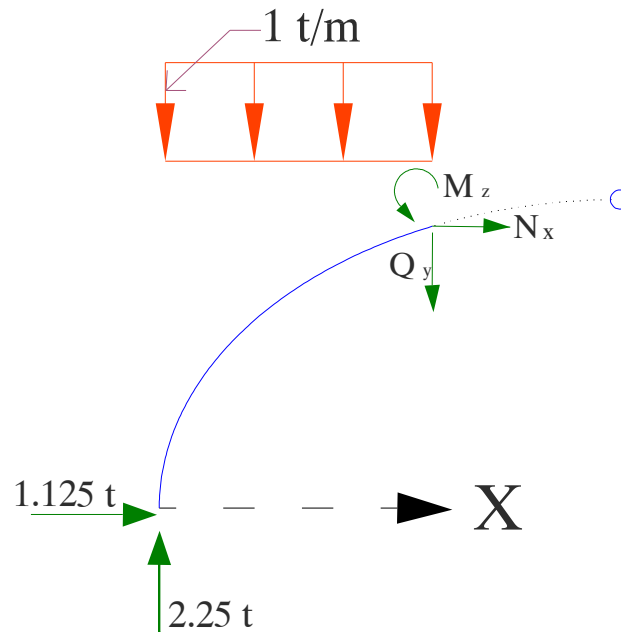


Determinamos las condiciones geométricas de la curva elíptica.

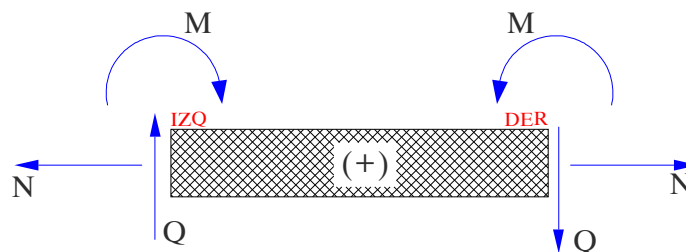
$$\text{elipse} \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^4}{4} = 1 \Rightarrow y = \frac{2}{3} \sqrt{-x^2 + 6x}$$

Por lo tanto,

$$y' = \omega = \frac{-2x + 6}{3\sqrt{-x^2 + 6x}}$$



Recordemos que la convención de signos en sentido positivo es:



Entonces:

$$N_x = -1.125 \text{ t}$$

$$Q_y = 2.25 - x$$

$$M_z = -1.125y - \frac{x^2}{2} + 2.25x$$

Nuevamente de la disposición matricial se tiene:

$$N = N_x \cos \varphi - Q_y \sin \varphi$$

$$Q = N_x \sin \varphi + Q_y \cos \varphi$$

$$M = M_z$$

Para el dominio $0 \leq x \leq 3$, tenemos:

$$\text{Normal} \Leftrightarrow N = \frac{-3.375\sqrt{-x^2 + 6x} - (2.25 - x)(-2x + 6)}{\sqrt{(3\sqrt{-x^2 + 6x})^2 + (-2x + 6)^2}}$$

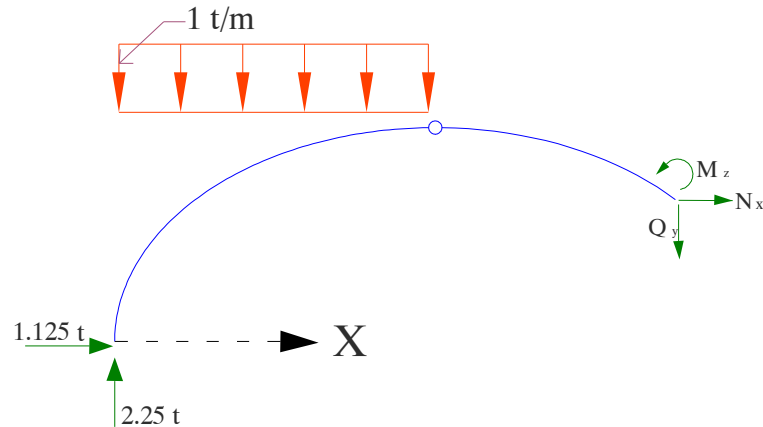
$$\text{Cortante} \Leftrightarrow Q = \frac{-1.125(-2x + 6) + (2.25 - x)(3\sqrt{-x^2 + 6x})}{\sqrt{(3\sqrt{-x^2 + 6x})^2 + (-2x + 6)^2}}$$

$$\text{Momento} \Leftrightarrow M = -1.125\left(\frac{2}{3}\sqrt{-x^2 + 6x}\right) - \frac{x^2}{2} + 2.25x$$

En la siguiente tabla mostramos la variación de valores que existen a lo largo del tramo analizado.

Distancia "m"	Normal "N" [t]	Cortante "Q" [t]	Momento "M" [t_m]
0	-2.25	-1.125	0
1	-1.6	0.5	0.07
2	-1.15	0	0.38
3	-1.125	-0.75	0

Para el análisis del segundo tramo, tenemos:



Entonces:

$$N_x = -1.125 \text{ t}$$

$$Q_y = -0.75 \text{ t}$$

$$M_z = -1.125y - 3(x - 1.5 + 2.25x)$$

Para el dominio $3 \leq x \leq 6$, tenemos:

$$\text{Normal} \Leftrightarrow N = \frac{-3.375\sqrt{-x^2 + 6x} - 0.75(-2x + 6)}{\sqrt{(3\sqrt{-x^2 + 6x})^2 + (-2x + 6)^2}}$$

$$\text{Cortante} \Leftrightarrow Q = \frac{-1.125(-2x + 6) + (2.25)(\sqrt{-x^2 + 6x})}{\sqrt{(3\sqrt{-x^2 + 6x})^2 + (-2x + 6)^2}}$$

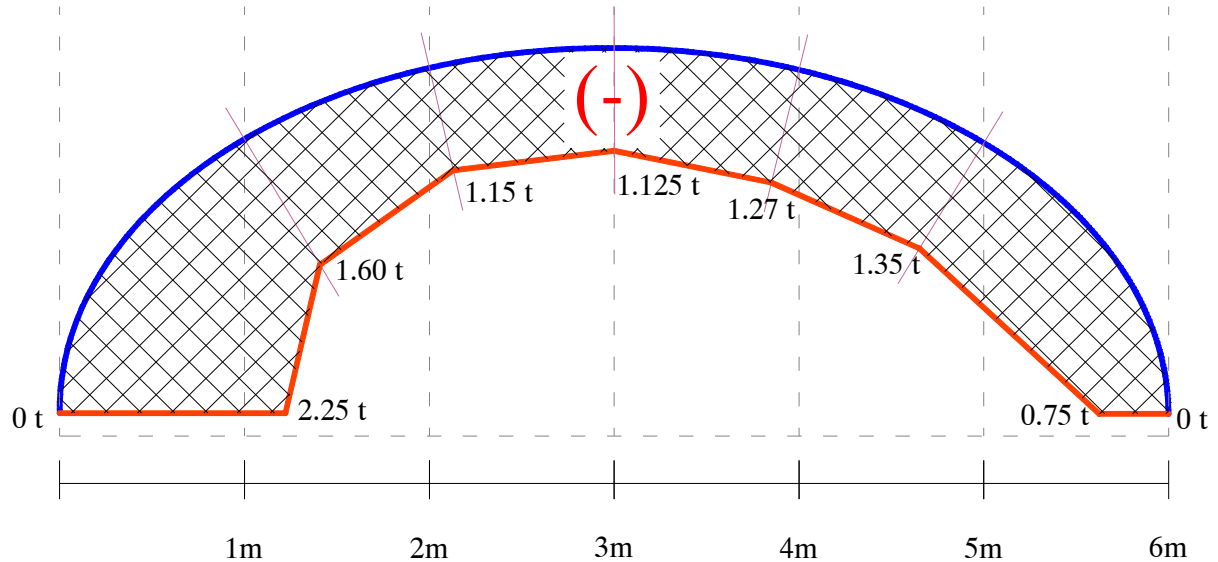
$$\text{Momento} \Leftrightarrow M = -1.125\left(\frac{2}{3}\sqrt{-x^2 + 6x}\right) - 3(x - 1.5) + 2.25x$$

En la siguiente tabla mostramos la variación de valores que existen a lo largo del tramo analizado.

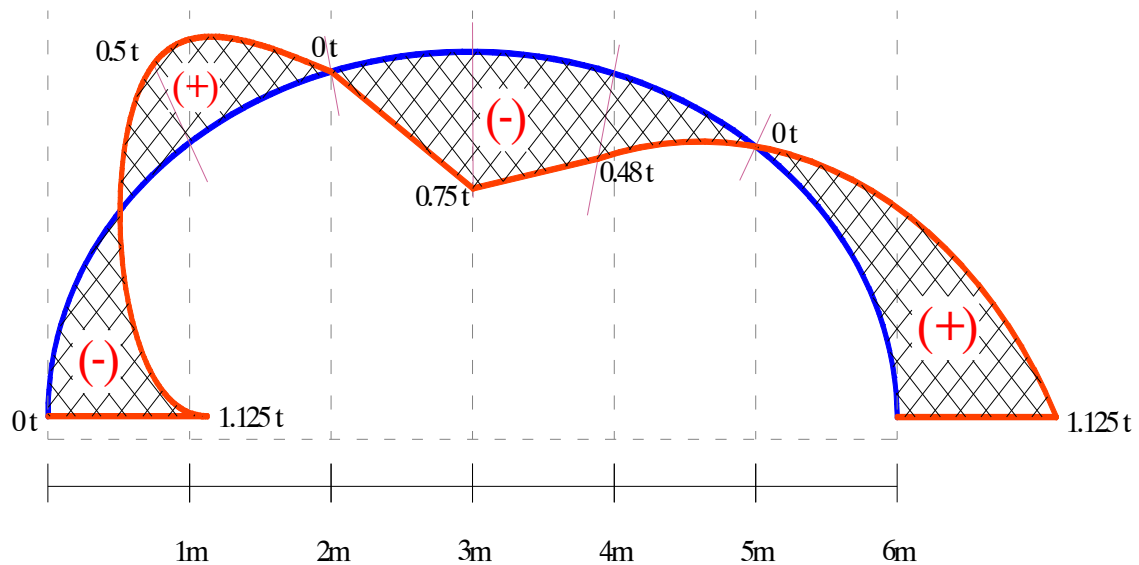
Distancia "m"	Normal "N" [t]	Cortante "Q" [t]	Momento "M" [t_m]
3	-1.125	-0.75	0
4	-1.27	-0.48	0.62
5	-1.35	0	0.93
6	-0.75	-1.125	0

Paso 3) DIAGRAMAS DE ESFUERZOS

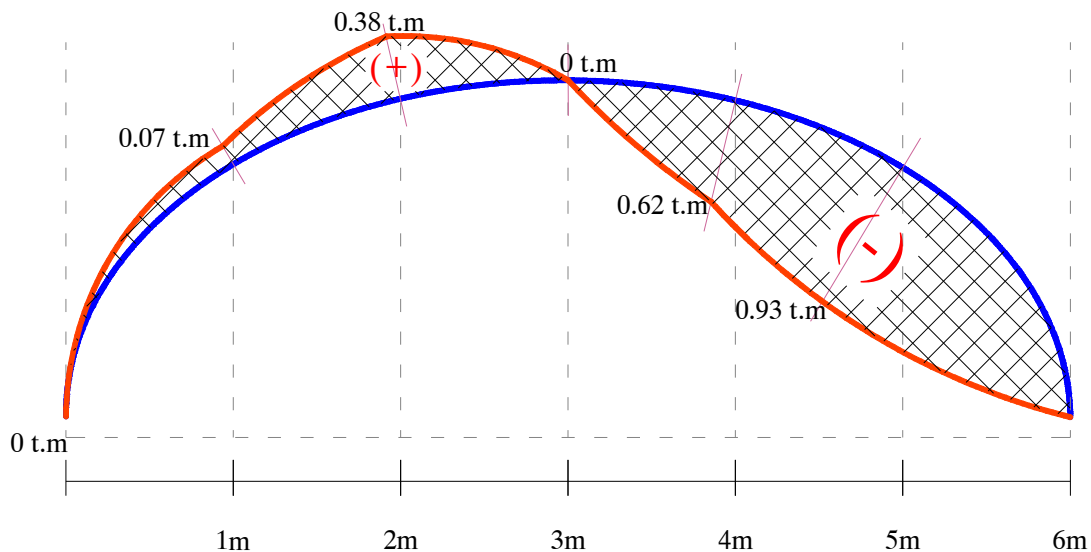
➤ ESFUERZO NORMAL



➤ ESFUERZO CORTANTE



➤ DIAGRAMA DE MOMENTOS



Nota.- En la variación de los diagramas de esfuerzos internos (Normal, Cortante y Momento) cabe mencionar que no son rectas las que se van dibujando entre los puntos de variación, son curvas que se las observaría mejor si es que la distancia de variación a lo largo del arco fuera mas reducido, por ejemplo cada $0.1m$.

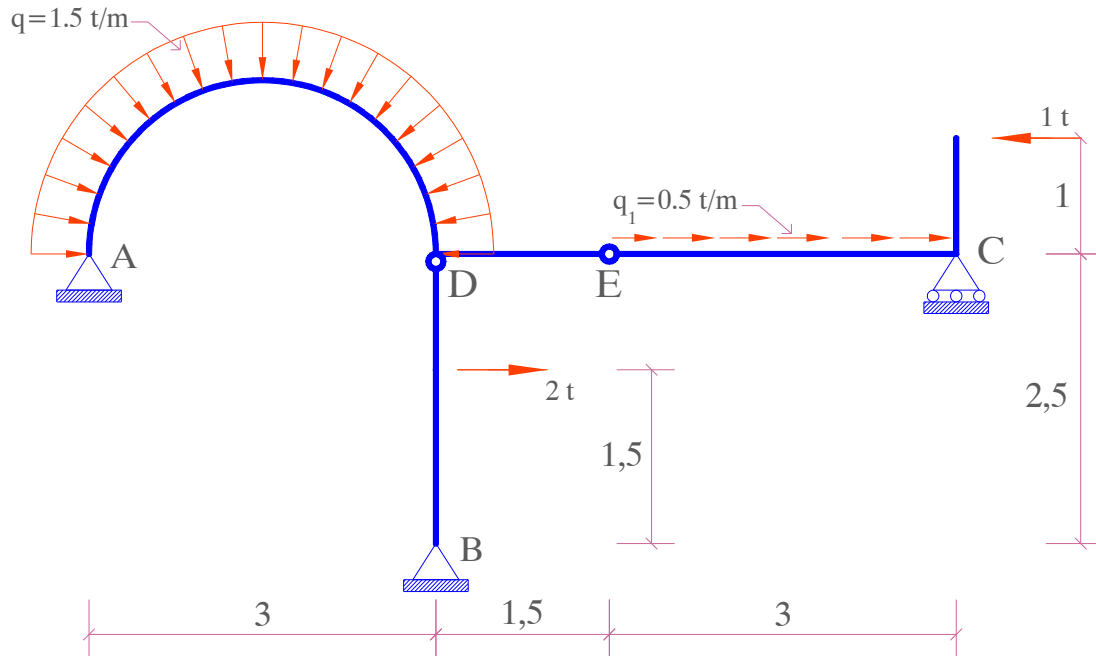
3.11 ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS MIXTAS.

Se refiere a la combinación de todas las estructuras ya analizadas, donde el procedimiento de calculo de cada uno de los tramos, ya sean estos rectos o arcos deberán ser analizados de manera independiente como ya se ha visto hasta ahora.

Para concluir el análisis de estructuras, planteamos a continuación la solución de ejemplos resueltos de estructuras mixtas.

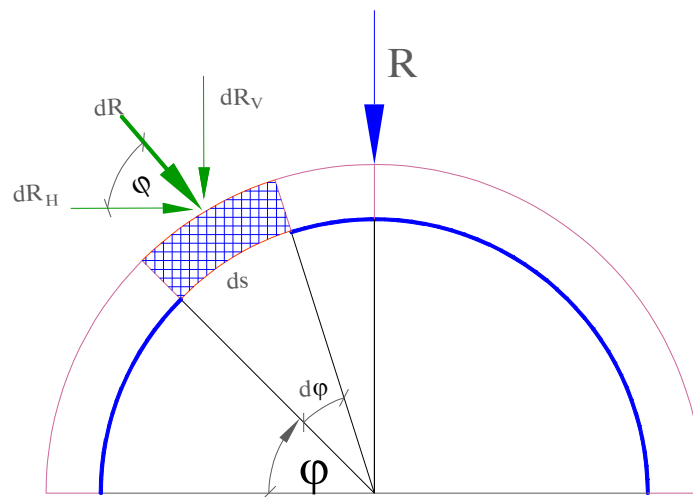
Ejercicio # 15

Determinar y graficar los elementos internos de la siguiente estructura mixta.



Paso 1) Cálculo de reacciones de apoyo.

Previamente se determinara el valor de la resultante correspondiente a la carga distribuida de $q = 1.5 \text{ t/m}$, que actúa perpendicularmente al arco.



$$R = \sqrt{\bar{R}_H^2 + \bar{R}_V^2}$$

Entonces:

$$dR = q ds = q r d\phi$$

Por lo tanto:

$$dR_H = dR \cos \varphi$$

$$dR_V = dR \sin \varphi$$

$$dR_H = qr \cos \varphi d\varphi$$

$$dR_V = qr \sin \varphi d\varphi$$

$$R_H = \int_0^\pi qr \cos \varphi d\varphi = 0$$

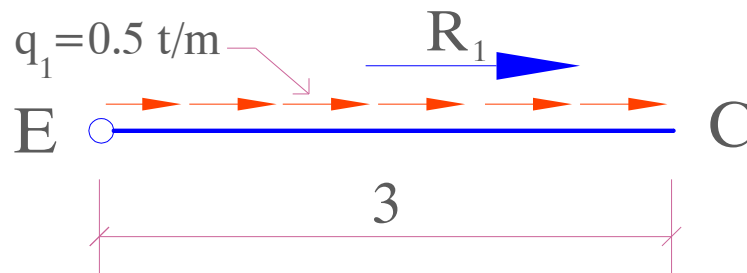
$$R_V = \int_0^\pi qr \sin \varphi d\varphi = 2qr$$

Entonces:

$$R = 2(1.5)(1.5) = 4.5 \text{ t}$$

Debido a la simetría de la carga distribuida afirmamos que la resultante de la carga distribuida perpendicular al arco pasa por el eje “y”.

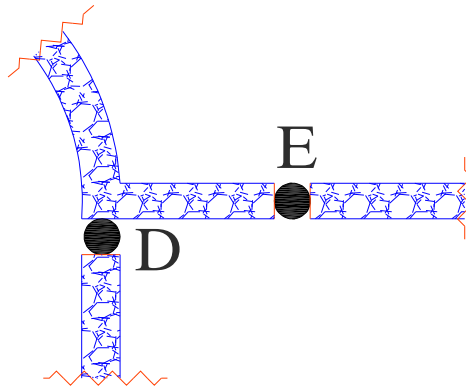
A continuación determinamos la resultante de la carga distribuida que actúa a lo largo del tramo $E - C$.



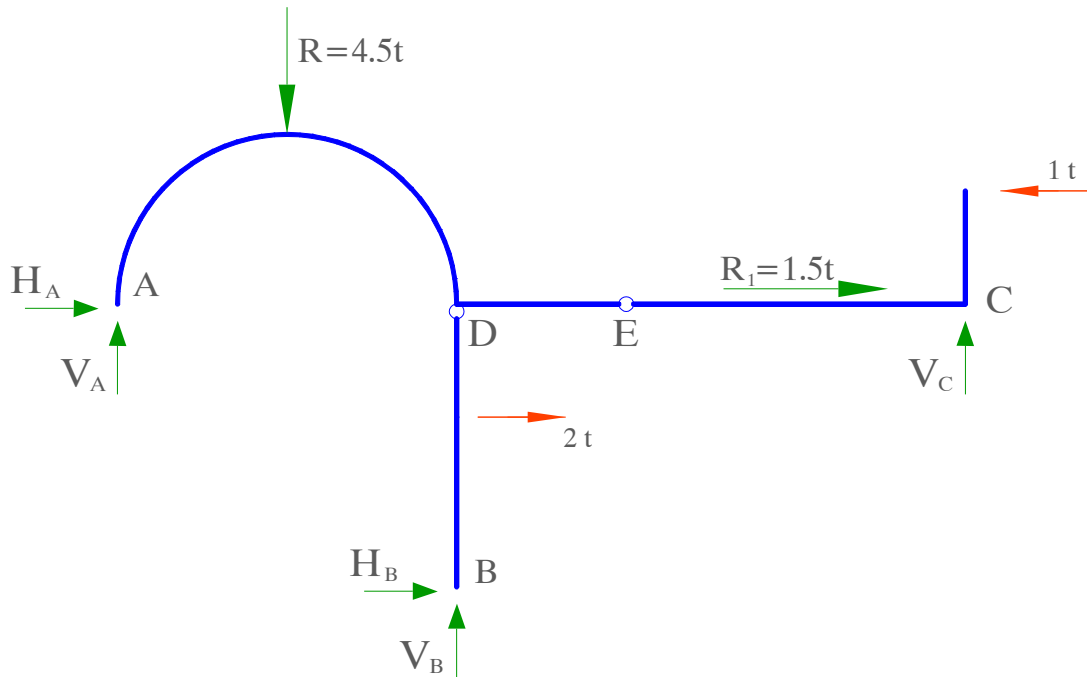
$$R_1 = q_1 L = 0.5(3) = 1.5 \text{ t}$$

La línea de acción de R_1 es coincidente con la recta que pasa por el tramo $E - C$.

Mostramos el detalle de las articulaciones:



Ahora veamos la estructura en D.C.L.



Aplicando las ecuaciones de equilibrio tenemos:

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A + H_B + 2 + 1.5 - 1 = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 4.5(1.5) - 2(1) - 2.5H_B - 3V_B(1) - 7.5V_C = 0$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 3V_A + 2.5H_A - 4.5(1.5) + 1.5(2.5) + 2(1.5) - 1(3.5) - 4.5V_C = 0$$

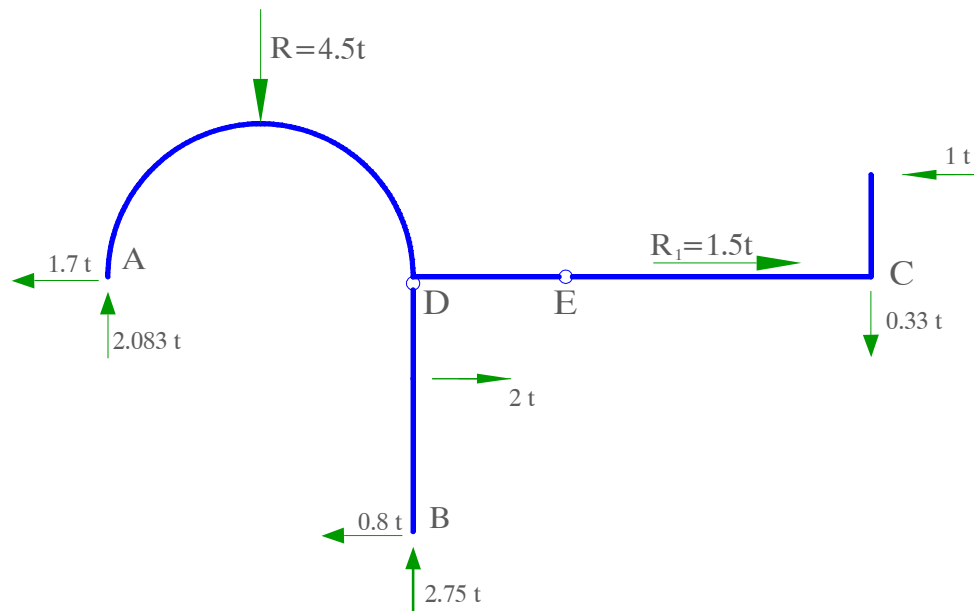
Aplicando las 2 ecuaciones especiales que generan las articulaciones, resolvemos el sistema, pero previamente

$$\sum M_E^{DER} = 0 \Rightarrow -1(1) - 3V_C = 0 \Rightarrow V_C = -0.33 \quad t$$

$$\sum M_D^{ABAJO} = 0 \Rightarrow -2(1) - 2.5H_B = 0 \Rightarrow H_B = -0.8 \quad t$$

por lo tanto:

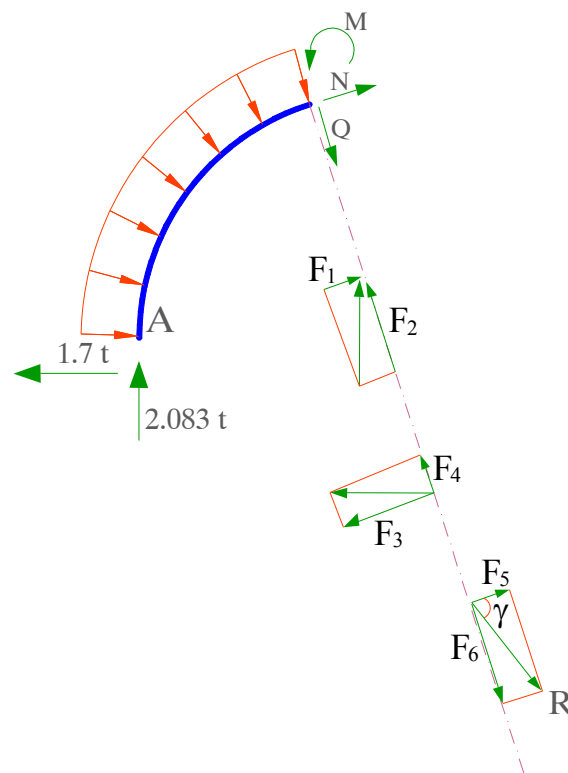
$$H_A = -1.7 \quad t \quad V_A = 2.083 \quad t \quad V_B = 2.75 \quad t$$



$$\text{CONTROL } \sum V = 0 \Rightarrow 2.083 - 4.5 + 2.75 - 0.33 = 0$$

Paso 2) Obtención de las ecuaciones de *ESFUERZOS INTERNOS*

TRAMO A – D DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < \pi$



Sabemos que:

$$R = qr\sqrt{2 - 2\cos\varphi}$$

$$R = 3.18\sqrt{1 - \cos\varphi}$$

$$\gamma = \varphi / 2$$

Sabemos también que de la descomposición de fuerzas resulta:

$$F_1 = 2.083 \cdot \cos\varphi$$

$$F_2 = 2.083 \cdot \sin\varphi$$

$$F_3 = 1.7 \cdot \sin\varphi$$

$$F_4 = 1.7 \cdot \cos\varphi$$

$$F_5 = R \cdot \sin\varphi / 2$$

$$F_6 = R \cdot \cos\varphi / 2$$

Luego, para el dominio de $0 < x < \pi$, del arco del tamo $A - D$ será:

$$\text{Normal} \Leftrightarrow \sum F_N = 0 \Rightarrow N + F_1 - F_3 + F_5 = 0$$

$$\therefore N = -2.083\cos\varphi + 1.7\sin\varphi - 3.18\sqrt{1 - \cos\varphi} \cdot \sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\text{Cortante} \Leftrightarrow \sum F_Q = 0 \Rightarrow Q - F_2 - F_4 + F_6 = 0$$

$$\therefore Q = 2.083\sin\varphi + 1.7\cos\varphi - 3.18\sqrt{1 - \cos\varphi} \cdot \cos\frac{\varphi}{2}$$

$$\text{Momento} \Leftrightarrow \sum M_S = 0 \Rightarrow M + Rr\sin\frac{\varphi}{2} - 2.083(r - r\cos\varphi) - 1.7(r\sin\varphi) = 0$$

$$\therefore M = -4.77\sqrt{1 - \cos\varphi} \cdot \sin\frac{\varphi}{2} + 3.125(1 - \cos\varphi) + 2.55\sin\varphi$$

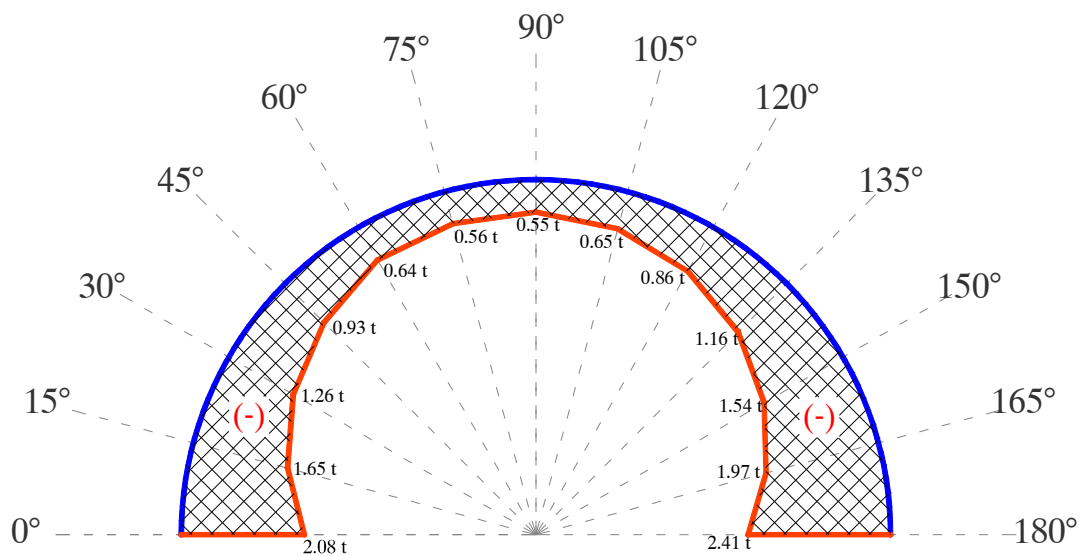
En la siguiente tabla mostramos la variación de esfuerzos que existen a lo largo del tramo A - D.

Distancia "m"	Normal "N" [t]	Cortante "Q" [t]	Momento "M" [t_m]
0°	-2.08	1.7	0
15°	-1.65	1.6	0.65
30°	-1.26	1.39	1.24
45°	-0.93	1.08	1.73
60°	-0.64	0.71	2.08
75°	-0.56	0.28	2.28

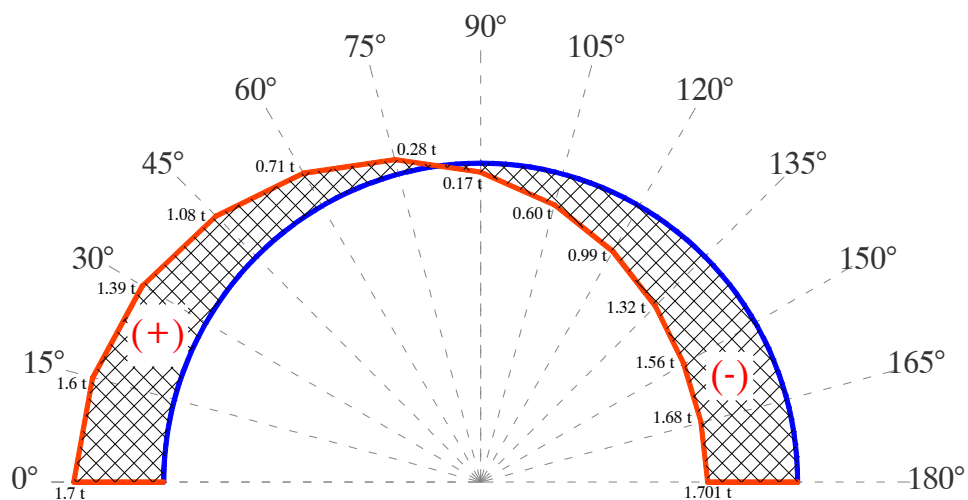
90°	-0.55	-0.17	2.3
105°	-0.65	-0.60	2.15
120°	-0.86	-0.99	1.84
135°	-1.16	-1.32	1.38
150°	-1.54	-1.56	0.81
165°	-1.97	-1.68	0.17
180°	-2.41	-1.701	-0.49

DIAGRAMAS DE ESFUERZOS

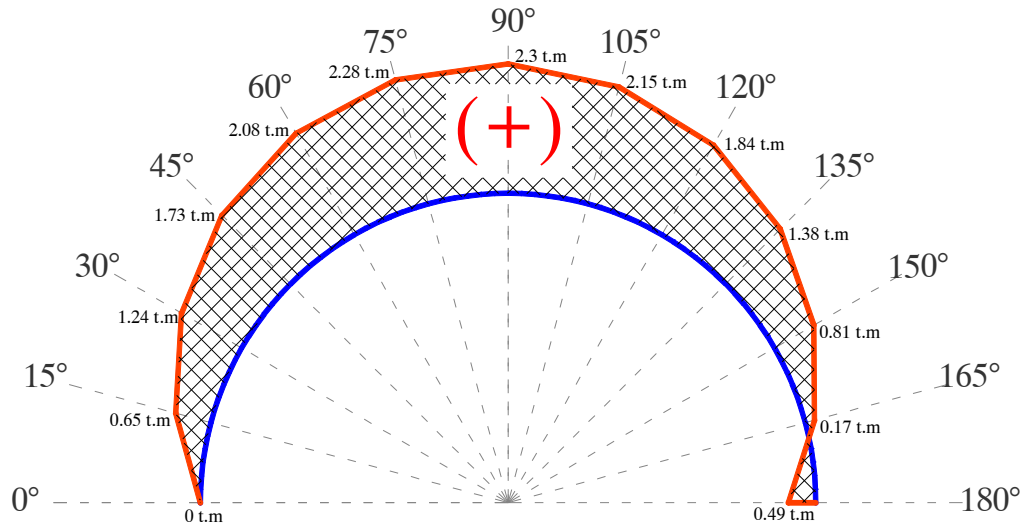
➤ ESFUERZO NORMAL



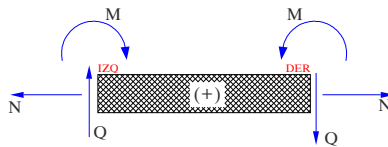
➤ ESFUERZO CORTANTE



➤ DIAGRAMA DE MOMENTOS



Para el análisis de barras recordemos que la convención de signos en sentido positivo es:



TRAMO B-D DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < 1.5$

Normal $N \Rightarrow -2.75 \text{ t}$

Cortante $Q \Rightarrow 0.8 \text{ t}$

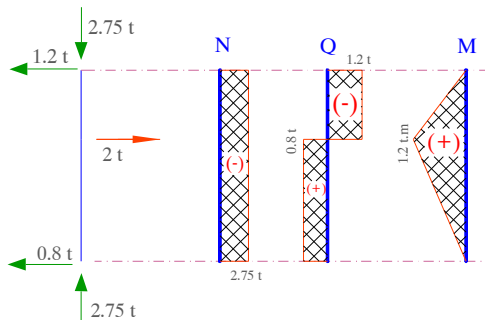
Momento $M \Rightarrow 0.8x \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow M=0 \text{ t} \cdot m \\ x=1.5 \Rightarrow M=1.2 \text{ t} \cdot m \end{cases}$

DOMINIO $\Leftrightarrow 1.5 < x < 2.5$

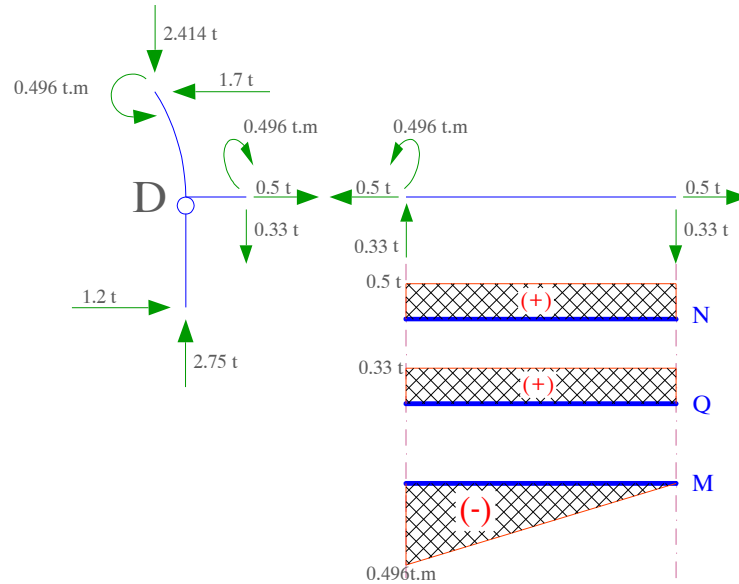
Normal $N \Rightarrow -2.75 \text{ t}$

Cortante $Q \Rightarrow 0.8 - 2 = -1.2 \text{ t}$

Momento $M \Rightarrow 0.8x - 2(x - 1.5) \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=1.5 \Rightarrow M=1.2 \text{ t} \cdot m \\ x=2.5 \Rightarrow M=0 \text{ t} \cdot m \end{cases}$



TRAMO D-E DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < 1.5$

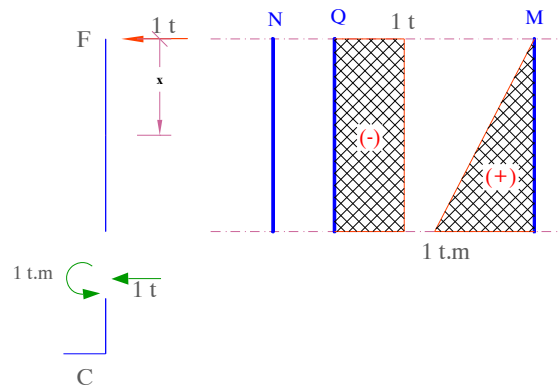


$$\text{Normal } N \Rightarrow 0.5 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow N=0.5 \text{ t} \\ x=1.5 \Rightarrow N=0.5 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Cortante } Q \Rightarrow 0.33 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q=0.33 \text{ t} \\ x=1.5 \Rightarrow Q=0.33 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Momento } M \Rightarrow -0.496 + 0.33x \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow M=-0.496 \text{ t} \cdot \text{m} \\ x=1.5 \Rightarrow M=0 \text{ t} \cdot \text{m} \end{cases}$$

TRAMO F-C DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < 1$

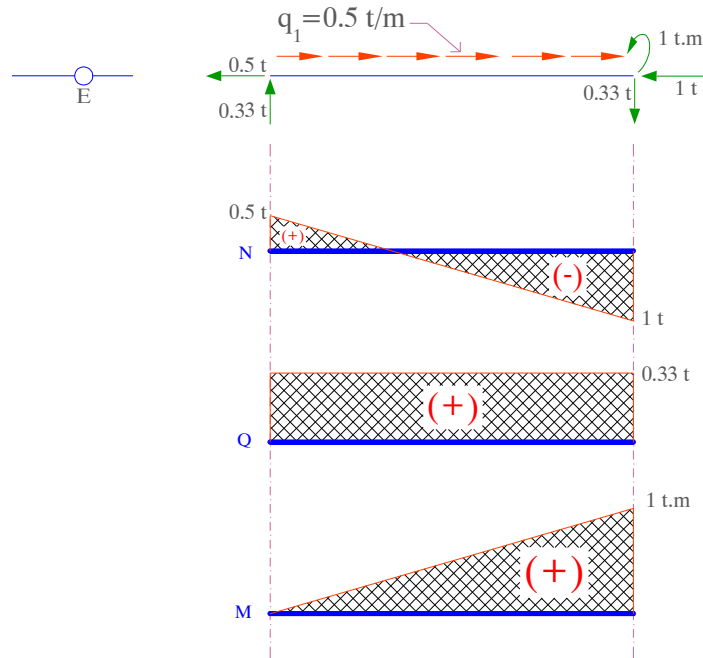


$$\text{Normal } N \Rightarrow 0 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow N=0 \text{ t} \\ x=1 \Rightarrow N=0 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Cortante } Q \Rightarrow -1 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q=0 \text{ t} \\ x=1 \Rightarrow Q=-1 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Momento } M \Rightarrow 1x \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow M=0 \text{ t} \cdot \text{m} \\ x=1 \Rightarrow M=1 \text{ t} \cdot \text{m} \end{cases}$$

TRAMO C-E DOMINIO $\Leftrightarrow 0 < x < 3$

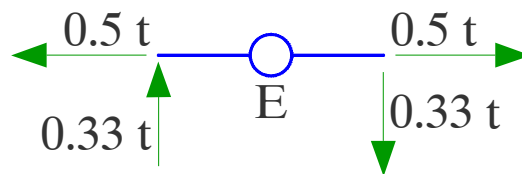


$$\text{Normal } N \Rightarrow -1 + 0.5x \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow N=-1 \text{ t} \\ x=3 \Rightarrow N=0.5 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Cortante } Q \Rightarrow 0.33 \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow Q=0.33 \text{ t} \\ x=3 \Rightarrow Q=0.33 \text{ t} \end{cases}$$

$$\text{Momento } M \Rightarrow 1 - 0.33x \Rightarrow \text{Para} \begin{cases} x=0 \Rightarrow M=1 \text{ t} \cdot \text{m} \\ x=3 \Rightarrow M=0 \text{ t} \cdot \text{m} \end{cases}$$

Paso 3) Verificación en el nudo de control, nudo E:



$$\sum H = 0 ; \sum V = 0 ; \sum M = 0$$

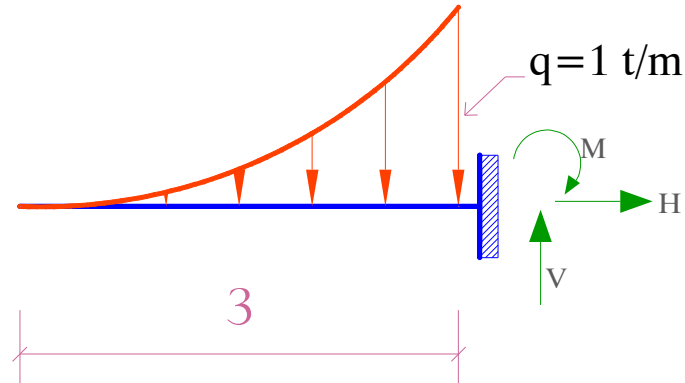
EL NUDO SE ENCUENTRA EN EQUILIBRIO

Luego del análisis realizado, podemos afirmar que **la ESTRUCTURA ESTA EN EQUILIBRIO.**

3.12 EJERCICIOS PROPUESTOS.

Se pide determinar las ecuaciones y diagramas de esfuerzos para los siguientes ejercicios.

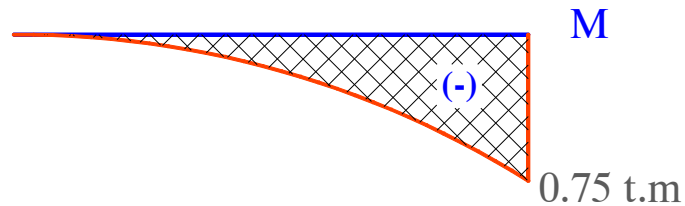
Problema #1



Respuesta:

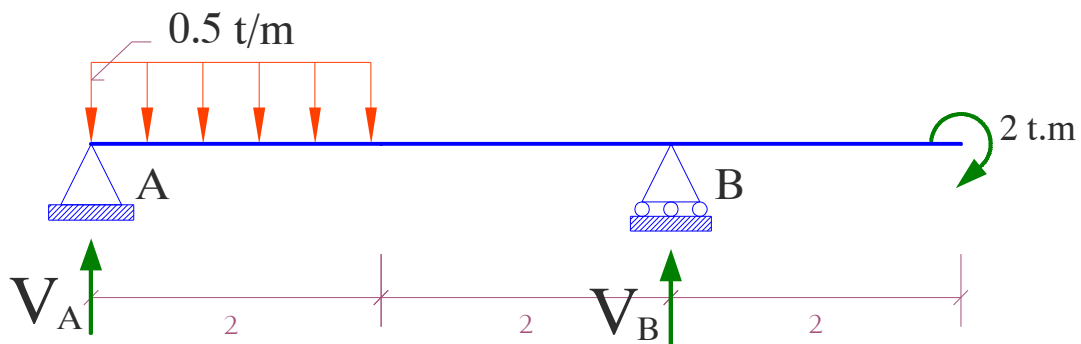
$$V = 1 \text{ t} ; M = 0.75 \text{ t.m}$$

Diagrama de momentos



Problema #2

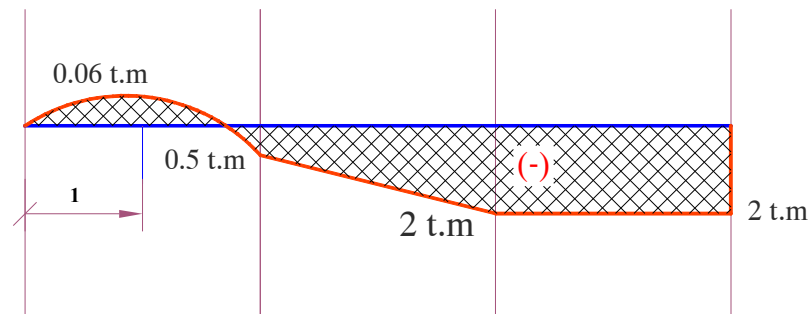
Resolver el siguiente ejercicio por el método relacional y por el método funcional.



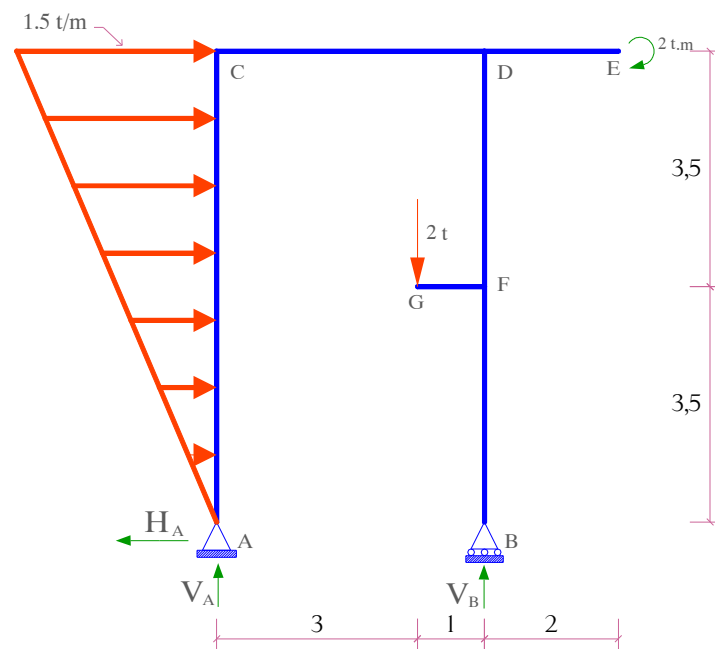
Respuesta:

$$V_A = 0.25 \text{ t} ; V_B = 0.75 \text{ t}$$

Diagrama de momentos:



Problema #3

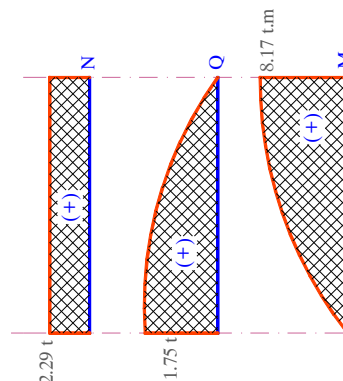


Respuesta:

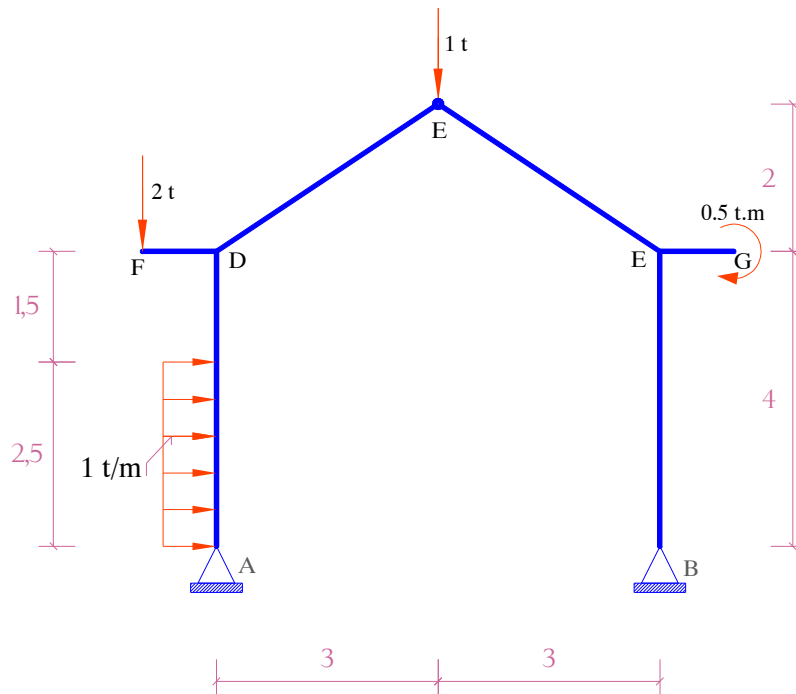
$$H_A = 1.75 \text{ t} ; \quad V_A = 2.29 \text{ t}$$

$$V_B = 3.29 \text{ t}$$

Diagrama tramo A – C



Problema #4

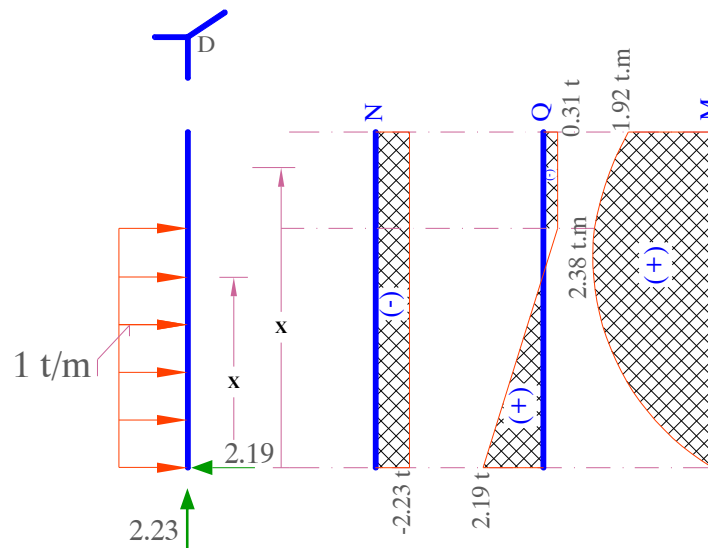


Respuesta:

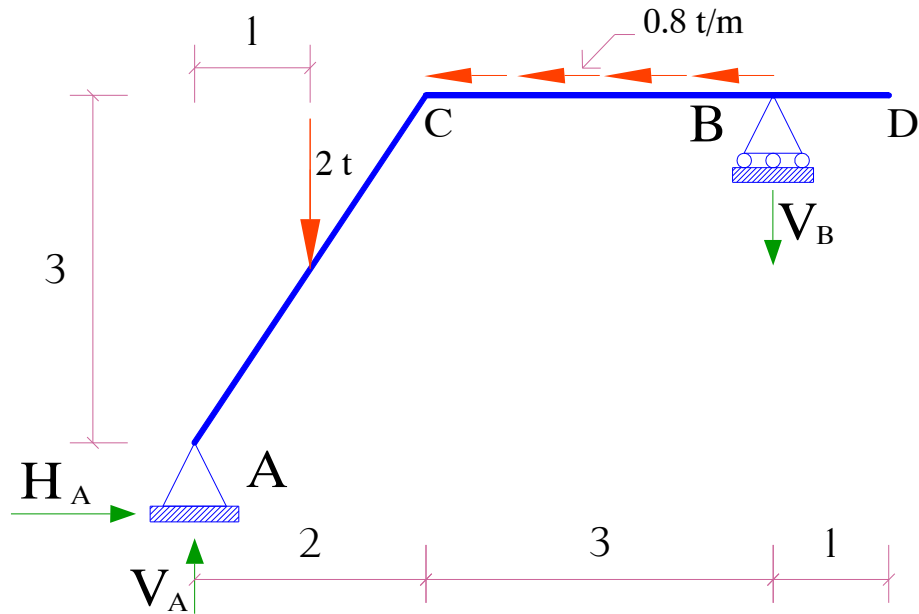
$$H_A = 2.2 \text{ t} \quad ; \quad V_A = 2.23 \text{ t}$$

$$H_B = 0.3 \text{ t} \quad ; \quad V_B = 0.77 \text{ t}$$

Diagrama tramo A – D



Problema #5

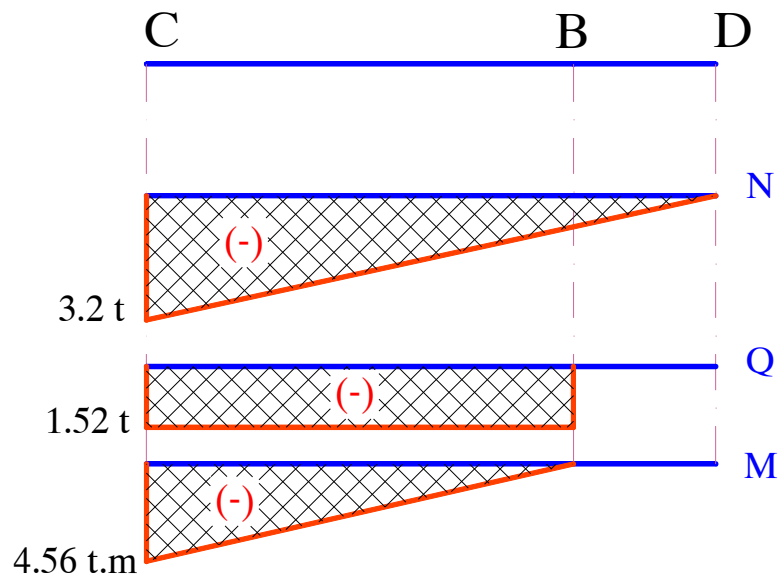


Respuesta:

$$H_A = 3.2 \text{ t} \quad ; \quad V_A = 3.52 \text{ t}$$

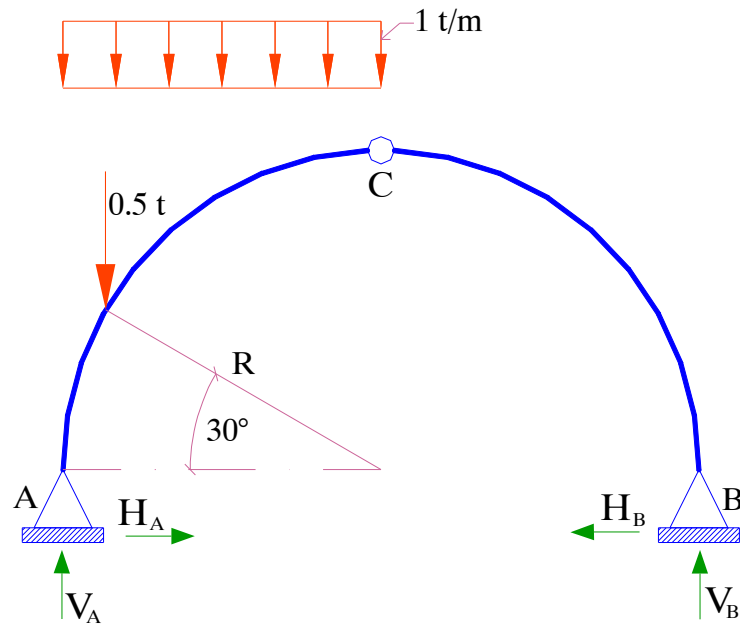
$$V_B = 1.52 \text{ t}$$

Diagrama tramo C – D



Problema #6

$R=2.5\text{ m}$

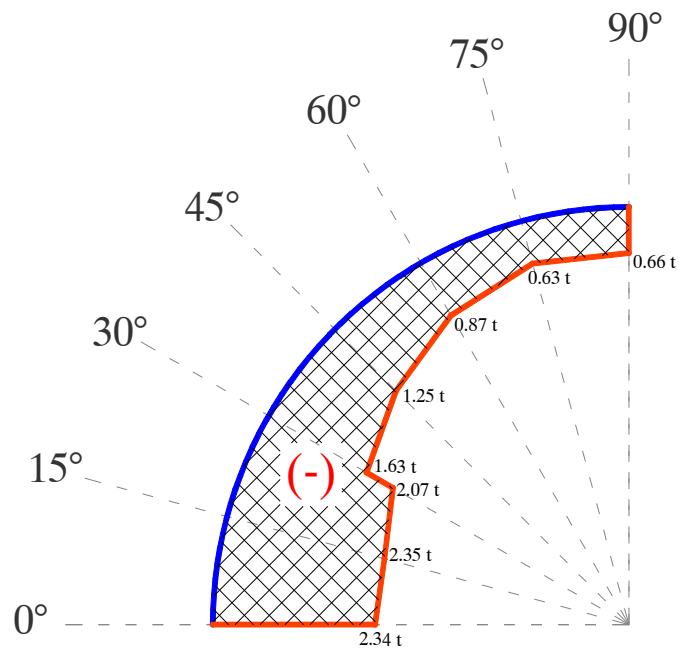


Respuesta:

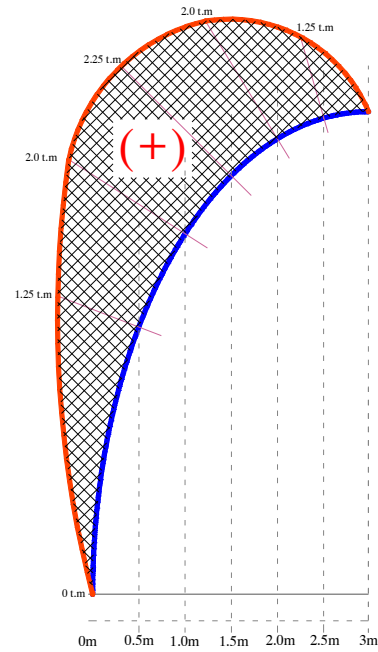
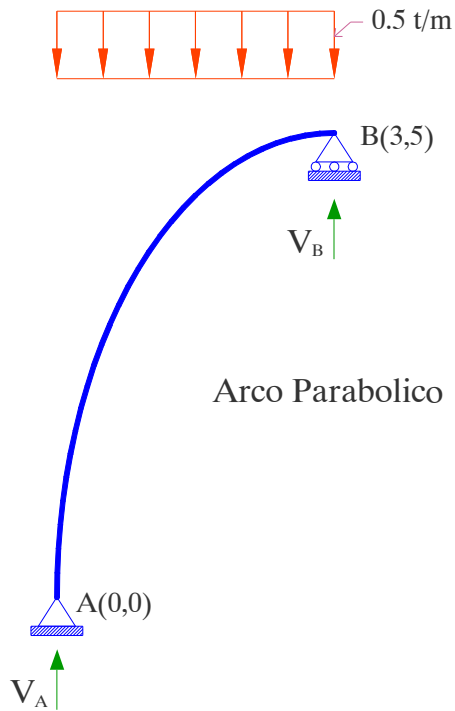
$$H_A = 0.658\text{ t} \quad ; \quad V_A = 2.342\text{ t}$$

$$H_B = 0.658\text{ t} \quad ; \quad V_B = 0.658\text{ t}$$

Diagrama N tramo A – C



Problema #7

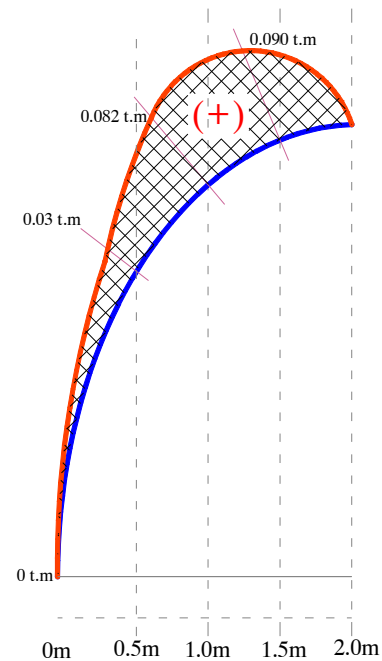
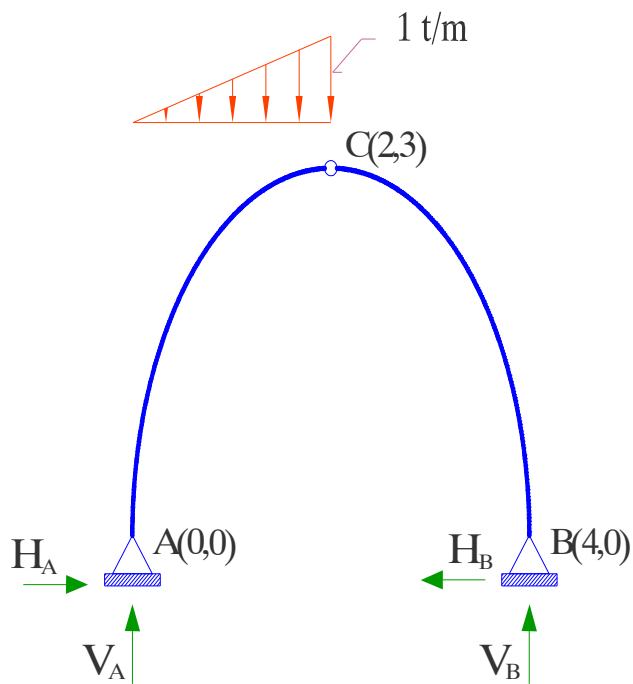


Respuesta:

$$V_A = 3 \text{ t} ; V_B = 3 \text{ t}$$

Diagrama M tramo A – B

Problema #8



Respuesta:

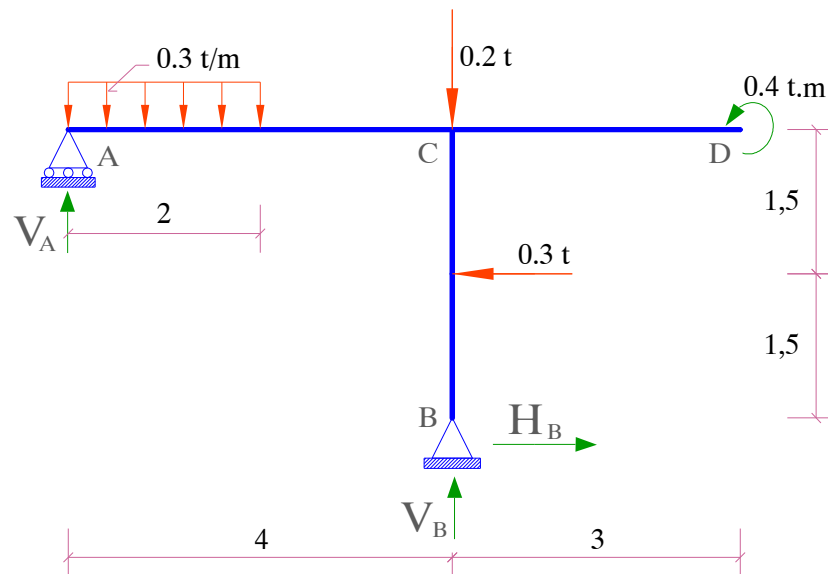
$$H_A = 0.22 \text{ t} ; V_A = 0.67 \text{ t}$$

$$H_B = 0.22 \text{ t} ; V_B = 0.33 \text{ t}$$

Se grafica el diagrama “M” tramo A – C

Problema #9

$$R=2.5 \text{ m}$$

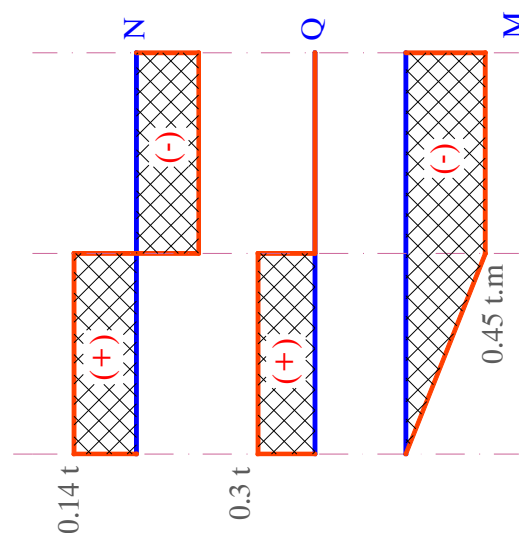


Respuesta:

$$V_A = 0.66 \text{ t} ;$$

$$H_B = 0.3 \text{ t} ; V_B = 0.14 \text{ t}$$

Diagrama N tramo A – C



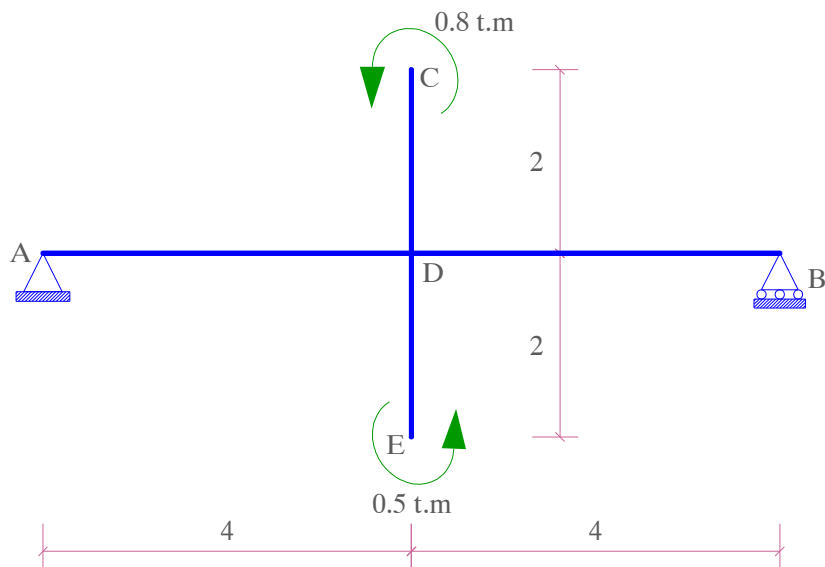
3.13 EVALUACION DIAGNOSTICO DEL CAPITULO.

Para realizar una evaluación diagnostico referente al presente capitulo, se propone al estudiante responder las siguientes preguntas.

- Cuales son los elementos de los esfuerzos internos?
- Cual es la definición de esfuerzo Normal?
- Como se divide el análisis de estructuras?
- Cuales son los métodos para el análisis de vigas?
- Cual es la diferencia entre el análisis por el método relacional y el método funcional?
- En el análisis de pórticos que método de análisis es mas aconsejable y por que?
- En que consiste la verificación de esfuerzos internos en pórticos y hasta cuando es aceptable una variación en los resultados?
- Explique la teoría general de arcos parabólicos?

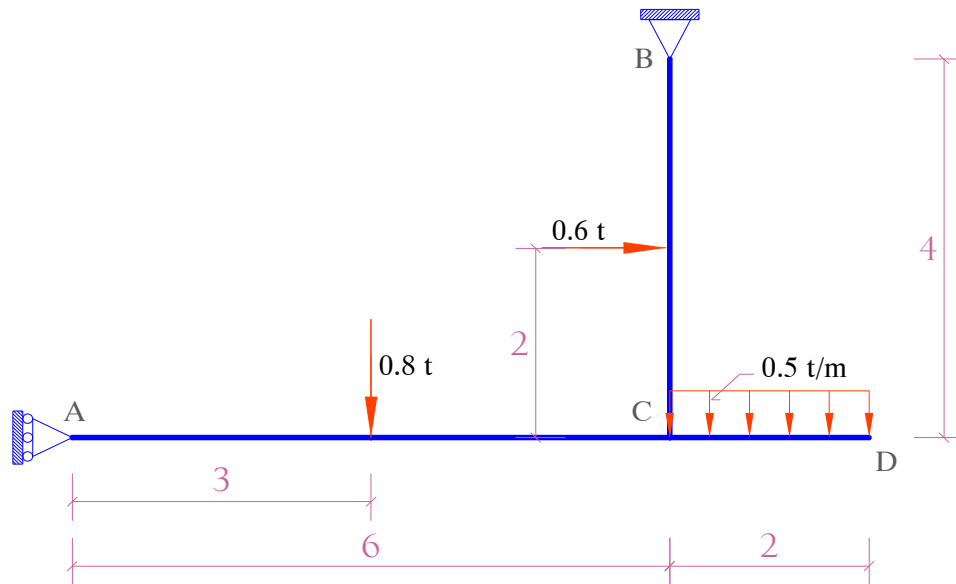
Para concluir este diagnostico se pide determinar las reacciones de apoyo y graficar los diagramas de esfuerzos de las siguientes figuras.

Prob # 1

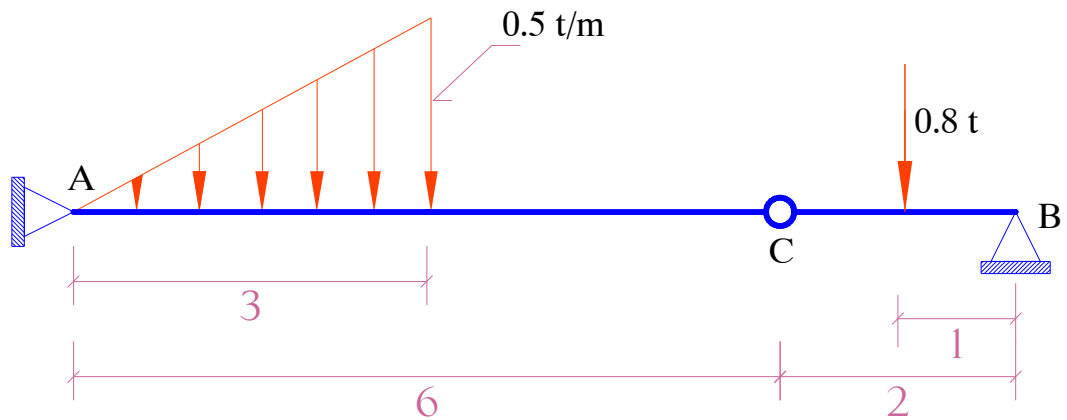




Prob #2



Prob #3





CAPITULO 4

ARMADURAS (CERCHAS)

4.1 OBJETIVO GENERAL.

El estudiante puede conceptualizar la función de una armadura, los tipos de armaduras y su aplicación. Exhibe destrezas para realizar el cálculo de esfuerzos internos y externos en la armadura.

4.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS.

Al terminar este capítulo el estudiante podrá:

- Identificar armaduras isostáticas e hiperestáticas.
- Adquirir habilidades para aplicar diversos métodos para determinar los esfuerzos internos y externos en los miembros.
- Puede recordar un tipo de armadura para cada caso.

4.3 ARMADURAS.

Una cercha puede definirse como una estructura compuesta de un número de elementos o barras unidos en sus extremos por medio de pasadores sin fricción para formar un armazón rígido.

Las fuerzas externas y reacciones se supone que están en el mismo plano de la estructura y

actúan solamente sobre los pasadores. Además, se supone que cada uno coincide con la línea que une los centros de los nudos de sus extremos y que el peso de cada barra es despreciable en comparación con las fuerzas externas que actúan sobre la cercha. De las condiciones anteriores se dice que cada barra de una cercha es un elemento sometido a dos fuerzas y sujeto solamente a fuerzas axiales directas (tracción o compresión). El análisis completo de una cercha consiste en la determinación de las fuerzas axiales internas de todas sus barras.

Las hipótesis que idealizan el análisis de las armaduras son:

- Son estructuras triangulares.
- Las cargas actúan en los nudos.
- Los nudos son articulaciones.
- Las barras están sometidas únicamente a esfuerzos normales de tracción o compresión.

4.4 GRADO DE ISOSTATICIDAD.

En las armaduras se distinguen dos grados de isostaticidad:

4.4.1 Grado Externo. El concepto de análisis es similar al de la viga, pórticos y Arcos.

4.4.2 Grado Interno. Se dividen en dos partes Armaduras Planas y Armaduras Espaciales que determinan el grado interno. Para comprender mejor se ve en las graficas 4.1 (a) y (b)

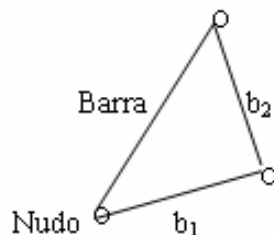


Figura 4.1(a)

$$b_{\text{barras}} = 2 n_{\text{nudos}} - 3$$

En el plano

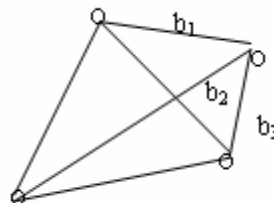


Figura 4.1(b)

$$b = 3 n_{\text{nudos}} - 6$$

En el Espacio

Donde:

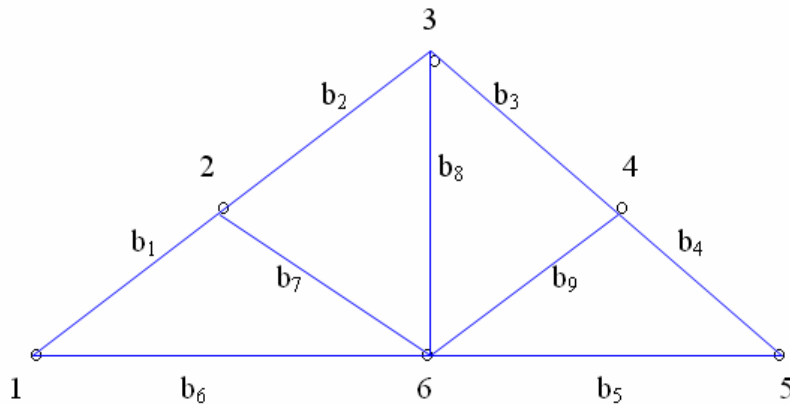
b : es el número de barras

n : el numero de nudos.

Se mostrara el grado de isostaticidad con algunos ejemplos:

Ejercicio #1

Dada la armadura determinar el grado de isostaticidad interno G_I



Solución.-

Sabemos que: n es el numero de nudos $n = 6$

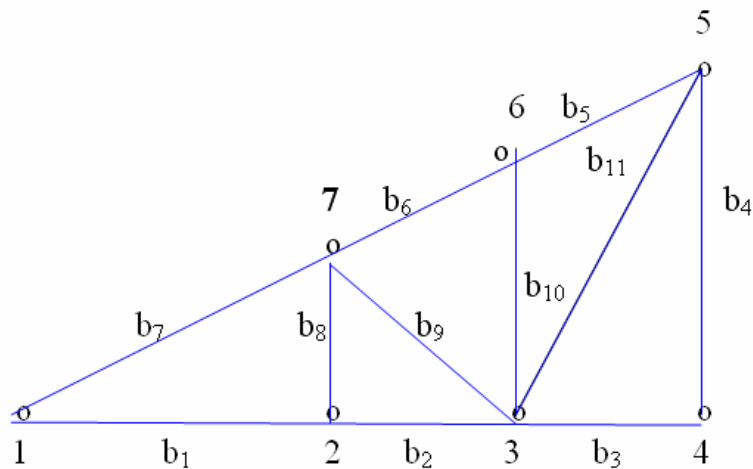
b es el numero de barras $b = 9$

El grado de isostaticidad es: $G_I = b - 2n + r = 9 - 2(6) + 3 = 0$

$G_I = 0$ entonces es ISOSTATICO

Ejercicio #2

Dada la armadura decidir su grado de isostaticidad interno G_I



Solución.-

Sabemos que: n es el numero de nudos $n = 7$

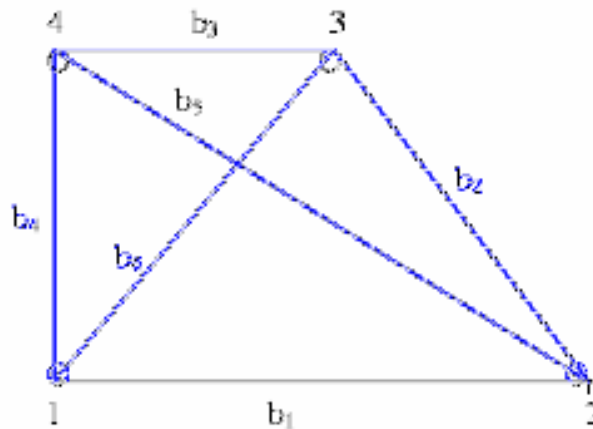
b es el numero de barras $b = 11$

El grado de isotaticidad es: $G_I = b - 2n + r = 11 - 2(7) + 3 = 0$

$G_I = 0$ entonces es ISOSTATICO

Ejercicio #3

Dada la armadura decidir su grado de isotaticidad interno G_I



Solución.-

Sabemos que: n es el numero de nudos $n = 4$

b es el numero de barras $b = 6$

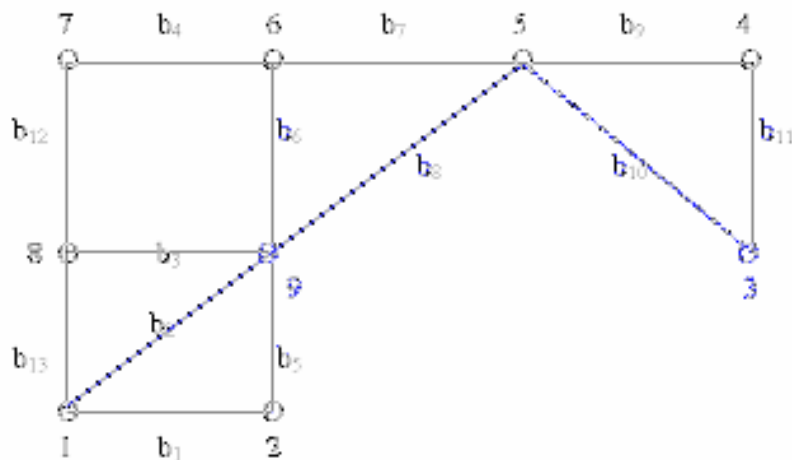
El grado de isotaticidad es:

$$G_I = b - 2n + r = 6 - 2(4) + 3 = 1$$

$G_I = 1$ entonces es ESTATICAMENTE INDETERMINADO

Ejercicio #4

Dada la armadura, decidir su grado de isotaticidad interno G_I .



Solución.-

Sabemos que: n es el numero de nudos $n = 9$

b es el numero de barras $b = 13$

El grado de isotaticidad es: $G_I = b - 2n + r = 13 - 2(9) + 3 = -2$

$G_I = -2$ entonces es ESTRUCTURA NO ADECUADA

PARA RESISTIR CARGAS

Cuando el grado de isostaticidad es $= 0$ estamos hablando de una estructura ESTATICA, en caso de que el grado de isostaticidad fuese ≥ 1 entonces hablamos de una estructura ESTATICAMENTE INDETERMINADA, y si fuese menor que cero entonces seria una estructura NO ADECUADA PARA RESISTIR CARGAS.

Tal como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 4.1 condiciones de isostaticidad

Condiciones de isostaticidad:	Tipo de estructura
$G < 0$	Estructura inestable, no adecuada para resistir cargas
$G = 0$	Estáticamente determinada
$G > 0$	Estáticamente indeterminada

4.5 DETERMINACION DE ESFUERZOS.

La determinación de esfuerzos se reduce a utilizar el signo (+) para la tracción y (-) para la compresión al que esta sometida una barra determinada, tal como se muestra en la siguiente figura.



Figura 4.2 (a)



Figura 4.2 (b)

Para determinar los esfuerzos en las armaduras existen varios métodos entre los cuales mencionaremos los siguientes:

4.5.1 METODO DE LOS NUDOS.-

Si una armadura esta en equilibrio, entonces cada uno de sus nudos debe también estar en equilibrio. Por tanto, el método de los nudos consiste en satisfacer las condiciones de equilibrio $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$ para las fuerzas ejercidas sobre el pasador en cada nudo de las armadura.

El procedimiento siguiente proporciona un método para analizar una armadura mediante el método de los nudos.

Determine primero las reacciones en los soportes considerando el equilibrio de la armadura entera. Luego dibuje el diagrama de cuerpo libre de un nudo que tenga por lo menos una fuerza conocida y cuando más dos fuerzas incógnitas. (Si este nudo esta en uno de los soportes, será necesario conocer las reacciones externas en el soporte).

Use el método descrito antes para establecer el sentido de una fuerza desconocida. Los ejes X y Y deben orientarse de manera que las fuerzas en el diagrama de cuerpo libre puedan descomponerse fácilmente en sus componentes X y Y; luego aplique las dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$. Debe notarse también que si uno de los ejes esta orientado a lo largo de una de las fuerzas desconocidas, la otra fuerza desconocida puede determinarse sumando fuerzas a lo largo del otro eje, despeje las dos fuerzas desconocidas y verifique sus sentidos correctos.

Continué analizando cada uno de los otros nudos, eligiendo nuevamente uno que tenga cuando mas dos incógnitas y por lo menos una fuerza conocida. Dese cuenta que una vez encontrada una fuerza en un miembro por el análisis del nudo en uno de sus extremos, el resultado puede usarse para analizar las fuerzas que actúan en el nudo en el otro extremo. Debe observarse desde luego una estricta adherencia al principio de la acción y de la reacción. Recuerde que un miembro en compresión (empuja) el nudo y que un miembro en tensión (jala) el nudo.

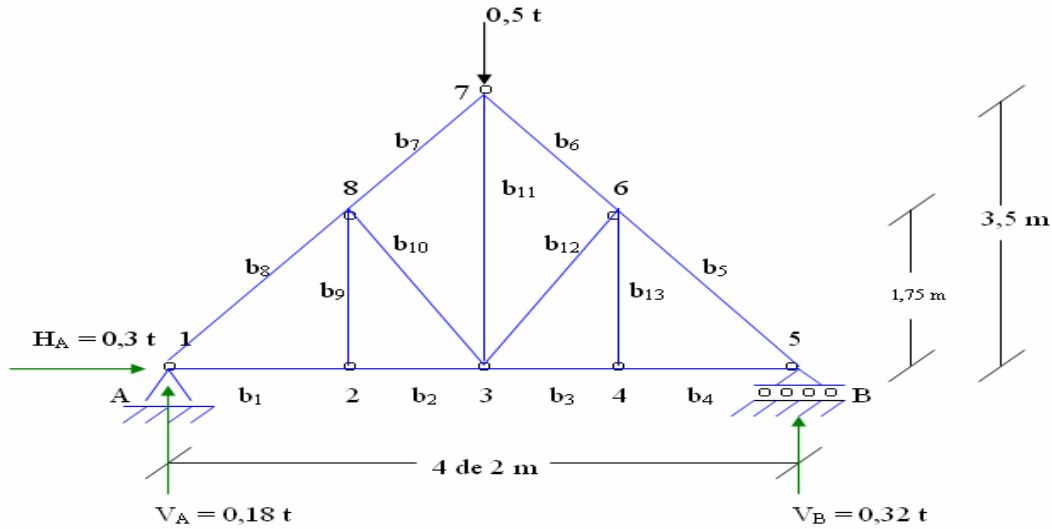
Los pasos que se emplean son:

- Determinación estática
- Calculo de reacciones de apoyo
- Esfuerzos en las barras

Apliquemos este procedimiento para los siguientes ejercicios:

Ejercicio #5

Analizar la armadura plana tipo HOWE.



Solución.-

PASO 1) DETERMINACION ESTATICA.

Grado externo $G_E = 3 - 3 - 0 = 0$

Grado interno $G_I = b - 2n + r = 13 - 2(8) + 3 = 0$

$$G_I = 0$$

$$\frac{3.5}{4} = \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow h = 1.75$$

PASO 2) CÁLCULO DE REACCIONES DE APOYO

$$\sum M = 0 \Rightarrow H_A + 0.3 = 0$$

$$H_A = -0.3 \text{ t}$$

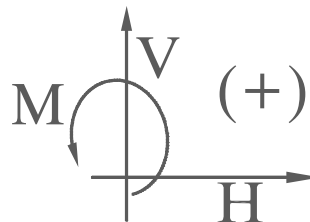
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 0.5 * (4) + 0.3 * (1.75) - 8V_B = 0$$

$$\Rightarrow V_B = 0.32 \text{ t}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 8V_A - 0.5 * (4) + 0.3 * (1.75) = 0$$

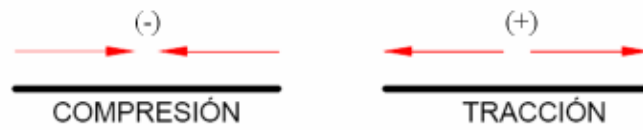
$$\Rightarrow V_A = 0.18 \text{ t}$$

CONVENCION



PASO 3) ESFUERZOS EN LAS BARRAS

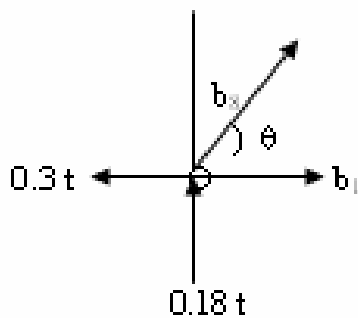
CONVENCION



Para aplicar este método debe escogerse nudos en los cuales a lo sumo concurren 2 barras incógnitas.

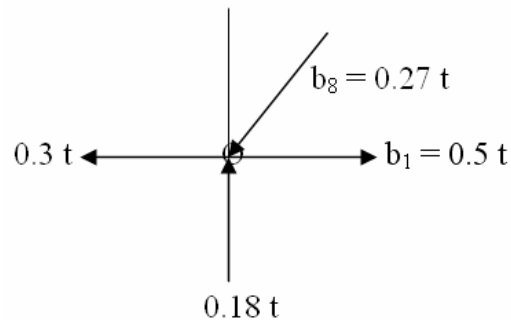
NUDO 1 (SUPUESTO)

$$\tan \theta = \frac{3.5}{4} = \theta = 41,19$$



NUDO 1 (REAL)

$$\text{Sen } \theta = 0.66 \quad ; \quad \text{Cos } \theta = 0.75$$



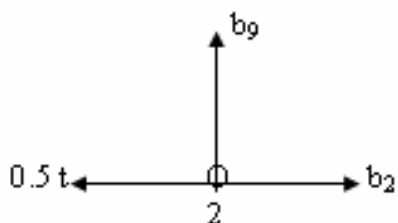
$$\sum H = 0 \Rightarrow -0.3 + b_1 + b_8(0.75) = 0$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow 0.18 + b_8(0.66) = 0$$

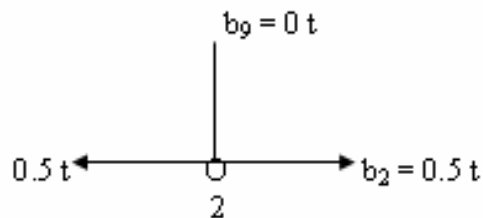
$$\Rightarrow b_8 = -0.27 \text{ t}$$

$$\Rightarrow b_1 = 0.50 \text{ t}$$

NUDO 2 (SUPUESTO)



NUDO 2 (REAL)

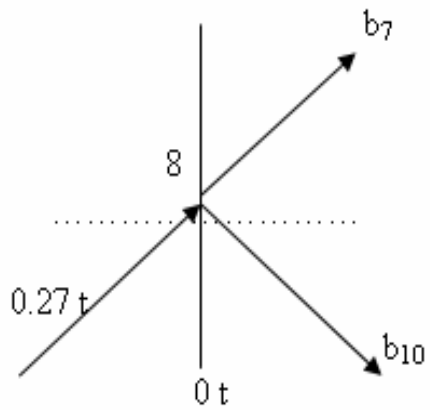


$$\sum H = 0 \Rightarrow -0.5 + b_2 = 0$$

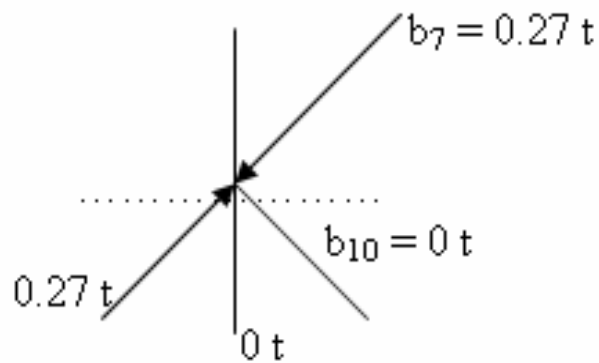
$$\Rightarrow b_2 = 0.5 \text{ t}$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow b_9 = 0$$

NUDO 8 (SUPUESTO)



NUDO 8 (REAL)



$$\sum H = 0 \Rightarrow 0.27 \cos \phi + b_7 \cos \phi + b_{10} \cos \phi = 0$$

$$\Rightarrow 0.27 * 0.75 + b_7 * 0.75 + b_{10} * 0.75 = 0$$

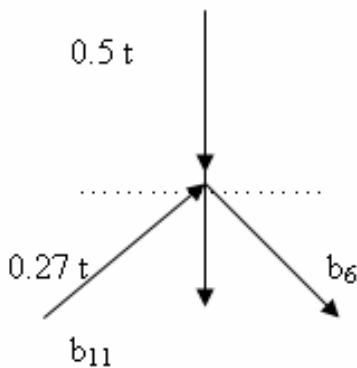
$$\sum V = 0 \Rightarrow 0.27 \sin \phi + b_7 \sin \phi + b_{10} \sin \phi = 0$$

$$\Rightarrow 0.27 * 0.66 + b_7 * 0.66 + b_{10} * 0.66 = 0$$

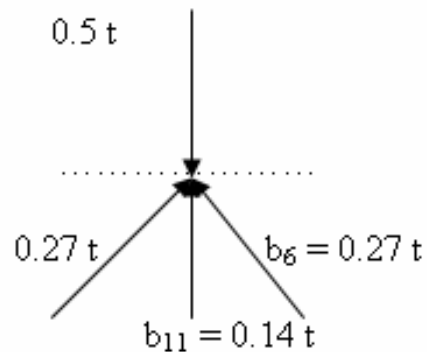
$$\Rightarrow b_7 = -0.27 t$$

$$\Rightarrow b_{10} = 0 t$$

NUDO 7 (SUPUESTO)



NUDO 7 (REAL)



$$\sum H = 0 \Rightarrow 0.27 \cos \phi + b_6 \cos \phi = 0$$

$$\Rightarrow 0.27 * \cos 0.75 + b_6 * \cos 0.75 = 0$$

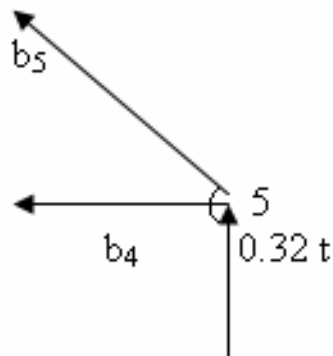
$$\Rightarrow b_6 = -0.27 t$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow 0.27 \sin \phi - 0.5 - b_{11} - (-b_6) \sin \phi = 0$$

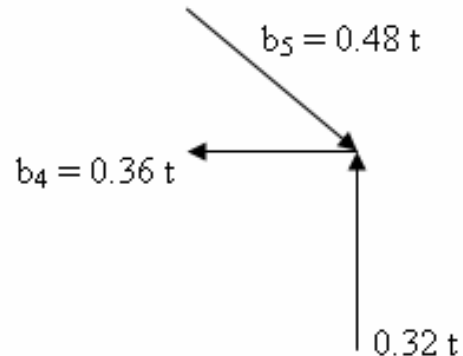
$$\Rightarrow 0.27 * \sin 0.66 - 0.5 - b_{11} - 0.27 * \sin 0.66 = 0$$

$$\Rightarrow b_{11} = -0.14 t$$

NUDO 5 (SUPUESTO)



NUDO 5 (REAL)



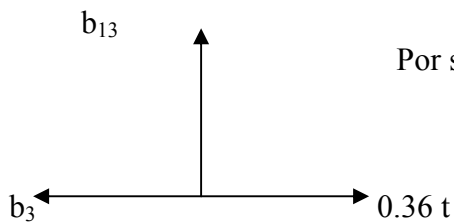
$$\sum V = 0 \Rightarrow 0.32 + b_5 (0.66)$$

$$\Rightarrow b_5 = -0.48 \text{ t}$$

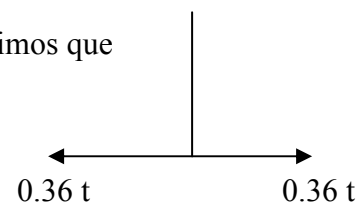
$$\sum H = 0 \Rightarrow -b_4 - b_5 (0.75) = 0$$

$$\Rightarrow b_4 = 0.36 \text{ t}$$

NUDO 4 (SUPUESTO)

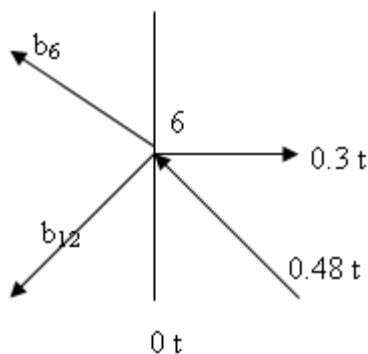


Por simple observación decimos que

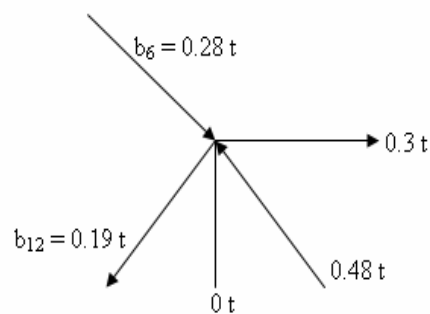


NUDO 4 (REAL)

NUDO 6 (SUPUESTO)



NUDO 6 (REAL)



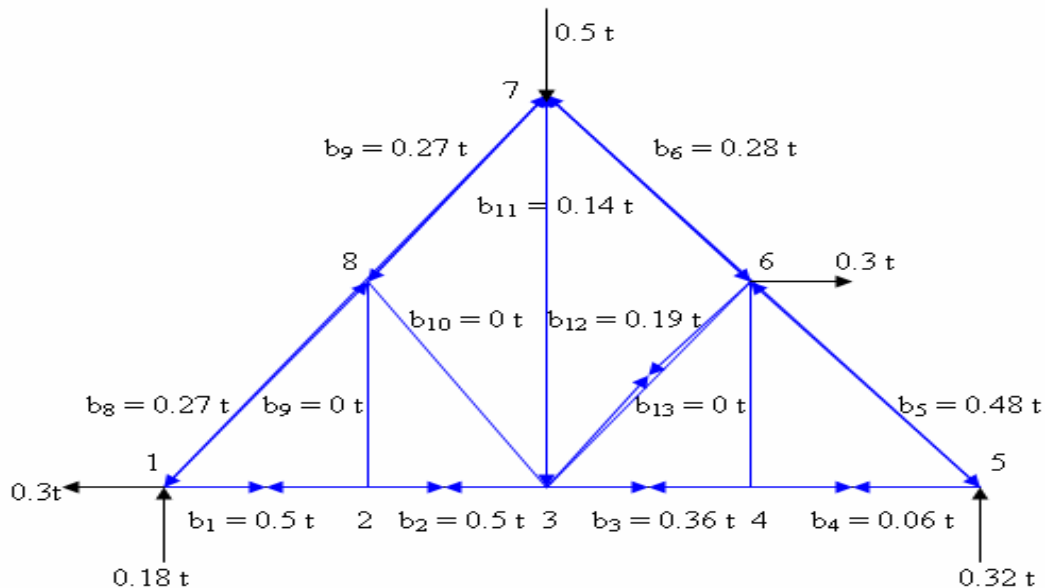
$$\sum H = 0 \Rightarrow -b_{12} \cdot 0.75 - b_6 \cdot 0.75 + 0.3 - 0.48 \cdot 0.75 = 0$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow -b_{12}(0.66) + b_6(0.66) + 0.48(0.66) = 0$$

$$\Rightarrow b_{12} = 0.19 \text{ t}$$

$$\Rightarrow b_6 = -0.28 \text{ t}$$

RESUMEN DE ESFUERZOS



4.5.2 METODO DE LAS SECCIONES.

El método de las secciones consiste en pasar una sección imaginaria por la armadura, cortándola así en dos partes. Si la armadura entera está en equilibrio, entonces cada una de las dos partes debe también estar en equilibrio, en consecuencia pueden aplicarse las tres ecuaciones de equilibrio a cualquiera de esas partes para determinar las fuerzas en los miembros en la sección del corte,

Cuando se usa el método de las secciones para determinar la fuerza en un miembro particular, debe tomarse una decisión sobre como cortar o seleccionar la armadura. Como solo pueden aplicarse tres ecuaciones independientes de equilibrio ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M_o = 0$). A la parte aislada de la armadura, trate de escoger una sección que en general, pase por no más de tres miembros cuyas fuerzas sean desconocidas.

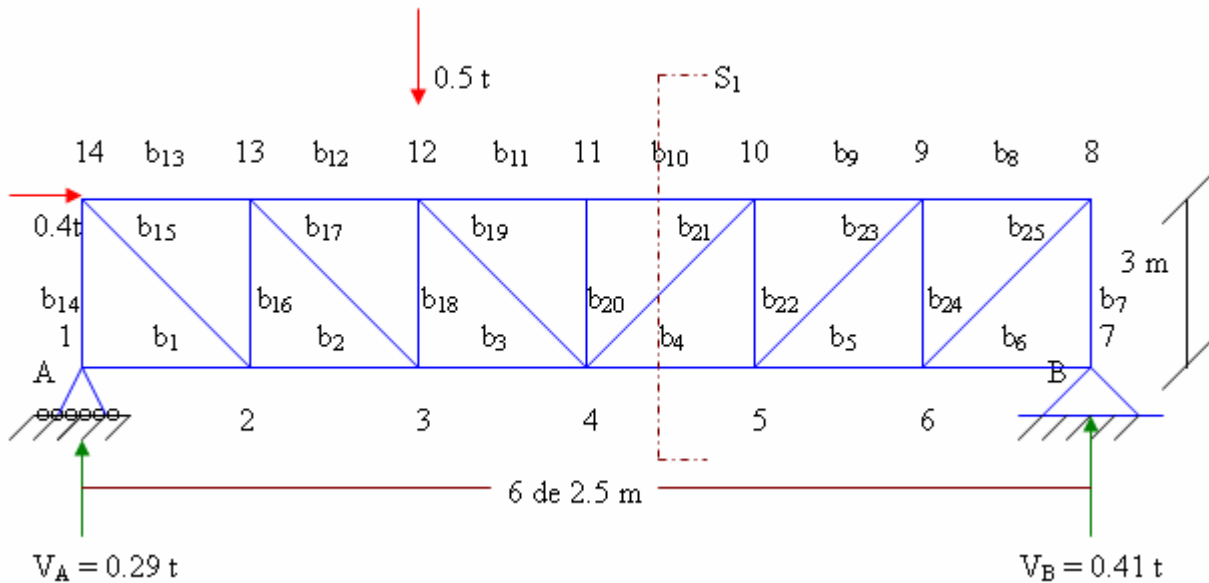
Este tipo de armadura se utiliza con frecuencia en la construcción de puentes, para ferrocarriles y para camiones. Algunas veces se lo utiliza también para cubrir ambientes de Fábricas, universidades y cuartos.

Los pasos que se emplean son:

- Determinación estática
- Cálculo de reacciones de apoyo
- Esfuerzos en las barras

Ejercicio #6

Determinar los esfuerzos en las barras b_{10} y b_{21}



Solución.-

PASO 1) DETERMINACION ESTATICA

$$GI \Rightarrow b = 2n - 3$$

$$\Leftrightarrow 25 = 2(14) - 3 = 25$$

$$GI = 3 - 3 - 0 = 0$$

PASO 2) CÁLCULO DE REACIONES DE APOYO

$$\sum H = 0 \Rightarrow 0.4 + H_B = 0 \Rightarrow H_B = -0.4 \text{ t}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 0.4(3) + 0.5(5) + 0.2(12.5) - 15 V_B = 0$$

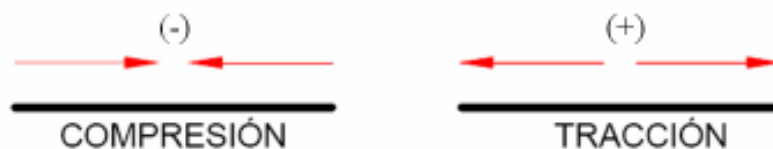
$$\Rightarrow V_B = 0.41 \text{ t}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 15 V_A + 0.4(3) - 0.5(10) - 0.2(2.5) = 0$$

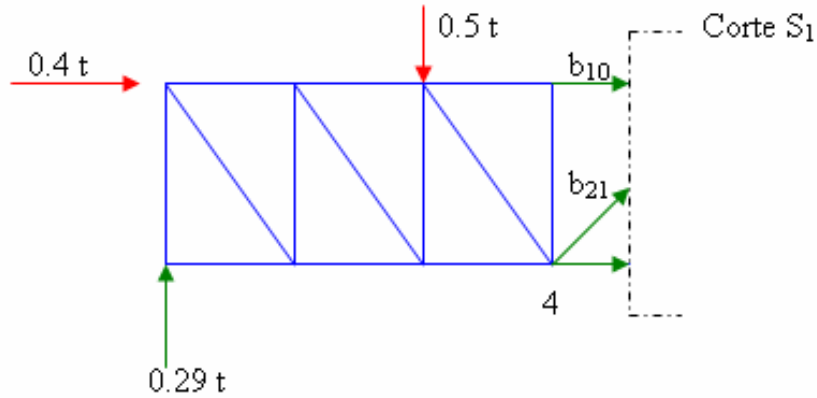
$$\Rightarrow V_A = 0.29 \text{ t}$$

$$\text{Control } \sum V = 0 \Rightarrow 0.29 - 0.5 - 0.2 + 0.41 \text{ t} = 0$$

PASO 3) ESFUERZOS EN LAS BARRAS

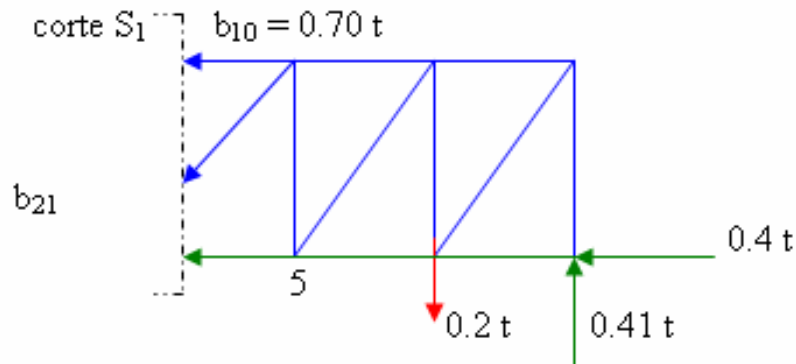


El método consiste en seleccionar (cortar) la percha. La sección a lo sumo debe cortar 3 barras desconocidas. Se separa la percha cortada y se analiza la parte que convenga (Izquierda y Derecha).

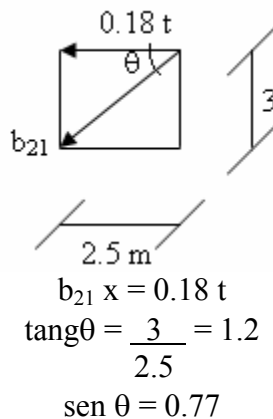


$$\sum M_4 = 0 \Rightarrow 0.29 (7.5) + 0.4 (3) - 0.5 (2.5) + b_{10} (3) = 0$$

$$b_{10} = 0.70 \text{ t compresión}$$



$$\sum M_5 = 0 \Rightarrow -0.41 (5) + 0.2 (2.5) = b_{21} x (3) + 0.7 (3) = 0$$



$$\cos \theta = 0.64$$
$$\Rightarrow \cos \theta = b_{21} \times \Rightarrow b_{21} = 0.28 = 0.28 t$$

$$b_{21} = 0.28 t \quad \text{TRACCION}$$

4.5.3 ARMADURAS EN EL ESPACIO METODO GENERAL.

Cuando varias barras se unen entre sí por sus extremos para formar una configuración en tres dimensiones, la estructura obtenida se llama armadura en el espacial.

La armadura rígida bidimensional más elemental consiste de tres barras unidas por sus extremos, que forman un triángulo, y que agregando a la conformación básica dos barras acopladas a un nuevo nudo, era posible obtener una estructura rígida mayor que definimos como armadura simple. Análogamente, la armadura espacial más sencilla consiste de seis barras unidas por sus extremos, que forman las aristas de un tetraedro ABCD de la figura (a). Agregando tres barras a la conformación básica, tales como AE, BE y CE, acoplándolas a los nudos distintos ya existentes y uniéndolas en un nuevo nudo, podemos obtener una estructura rígida mayor, la cual definimos como *armadura simple*. * Observando que el tetraedro básico tiene seis barras y cuatro nudos y que, cada vez que se agreguen tres barras, se aumenta en uno el número de nudos, concluimos que en una armadura simple espacial el número total de barras es $b = 3n - 6$, siendo n el número total de nudos.

Si la armadura espacial debe presentar construcción total y si las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinadas, los apoyos deberían ser una combinación de esferas, rodillos y rótula que proporcionen seis reacciones desconocidas. Las reacciones desconocidas pueden encontrarse fácilmente resolviendo las seis ecuaciones que expresan que la armadura tridimensional está en equilibrio.

Aunque las barras de una armadura espacial están realmente unidas entre sí mediante conexiones soldadas o remachadas, se considera que cada nudo está constituido por una rótula. De esta manera, no se aplicará ningún par a las barras de la armadura y cada barra podrá tratarse como barra sometida a dos fuerzas. Las condiciones de equilibrio para cada nudo se expresarán por las tres ecuaciones $F_x = 0$, $F_y = 0$, y $F_z = 0$. En el caso de una armadura espacial simple que contengan n nudos, al escribir las ecuaciones de equilibrio para cada nudo se tendrán $3n$ ecuaciones.

Puesto que $b = 3n - 6$, estas ecuaciones son suficientes para determinar todas las fuerzas desconocidas (fuerzas en n barras y sus reacciones en los apoyos). Sin embargo, para evitar la

resolución de muchas ecuaciones simultáneas, los nudos deberán seleccionarse cuidadosamente para descartar aquellos que contengan más de tres fuerzas desconocidas.

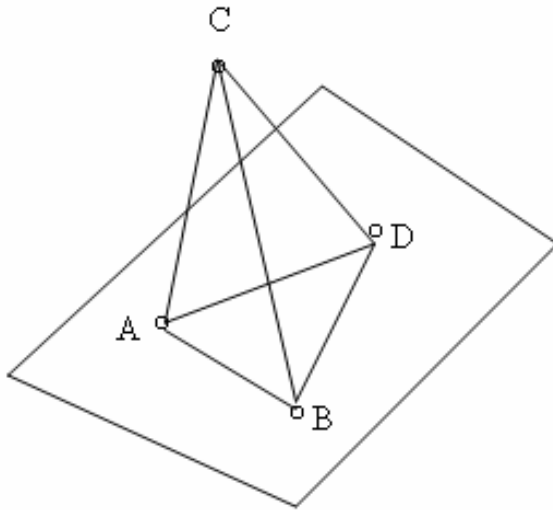


Figura 4.3 (a)

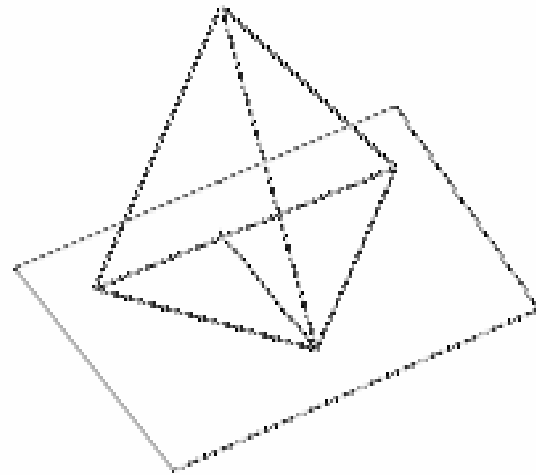
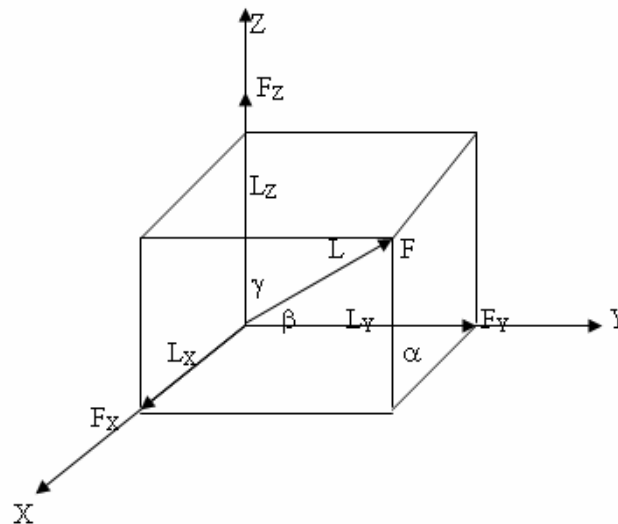


Figura 4.3 (b)



$$\frac{F}{L} = \text{Coeficiente de tensión}$$

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{L_x}{L} \Rightarrow F_x = \frac{F}{L} * L_x = C * L_x$$

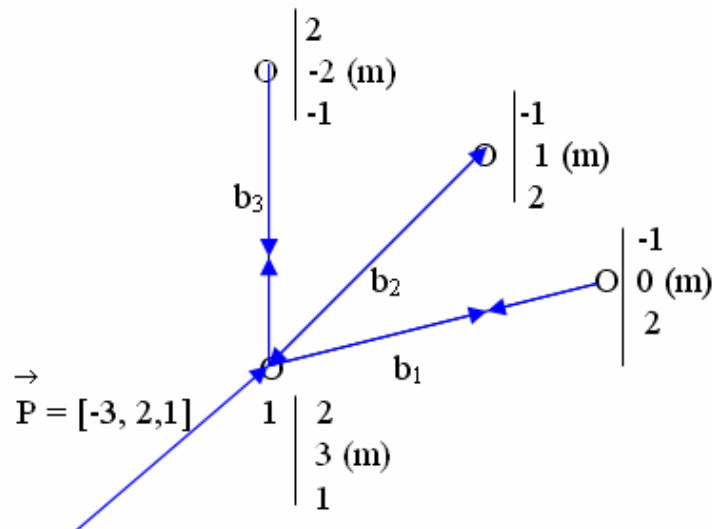
$$\cos \beta = \frac{F_Y}{F} = \frac{L_Y}{L} \Rightarrow F_Y = \frac{F}{L} * L_Y = C * L_Y$$

$$\cos \gamma = \frac{F_Z}{F} = \frac{L_Z}{L} \Rightarrow F_Z = \frac{F}{L} * L_Z = C * L_Z$$

El método que describiremos a continuación puede ser utilizado en el análisis de armaduras planas y espaciales como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejercicio #7

Consideremos un nudo en el espacio al que concurren tres barras y una fuerza $P \leftrightarrow [-3, 2, 1]$. Determinar sus esfuerzos correspondientes.



Solución.-

$$\begin{aligned} L_X &= -1 - 2 = -3 \\ b_1 \Rightarrow L_Y &= 0 - 3 = -3 \\ L_Z &= 2 - 1 = 1 \end{aligned} \quad Lb_1 = \sqrt{-3^2 + (-3)^2 + 1^2} \Rightarrow Lb_1 = 4.36 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} L_X &= -2 - 2 = -4 \\ b_2 \Rightarrow L_Y &= 1 - 3 = -2 \\ L_Z &= 2 - 1 = 1 \end{aligned} \quad Lb_2 = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 1^2} \Rightarrow Lb_2 = 4.58 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} L_X &= 2 - 2 = 0 \\ b_3 \Rightarrow L_Y &= -2 - 3 = -5 \\ L_Z &= -1 - 1 = -2 \end{aligned} \quad Lb_3 = \sqrt{0^2 + 5^2 + (-2)^2} \Rightarrow Lb_3 = 5.39 \text{ m}$$

$$\sum F_1 = 0$$

$$F_X^{b1} + F_X^{b2} + F_X^{b3} + P_X = 0$$

$$F_Y^{b1} + F_Y^{b2} + F_Y^{b3} + P_Y = 0$$

$$F_Z^{b1} + F_Z^{b2} + F_Z^{b3} + P_Z = 0$$

$$F_X^{b1} = C_1 * L_X^{b1} = -3 C_1$$

$$F_Y^{b3} = C_3 * L_Y^{b3} = -5 C_3$$

$$F_Z^{b2} = C_2 * L_Z^{b2} = -1 C_2$$

Entonces $-3 C_1 + (-4) C_2 + (0) C_3 + (-3) = 0$

$-3 C_1 + (-2) C_2 + (-5) C_3 + (2) = 0$

$1 C_1 + (1) C_2 + (-2) C_3 + (1) = 0$

Luengo tenemos: $C_1 = 1,35$ $C_2 = -1,76$ $C_3 = 0,29$

Entonces: $F_{b1} = 1.35 * 4.36 = 5.89 \text{ t TRACCION}$

$F_{b2} = -1.76 * 4.58 = 8.06 \text{ t COMPRESION}$

$F_{b3} = 0.29 * 5.39 = 1.56 \text{ TRACCION}$

4.6 UTILIZACION DE ARMADURAS.

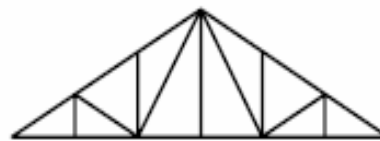
Una armadura es una construcción reticulada conformada generalmente por triángulos formados por elementos rectos y que se utiliza para soportar cargas. Las armaduras pueden ser planas o espaciales. Ejemplos típicos de armaduras son: puentes, cerchas, torres de transmisión, cúpulas de estadios, etc. A continuación se presentan algunos ejemplos de armaduras típicas

4.6.1 Tipos de armaduras o Cerchas.

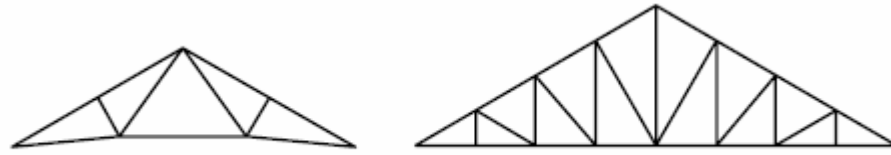
Existen los diferentes tipos de armaduras.



a) Fink o W

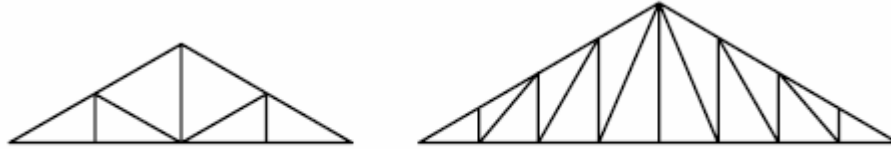


b) En Abanico



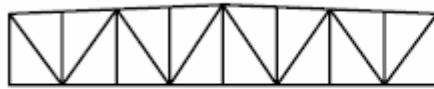
c) Fink combada

d) Howe

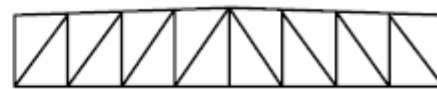


e) De pendolón

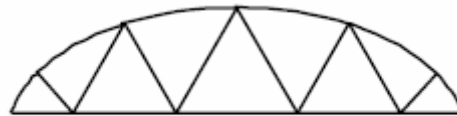
f) Pratt



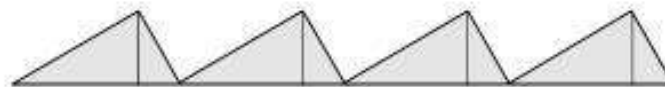
g) Warren Plana



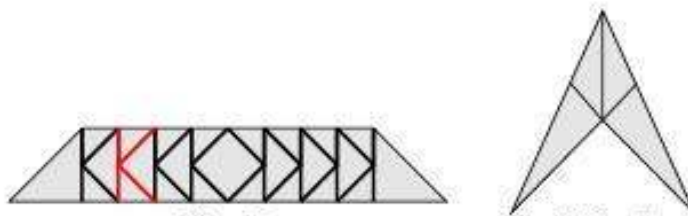
h) Pratt plana



i) De arco y cuerda



"Dientesierra"



Tipo K

"Tijera"

Mismas que mayormente son utilizadas en la construcción de techos, puentes, y cubiertas.

4.6.2 ARMADURAS PARA TECHOS.

Las armaduras existentes para la construcción de techos mayormente son analizadas en el plano, pero también existen armaduras realizadas en el espacio, como vemos a continuación:

- Observemos una cercha de pendolón en el plano, mayormente usada en la construcción de techo en viviendas.



Figura 4.4 Cercha tipo pendolón en el plano

- Las cerchas pueden usarse para cubrir y soportar cargas distribuidas sobre una superficie. Usando el tetraedro, extensión espacial del triángulo y combinándolos se obtienen las denominadas **estructuras espaciales** o entramados espaciales articulados, usados para soportar techos de grandes luces, como los que se presentan en bodegas, centrales de transporte, auditorios y estaciones de servicio. Los miembros se construyen con elementos tubulares, de sección circular o cuadrada de acero estructural, (ver detalle de uniones en la figura).

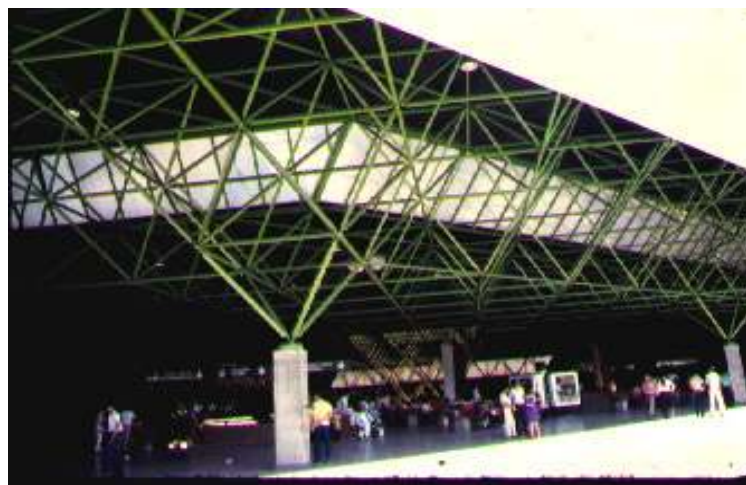


Figura 4.5 Cercha espacial en la terminal de transportes de Medellín

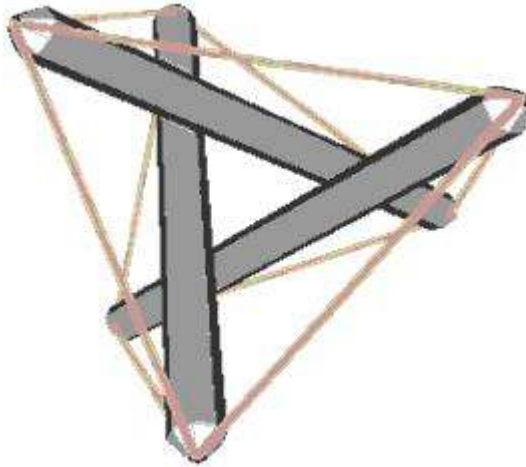


Figura 4.6 Esquema de una estructura tipo tensigrity o espacial

4.6.3 ARMADURAS PARA PUENTES.

La cercha es una de las formas estructurales más ampliamente usada en la construcción de puentes de luces pequeñas y medianas, pero diseñados para luces intermedias hasta los 50 m de luz simple.



Figura 4.7 Puente de cerchas vehicular, tablero inferior

Ahora que el acero estructural está de moda, vale la pena mencionar una de sus mayores ventajas: su construcción en el taller, en piezas pequeñas y la facilidad de traslado al sitio para su armado; esto le permite competir con los puentes de concreto preesforzado, en sitios inhóspitos de la geografía nacional, o cuando el factor tiempo de construcción es una variable fundamental para la obra. Normalmente la disposición de los puentes de cercha es como se muestra en la figura 4.7 Se colocan dos cerchas paralelas que se arriostran entre sí; la transmisión de las cargas de los vehículos

se hace en dos tipos: de tablero inferior (la forma más común) y de tablero superior, según el gálibo sobre el cauce lo permita.



Figura 4.8 estabilización lateral de las cerchas de tablero inferior

Existen también puentes elevados peatonales, donde se realiza la combinación de materiales como acero, madera y hormigón, ver figura 4.9.



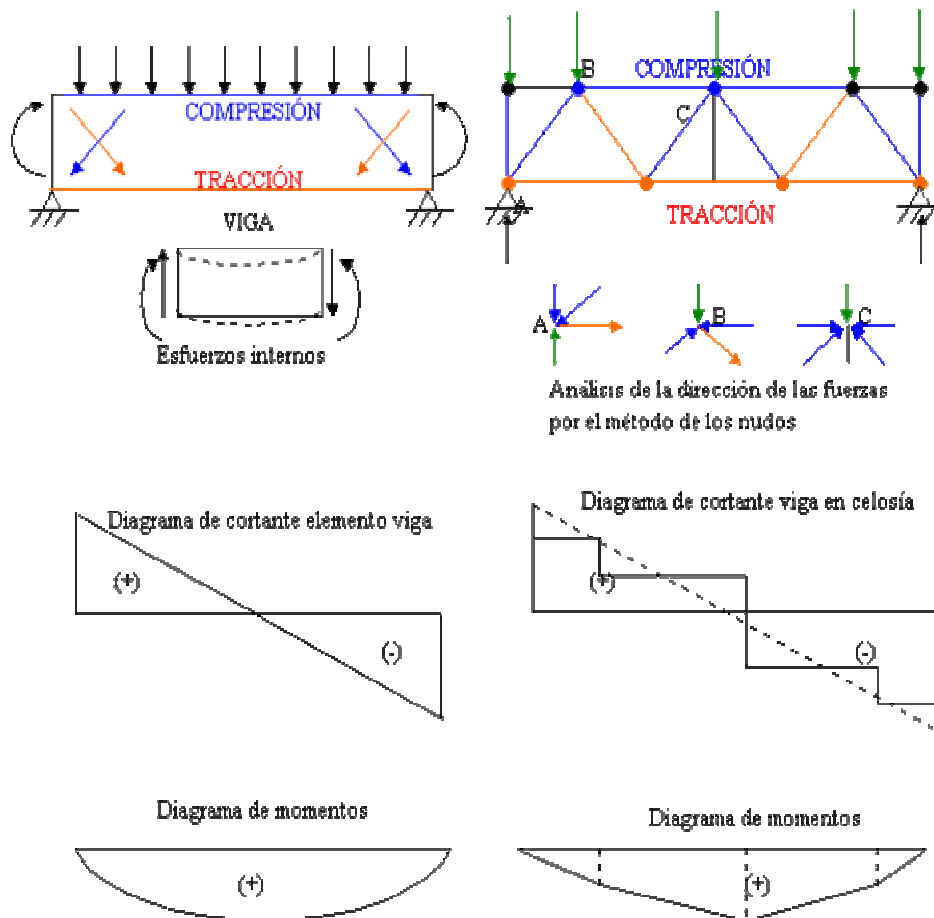
Figura 4.9 Viga Vierendel de acero usada en puente peatonal

Para facilitar el estudio de las armaduras se hacen las siguientes suposiciones:

- Las uniones de los miembros se hacen por medio de pasadores lisos. En la práctica las uniones se hacen por medio de láminas llamadas cartelas, que pueden estar atornilladas, remachadas o soldadas con los elementos de la estructura.
- Las fuerzas que va a soportar se ejercen sobre las uniones.

- El peso de los elementos es despreciable en comparación con las cargas aplicadas.

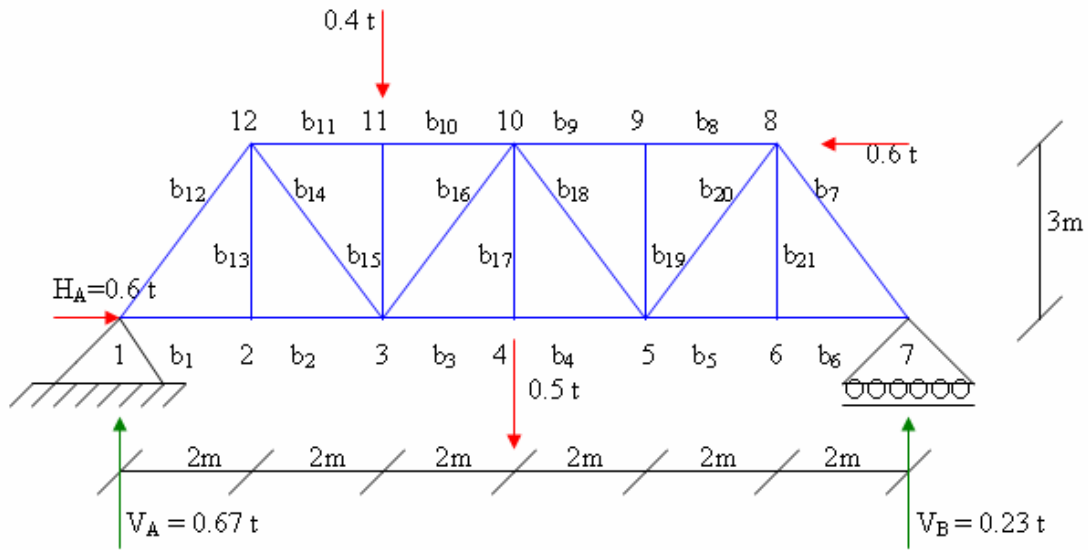
Como consecuencia de las consideraciones anteriores, los elementos de la armadura son cuerpos sometidos a dos fuerzas; esto quiere decir que cada elemento solo puede estar sometido a tensión o a compresión.



4.7 PROBLEMAS RESUELTOS.

Ejercicio #8

Armadura tipo PRATT. Se desea determinar el esfuerzo axial en cada una de las barras. (METODO DE LOS NUDOS)



Solución.-

PASO 1) DETERMINACION ESTATICA

$$G_I = b - 2n + r$$

$$G_I = 21 - 2(12) + 3 = 0 \text{ ISOSTATICO}$$

PASO 2) CÁLCULO DE REACCIONES DE APOYO

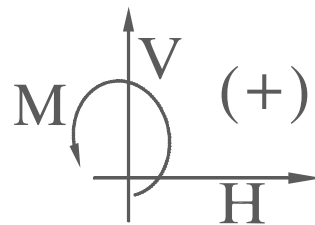
$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A - 0.6 = 0 \Rightarrow H_A = 0.6 \text{ t}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 0.4(4) + 0.5(6) - 0.6(3) = 0 \Rightarrow V_B = 0.23 \text{ t}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 12 V_A - 0.4(8) - 0.5(6) - 0.6(3) = 0 \Rightarrow V_A = 0.67 \text{ t}$$

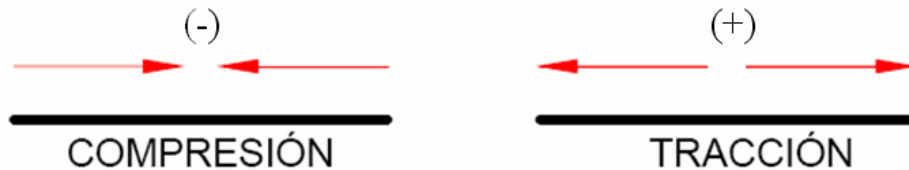
$$\text{CONTROL } \sum V = 0 \Rightarrow 0.67 - 0.4 - 0.5 + 0.23 = 0$$

CONVENCION



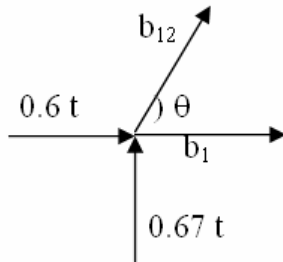
PASO 3) ESFUERZOS EN LAS BARRAS

CONVENCION

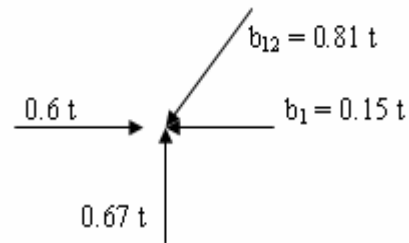


Cuando se desconoce sentido de esfuerzos asumir Tracción.

NUDO 1 (SUPUESTO)



NUDO 1 (REAL)



$$\text{Tag } \theta = \frac{3}{2}$$

$$\text{Sen } \theta = \frac{3}{3.61} = 0.83$$

$$\text{Cos } \theta = \frac{2}{3.61} = 0.55$$

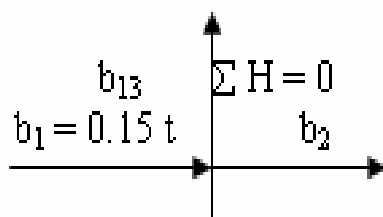
$$\sum H = 0 \quad 0.6 + b_1 + 0.55 b_{12} = 0$$

$$\sum V = 0 \quad \therefore 0.67 + 0.83 b_{12} = 0 \Rightarrow b_{12} = -0.81 t$$

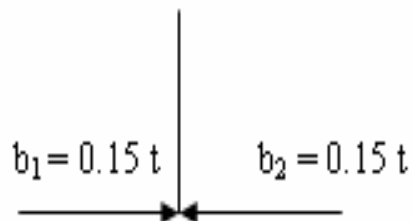
$$\Rightarrow b_1 = -0.15 t$$

Como se puede observar en cada nudo se dispone solamente de 2 ecuaciones ($\sum H = 0$ y $\sum V = 0$) \therefore Cuando se escoge un nudo debe cuidarse que a ese nudo concurran a lo sumo 2 barras desconocidas.

NUDO 2 (SUPUESTO)



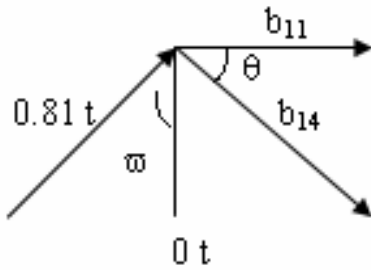
NUDO 2 (REAL)



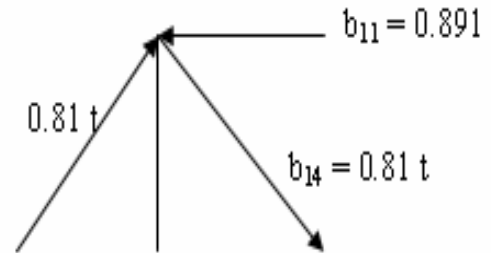
$$\Rightarrow 0.15 + b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = -0.15 t$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow b_{13} = 0$$

NUDO 12 (SUPUESTO)



NUDO 12 (REAL)



$$\text{Sen } \varpi = \frac{2}{3.61} = 0.55; \text{Cos } \varpi = 0.83$$

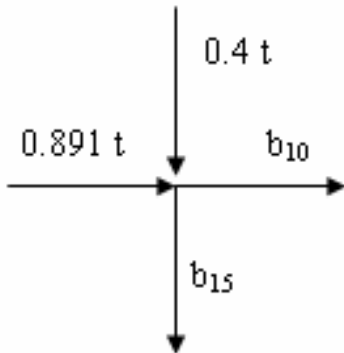
$$\sum H = 0 \Rightarrow 0.81 (0.83) + b_{11} + 0.55 b_{14} = 0$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow 0.81 (0.83) - b_{14} (0.83) = 0$$

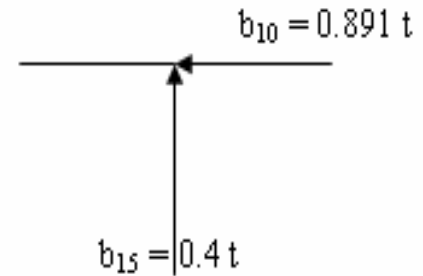
$$\Rightarrow b_{14} = 0.81 \text{ t}$$

$$\Rightarrow b_{11} = -0.891 \text{ t}$$

NUDO 11 (SUPUESTO)



NUDO 11 (REAL)



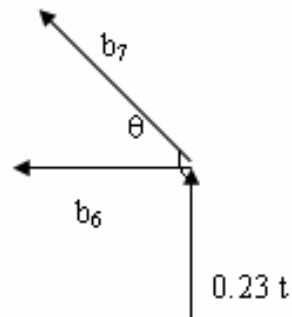
$$\sum H = 0 \Rightarrow 0.891 + b_{10} = 0$$

$$\Rightarrow b_{10} = -0.81 \text{ t}$$

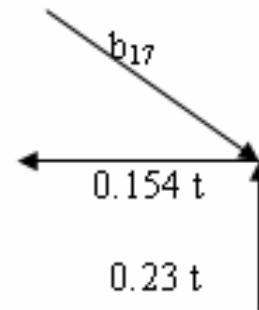
$$\sum V = 0 \Rightarrow b_{15} + 0.4 = 0$$

$$\Rightarrow b_{15} = -0.4 \text{ t}$$

NUDO 7 (SUPUESTO)



NUDO 7 (REAL)



$$\text{Sen } \theta = 0.83; \text{Cos } \theta = 0.55$$

$$\sum H = 0 \Rightarrow b_6 + b_7 (0.55) = 0$$

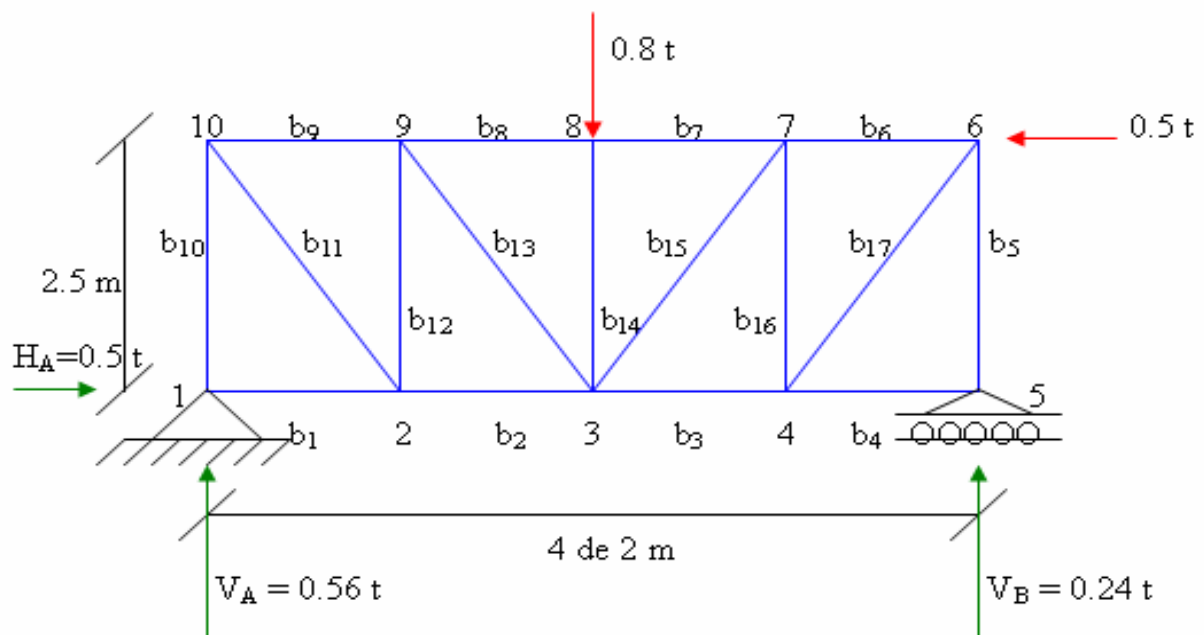
$$\sum V = 0 \Rightarrow 0.23 + b_7 (0.83) = 0$$

$$\Rightarrow b_7 = -0.28 \text{ t}$$

$$\Rightarrow b_6 = 0.154 \text{ t}$$

Ejercicio #9

Analizar la armadura tipo PRATT. (Método de los Nudos)





Solución.-

PASO 1) DETERMINACION ESTATICA

$$G_I = b - 2n + 3 = 0$$

$$G_I = 17 - 2(10) + 3 = 0 \quad \text{ISOSTATICA}$$

PASO 2) CÁLCULO DE REACCIONES DE APOYO

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A - 0.5 = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 0.8(4) - 0.5(2.5) - 8 V_B = 0$$

$$\Rightarrow V_B = 0.24 \text{ t}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 8 V_A - 0.8(4) - 0.5(2.5) = 0$$

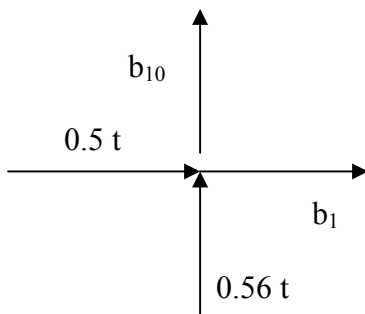
$$\Rightarrow V_A = 0.56 \text{ t}$$

Ecuación de control:

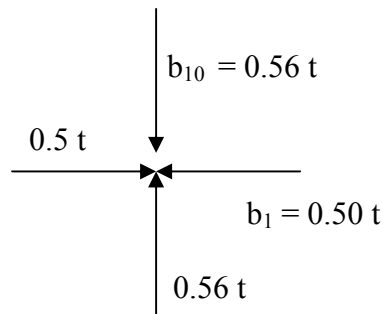
$$\sum V = 0 \Rightarrow 0.56 - 0.8 + 0.24 = 0$$

PASO 3) ESFUERZOS EN LAS BARRAS

NUDO 1 (SUPUESTO)



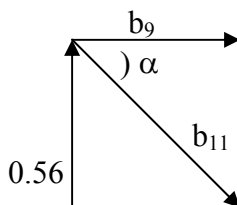
NUDO 1 (REAL)



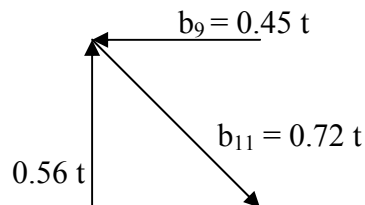
$$\sum H = 0 \Rightarrow b_1 + 0.5 = 0 \Rightarrow b_1 = -0.5 \text{ t}$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow b_{10} + 0.56 = 0 \Rightarrow b_{10} = -0.56 \text{ t}$$

NUDO 10 (SUPUESTO)



NUDO 10 (REAL)



$$\text{Tag } \alpha = \frac{2.5}{2} \Rightarrow \cos \alpha = 0.62 \quad H$$

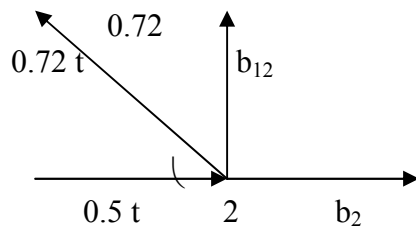
$$\text{Sen } \alpha = 0.78 \quad V$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow 0.56 - b_{11} (0.78) = 0 \Rightarrow b_{11} = 0.72 \text{ t}$$

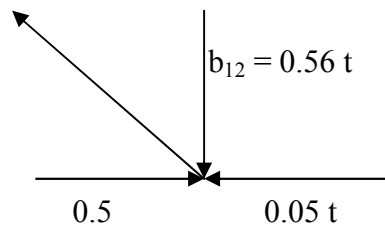
$$\sum H = 0 \Rightarrow b_9 + b_{11} (0.62) = 0$$

$$b_9 + 0.72 (0.62) = 0 \Rightarrow b_9 = -0.45 \text{ t}$$

NUDO 2 (SUPUESTO)



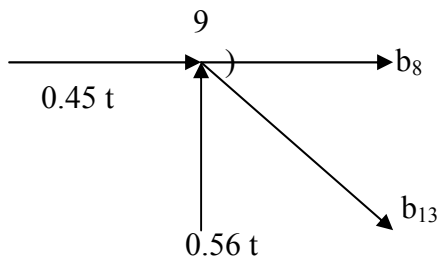
NUDO 2 (REAL)



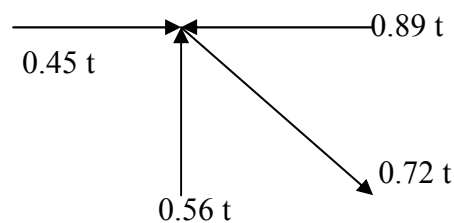
$$\sum V = 0 \Rightarrow b_{12} + 0.72 (0.78) = 0 \Rightarrow b_{12} = -0.56 \text{ t}$$

$$\sum H = 0 \Rightarrow 0.5 + b_2 - 0.72 (0.62) = 0 \Rightarrow b_{12} = -0.05 \text{ t}$$

NUDO 9 (SUPUESTO)



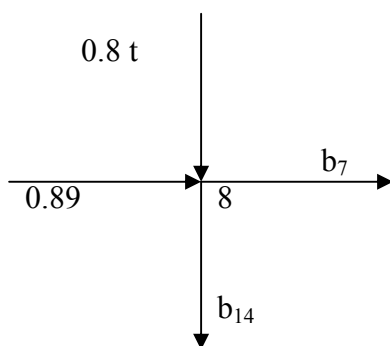
NUDO 9 (REAL)



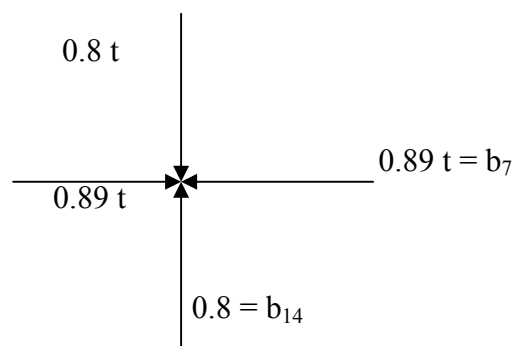
$$\sum V = 0 \Rightarrow 0.56 - b_{13} (0.78) = 0 \Rightarrow b_{13}$$

$$\sum H = 0 \Rightarrow 0.45 + b_8 + 0.72 (0.62) = 0 \Rightarrow b_8 = -0.89$$

NUDO 8 (SUPUESTO)



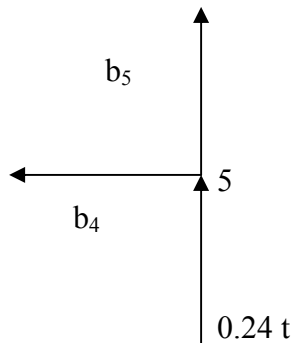
NUDO 8 (REAL)



$$\sum H = 0 \Rightarrow 0.89 + b_7 = 0 \Rightarrow b_7 = -0.89 \text{ t}$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow 0.8 + b_{14} = 0 \Rightarrow b_{14} = -0.8 \text{ t}$$

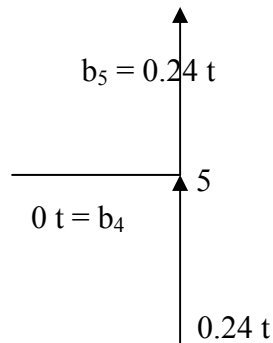
NUDO 5 (SUPUESTO)



$$\sum H = 0 \Rightarrow -b_4 = 0 \text{ t} \Rightarrow b_4 = 0 \text{ t}$$

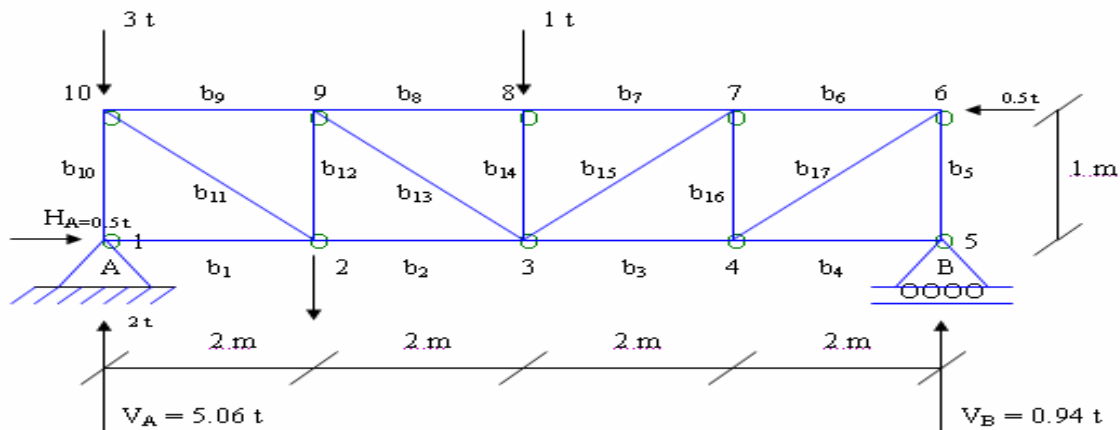
$$\sum V = 0 \Rightarrow 0.24 + b_5 = 0 \Rightarrow b_5 = -0.24 \text{ t}$$

NUDO 5 (REAL)



Ejemplo #10

Analizar la armadura plana tipo PRATT de amplia utilización en la construcción de puentes.



Solucion.-

PASO 1) DETERMINACION ESTATICA

$$G_I = b - 2n + 3 = 0$$

$$G_I = 17 - 2(20) + 3 = 0 \quad \text{ISOSTATICA}$$

PASO 2) CÁLCULO DE REACCIONES DE APOYO

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A - 0.5 = 0 \Rightarrow H_A = 0.5 \text{ t}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2(2) + 1(4) - 0.5(1) - 8V_B = 0 \Rightarrow V_B = 0.94 \text{ t}$$

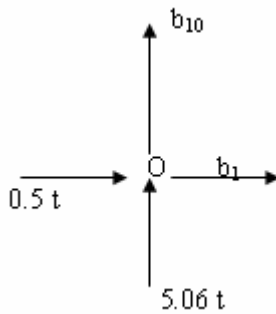
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 8V_A - 3(8) - 2(6) - 1(4) - 0.5(1) = 0 \Rightarrow V_A = 5.06 \text{ t}$$

Ecuación de control:

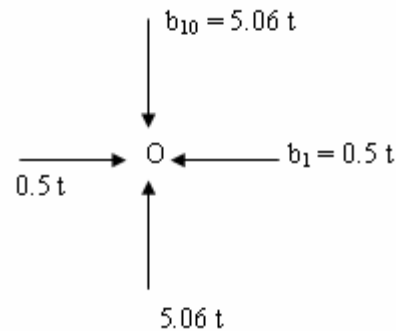
$$\sum V = 0 \Rightarrow 5.06 - 3 - 2 - 1 + 0.94 = 0 \Rightarrow V$$

PASO 3) ESFUERZOS EN LAS BARRAS

NUDO 1 (SUPUESTO)



NUDO 1 (REAL)



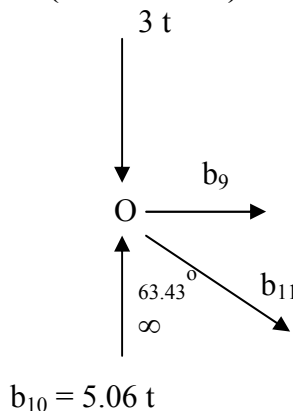
El signo “-” en b_1 y b_{10} significa que “no salen” del nudo, mas bien “llegan”, es decir son fuerzas de COMPRESION.

$$\sum H = 0 \Rightarrow b_1 + 0.5 = 0 \Rightarrow b_1 = -0.5 \text{ t}$$

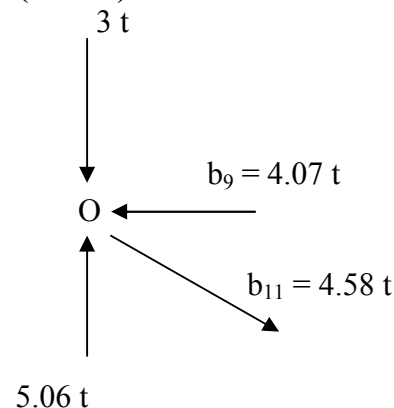
$$\sum V = 0 \Rightarrow b_{10} + 5.06 = 0 \Rightarrow b_{10} = -5.06 \text{ t}$$

Ahora: No se puede estudiar el nudo 2, por que a el concurren las barras b_1 , b_2 , b_{11} , b_{12} y solamente se puede conocer el valor de $b_1 = 0.5 \text{ t}$. Por tanto quedan tres incógnitas que no pueden ser determinadas con las dos ecuaciones $\sum H = 0$ y $\sum V = 0$.

NUDO 10 (SUPUESTO)



NUDO 10 (REAL)



$$\text{Sen } \infty = 0.89$$

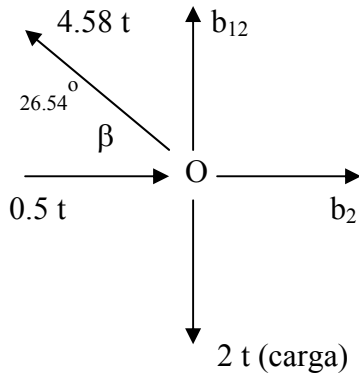
$$\text{Cos } \infty = 0.45$$

$$\sum H = 0 \Rightarrow b_9 + 4.58 (0.89) = 0 \Rightarrow b_9 = -4.07 \text{ t}$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow 5.06 - 3 - b_{11} (0.45) = 0 \Rightarrow b_{11} = 4.58 \text{ t}$$



NUDO 2 (SUPUESTO)



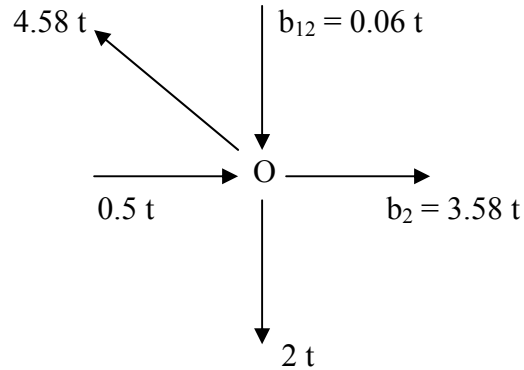
$$\text{Sen } \beta = 0.45$$

$$\text{Cos } \beta = 0.89$$

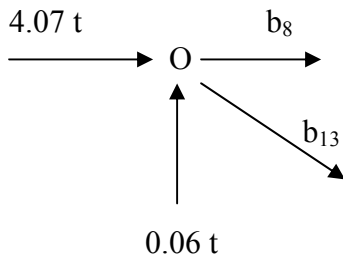
$$\sum H = 0 \Rightarrow 0.5 - 4.58 (0.89) + b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = 3.58 \text{ t}$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow -2 + 4.58 (0.45) + b_{12} = 0 \Rightarrow b_{12} = -0.06 \text{ t}$$

NUDO 2 (REAL)



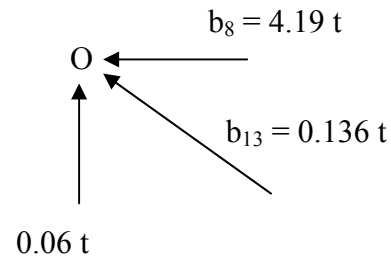
NUDO 9 (SUPUESTO)



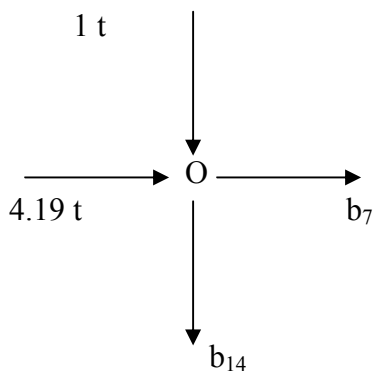
$$\sum H = 0 \Rightarrow 4.09 + b_8 + 0.135 (0.89) = 0 \Rightarrow b_8 = -4.19 \text{ t}$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow 0.06 - b_{13} (0.45) = 0 \Rightarrow b_{13} = 0.136 \text{ t}$$

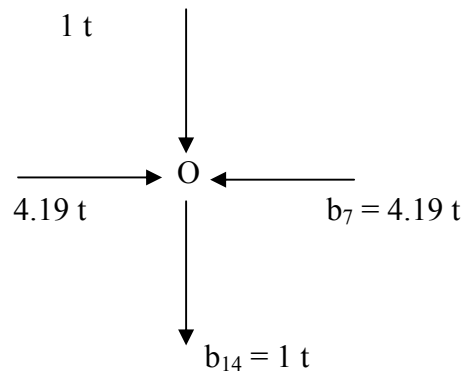
NUDO 9 (REAL)



NUDO 8 (SUPUESTO)



NUDO 8 (REAL)

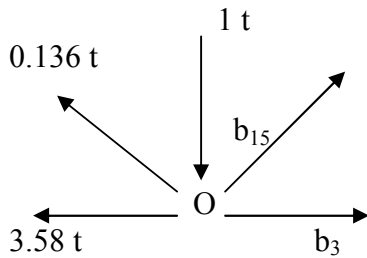




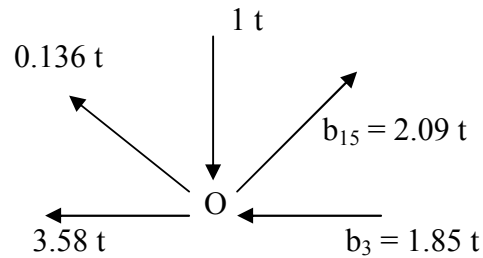
$$\sum H = 0 \Rightarrow 4.19 + b_7 = 0 \Rightarrow b_7 = -4.19 \text{ t}$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow -1 - b_{14} = 0 \Rightarrow b_{14} = -1 \text{ t}$$

NUDO 3 (SUPUESTO)



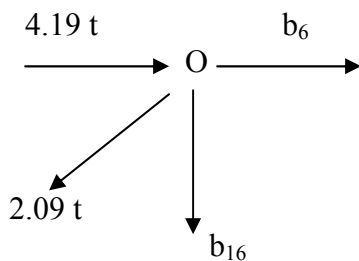
NUDO 3 (REAL)



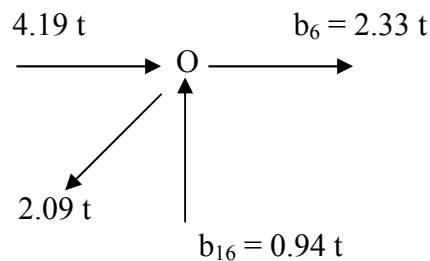
$$\sum H = 0 \Rightarrow -3.58 + 0.136(0.89) + 2.09(0.89) + b_3 = 0 \Rightarrow b_3 = 1.85 \text{ t}$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow 0.136(0.45) - 1 + b_{15}(0.45) = 0 \Rightarrow b_{15} = 2.09 \text{ t}$$

NUDO 7 (SUPUESTO)



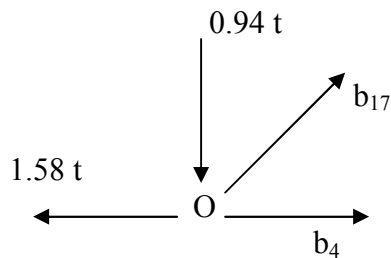
NUDO 7 (REAL)



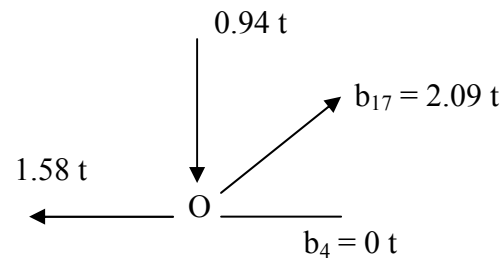
$$\sum H = 0 \Rightarrow 4.19 - 2.09(0.89) + b_6 = 0 \Rightarrow b_6 = -2.33 \text{ t}$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow -2.09(0.45) - b_{16} = 0 \Rightarrow b_{16} = -0.94 \text{ t}$$

NUDO 4 (SUPUESTO)



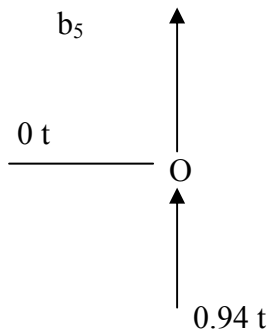
NUDO 4 (REAL)



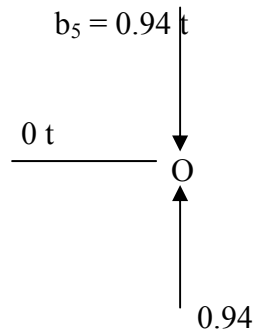
$$\sum H = 0 \Rightarrow -1.85 + 2.09(0.89) + b_4 = 0 \Rightarrow b_4 = 0 \text{ t}$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow -0.94 + b_{17}(0.45) = 0 \Rightarrow b_{17} = 2.09 \text{ t}$$

NUDO 5 (SUPUESTO)



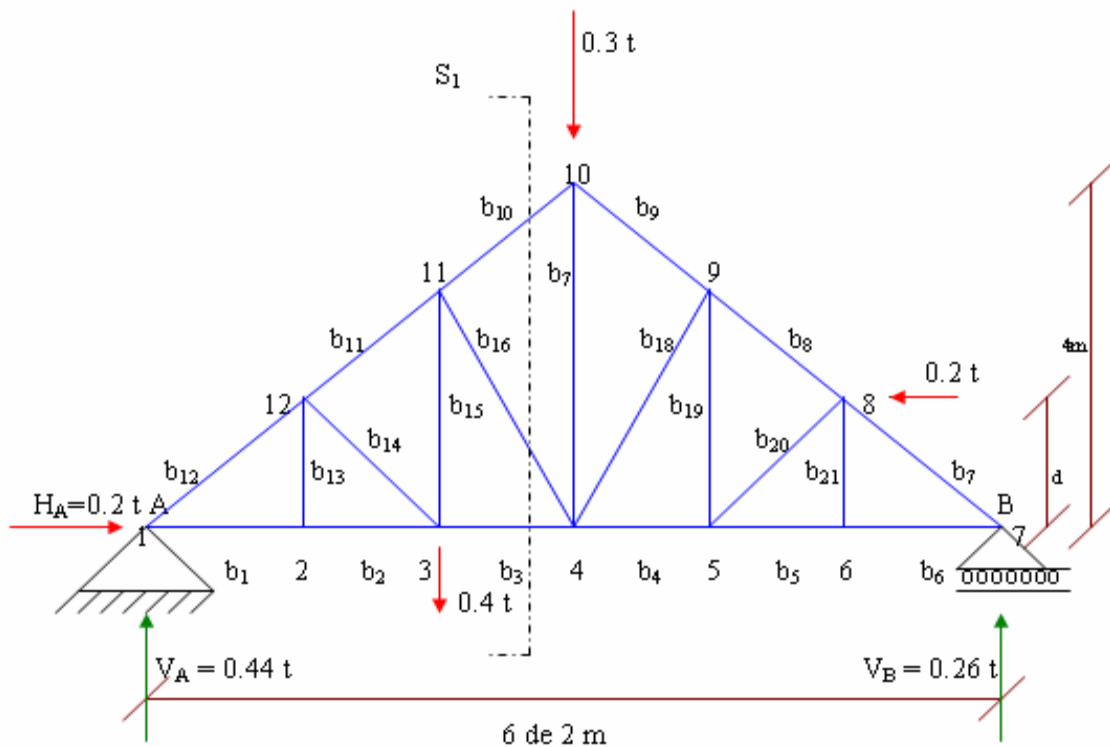
NUDO 5 (REAL)



$$\sum V = 0 \Rightarrow 0.94 + b_5 = 0 \Rightarrow b_5 = -0.94 \text{ t}$$

Ejercicio #11

Se pide determinar el esfuerzo en la barra 10 (Método de las Secciones)



Solución.-

PASO 1) DETERMINACION ESTATICA

$$G = 3 - 3 = 0$$

$$G_I = 21 - 2(12) + 3 = 0 \quad \text{ISOSTATICO}$$

PASO 2) CÁLCULO DE REACCIONES DE APOYO

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A - 0.2 = 0 \Rightarrow H_A = 0.2 \text{ t}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 0.4 (4) + 0.3 (6) - (0.2) 1.33 - 12 V_B = 0$$

$$\therefore V_B = 0.26 \text{ t}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 12 V_A - 0.4 (8) - 0.3 (69 - 0.2 (1.33)) = 0$$

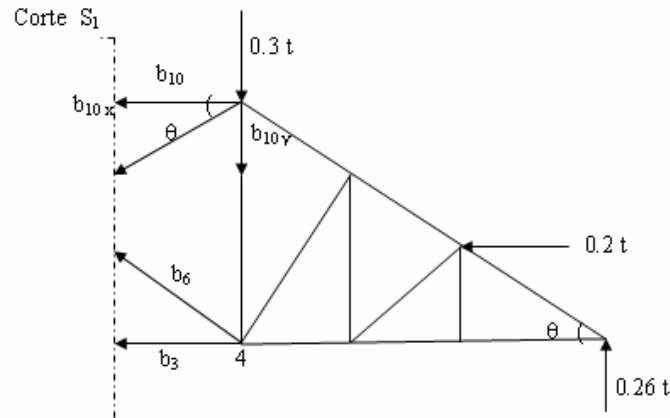
$$\therefore V_A = 0.44 \text{ t}$$

$$\text{CONTROL: } \sum V = 0 \Rightarrow 0.44 - 0.4 - 0.3 + 0.26 = 0$$

PASO 3) ESFUERZOS EN LAS BARRAS

El método de las secciones consiste en introducir a la armadura ciertos cortes en lugares convenientes estudiemos el corte S_1 que secciona las barras b_{10} y b_3 .

BARRA 10: (S_1 a la derecha)



$$\text{Tag } \theta = \frac{1.33}{2} ; \quad \text{Sen } \theta = 0.55 ; \quad \text{Cos } \theta = 0.83$$

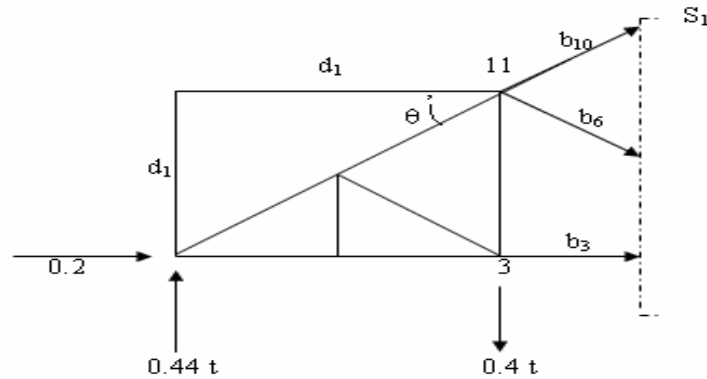
$$\sum M_4 = 0 \Rightarrow -(0.26) (6) - 0.2 (1.33) - b_{10}^x (4) = 0$$

$$\therefore b_{10}^x = -0.45 \text{ t}$$

$$\text{Cos } \theta = \frac{b_{10}^x}{b_{10}} \Rightarrow b_{10} = \frac{-0.45}{0.83} \Rightarrow b_{10} = -0.55 \text{ t}$$

$$\Rightarrow b_{10} = 0.55 \text{ t} \quad \text{COMPRESION}$$

BARRA 3: (S_1 a la izquierda)



$$\text{Tag } \theta = \frac{d_1}{4}$$

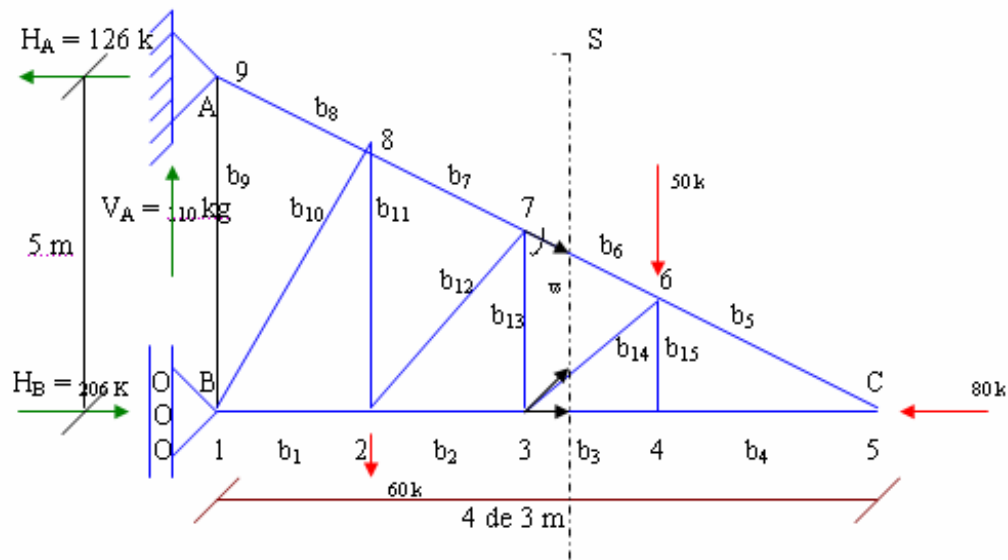
$$d_1 = 2.66 \text{ m}$$

$$\sum M_4 = 0 \Rightarrow 0.44(4) - (0.2)2.66 - b_3(2.66) = 0$$

$$\Rightarrow b_3 = 0.46 \text{ t} \quad \text{TRACCION}$$

Ejercicio #12

Si se desea determinar una barra inclinada, después del corte se descompone y se toma momentos tal que se elimine una componente (Método de las secciones)



Solución.-

PASO 1) DETERMINACION ESTATICA



$$G_I = b - 2n + 3 = 0$$

$$G_I = 15 - 2(9) + 3 = 0 \quad \text{ISOSTATICA}$$

PASO 2) CÁLCULO DE LAS REACCIONES

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A + H_B - 80 = 0$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 5 H_A + 60(3) + 9(50) = 0$$

$$\Rightarrow H_A = -126 \text{ k}$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -50(3) - 9(60) + 12 V_A + 5 H_A = 0$$

$$\Rightarrow V_A = 110 \text{ k}$$

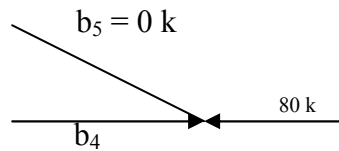
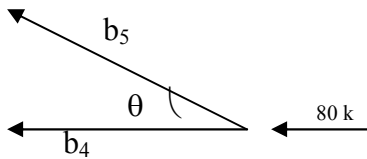
$$\Rightarrow H_B = 206 \text{ k}$$

$$\text{CONTROL: } \sum V = 0 \Rightarrow 110 - 60 - 50 = 0$$

PASO 3) ESFUERZOS EN LAS BARRAS

NUDO 5 (SUPUESTO)

NUDO 5 (REAL)



$$\text{Sen } \theta = \frac{5}{13} = 0.38 \quad ; \quad \text{Cos } \theta = \frac{12}{13} = 0.92$$

$$\sum H = 0 \Rightarrow b_4 + 0.92 b_5 + 80 = 0$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow 0.38 b_5 = 0$$

$$\Rightarrow b_5 = 0 \text{ k}$$

$$\Rightarrow b_4 = -80 \text{ k} \quad \text{COMPRESION}$$

Determinar b_6 :

$$\text{Sen } \varpi = \frac{12}{13} = 0.92 \quad ; \quad \text{Cos } = 0.38$$

$$\frac{X}{5} = \frac{6}{12} \Rightarrow X = 2.5 \quad (\text{hipotenusa})$$

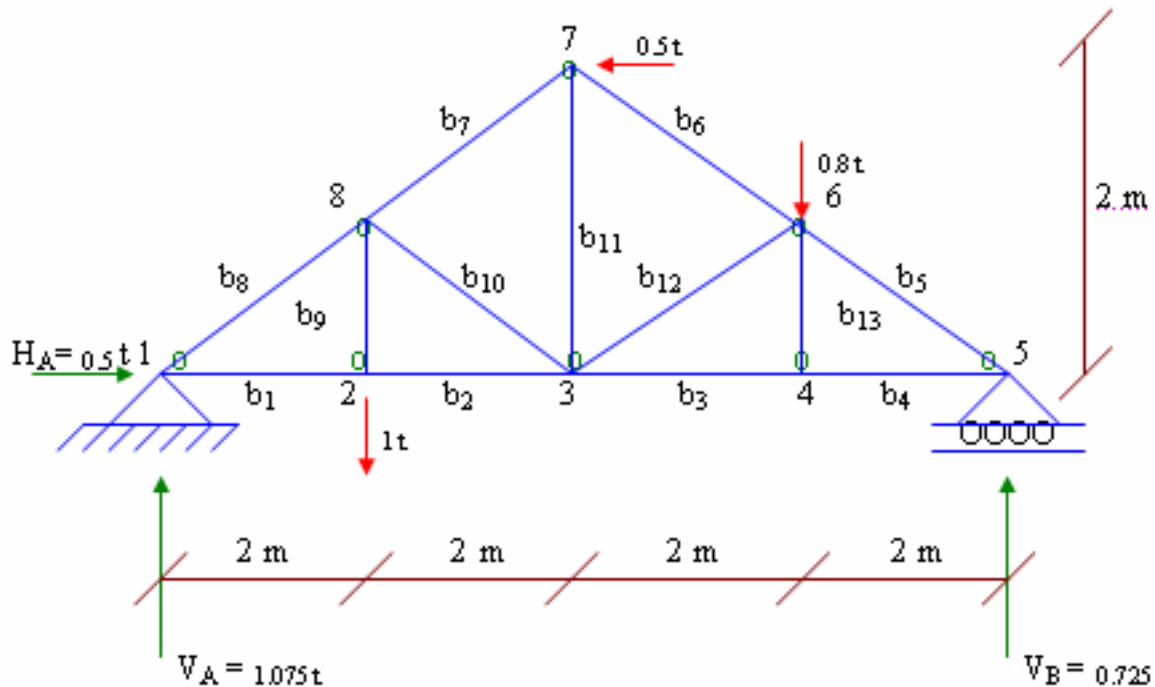
$$\Rightarrow d = 2.5 * \text{Sen } \varpi = 2.31 \text{ m}$$

$$\sum M_3 = 0 \Rightarrow -126(5) + 110(6) - 60(3) + b_6(2.31) = 0$$

$$\therefore \Rightarrow b_6 = 64.94 \text{ k} \quad \text{TRACCION}$$

Ejercicio #13

Armadura plana tipo Howe de amplia utilización en la construcción de techos (SE MOSTRARAN DISTINTOS CORTES).



Solución.-

PASO 1) DETERMINACION ESTATICA

$$G_I = b - 2n + 3 = 0$$

$$G_I = 13 - 2(8) + 3 = 0 \quad \text{ISOSTATICA}$$

PASO 2) CÁLCULO DE LAS REACCIONES

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A - 0.5 = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 1(2) - 0.5(2) + 0.8(6) - 8V_B = 0 \Rightarrow V_B = 0.725 \text{ t}$$

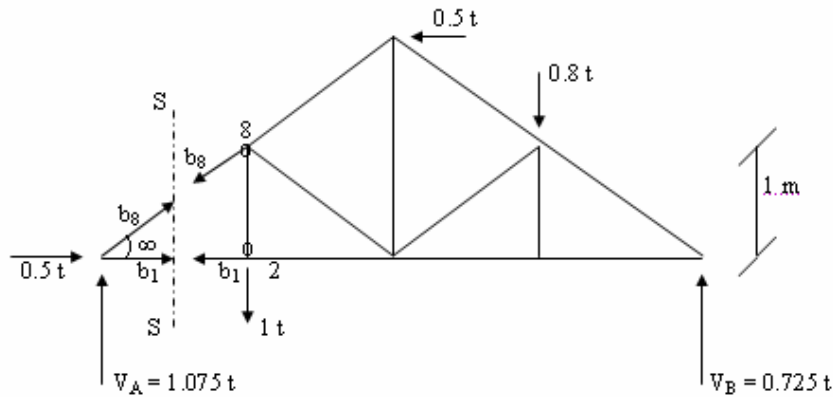
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 8V_B - 1(6) - 0.5(2) - 0.8(2) = 0 \Rightarrow V_A = 1.075 \text{ t}$$

CONTROL:

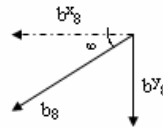
$$\sum V = 0 \Rightarrow 1.075 - 1 - 0.8 + 0.725 = 0 \Rightarrow V$$

PASO 3) ESFUERZOS EN LAS BARRAS

a) corte S – S que secciona a las barras b_8 y b_1 en la parte derecha



ARMADURA EN EQUILIBRIO



Es posible considerar únicamente la parte situada a la derecha del corte S - S

$$\sum M_8 = 0 \Rightarrow b_1 (1) - 0.5 (1) + 0.8 (4) - 0.725 (6) = 0$$

$$\Rightarrow b_1 = 1.65 \text{ t} \quad \text{TRACCION}$$

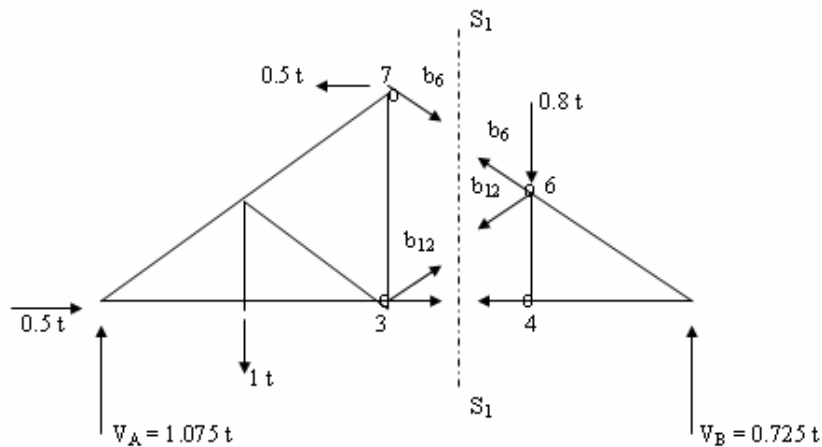
$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow -b_8^x (1) - 0.5 (2) + 0.8 (4) - 0.725 (6) = 0 \Rightarrow b_8^x = -2.15 \text{ t}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{b_8^x}{b_8} \Rightarrow b_8 = \frac{-2.15}{0.892} = b_8^x = -2.41$$

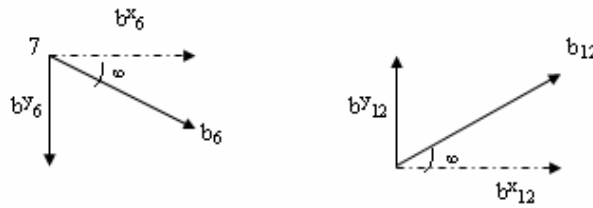
Por lo tanto:

$$b_8 = 2.41 \text{ t} \quad \text{COMPRESION}$$

b) corte S₁ - S₁ que secciona a las barras b₆ b₁₂ b₃ en la parte izquierda



ARMADURA EN EQUILIBRIO



$$\sum M_3 = 0$$

Por lo tanto:

$$-b_6^x (2) - 0.5 (2) - 1 (2) + 1.075 (4) = 0 \Rightarrow b_6^x = -1.3 \text{ t}$$

\Rightarrow

$$\cos \omega = \frac{b_6^x}{b_6} \Rightarrow b_6 = \frac{-1.3}{0.892} = -1.457 \text{ t}$$

Por lo tanto:

$$b_6 = 1.457 \text{ t COMPRESION}$$

Considerando la parte de la armadura situada a la derecha del corte $S_1 - S_1$.

$$\sum M_6 = 0 \Rightarrow b_3 (1) - 0.725 (2) = 0 \Rightarrow b_3 = 1.45 \text{ t TRACCION}$$

Consideremos de nuevo la parte situada a la izquierda del corte $S_1 - S_1$

$$\Rightarrow \sum M_7 = 0 \Rightarrow -0.5 (2) + 1.075 (2) - b_3 (2) - b_{12}^x (2) = 0$$

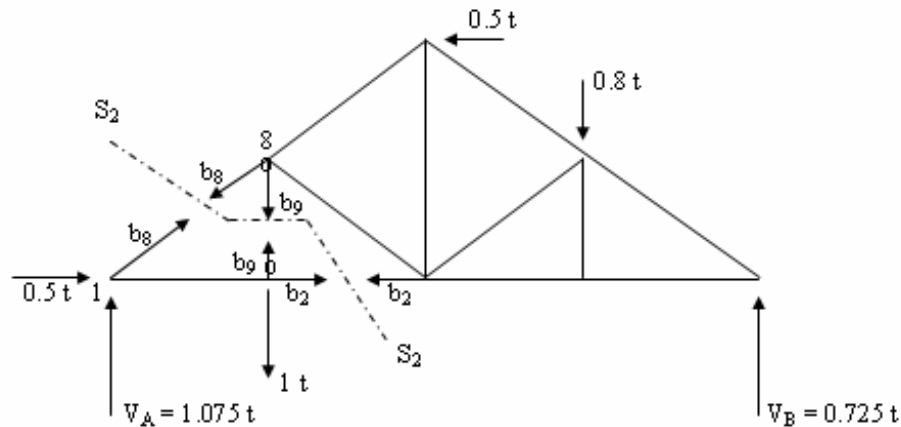
Pero:

$$\cos \omega = \frac{b_{12}^x}{b_{12}} \Rightarrow b_{12} = \frac{-0.8}{0.892} = -0.897 \text{ t}$$

Por lo tanto:

$$b_{12} = 0.897 \text{ t COMPRESION}$$

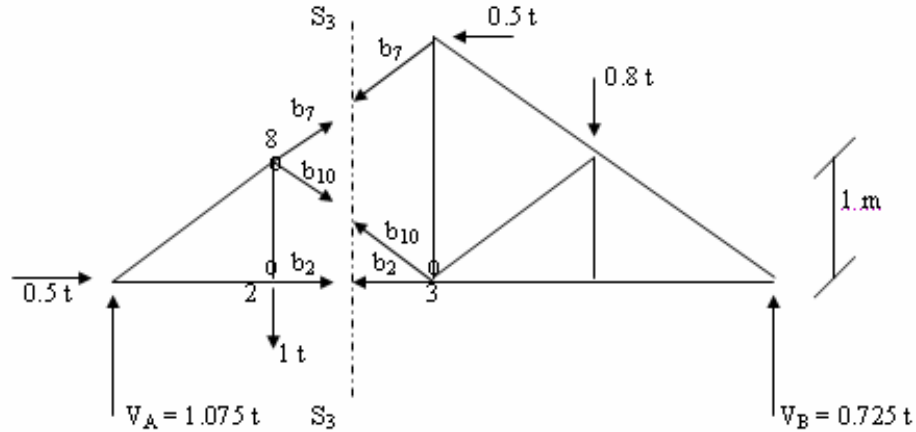
c) corte $S_2 - S_2$ que secciona las barras b_8, b_9, b_2 , entonces



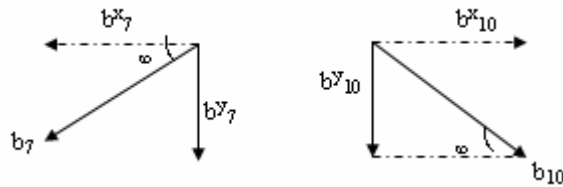
ARMADURA EN EQUILIBRIO

$$\sum M_1 = 0 \therefore 1(2) - b_9(2) = 0 \Rightarrow b_9 = 1 \text{ t TRACCION}$$

d) corte $S_3 - S_3$ que secciona a las barras b_7 , b_{10} y b_2



ARMADURA EN EQUILIBRIO



$$\sum M_8 = 0 \Rightarrow -b_2(1) + 1.075(2) - 0.5(1) = 0 \Rightarrow b_2 = 1.65 \text{ t TRACCION}$$

$$\sum M_3 = 0 \Rightarrow -b_7^x(2) - 0.5(2) + 0.8(2) - 0.725(4) = 0 \Rightarrow b_7^x = -1.15 \text{ t}$$

$$\cos \varphi = \frac{b_7^x}{b_7} \Rightarrow b_7 = \frac{-1.15}{0.892} = -1.289 \text{ t}$$

Por lo tanto:

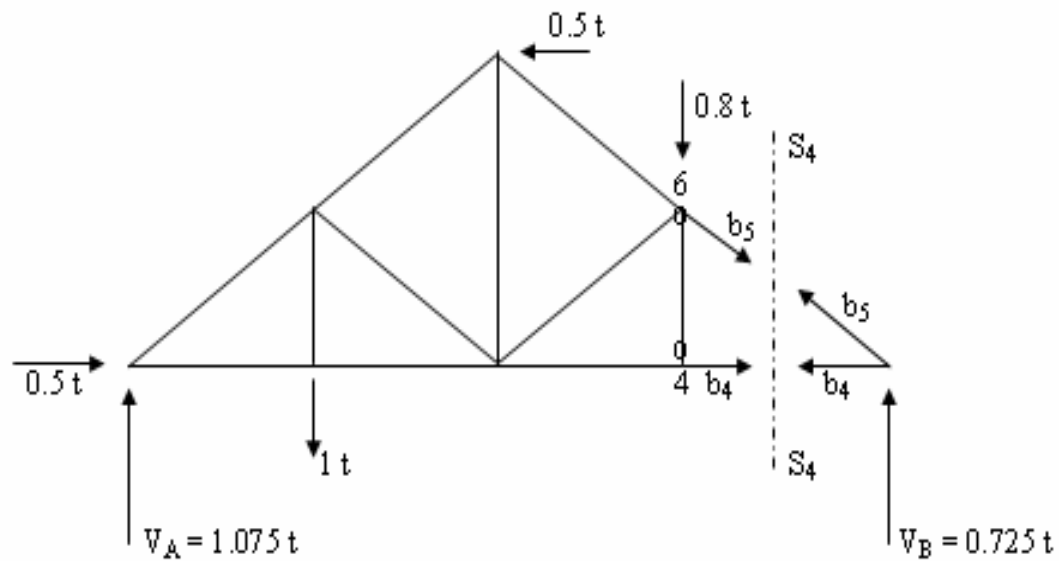
$$b_7 = 1.289 \text{ COMPRESION}$$

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow -b_{10}^x(1) + 1.15(1) + 1.075(2) - 0.5(1) = 0 \Rightarrow b_{10}^x = -0.5 \text{ t}$$

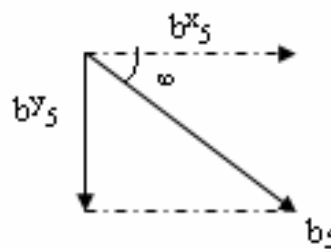
$$\cos \varphi = \frac{b_{10}^x}{b_{10}} \Rightarrow b_{10} = \frac{-0.5}{0.892} = -0.56 \text{ t}$$

$$\Rightarrow b_{10} = 0.56 \text{ COMPRESION}$$

e) corte $S_4 - S_4$ que secciona a las barras b_4 y b_5



ARMADURA EN EQUILIBRIO



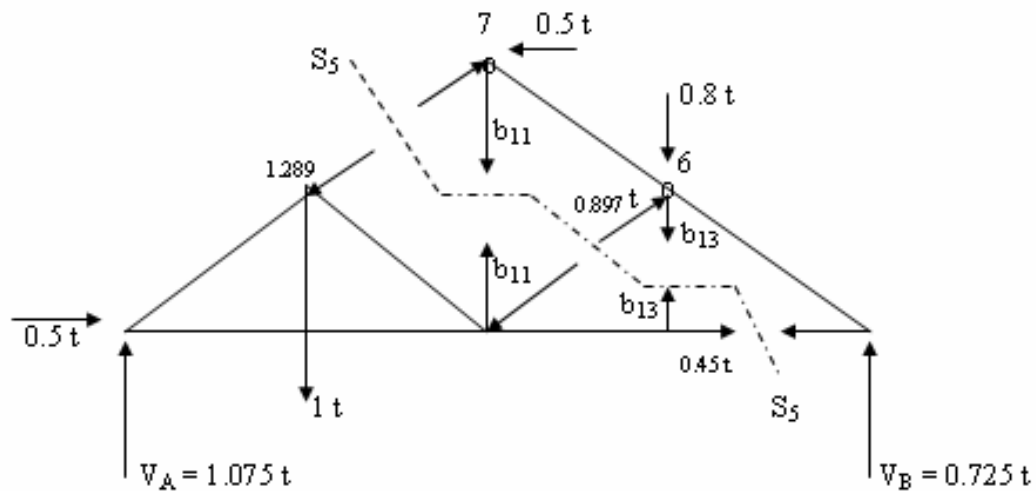
$$\sum M_6 = 0 \Rightarrow -b_4 (1) + 0.5 (1) + 1.075 (6) = 0 \Rightarrow b_4 = 1.45 \text{ t TRACCION}$$

$$\sum M_4 = 0 \Rightarrow -b_5^x (1) - 0.5 (2) + 1.075 (6) - 1 (4) = 0 \Rightarrow b_5^x = -1.45 \text{ t}$$

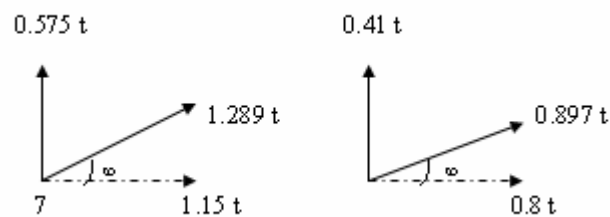
$$\cos \alpha = \frac{b_5^x}{b_5} \Rightarrow b_5 = \frac{-1.45}{0.892} = -1.625 \text{ t}$$

$$\Rightarrow b_5 = 1.625 \text{ t COMPRESION}$$

f) corte $S_5 - S_5$ que secciona a las barras b_7 , b_{11} , b_{13} y b_4



ARMADURA EN EQUILIBRIO



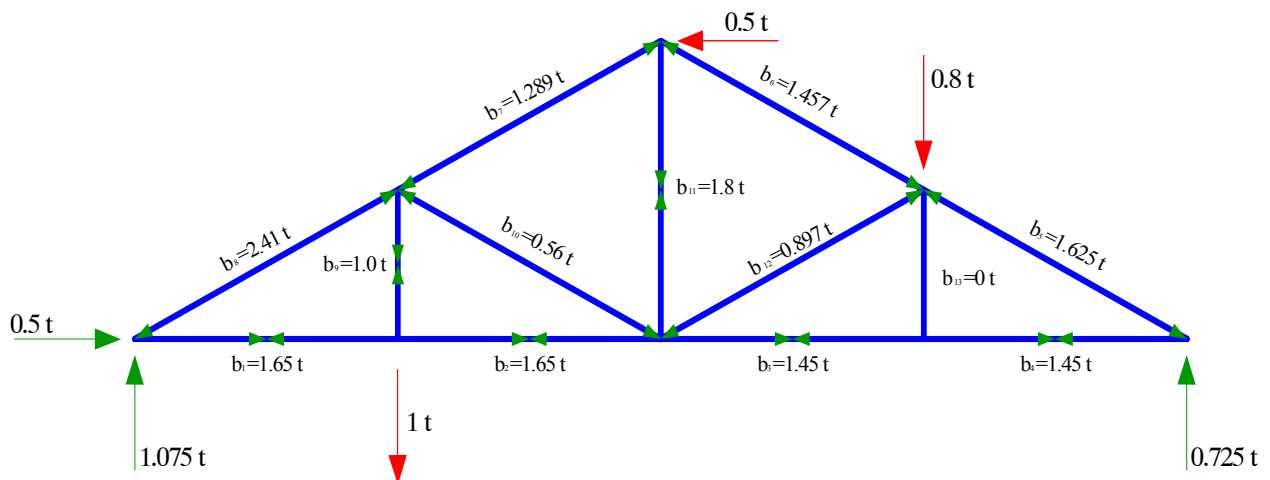
$$\sum M_6 = 0 \Rightarrow -b_{11}(2) + 0.5(1) + 1.15(1) + 0.575(2) + 1.45(1) - 0.725 = 0$$

$$\Rightarrow b_{11} = 1.45 \text{ t TRACCION}$$

$$\sum M_7 = 0 \Rightarrow 0.8(2) + b_{13}(2) - 0.4(2) - 0.8(1) + 1.45(2) - 0.725(4) = 0$$

$$\Rightarrow b_{13} = 0 \text{ t}$$

A continuación vemos un resumen de los esfuerzos en la barras.



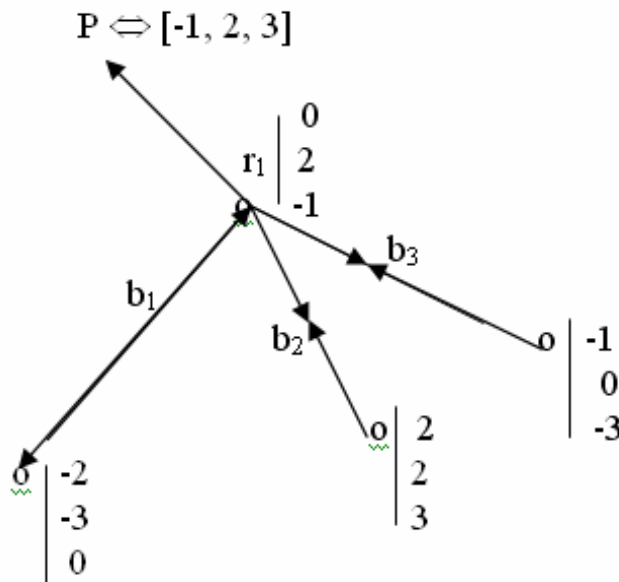
El ejemplo muestra las siguientes ventajas en el análisis por el método de secciones:

- El valor del esfuerzo de una determinada barra no depende en general de otros valores de esfuerzos previamente calculados, es decir un error inicial no afecta posteriormente.
- Es posible determinar el esfuerzo de una barra sin necesidad de resolver toda la armadura.

Sin embargo, de estas ventajas es preferible utilizar simultáneamente el método de los nudos y de las secciones.

Ejercicio #14

Se pide determinar los esfuerzos en cada una de las barras (Método General)



Solución.-

$$L_{b1}^x = (-2 - 0) = -2; L_{b1}^y = (-3 - 0) = -3; L_{b1}^z = (0 - 0) = 0$$

$$L_{b1} = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{13} = 3.61$$

$$L_{b2}^x = 2; L_{b2}^y = 2; L_{b2}^z = 3; L_{b2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{17} = 4.12$$

$$L_{b3}^x = -1; L_{b3}^y = 0; L_{b3}^z = -3; L_{b3} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{10} = 3.16$$

Ahora:

$$\sum F_x = F_{b1}^x + F_{b2}^x + F_{b3}^x + P^x = 0 \Rightarrow C_1(-2) + C_2(2) + C_3(-1) + (-1) = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_1(-3) + C_2(2) + C_3(0) + 2 = 0$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow C_1(0) + C_2(3) + C_3(-3) + 3 = 0$$

$$\begin{cases} -2 C_1 + 2 C_2 - C_3 = -1 & (1) \\ -5 C_1 \quad \quad -2 C_3 = -2 & (2) \\ C_1 + 4 C_2 - 2 C_3 = -3 & (3) \end{cases}$$

$$-2(1) + (3)$$

$$\begin{aligned} 5 C_1 = -5 & \Rightarrow -5(-1) - 2 C_3 = -2 & \Rightarrow -1 + 4 C_2 - 2(3.5) = -3 \\ C_1 = -1 & C_3 = \frac{7}{2} = 3.5 & C_2 = \frac{5}{4} = 1.25 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_1 = C_1 * L_{b1}$$

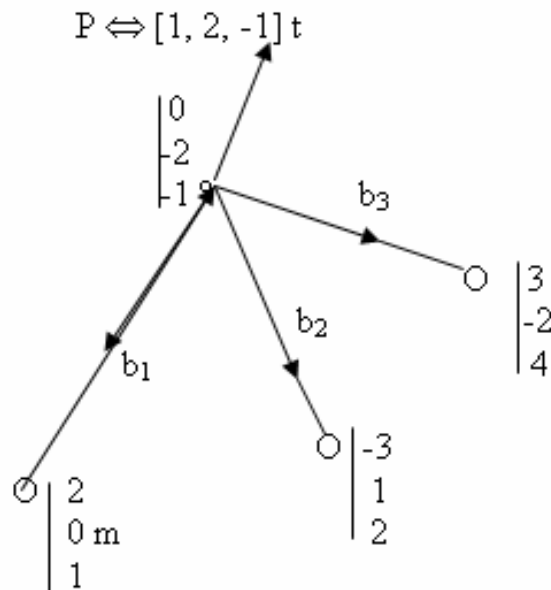
$$F_1 = (-1)(5.48) = -5.48 = 5.48 \text{ COMPRESION}$$

$$F_2 = (1.25)(4.47) = 5.59 \text{ TRACCION}$$

$$F_3 = (3.5)(3) = 10.5 \text{ TRACCION}$$

Ejercicio #15

Se pide determinar los esfuerzos en cada una de las barras.



$$\begin{aligned} b_1 \Rightarrow \begin{aligned} L_X &= 2 - 0 = 2 \\ L_Y &= 0 - (-2) = 2 \\ L_Z &= 1 - (-3) = 4 \end{aligned} & ; \quad b_2 \Rightarrow \begin{aligned} L_X &= -3 - 0 = -3 \\ L_Y &= 1 + 2 = 3 \\ L_Z &= 2 + 3 = 5 \end{aligned} & ; \quad b_3 \Rightarrow \begin{aligned} L_X &= 3 - 0 = 3 \\ L_Y &= -2 - (-2) = 0 \\ L_Z &= 4 - (-3) = 7 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$L^{b1} = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (4)^2} \Rightarrow L^{b1} = 4.89 \text{ m}$$

$$L^{b2} = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2 + 5^2} \Rightarrow L^{b2} = 6.56 \text{ m}$$

$$L^{b3} = \sqrt{(3)^2 + (7)^2} \Rightarrow L^{b3} = 7.61 \text{ m}$$

En cada uno nudo es posible aplicar 3 ecuaciones:

$$(1) \quad \sum F_X = 0 \Rightarrow F^{b1}_x + F^{b2}_y + F^{b3}_z + P_x = 0$$

$$(2) \quad \sum F_Y = 0 \Rightarrow F^{b1}_y + F^{b2}_y + F^{b3}_y + P_y = 0$$

$$(3) \quad \sum F_Z = 0 \Rightarrow F^{b1}_z + F^{b2}_z + F^{b3}_z + P_z = 0$$

Además \Rightarrow

$$F^{b1}_x = C_1 * L_x$$

$$F^{b3}_y = C_2 * L_y$$

$$\Rightarrow 2 C_1 + (-3) C_2 + 3 C_3 + 1 = 0 \quad (X)$$

$$2 C_1 + 3 C_2 + 0 + 2 = 0 \quad (Y)$$

$$4 C_1 + 5 C_2 + 7 C_3 + (-1) = 0 \quad (Z)$$

$$\begin{array}{r} 2 C_1 - 3 C_2 + 3 C_3 = -1 \\ 2 C_1 + 3 C_2 = -2 \\ \hline 4 C_1 + 3 C_3 = -3 \quad (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -10 C_1 - 15 C_2 = 10 \\ 12 C_1 + 15 C_2 + 21 C_3 = 3 \\ \hline 2 C_1 + 21 C_3 = 13 \quad (5) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 C_1 + 3 C_3 = -3 \\ -4 C_1 - 42 C_3 = -26 \\ \hline -39 C_3 = -29 \\ C_3 = 0.74 \end{array}$$

$$C_1 = -1.31 \quad ; \quad C_2 = 0.205$$

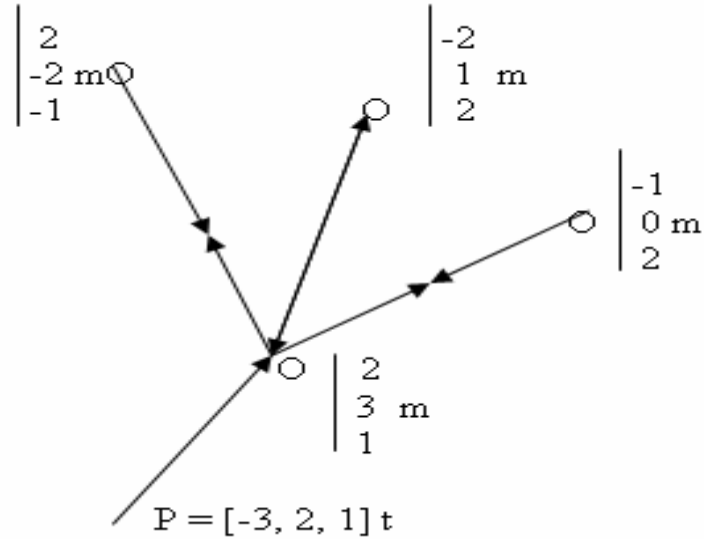
$$\Rightarrow F^{b1} = (-1.31) (4.89) \Rightarrow F^{b1} = 6.405 \text{ t} \quad \text{COMPRESION}$$

$$\Rightarrow F^{b2} = (0.205) (6.56) \Rightarrow F^{b2} = 1.34 \text{ t} \quad \text{TRACCION}$$

$$\Rightarrow F^{b3} = (0.74) (7.61) \Rightarrow F^{b3} = 5.63 \text{ t} \quad \text{TRACCION}$$

Ejercicio #16

Determinar los esfuerzos en cada una de las barras.



Solucion.-

$$\begin{aligned} L_X &= -1 - 2 = -3 & L_X &= -2 - 2 = -4 & L_X &= 2 - 2 = 0 \\ b_1 \Rightarrow L_Y &= 0 - 3 = -3 & b_2 \Rightarrow L_Y &= 1 - 3 = -2 & b_3 \Rightarrow L_Y &= -2 - 3 = -5 \\ L_Z &= 2 - 1 = 1 & L_Z &= 2 - 1 = 1 & L_Z &= -1 - 1 = -2 \end{aligned}$$

$$Lb_1 = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 1^2} = 4.36 \text{ m}$$

$$Lb_2 = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 1^2} = 4.58 \text{ m}$$

$$Lb_3 = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = 5.39 \text{ m}$$

$$(1) \quad \sum F_X = 0 \Rightarrow F^{b1}_x + F^{b2}_y + F^{b3}_z + P_x = 0$$

$$(2) \quad \sum F_Y = 0 \Rightarrow F^{b1}_y + F^{b2}_y + F^{b3}_y + P_y = 0$$

$$(3) \quad \sum F_Z = 0 \Rightarrow F^{b1}_z + F^{b2}_z + F^{b3}_z + P_z = 0$$

Ademas \Rightarrow

$$F^{b1}_X = C_1 * L^{b1}_X = -3 C_1$$

$$F^{b3}_Y = C_3 * L^{b3}_Y = -5 C_3$$

$$F^{b2}_Z = C_2 * L^{b2}_Z = 1 C_2$$

$$-3 C_1 + (-4) C_2 + 0 C_3 + (-3) = 0$$

$$-3 C_1 + (-2) C_2 + (-5) C_3 + 2 = 0$$

$$1 C_1 + 1 C_2 + (-2) C_3 + 1 = 0$$

$$\therefore C_1 = 1.35 \quad C_2 = -1.76 \quad C_3 = 0.29$$

$$\Rightarrow F^{b1} = C_1 * Lb_1 = 1.35 * 4.36 = 5.82 \text{ t TRACCION}$$

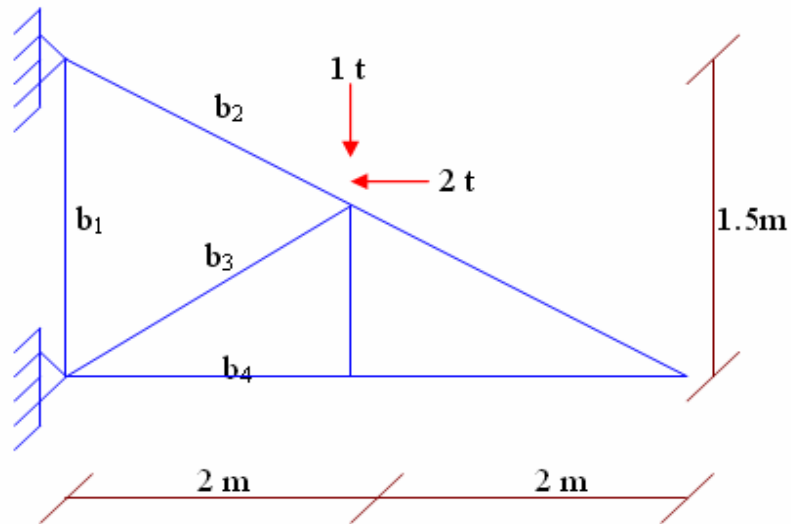
$$\Rightarrow F^{b2} = C_2 * Lb_2 = (-1.76) * 4.58 = -8.06 \text{ t COMPRESION}$$

$$\Rightarrow F^{b3} = C_2 * Lb_3 = 0.29 * 5.39 = 1.56 \text{ t TRACCION}$$

4.8 PROBLEMAS PROPUESTOS.

Problema #1

Se pide determinar el valor del esfuerzo en las barras.



Respuesta:

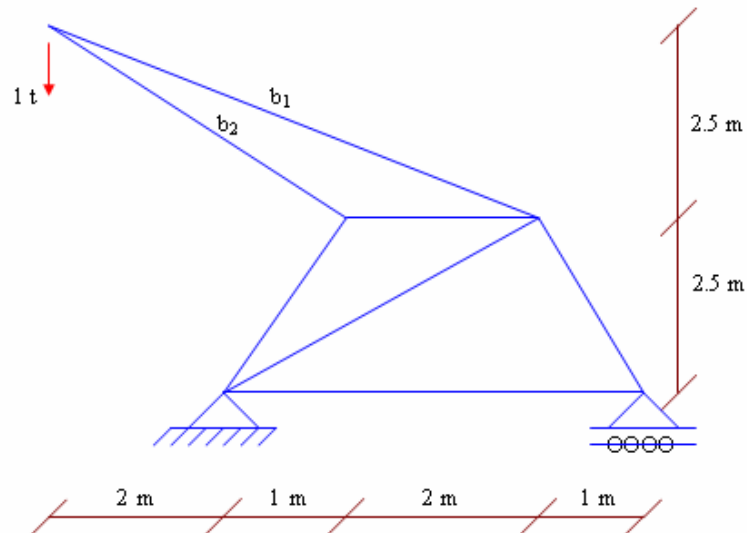
$$b_1 = 0.095 \text{ t Comp.}$$

$$b_2 = 3.120 \text{ t Tracc.}$$

$$b_3 = 0.279 \text{ t Tracc.}$$

$$b_4 = 2.553 \text{ t Comp.}$$

Problema #2 Se pide determinar el valor del esfuerzo en las barras.

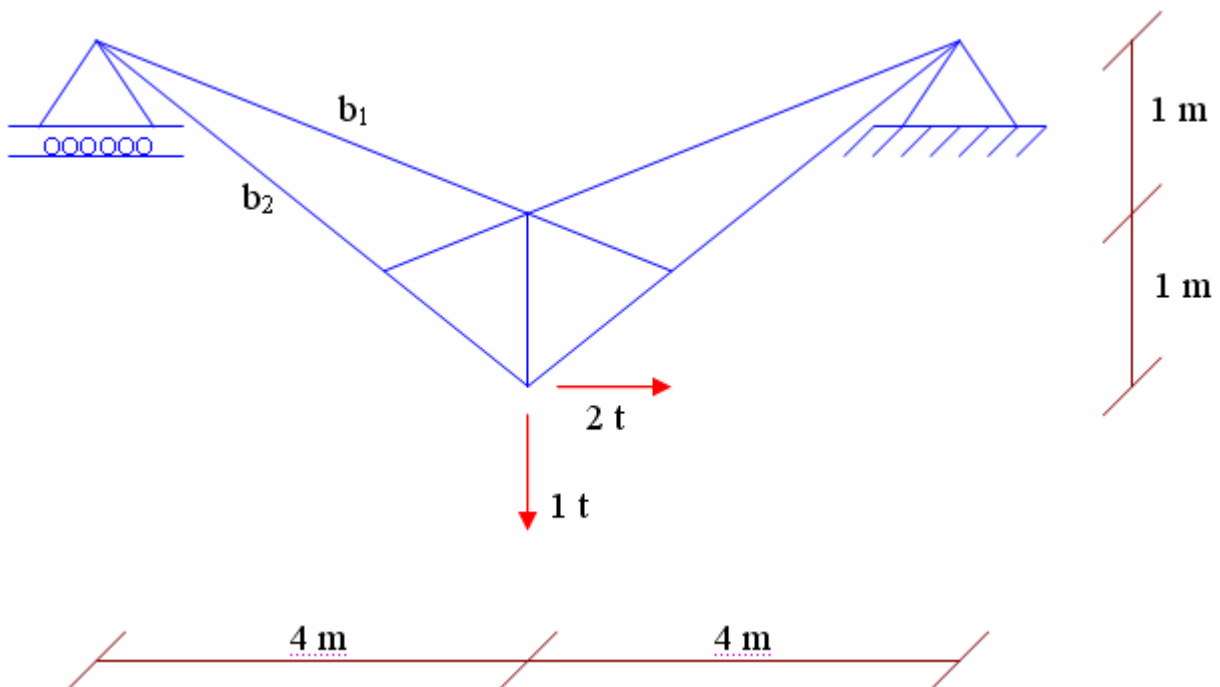


Respuesta:

$$b_1 = 6.684 \text{ t Tracc.}$$

$$b_2 = 7.186 \text{ t Comp.}$$

Problema #3 Se pide determinar el valor del esfuerzo en las barras.



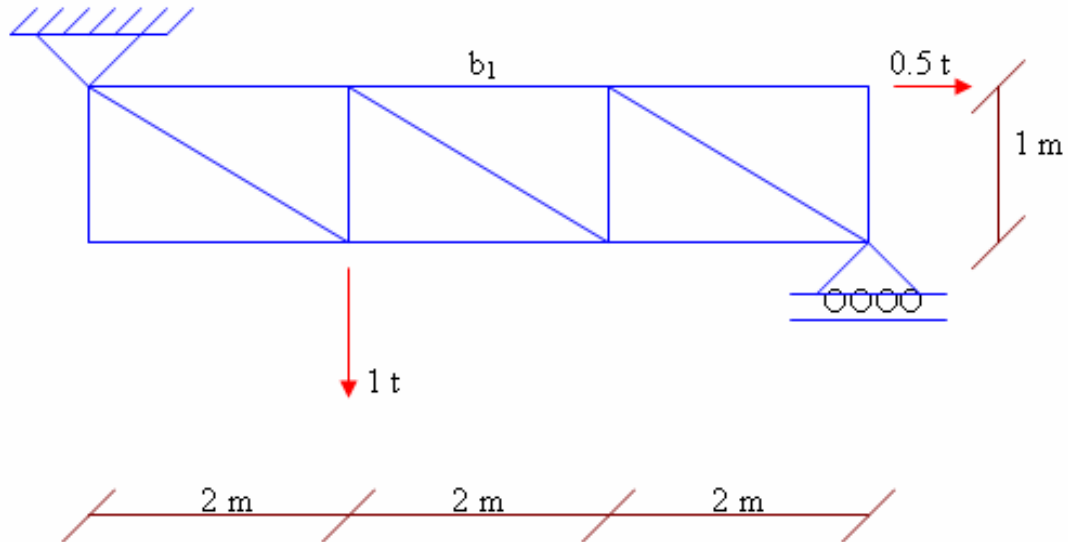
Respuesta:

$$b_1 = 6.111 \text{ t Tracc}$$

$$b_2 = 6.630 \text{ t Comp.}$$

Problema #4

Se pide determinar el valor del esfuerzo en la barra.

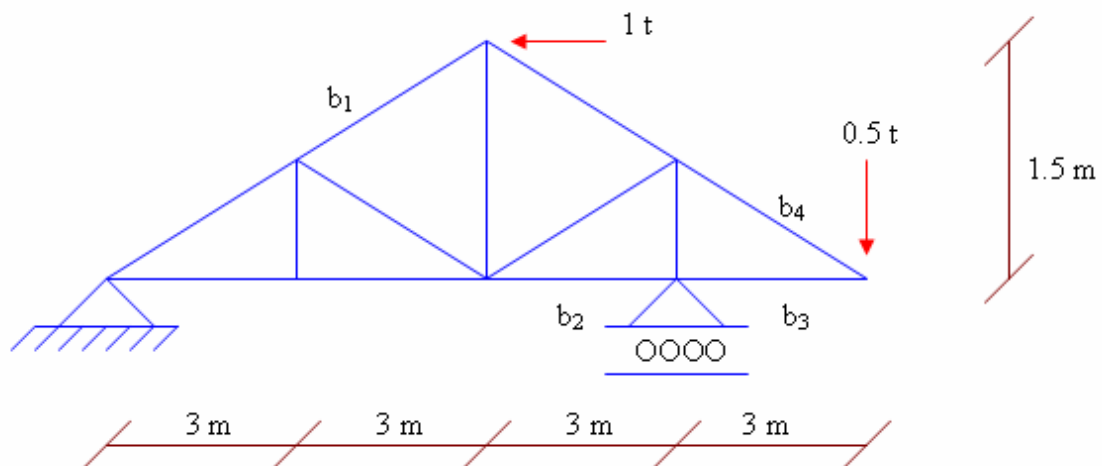


Respuesta:

$$b_1 = 0.167 \text{ t Comp.}$$

Problema #5

Se pide determinar el valor del esfuerzo en las barras.

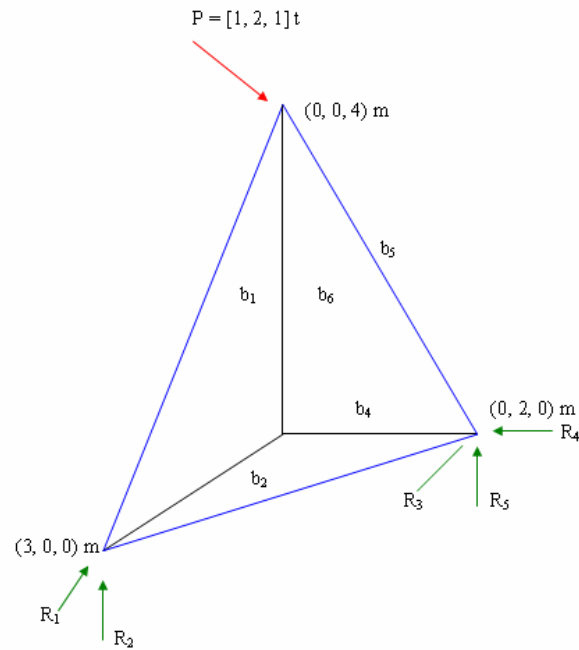


Respuesta:

$$\begin{aligned} b_1 &= 0 \text{ t} \\ b_2 &= 2 \text{ t Comp.} \\ b_3 &= 2 \text{ t Comp.} \\ b_4 &= 2.066 \text{ t Tracc.} \end{aligned}$$

Problema #6

Se pide determinar el valor del esfuerzo en las barras.

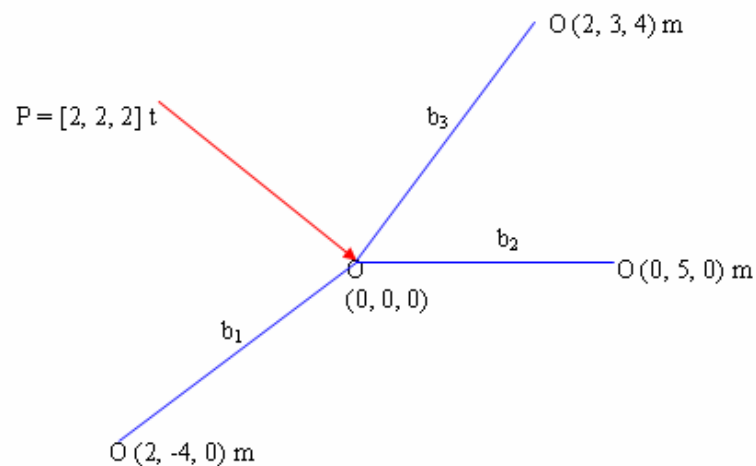


Respuesta:

$R_1 = 1 t$	$T b_1 = 1.665 t \text{ Comp.}$
$R_2 = 1.333 t$	$T b_2 = T b_3 = 0$
$R_3 = 0 t$	
$R_4 = 2 t$	$T b_4 = 0$
$R_5 = 4 t$	$T b_5 = 4.47 t \text{ Comp.}$
$R_6 = 6.333 t$	$T b_6 = 6.333 t \text{ Tracc}$

Problema #7

Se pide determinar el valor del esfuerzo en las barras.





Respuesta:

$$b_1 = 2.235 \text{ t Comp.}$$

$$b_2 = 2.50 \text{ t Comp.}$$

$$b_3 = 2.06 \text{ t Comp.}$$

4.9 EVALUACION DIAGNOSTICO DEL CAPITULO.

Para realizar una evaluación diagnostico referente al presente capitulo, se propone al estudiante responder las siguientes preguntas.

- Que es una armadura?
- Como se determina el grado isostatico en cerchas?
- Cuales son los métodos de análisis de las armaduras?
- Cual es la diferencia entre el método de nudos y el método de secciones?
- Donde se utilizan las armaduras?
- Que tipo de armaduras se conoce?

CAPITULO 5

LINEAS DE INFLUENCIA

5.1 OBJETIVO GENERAL.

Al final de este capítulo el estudiante habrá desarrollado destrezas y conocimientos para encontrar los valores de M y Q máximos. Cuando una carga móvil se desplaza a lo largo de una viga

5.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS.

Al final del capítulo el estudiante podrá:

- Dibujar las líneas de influencia
- Conocer como un tren móvil se desplaza a lo largo de una viga y su efecto
- Construir la envolvente de Q y M
- Reconocer las secciones críticas de Q y M .

5.3 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Consideraremos una viga simplemente apoyada, sometida a la acción de una carga $P = 1\text{ t}$.

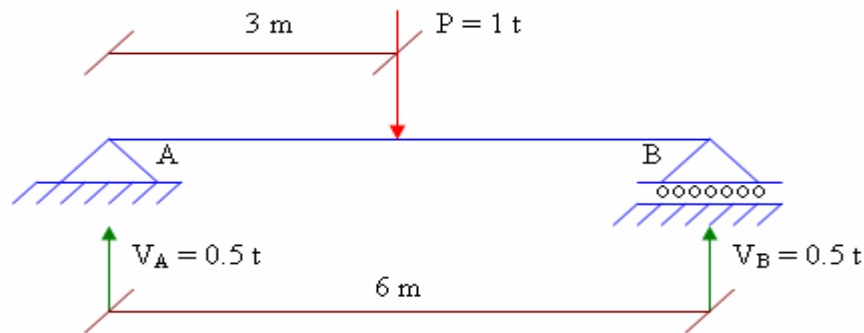


Figura 5.1

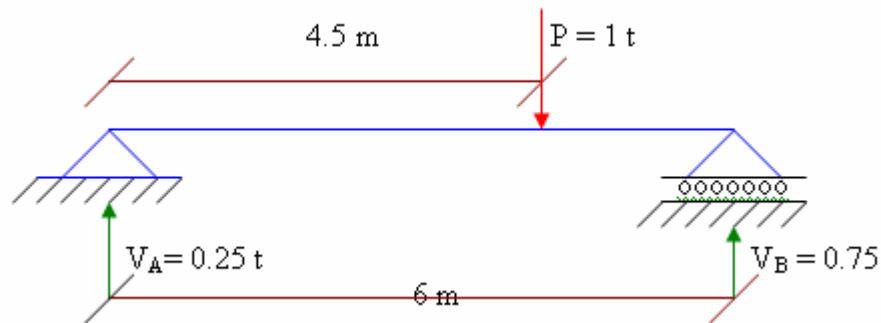


Figura 5.2

En la figura 5.1 la carga $P = 1 \text{ t}$ se encuentra en la mitad del claro de la viga y a esa posición corresponde los valores $V_A = V_B = 0.5 \text{ t}$ en la figura 5.2 la carga $P = 1 \text{ t}$ no se encuentra en la mitad del claro y a esa nueva posición de la carga corresponde otros valores de $V_A = 0.25 \text{ t}$ y $V_B = 0.75 \text{ t}$.

En esta sencilla observación nos muestra que el valor de las reacciones de apoyo V_A y V_B , cuando se mantiene constante la intensidad de la carga, depende de la posición que ocupa la carga sobre la viga.

Cuando se acepta la posibilidad de que una carga cambie de posición sobre una estructura, entonces esta carga se denomina CARGA MOVIL.

Los trenes que actúan sobre un puente de ferrocarril, los camiones que actúan sobre puentes carreteros y las tropas militares en marcha compacta que actúan sobre los puentes, son entre otros, ejemplos de cargas móviles.

Ahora bien: para el ejemplo inicial, interesa conocer dos aspectos:

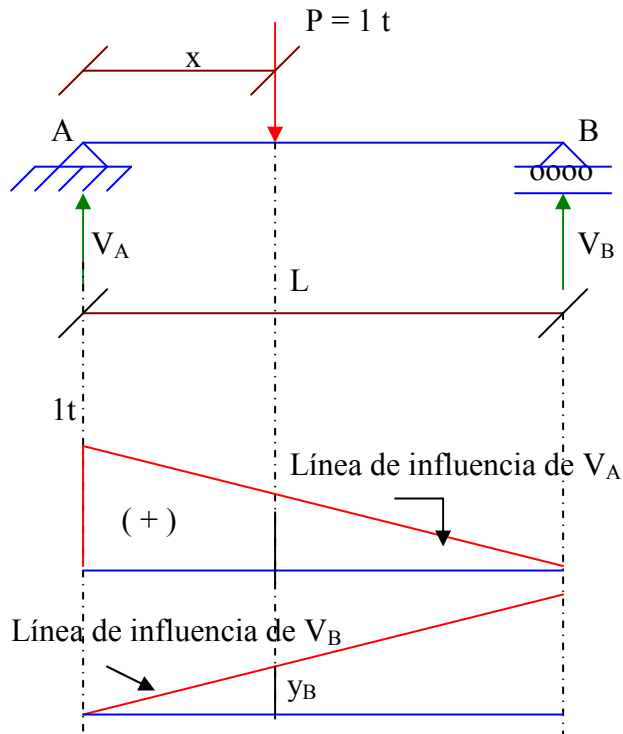
5.3.1 PRIMERO: Que función define la variación del valor de las reacciones cuando la carga cambia de posición.

5.3.2 SEGUNDO: Que posición debe ocupar la carga para que las reacciones tomen valores extremos o un determinado valor?

Estos dos cuestionamientos pueden ser absueltos mediante el estudio de las LINEAS DE INFLUENCIA.

5.4 LINEAS DE INFLUENCIA.

Antes de introducir una definición de línea de influencia, consideraremos el siguiente análisis:



$$V_A = 1 - (x / L) \quad 0 \leq x \leq L$$

$$V_B = x / L$$

En la figura 5.3 se ve que

La función $V_A(x) = 1 - (x / L)$; representa la variación de los valores de V_A cuando la carga móvil $P = 1 \text{ t}$ actúa sobre la viga así: para $x = 0 \quad V_A = 1 \text{ t}$

$$x = L \quad V_A = 0 \text{ t}$$

Figura 5.3

$Y_A \Leftrightarrow$ Valor de la reacción V_A cuando $P = 1 \text{ t}$ se encuentra a $x \text{ (m)}$ del apoyo A.

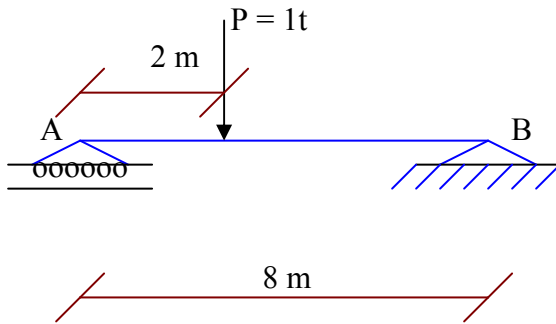
$Y_B \Leftrightarrow$ Valor de la reacción V_B cuando $P = 1 \text{ t}$ se encuentra a $(1-x) \text{ (m)}$ del Apoyo.

Ejercicio #1

En el ejercicio que se muestra a continuación se puede observar que el valor de la reacción vertical en A depende de la posición que ocupa la carga P sobre la viga. Se trata entonces de determinar una ecuación que indique la variación del valor de la vertical que cuando la carga P que transite (se mueva) sobre la viga AB.

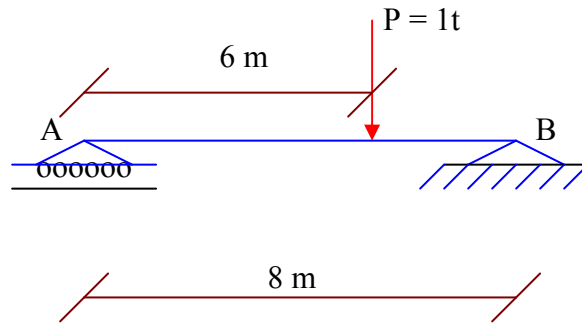
Solución:

Se observa que el valor de la vertical de A depende de la posición que ocupa la carga de una tonelada sobre la viga, entonces debe ser posible encontrar una función que represente al valor de la reacción para distintas posiciones de la carga.



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 8 V_A - 1 (6) = 0$$

$$\Rightarrow V_A = 0.75 \text{ t}$$



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 8 V_A - 1 (2) = 0$$

$$\Rightarrow V_A = 0.25 \text{ t}$$

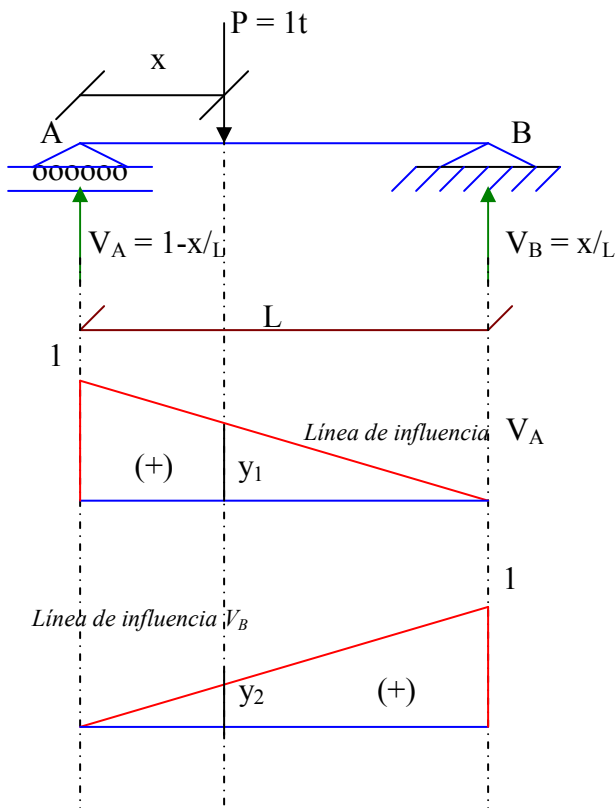


Figura 5.4

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A * L - P (L - x) = 0$$

$$V_A = \frac{L - x}{L} = 1 - \frac{x}{L} \quad \uparrow$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow P x - V_B L = 0$$

$$V_B = \frac{x}{L} \quad \uparrow$$

$$0 < x < L$$

ENTONCES: La línea de influencia en la figura 5.4, cuya ordenada representa el valor de un determinado esfuerzo (en el caso del ejercicio #1 reacción de apoyo) en una sección específica (puntos A o B) fija, cuando la carga móvil unitaria transita por la estructura.

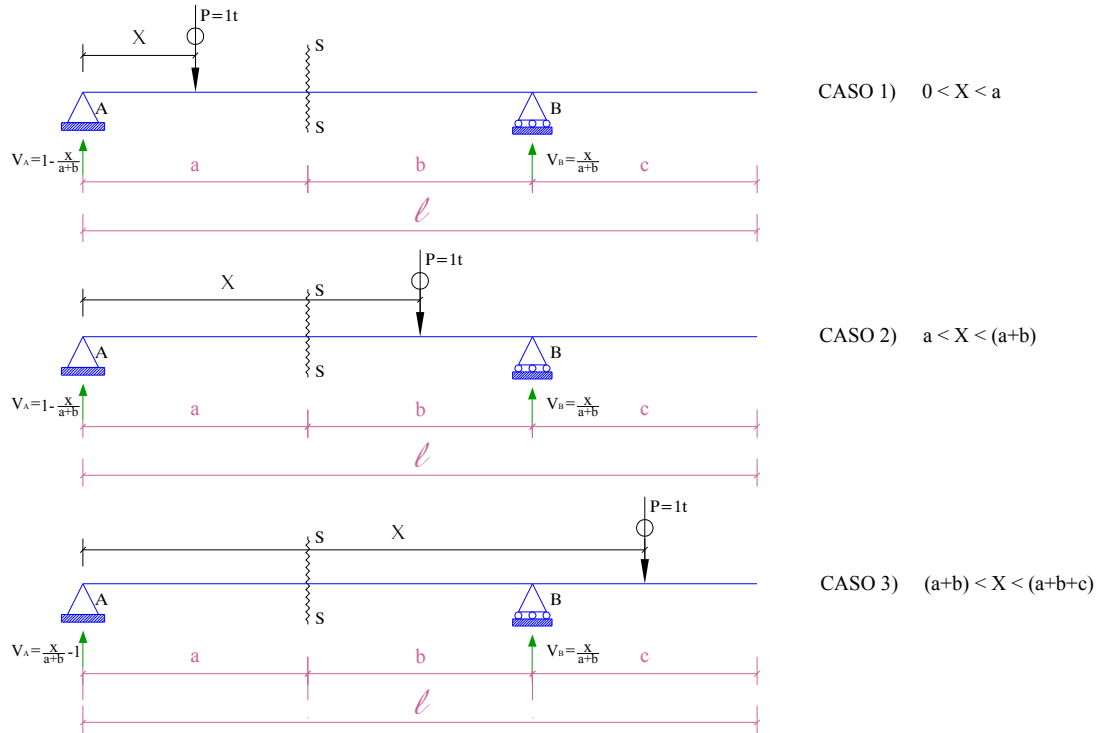
En los capítulos anteriores desarrollamos procedimientos para analizar las fuerzas en miembros estructurales debido a cargas muertas o fijas. Se mostró que los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante representan los métodos más descriptivos para exhibir la variación de esas cargas en un miembro. Sin embargo, si una estructura esta sometida a una carga viva móvil, la variación de la fuerza cortante y del momento flexionante en el miembro se describe mejor usando la línea de influencia. Una línea de influencia representa la variación de la reacción, de la fuerza cortante, del momento flexionante o de la deflexión en un punto específico de un miembro cuando una fuerza concentrada se mueve sobre el miembro. Una vez construida esta línea, puede verse claramente donde debe colocarse una carga viva sobre la estructura para que genere la máxima influencia en el punto especificado. Además, la magnitud de la reacción, fuerza cortante, momento o deflexión asociados en el punto puede entonces calcularse a partir de las ordenadas del diagrama de la línea de influencia. Por estas razones, las líneas de influencia juegan una parte importante en el diseño de puentes, trabes carriles de grúas industriales, bandas transportadoras y otras estructuras donde las cargas se mueven a lo largo de su claro.

5.5 PROCEDIMIENTO DE ANALISIS DE LAS LINEAS DE INFLUENCIA.

Coloque una carga unitaria en varias posiciones x a lo largo del miembro y en cada posición use la estática para determinar el valor de la función (reacción, fuerza cortante o momento) en el punto especificado. Por ejemplo, si va a construirse la línea de influencia para una reacción de fuerza vertical en un punto sobre la viga, considere la reacción como positiva en el punto cuando actúe hacia arriba sobre aquella. Si va a dibujarse la línea de influencia de la fuerza cortante o el momento como positivo en el punto si actúa en el sentido convencional usado para dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento

5.6 LINEA DE INFLUENCIA DE ESFUERZO CORTANTE.

Se desea determinar la L.I. de cortante en la sección S - S



DIAGRAMAS DE CORTE. para los casos considerados

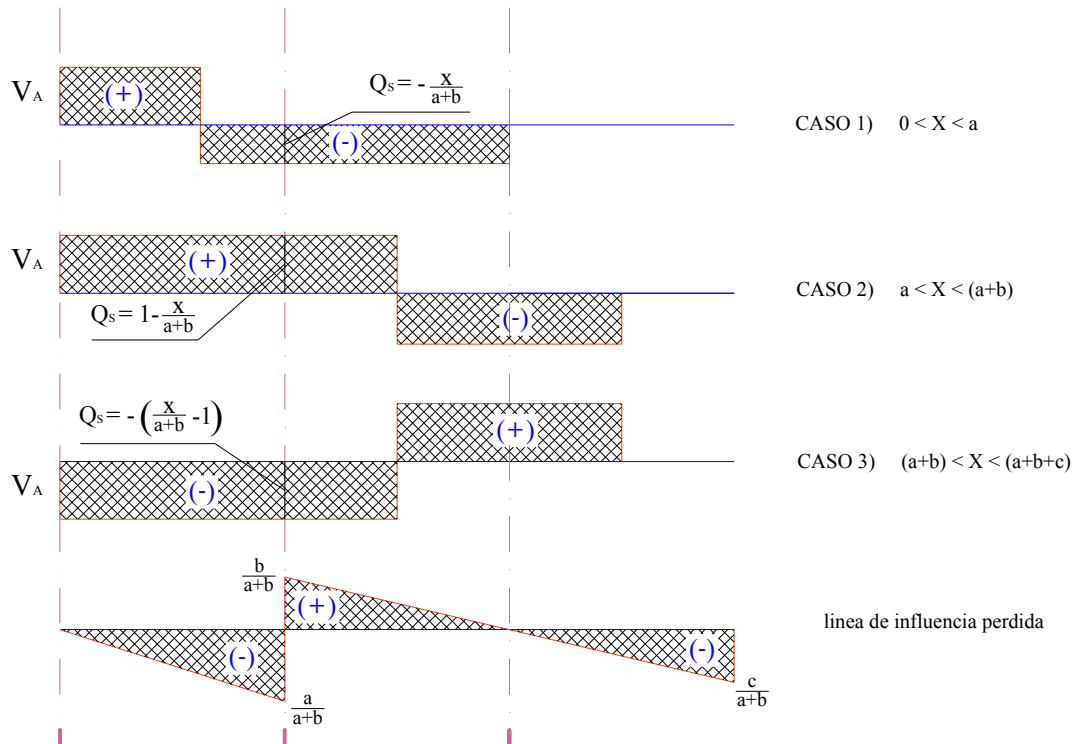


Figura 5.5

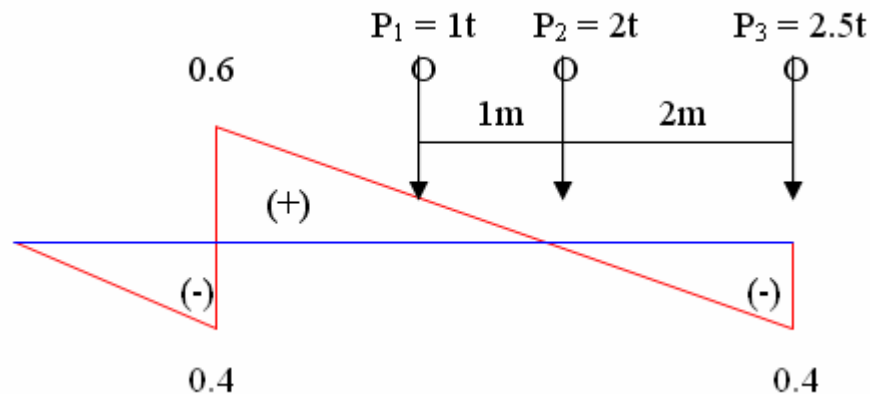
La línea de influencia se ha dibujado tomando en cuenta los tres valores de Q_s , cada uno en su respectivo Dominio.

Ejercicio #2

Determinar la posición cortante del tren.

Solución:

Para dar aplicación numérica sea $a = 4\text{m}$, $b = 6\text{m}$, $c = 4\text{m}$ y un tren de cargas en la posición que se muestra:



Entonces, para la posición del tren cortante en la sección S – S será:

$$Q_s = P_1 (y_1) + P_2 (y_2) + P_3 (y_3)$$

Donde:

$$\frac{y_1}{1} = \frac{0.6}{3} \Rightarrow y_1 = 0.2$$

$$y_2 = 0$$

$$y_3 = -0.4$$

Por lo tanto:

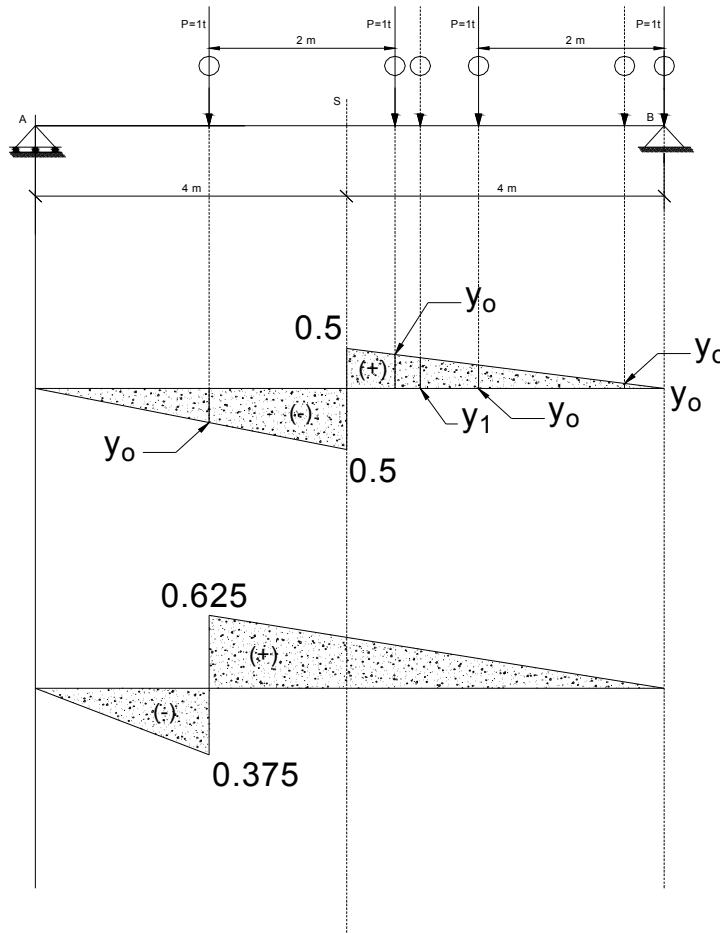
$$Q_s = 1 (0.2) + 2 (0) + 2.5 (-0.4) = -0.8 \text{ t}$$

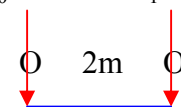
Ejercicio #3

El camión que se observa, transita por la viga de puente AB, se pide:

- con ambas cargas del tren posicionar al mismo sobre la viga de tal manera que el esfuerzo cortante en la sección S sea 0 (si se puede)
- Bajo las mismas condiciones posicionar el tren de tal manera que el esfuerzo cortante en la sección S sea el mas pequeño de los positivos.

Solución:



$$P_0 = 3t \quad P_1 = 3t$$


$$a = 4 \text{ m} \quad b = 4 \text{ m} \quad L = 8 \text{ m}$$

$$\frac{a}{L} = \frac{4}{8} = 0.5; \quad \frac{b}{L} = 0.5$$

$$Q_S = P_0 y_0 + P_1 y_1$$

a) $\Rightarrow P_0 = 1\text{m}$ a Izquierda de S

b)

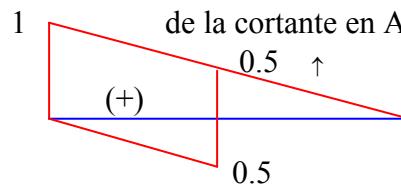
$$\frac{0.5}{4} = \frac{y_0}{2} \Rightarrow y_0 = 0.25$$

$$Q_S = 3 (0.25) + 3 (0)$$

$$Q_{S \text{ MIN}}^+ = 0.75 \text{ t}$$

$\Rightarrow P_1$ un infinitésimo a la Izquierda del apoyo B

Línea de influencia
de la cortante en A



Cuando $a = 0$
 $b = 1$

5.7 LINEA DE INFLUENCIA DE MOMENTO FLECTOR.

Se desea determinar la L.I. de momentos en la sección S – S

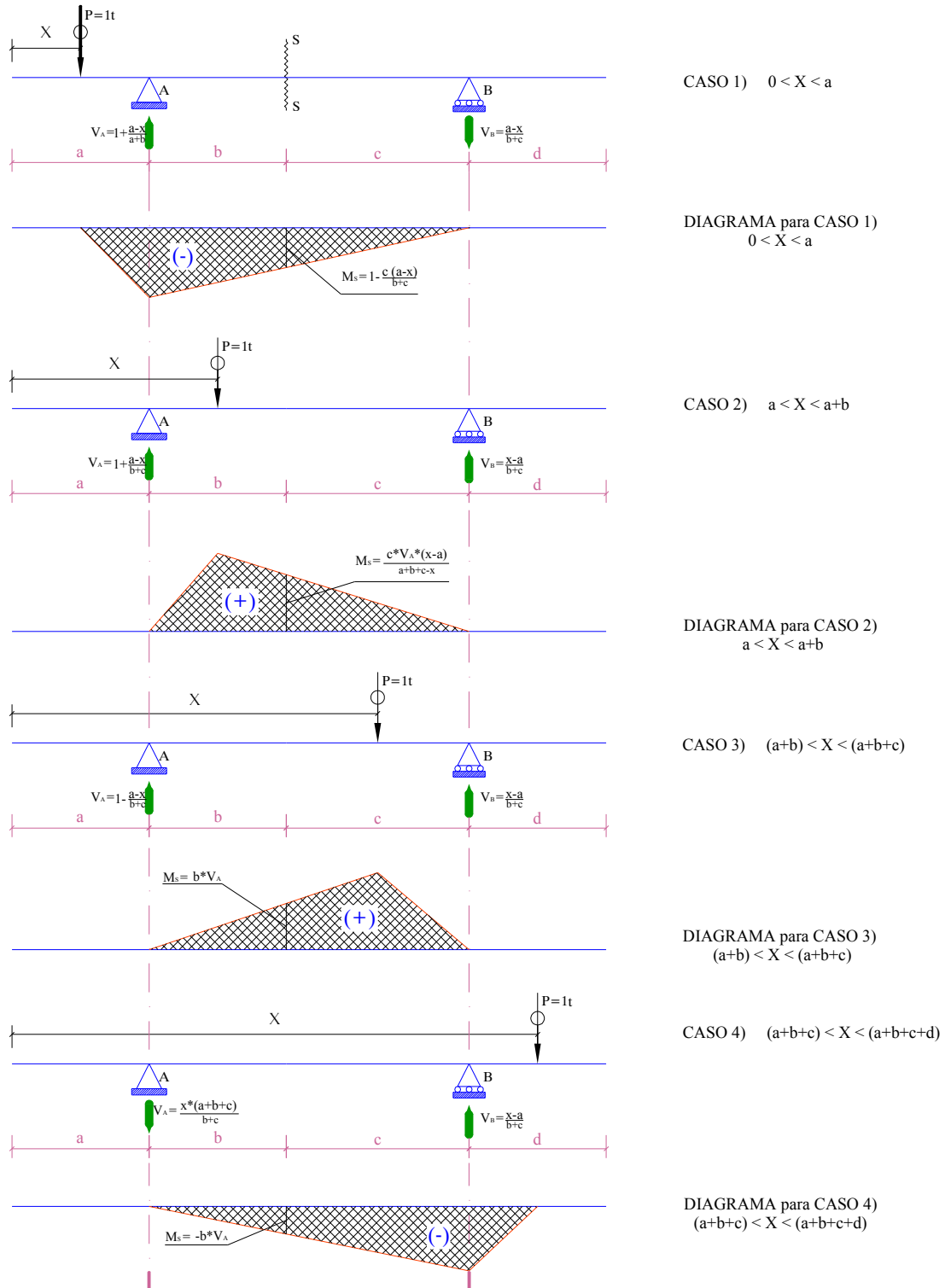


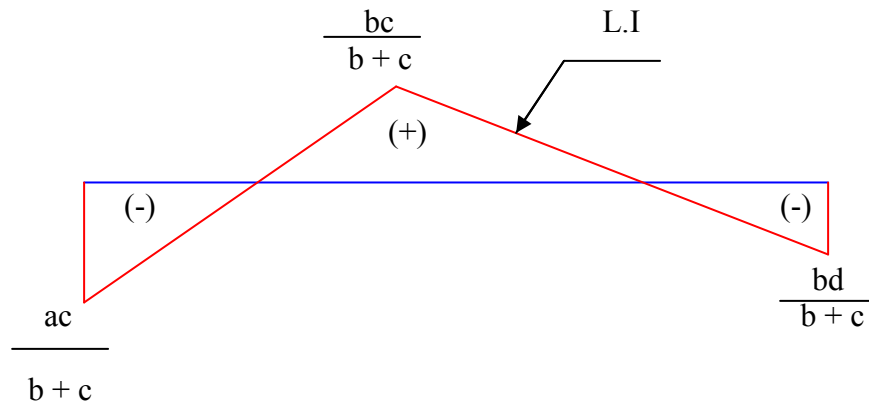
Figura 5.6

Ejercicio #4

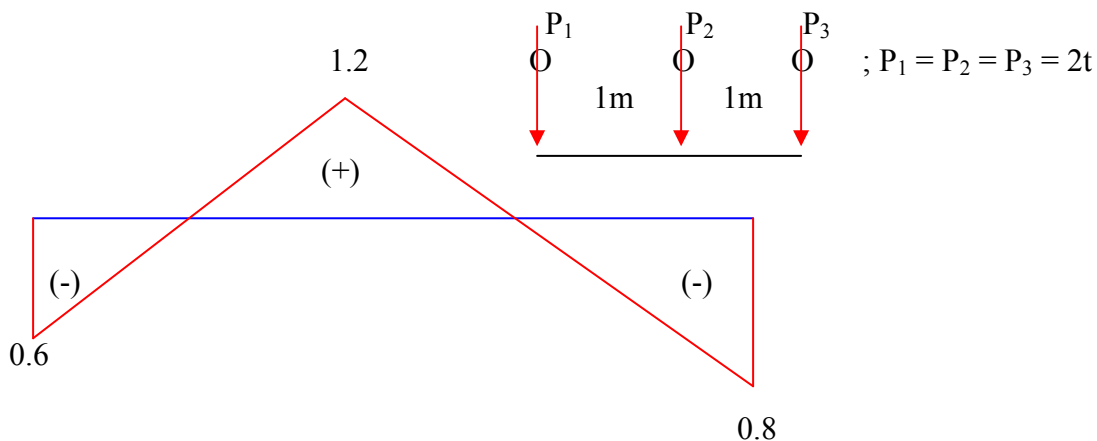
Determinar la posición del tren

Solución:

Con los 4 valores de M_S en sus respectivos dominios, dibujamos la LI deseada



Suponiendo $a = 1\text{m}$, $b = 2\text{m}$, $c = 3\text{m}$, $d = 2\text{m}$ y el tren que se muestra



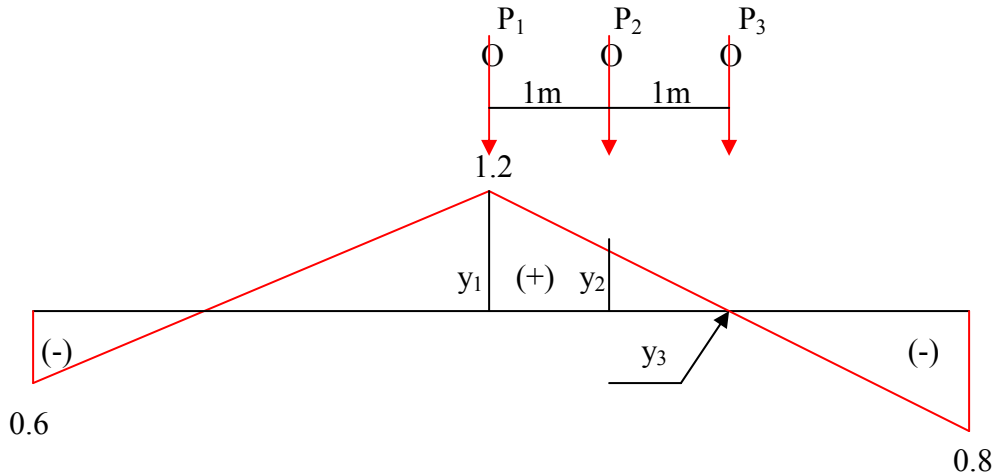
Podemos preguntarnos, ¿donde situar el tren de tal manera que el momento en la sección S sea la mayor positivo?

Sin importar donde se situé el tren, el momento en la sección fija S será

$$M_S = P_1 (y_1) + P_2 (y_2) + P_3 (y_3)$$

Como $P_1 = P_2 = P_3$, entonces el mayor valor de M_S dependerá de que y_1 , y_2 , y_3 sean las mayores ordenadas positivas.

Existen dos posibilidades:



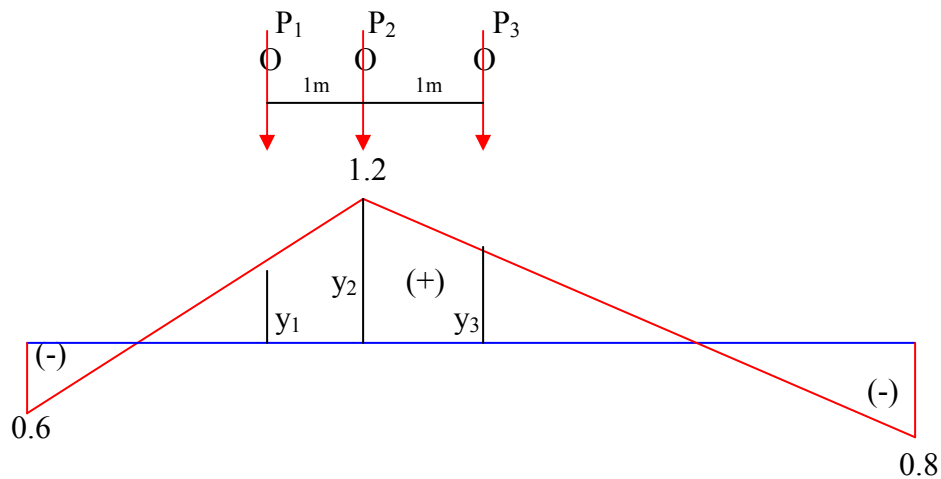
P_1 un infinitesimal a la derecha de la sección S.

$$y_1 = 1.2; \frac{y_2}{2} = \frac{1.2}{3} \Rightarrow y_2 = 0.8; \frac{y_3}{1} = \frac{1.2}{3} \Rightarrow y_3 = 0.4$$

Por lo tanto

$$M_S = 2 (1.2) + 2 (0.8) + 2 (0.4) = 4.8 \text{ t.m}$$

P_2 sobre la sección S



$$\frac{y_1}{1} = \frac{1.2}{2} \Rightarrow y_1 = 0.6, y_2 = 1.2 \quad \frac{y_3}{2} = \frac{1.2}{3} \Rightarrow y_3 = 0.8$$

Por lo tanto

$$M_S = 2 (0.6) + 2 (1.2) + 2 (0.8) = 5.2 \text{ t.m}$$

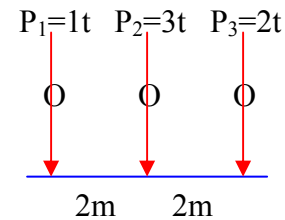
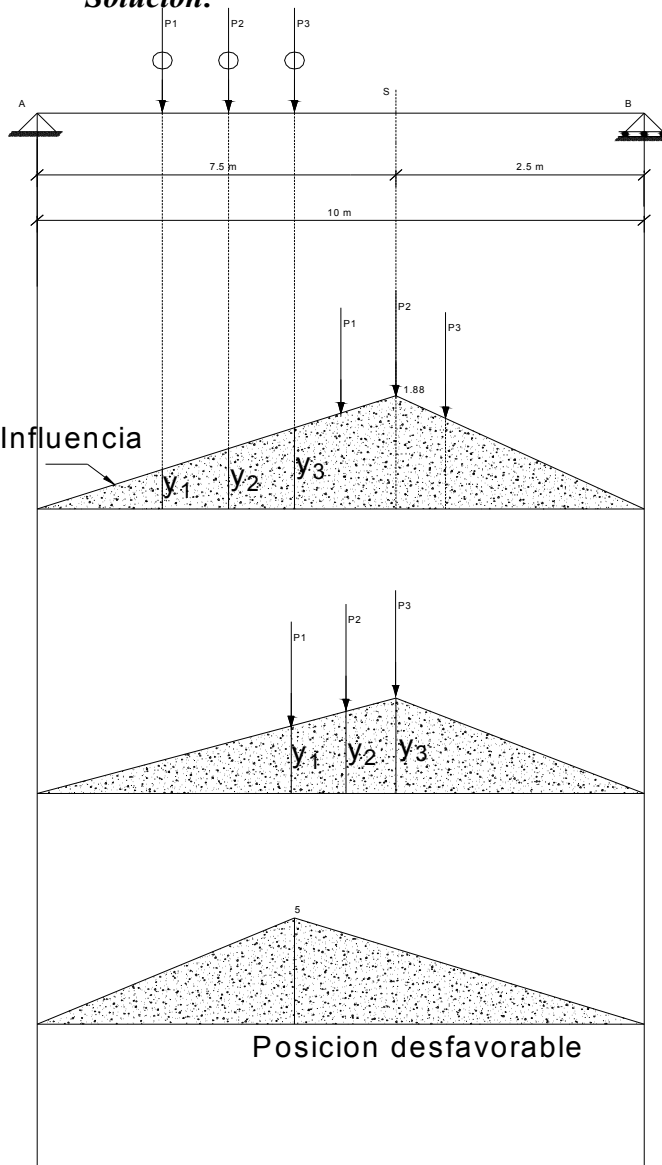
Como $5.2 \text{ t.m} > 4.8 \text{ t.m}$, entonces esta última posición del tren es la buscada.

Aun cuando ha sido necesario estudiar dos posibilidades, es notoria la importancia de la información que proporciona la LI. Sin dicha información, el procedimiento de situar el tren de tal manera que M_S sea el mayor positivo, hubiese sido extremadamente tedioso, cuando no imposible.

Ejercicio #5

El tren de cargas transita por la viga AB exigiendo que las 3 cargas se encuentren sobre la viga, estudia los extremos (máx. – min) valores del momento en la sección S, además estudia la posición más desfavorable de la sección S.

Solución:



$$a = 7.5 \text{ m}, b = 2.5 \text{ m}$$

$$L = 10 \text{ m} \Rightarrow \frac{a * b}{L} = 1.88$$

$$M_S = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3$$

$$\frac{y_2}{7.5} = \frac{y_1}{5.5} = y_1 = 1.38$$

$$\frac{1.88}{2.5} = \frac{y_3}{0.5} = y_3 = 0.38$$

$$M_S = 1(1.38) + 3(1.88) + 2(0.38) = 7.78 \text{ t.m}$$

$$\frac{y_3}{7.5} = \frac{y_1}{3.5} = y_1 = 0.88$$

a) $P_3 \rightarrow$ justo sobre la sección es mas grande

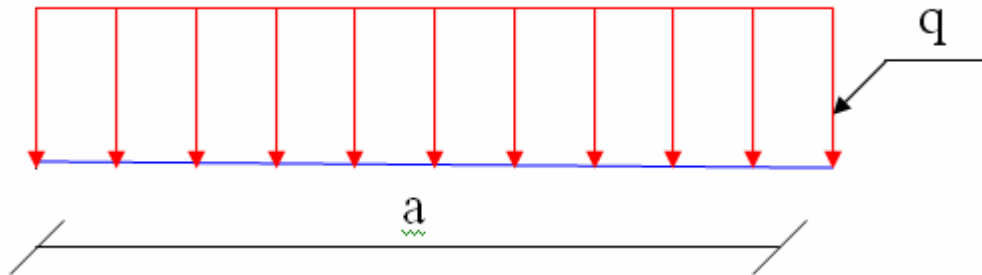
$$\frac{1.88}{7.5} = \frac{y_2}{5.5} = y_2 = 1.38$$

b) Momento mínimo cuando P_1 un infinitésimo a la derecha de a

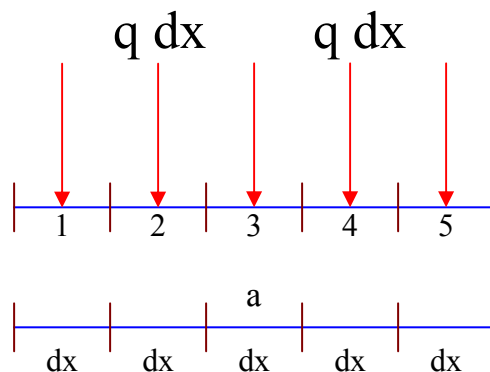
$$M_S = 1(1.38) + 3(1.38) + 2(1.88) = 8.78 \text{ t.m}$$

5.8 LINEA DE INFLUENCIA DE CARGA RECTANGULAR.

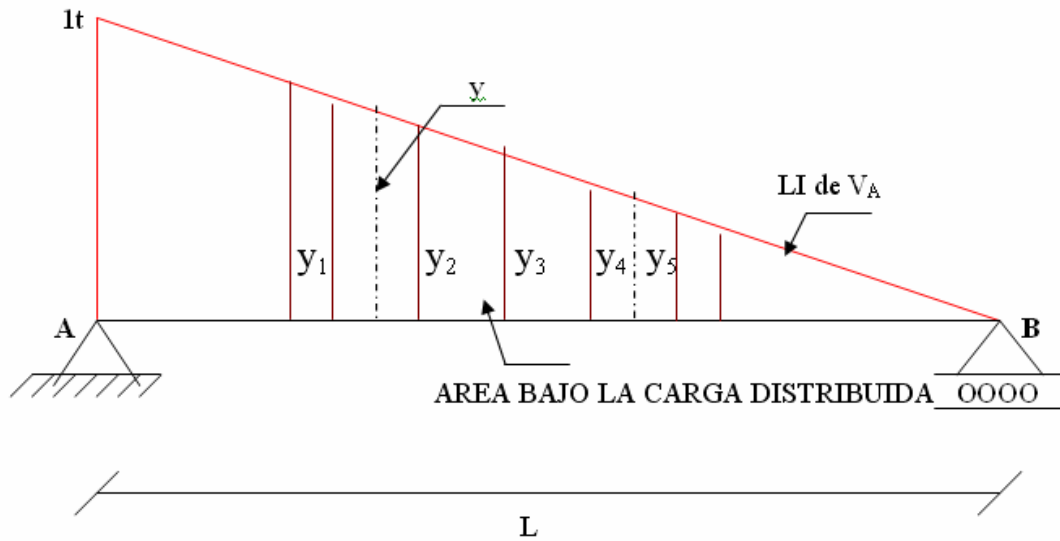
Este tipo de carga, se presenta por ejemplo, cuando tropas militares transitan en forma compacta sobre un puente.



La carga distribuida mostrada, puede suponerse equivalente a la siguiente:



Donde $q \, dx$ es ahora una Carga móvil concentrada



El valor de V_A será:

$$V_A = q \, dx \cdot y_1 + q \, dx \cdot y_2 + q \, dx \cdot y_3 + q \, dx \cdot y_4 + q \, dx \cdot y_5$$

Si la partición no es únicamente en cinco intervalos, entonces

$$V_A = \int_0^a q \, dx \cdot y = q \cdot \int_0^a y \, dx$$

Por lo tanto

$$V_A = q \cdot \text{área situada bajo la carga distribuida}$$

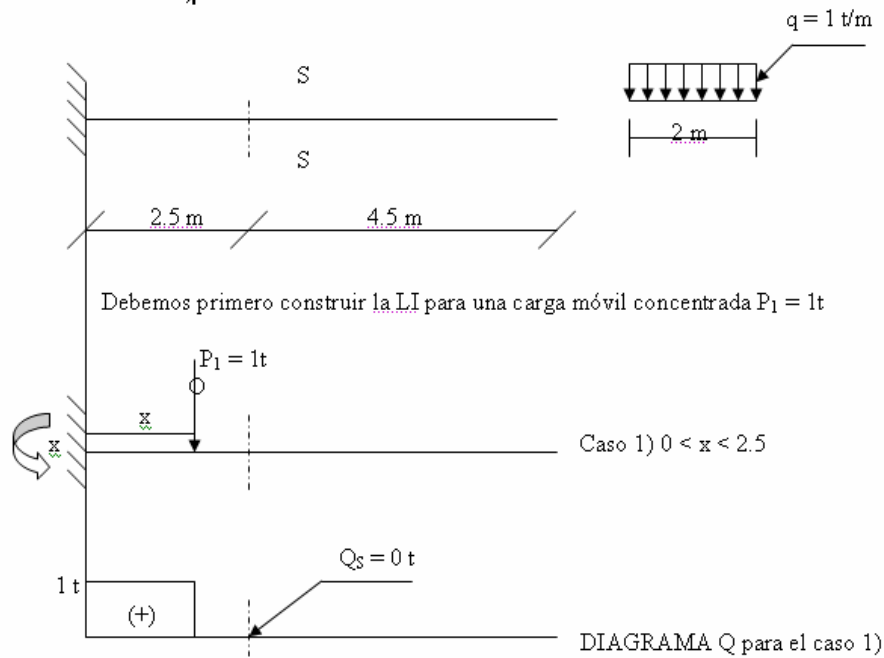
Lo establecido para la V_A es válido también para esfuerzos de corte y momentos.

Ejercicio #6

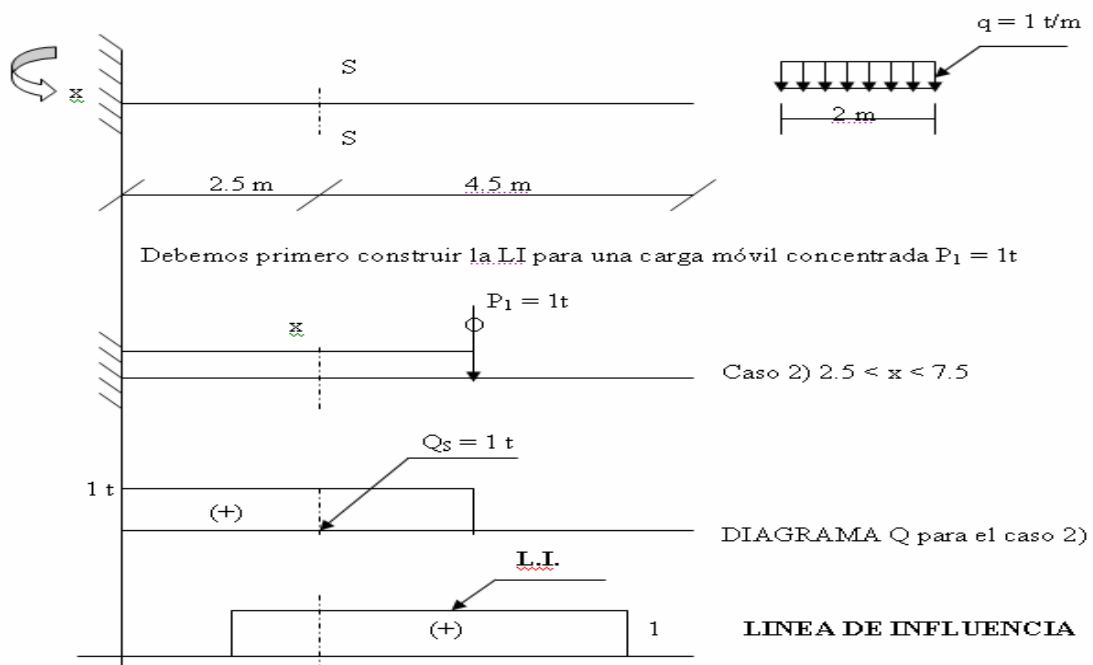
Determinar la LI de esfuerzos de corte en la sección S, considerando la carga móvil distribuida.

Solución:

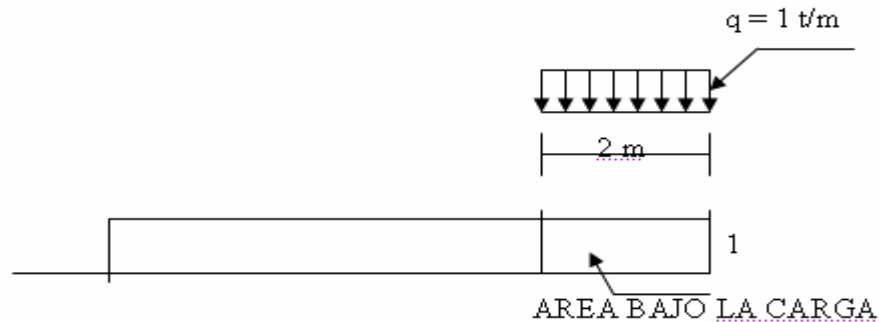
CASO 1)



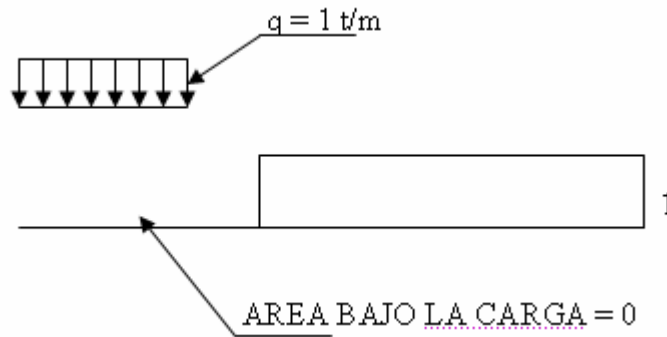
CASO 2)



Construida como esta la Línea de influencia de esfuerzos de corte en la sección S debida a $P = 1$ t, entonces podemos superponer a ella la carga distribuida $q = 1$ t/m en cualquier posición.



O también:



Por lo tanto:

$$Q_S = 1 (0) = 0 \text{ t}$$

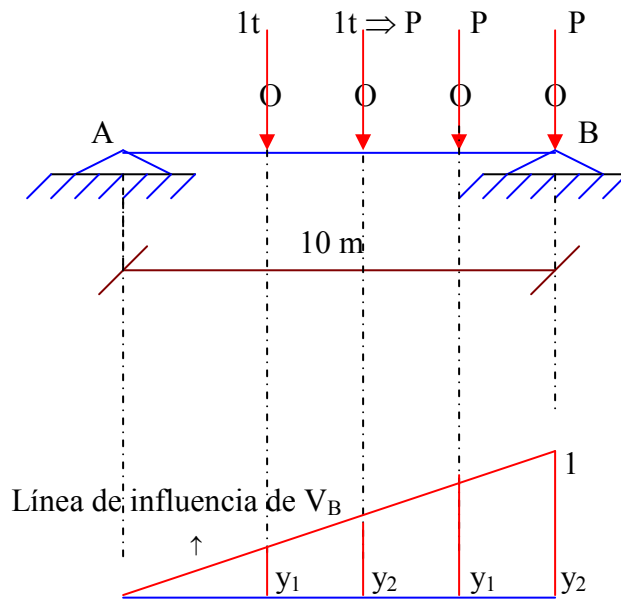
Ejercicio #6

El tren de carga que se observa transita por la viga AB. Se pide:

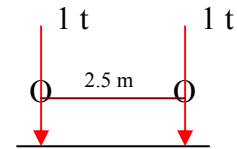
Posicionar (situar) el tren de tal manera que la reacción en B sea la mas grande posible. Se pide además situar el tren de tal manera que la reacción V_A mida 0.8 t

$$* V_A = P * y_1 \quad y \quad V_B = P * y_2$$

Solución:

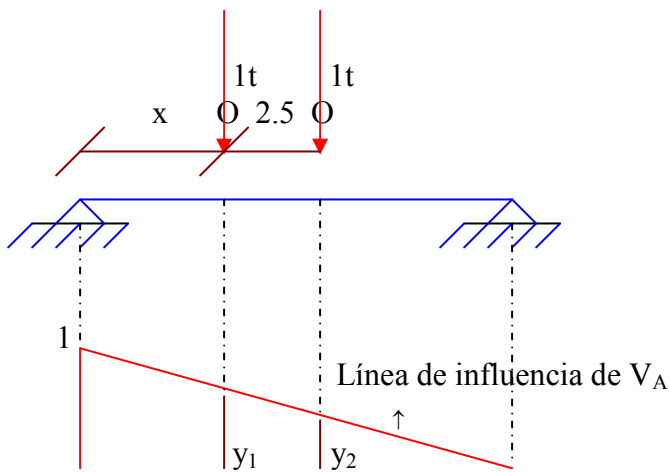


tren de cargas
móvil



$$V_B = Py_1 + Py_2$$

$$\frac{1}{10} = \frac{y_1}{7.5} \Rightarrow y_1 = 0.75$$



$$V_A = Py_1 + Py_2 \Rightarrow 0.8 \text{ t}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{y_1}{(10 - x)} \Rightarrow y_1 = \frac{10 - x}{10}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{y_2}{10 - (x + 2.5)} \Rightarrow$$

$$y_2 = \frac{10 - (x + 2.5)}{10}$$

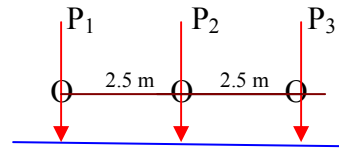
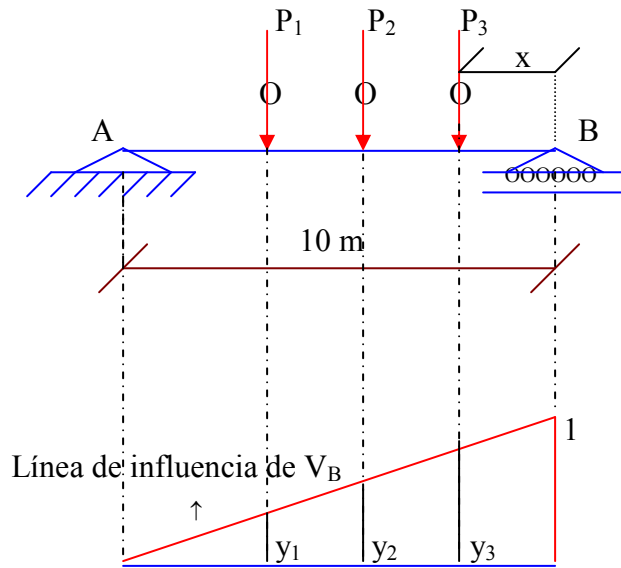
$$0.8 = P \frac{(10 - x)}{10} + P \frac{[10 - (x + 2.5)]}{10} \Rightarrow X = 4.75 \text{ m}$$

Ejercicio #7

Situar el tren de tal manera que la V_B mida

$$P_1 = 2 \text{ t}; P_2 = P_3 = 3 \text{ t}$$

Solución:



$$V_B = P y_1 + P y_2 + P y_3 \Rightarrow 5 \text{ t}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{y_3}{10 - x} \Rightarrow y_3 = \frac{10 - x}{10}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{y_2}{10 - (x + 2.5)} \Rightarrow y_2 = \frac{10 - (x + 2.5)}{10}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{y_1}{10 - (x - 5)} \Rightarrow y_1 = \frac{10 - (x - 5)}{10}$$

$$\Rightarrow 5 = \frac{2(-10 - x)}{10} + \frac{3[10 - (x + 2.5)]}{10} + \frac{3[10 - (x - 5)]}{10}$$

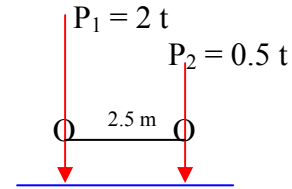
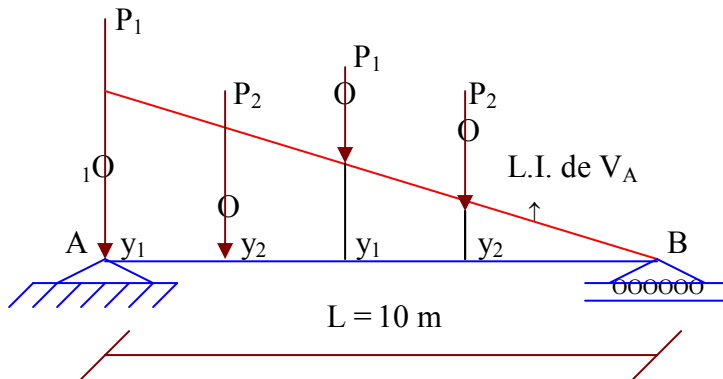
$$\Rightarrow X = 1.56 \text{ m}$$

Ejercicio #8

El tren de cargas (camión de cargas) transita por la viga de puente AB, se pide:

- Situar el tren de tal manera que la reacción en A sea la más grande posible.
- Situar el tren de tal manera que la reacción en B mida 1.5 t (si fuese posible).

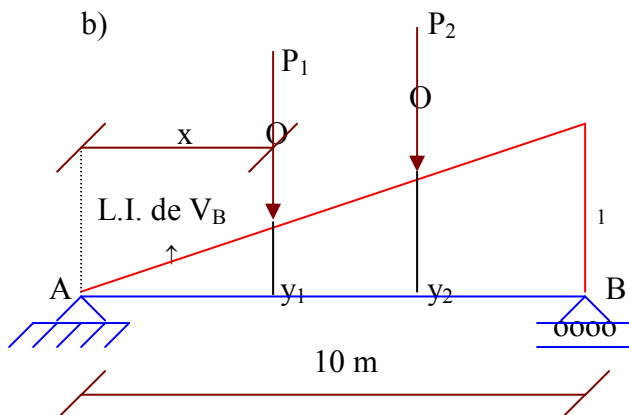
Solución:



$$V_A = P_1 y_1 + P_2 y_2$$

$$y_1 = 1; \quad \frac{1}{10} = \frac{y_2}{7.5} \Rightarrow y_2 = 0.75 \Rightarrow V_A = 2(1) + 0.5(0.75) = 2.6 \text{ t}$$

a) La carga P_1 ubicada exactamente encima del apoyo A, en tal caso la vertical de A es la mas grande y mide 2.6 t.



$$V_B = P_1 y_1 + P_2 y_2 = 1.5$$

$$\frac{1}{10} = \frac{y_1}{x} \Rightarrow y_1 = \frac{x}{10}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{y_2}{x + 2.5} \Rightarrow y_2 = \frac{x + 2.5}{10}$$

$$\Rightarrow 1.5 = 2 \frac{x}{10} + 0.5 \frac{x + 2.5}{10}$$

$$\Rightarrow 1.5 = 2x + 0.5x + 5/4 \Rightarrow 15 - 5/4 = 2.5x = 4.64$$

$$\Rightarrow x = 4.64 \text{ m}$$

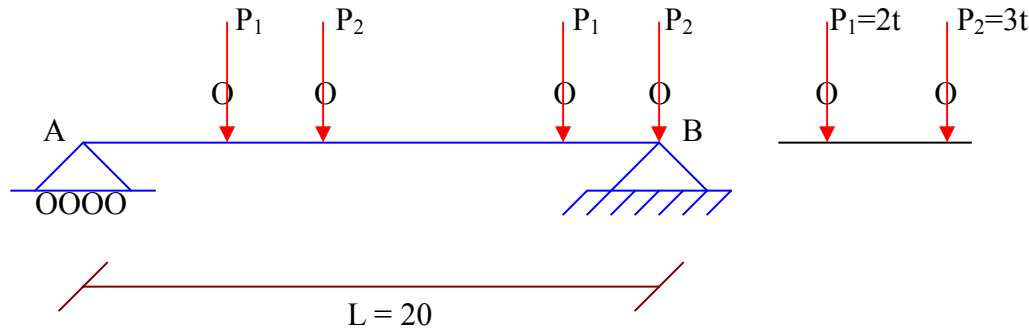
Resp.- La carga P_1 situada a 4.64 m del apoyo A

Ejercicio #9

Un tren de cargas (camión de cargas) transita por la viga de un Puente AB.

- Se trata de situar el tren de tal manera que la reacción vertical B sea la más grande
- y después de tal manera que esa reacción sea cero.
- Que posición debe ocupar el tren para que la vertical de A mida 3.8 t

Solución:



$$V_B = 2 y_1 + 3 y_2 ; y_2 = 1$$

$$\frac{1}{20} = \frac{y_1}{15} \Rightarrow y_1 = \frac{15}{20} = 0.75$$

$$\therefore V_B = 2 (0.75) + 3 (1) = V_B = 4.5 \text{ t}$$

$$V_A = P_1 y_1 + P_2 y_2 = 2 y_1 + 3 y_2 = 3.8$$

$$\frac{1}{20} = \frac{y_1}{20 - x} \Rightarrow y_1 = \frac{20 - x}{20}$$

$$\frac{1}{20} = \frac{y_2}{20 - (x + 5)} \Rightarrow y_2 = \frac{15 - x}{20} \quad *$$

Resp a) La carga P_2 justo sobre los apoyos B para esa posición. La vertical de V_B es la mas grande y vale 4.5 t.

Resp b) La vertical en B $V_B = 0$ cuando P_2 se encuentre exactamente sobre el apoyo A

Resp c) del *

$$2 \left(\frac{20 - x}{20} \right) + 3 \left(\frac{15 - x}{20} \right) = 3.8$$

$$2 (20 - x) + 3 (15 - x) = 3.8 * 20$$

$$6x = 85 - 3.8 \cdot 20$$

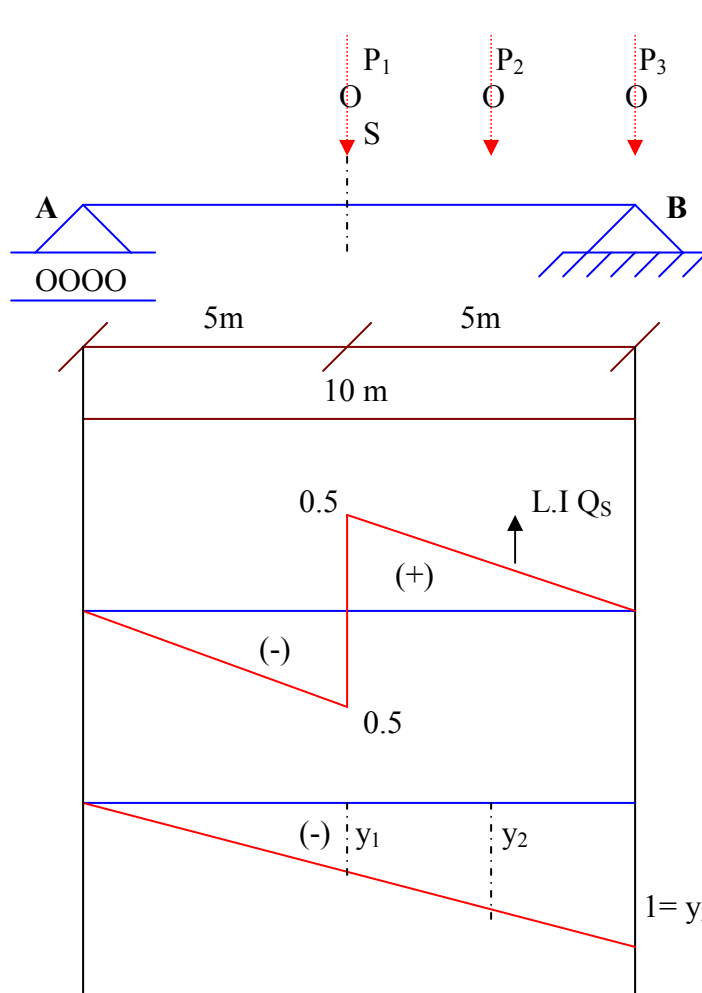
$$x = \frac{85 - 3.8 \cdot 20}{6} = 1.8 \Rightarrow x = 1.8 \text{ m}$$

Ejercicio #10

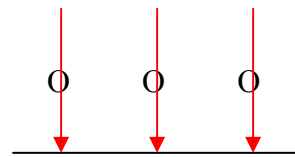
Un tren de cargas esta constituido por tres cargas móviles P_1 , P_2 , P_3 el tren transita por la viga AB.

- Si el tren sobre la viga, de tal manera que el esfuerzo cortante en la sección S sea el más grande de los positivos.
- Situar el tren de tal manera que el esfuerzo cortante en la sección S sea cero.
- Ubicar la sección S de tal forma que en ella se genera el esfuerzo de corte menor de los negativos.

Solución:



$$P_1 = 1t \quad P_2 = 2t \quad P_3 = 1t$$



$$a = 5, b = 5, L = 10$$

$$\frac{a}{L} = 0.5, \quad \frac{b}{L} = 0.5$$

$$Q_S = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3$$

- La carga P_1 situada un infinitésimo a la derecha de S y el máximo cortante positivo en S en 1t

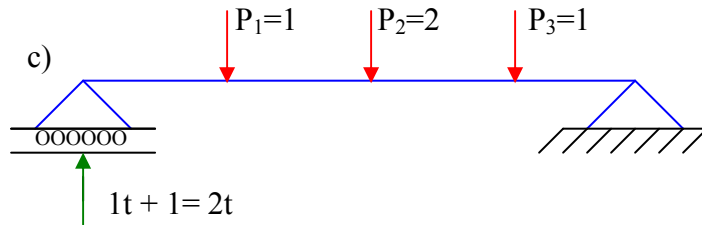
$$Q_S = 1 y_1 + 2 y_2 + 1 y_3$$

$$1 = y_3 \quad y_1 = 0.5, y_3 = 0$$

$$\frac{0.5}{5} = \frac{y_2}{2.5} \Rightarrow y_2 = 0.25$$

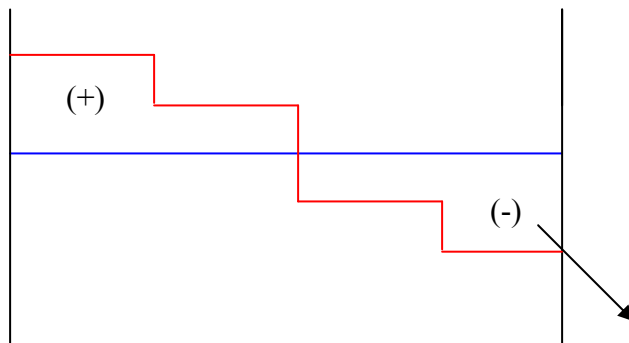
$$Q_S = 0.5 + 0.5 + 0 = 1 \text{ t}$$

b) La carga P_2 justo sobre la sección S



P_3 justo sobre B y S sobre B

$$Q_S = -0.5(1) - 0.75 - 1 = -2.25 \text{ t}$$



$$\frac{1}{10} = \frac{y_2}{7.5} \Rightarrow y_2 = 0.75$$

$$\frac{1}{10} = \frac{5}{5} \Rightarrow y_1 = 0.5$$

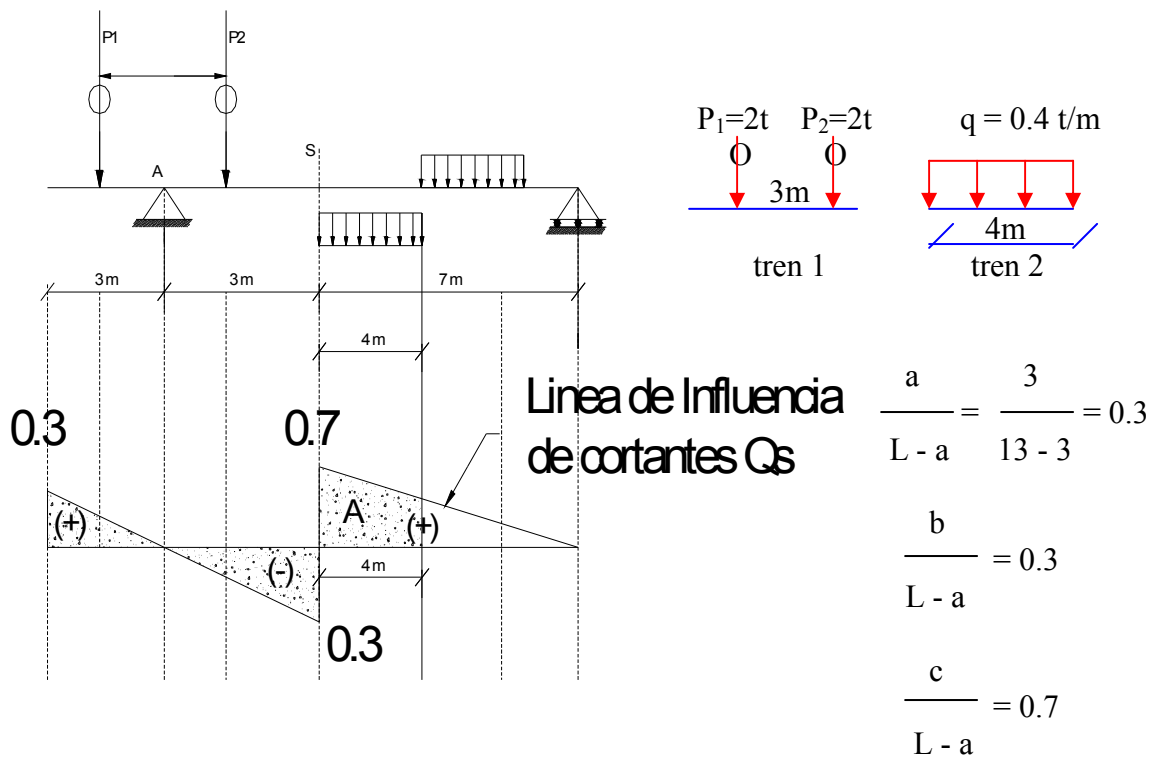
GRAFICA Q

Un puente sufre más al inicio y al final del puente.

Ejercicio #11

- Posicionar el tren 1 sobre la viga (con todas las cargas actuando) de manera que el esfuerzo cortante en la sección S sea 0 (si se puede).
- posicione el tren 2 de tal manera que el esfuerzo de corte en la sección S sea el más grande de los positivos.

Solución:



a) P_1 : 1.5 m a la izquierda del apoyo fijo

b) $Q_s = q * A$

$$\frac{0.7}{7} = \frac{y}{3} \Rightarrow y = 0.3$$

$$A = (0.7 + 0.3) * 4/2 = 2$$

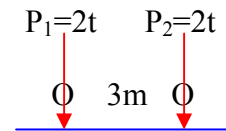
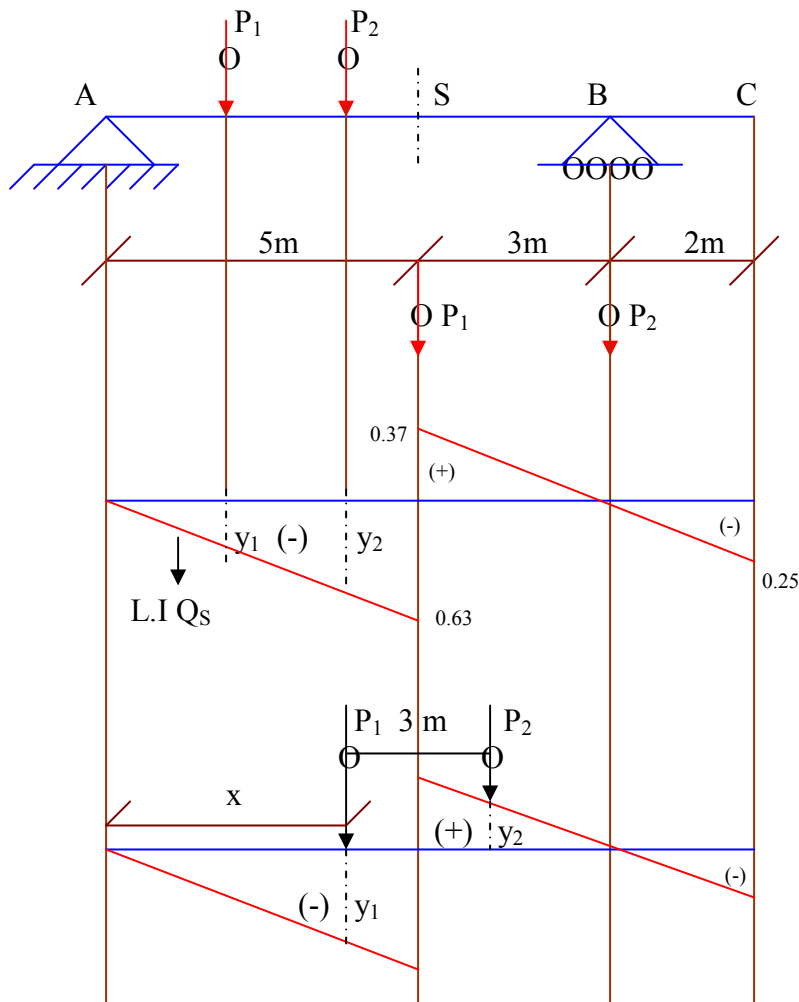
$\Rightarrow Q_s = 0.4 * 2 = 0.8 \text{ t}$ El extremo izquierda de la carga distribuida un
infinitésimo a la derecha de la sección

Ejercicio #12

El tren de 2 ejes que se observa transita por la viga A-B-C.

- posicionar (situar) el tren de tal manera que el esfuerzo cortante en la sección S sea el mas grande de los positivos (y cuanto vale).
- Situar el tren de tal manera que el esfuerzo cortante en la sección S sea 0.

Solución:



$$a = 5, b = 3, c = 2$$

$$\frac{a}{a+b} = 0.63$$

$$\frac{b}{a+b} = 0.37$$

$$\frac{c}{a+b} = 0.25$$

$$Q_s = P_1 y_1 + P_2 y_2$$

$$Q_s = 2 (0.37) + 2 (0) = 0.74t$$

La carga P_1 un infinitésimo a la derecha de la sección.

$$b) \quad \frac{0.63}{5} = \frac{y_1}{x} \Rightarrow y_1 = 0.13 x$$

$$\frac{0.37}{3} = \frac{y_2}{8 - (x + 3)} \Rightarrow y_2 = 0.12 [8 - (x + 3)]$$

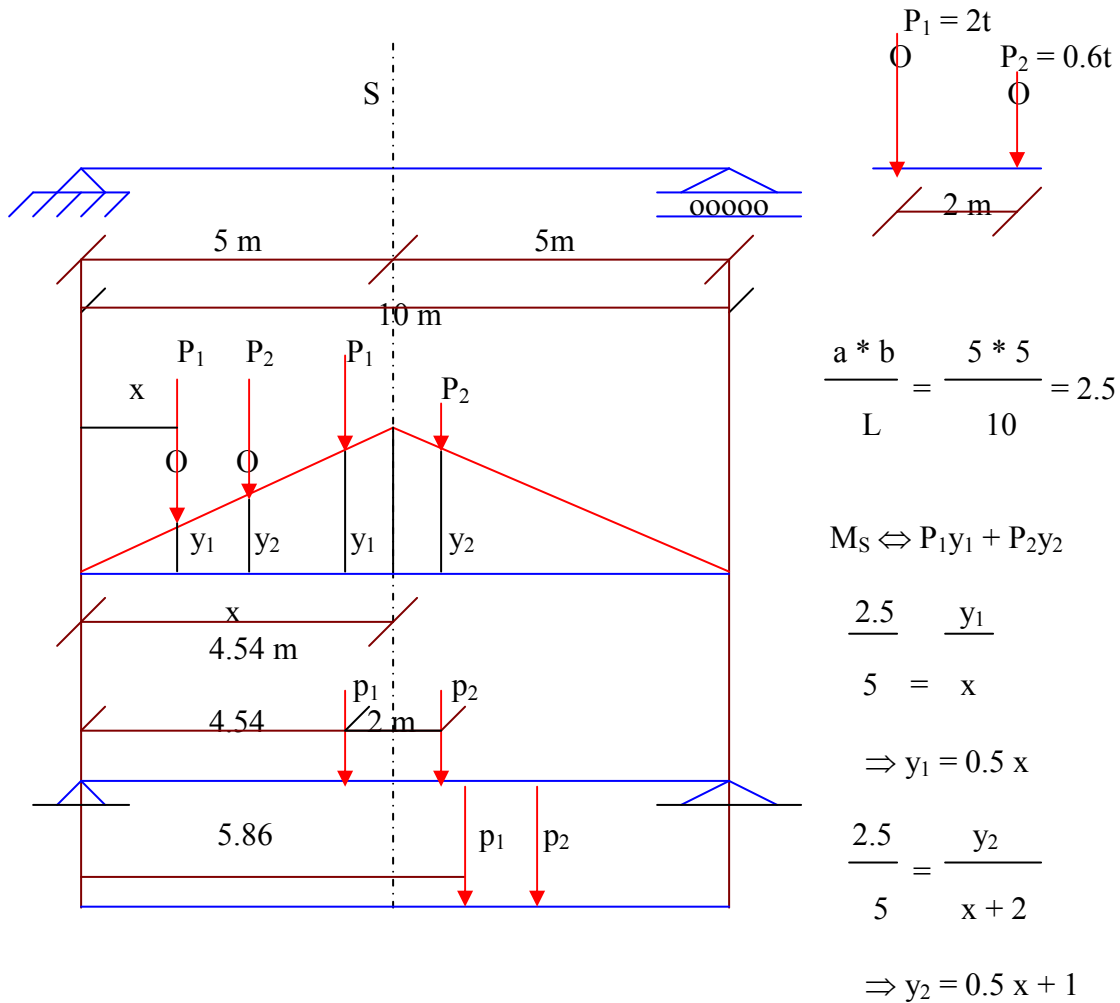
$$Q_s = 2 (-0.13x) + 2 [0.12 (8 - (x + 3))] = 0$$

$$X = 2.4 \text{ m}$$

Ejercicio #13

Situar el tren de cargas de tal manera que el momento en la sección S mida 6.5 t.m (si fuese posible) Necesariamente las 2 cargas del tren deberán actuar sobre la viga.

Solución:



$$\therefore M_S = 2 (0.5) x + 0.6 (0.5 x + 1) = 6.5$$

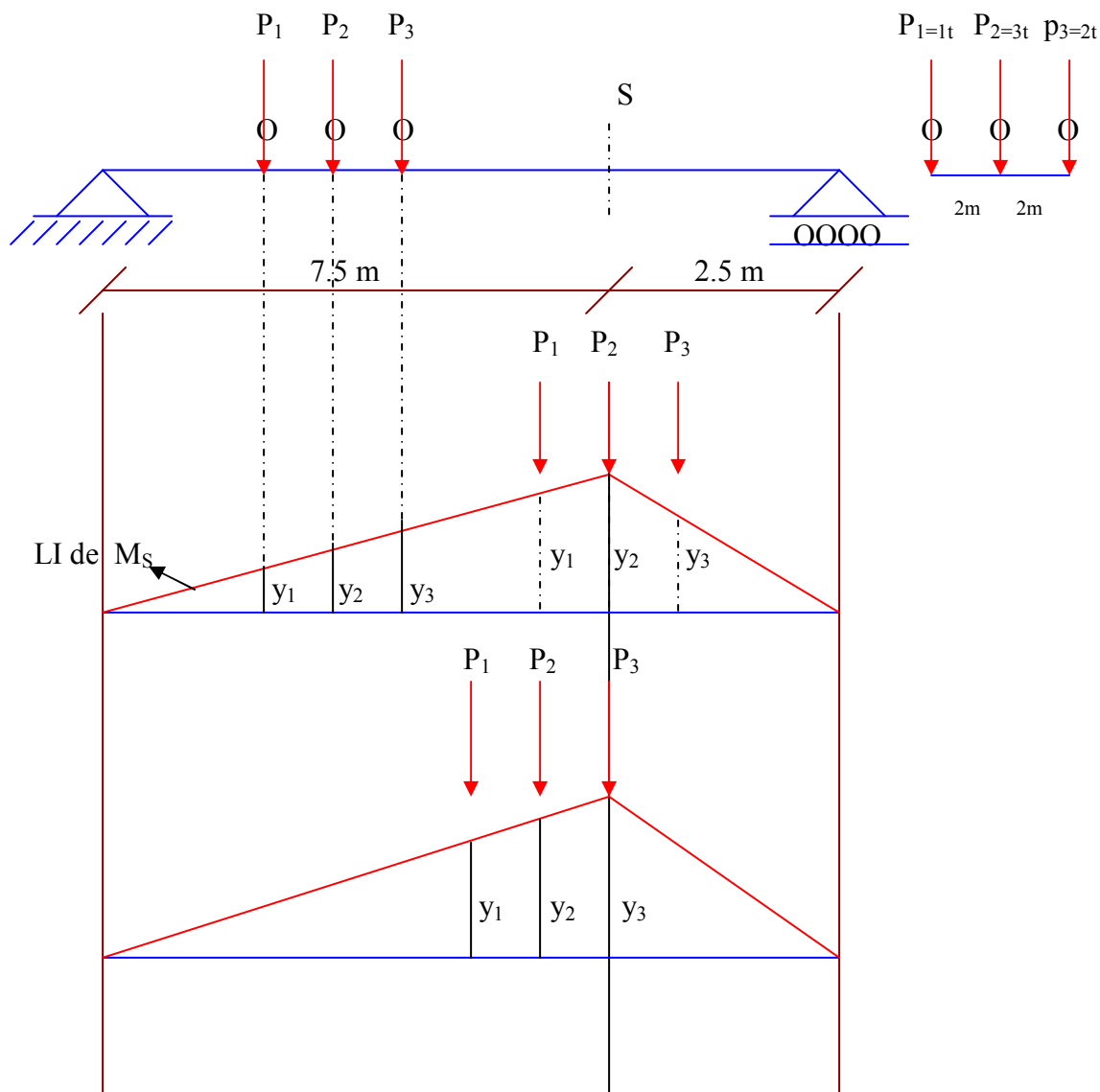
$$x + 0.3 x = 5.9$$

$$X = 4.54 \text{ m}$$

Ejercicio #14

El tren de cargas transita por la viga AB exigen que las tres cargas se encuentren sobre la viga. Estudiar los extremos (max y min) valores del momento en la sección S, además estudiar la posición más desfavorable de la sección S.

Solución:



$$a = 7.5 \text{ m}, b = 2.5 \text{ m}$$

$$M_S = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3$$



$$L = 10 \text{ m} \Rightarrow \frac{a * b}{L} = 1.88$$

$$y_2 = 1.88$$

$$\frac{y_2}{7.5} = \frac{y_1}{7.5 - 2} \Rightarrow y_1 = 1.38$$

$$\frac{1.88}{2.5} = \frac{y_3}{2.5 - 2} \Rightarrow y_3 = 0.38$$

$$M_S = (1.38) * 1 + (1.88) * 3 + (0.38) * 2$$

$$M_S = 7.78 \text{ t.m}$$

$$\frac{y_3}{7.5} = \frac{y_1}{7.5 - 4} \Rightarrow y_1 = 0.88 \quad \frac{y_3}{7.5} = \frac{y_2}{7.5 - 2} \Rightarrow y_2 = 1.38$$

$$M_S = 1 * (0.88) + 3 * (1.38) + 2 * (1.88)$$

$$M_S = 8.78 \text{ t.m}$$

P_3 = justo sobre la sección

a) Momento mínimo cuando P_1 un infinitésimo a la derecha de A

La suma de los M_S es 10. Encontrar los M_S de tal manera que su producto sea máximo

$$x + y = S \Rightarrow x = S - y$$

$$P(x, y) = 0 \quad S - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{S}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$a = 5$$

$$b = 5$$

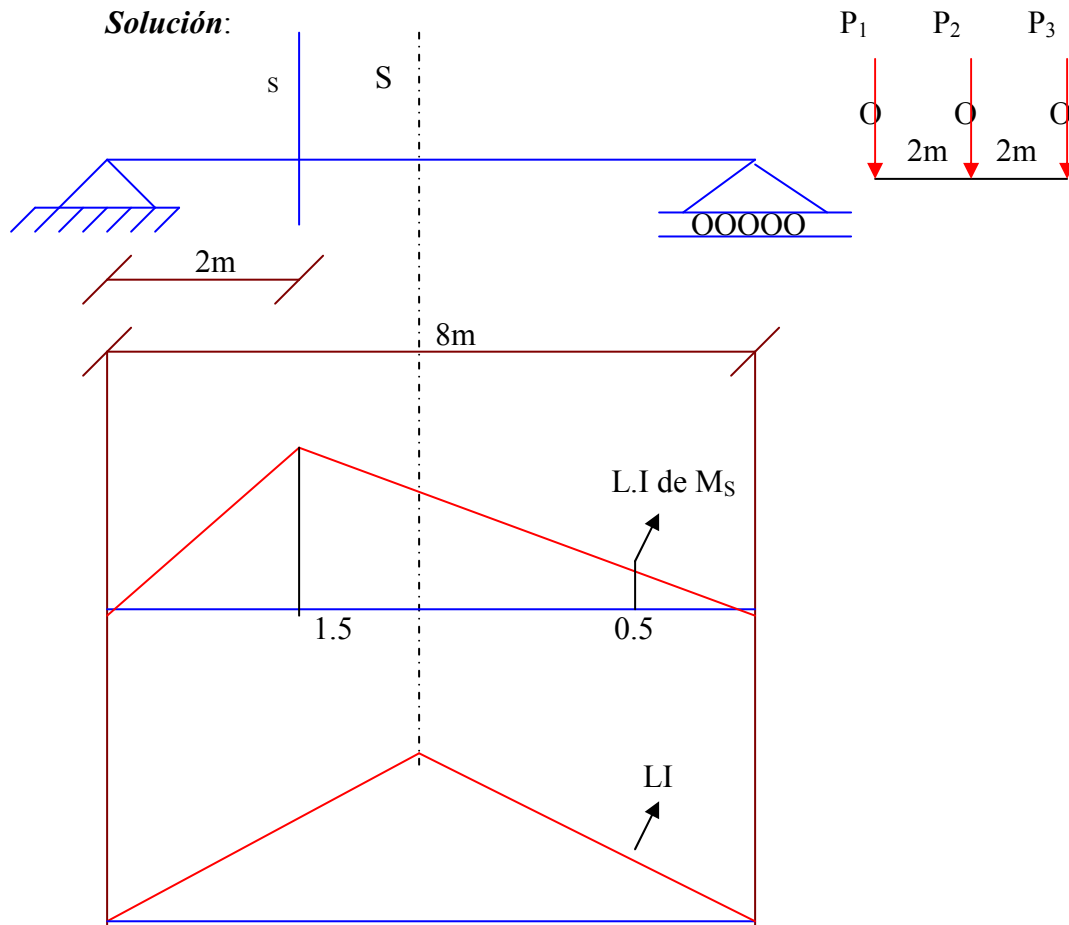
$$\frac{a * b}{L} = \frac{25}{10} = 2.5 \text{ m}$$

Ejercicio #15

El tren de cargas constituido por P_1 , P_2 , P_3 transita por la viga de puente AB:

- Situar el tren de tal manera que genere el máximo momento positivo en la sección S.
- Posicionar el tren de tal manera que genere el mínimo momento positivo en la sección S.
- determine la sección S para la cual se producirá el máximo momento positivo.

Solución:



$$P_1 = P_2 = P_3 = 3 \text{ t}$$

$$a = 2; b = 6$$

$$\frac{a * b}{L} = \frac{2 * 6}{8} = 1.5$$

$$M_S = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3$$

a) P_1 sobre la sección S \Rightarrow

$$\frac{1.5}{6} = \frac{y_2}{4} \Rightarrow y_2 = 1$$

$$\frac{1.5}{6} = \frac{y_3}{2} \Rightarrow y_3 = 0.5$$

$$\therefore M_S = 3 (1.5 + 1 + 0.5) = 9$$

$$M_S = 9 \text{ t.m}$$


b) P_1 un infinitésimo a la izquierda de B y P_3 un infinitésimo a la derecha de A.

c) $x + y = L \Rightarrow y = L - x$


$$\text{PRO} \Leftrightarrow x * y \Rightarrow \text{PRO} = x (L - x)$$

$$= x L - x^2$$

$$\text{PRO} = L - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{2} \quad ; \quad y = \frac{L}{2}$$



a



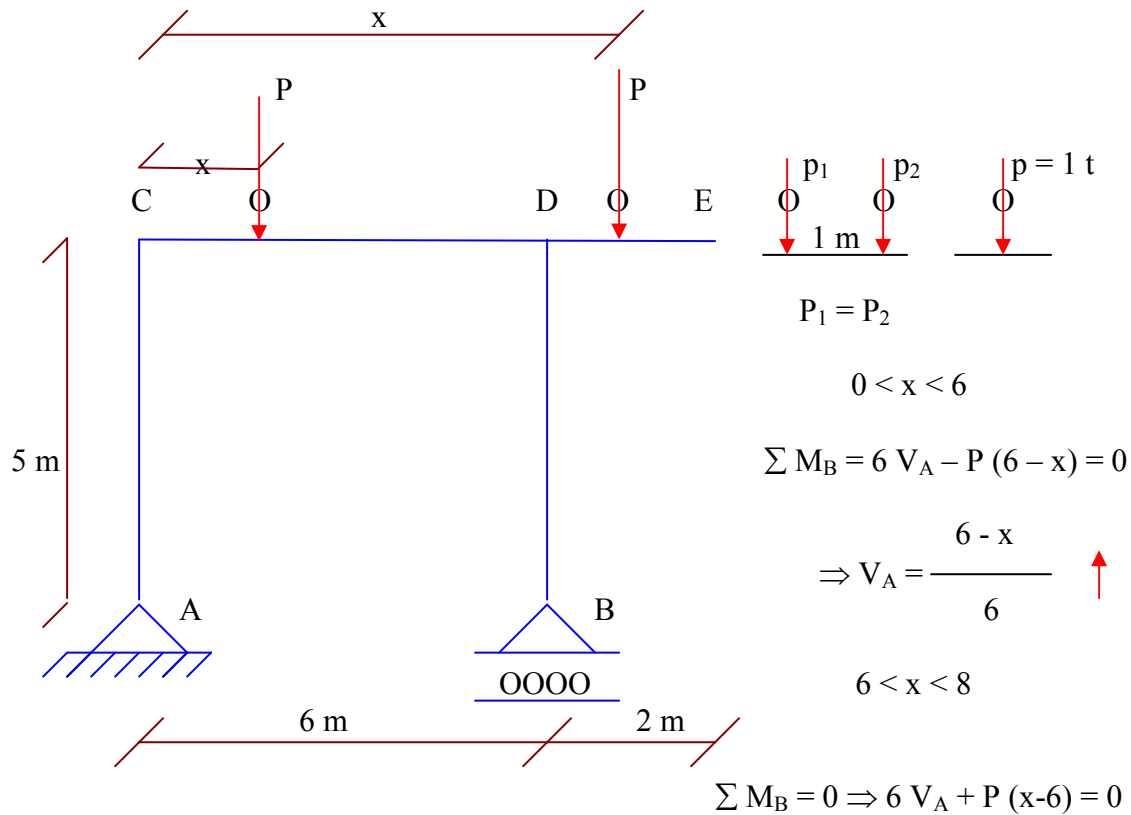
b

La sección S debe situarse en el punto medio del tramo AB es decir 4 metros de cualquiera de los apoyos y P_2 justamente sobre la sección S.

Ejercicio #16

Estudiar el comportamiento de la reacción V_A cuando el tren que observa transitar por el travesaño CDE. No importa como se encuentre constituido el tren, debe dibujarse la línea de influencia para una sola carga móvil unitaria P_0 .

Solución:



a) Max V_A^+

$$\frac{1}{6} = \frac{y_2}{5} \Rightarrow y_2 = \frac{5}{6}$$

$$\therefore V_A = P_1 y_1 + P_2 y_2$$

$$V_A = 1 * 1 + 1 * 5/6 = 1.83 \text{ t}$$

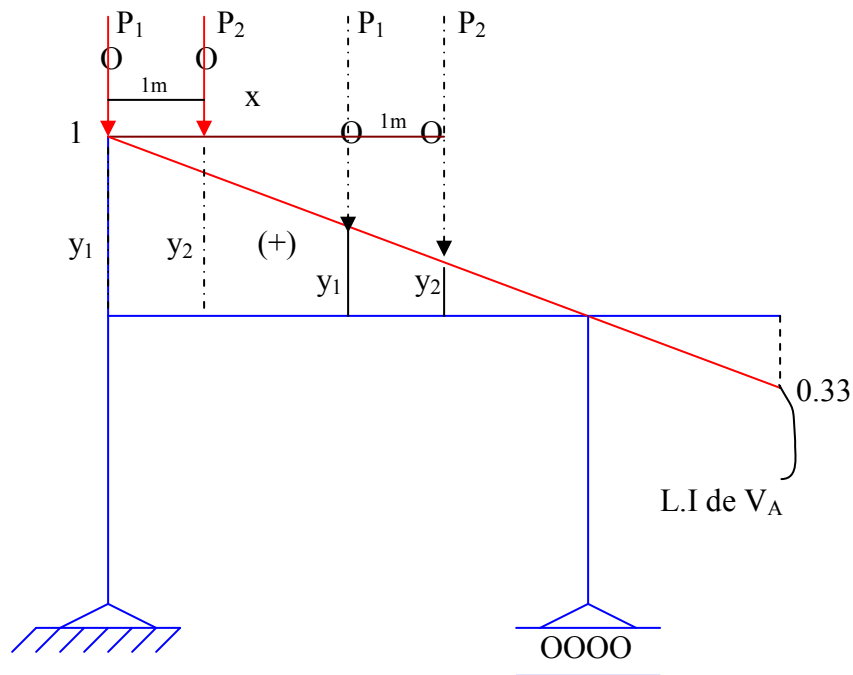
$$V_A = 1.83 \text{ t}$$

b) Min $V_A^+ \Rightarrow P_1$ antes de 5.5 m

c) Min $V_A^- \Rightarrow P_2$ en E

$$\frac{0.33}{2} = \frac{y_1}{1} \Rightarrow y_1 = \frac{0.33}{2} = 0.165$$

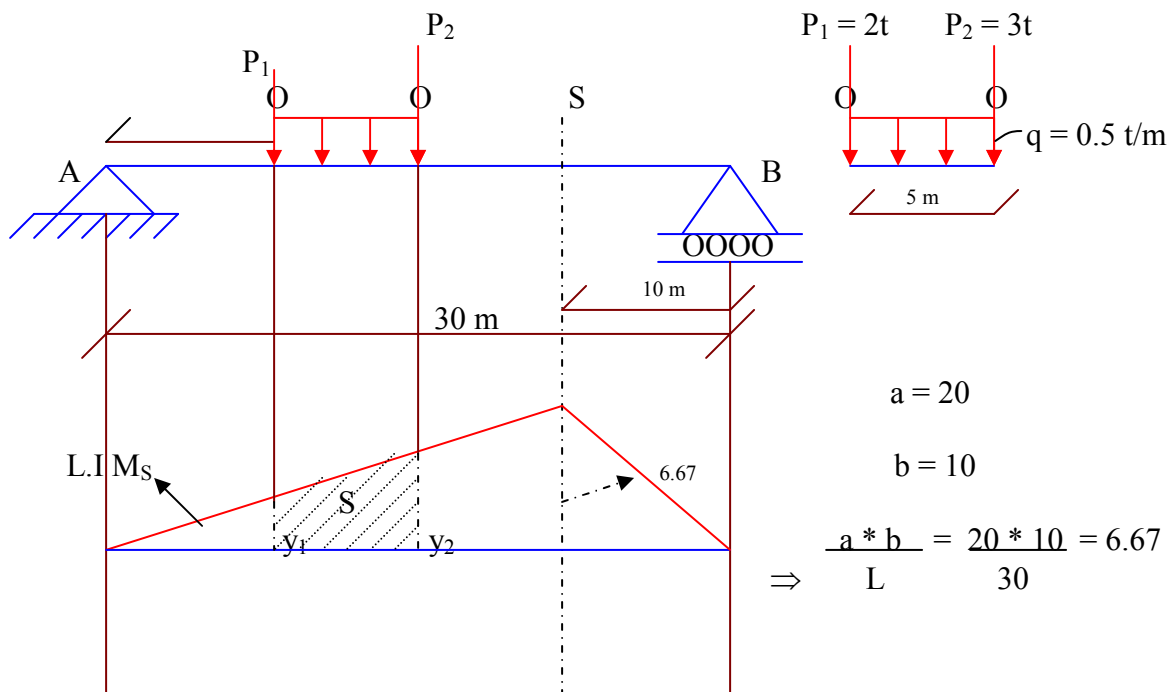
$$V_A^- = 1 * (-0.165) + 1 * (-0.33) = -0.495$$



Ejercicio #17

El tren que se observa compuesto por 2 cargas concentradas P_1 y P_2 y por una carga distribuida que transita por una línea. Posicionar el tren de tal manera que el momento flector en la sección S sea de 40 t.m (Si existe).

Solución:





$$M_S = P_1 * y_1 + P_2 * y_2 + q * S$$

$$\frac{6.67}{20} = \frac{y_1}{x} \Rightarrow y_1 = 0.33 x$$

$$\frac{6.67}{20} = \frac{y_2}{x + 5} \Rightarrow y_2 = 0.33 x + 1.65$$

$$S = (y_2 + y_1) * 5/2$$

$$S = ((0.33 x + 1.65) + 0.33 x) * 5/2$$

$$S = 1.65 X + 4.13$$

$$M_S = 2 (0.33 x) + 3 (0.33 x + 1.65) + 0.5 (1.65x + 4.13) = 40$$

$$M_S = 0.66 x + 0.99 x + 4.95 + 0.83 x + 2.06 = 40$$

$$\therefore x = 13.33 \text{ m}$$

La carga P_1 a 13.33 m del estribo (apoyo A)

$$a + b = L \Rightarrow b = L - a$$

$$P(a, b) = a * b$$

$$P(a) = a * (L - a) = a * L - a^2$$

$$P^I(a) = L - 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{L}{2} \quad \text{CRITICO}$$

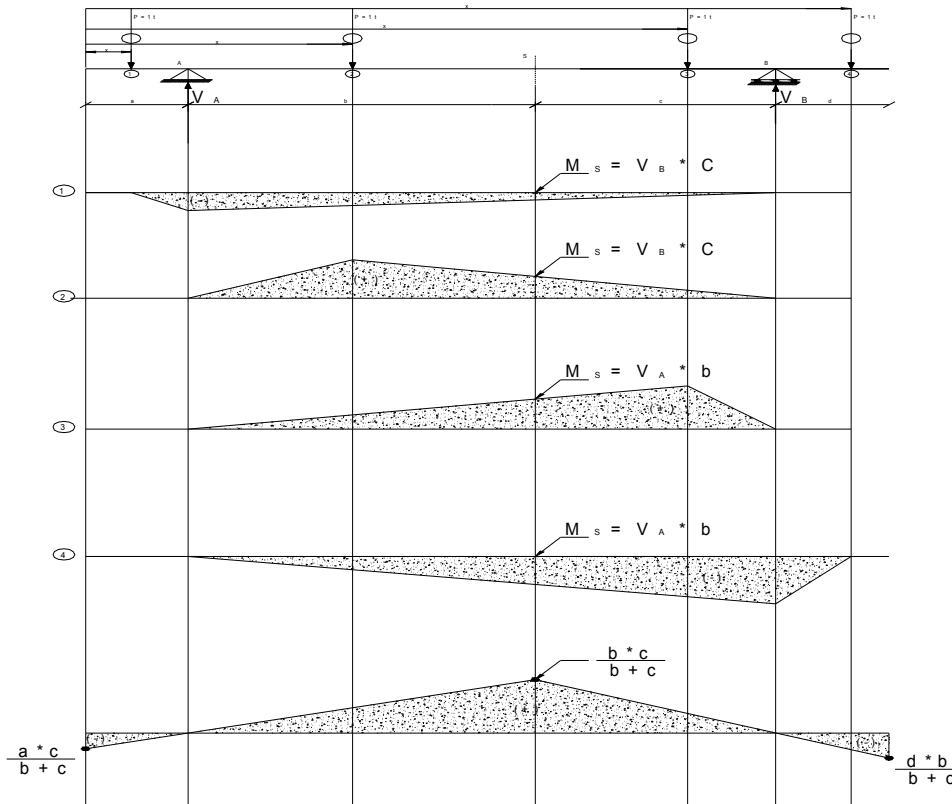
$$P^{II}(a) = -2 \Rightarrow P^{II}\left(\frac{L}{2}\right) = -2 < 0 \Rightarrow \text{MAXIMO}$$

$$a = \frac{L}{2} ; b = \frac{L}{2}$$

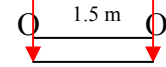
Ejercicio #18

Posicionar el tren de cargas móviles en la viga de la grafica 1 de tal manera que el momento en la sección S sea el más grande de los negativos (en valor absoluto).

Solución:



$$P_1 = 3t \quad P_2 = 2t$$



$$a = 3 \text{ m}$$

$$b = 5 \text{ m}$$

$$c = 4 \text{ m}$$

$$d = 2 \text{ m}$$

$$\frac{a * c}{b + c} = \frac{3 * 4}{5 + 4} = 1.33$$

$$\frac{b * c}{b + c} = \frac{5 * 4}{5 + 4} = 2.22$$

$$\frac{b * d}{b + c} = \frac{5 * 2}{5 + 4} = 1.11$$

La carga P_1 3 m a la Izquierda del apoyo A

$$M_S = P_1 y_1 + P_2 y_2$$

$$\frac{1.33}{3} = \frac{y_2}{1.5} \Rightarrow y_2 = 0.67$$

$$M_S = 3 (-1.37) + 2 (-0.67)$$

$$M_S = -5.33 \text{ ton}_m$$

$$1) \text{ Dom } \Leftrightarrow 0 < x < a$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -P(a-x) - (b+c) V_B = 0 \Rightarrow V_B = - \frac{a-x}{b+c} \quad (-)$$

$$2) \text{ Dom } \Leftrightarrow a < x < a+b$$

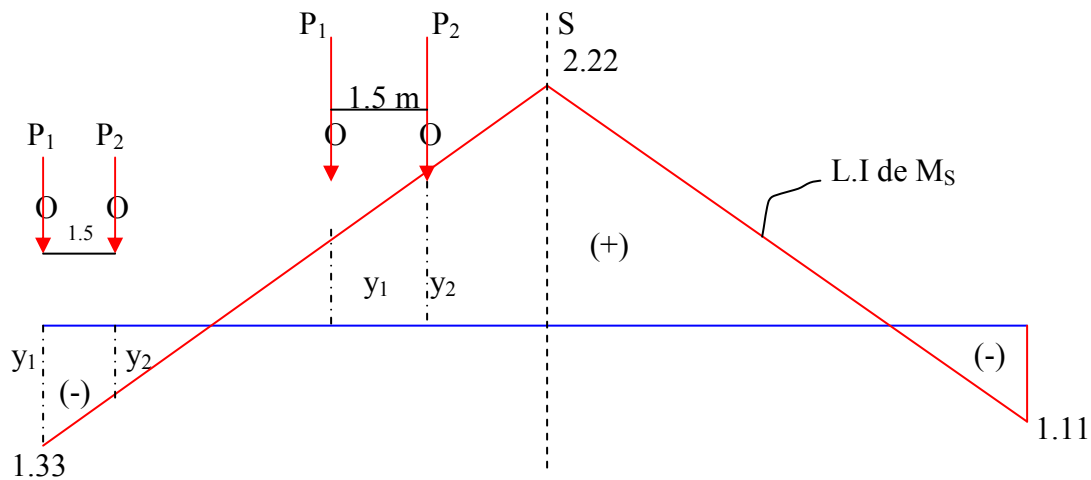
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow P(a-x) - (b+c) V_B = 0 \Rightarrow V_B = - \frac{a-x}{b+c} \quad (+)$$

$$3) \text{ Dom } \Leftrightarrow a+b < x < a+b+c$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow (b + c) V_A - P [(a + b + c) - x] = 0 \Rightarrow V_A = \frac{(a + b + c) - x}{b + c} \quad (+)$$

$$4) \text{ Dom} \Leftrightarrow a + b + c < x < a + b + c + d = L$$

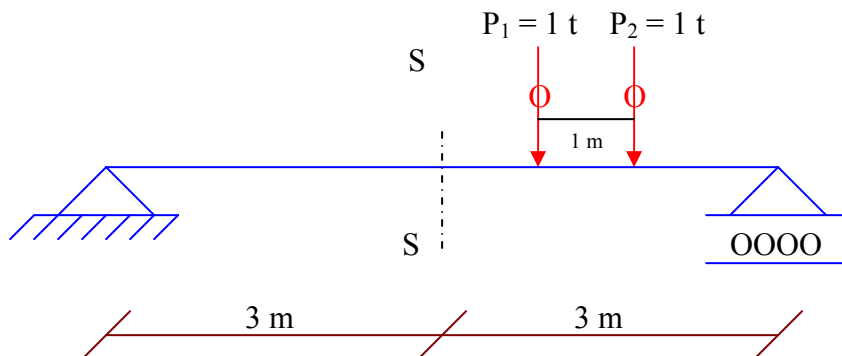
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow (b + c) V_A + P [-x (a + b + c)] = 0 \Rightarrow V_A = -\frac{-x (a + b + c)}{b + c} \quad (-)$$



5.9 PROBLEMAS PROPUESTOS.

Problema #1

Determinar la posición del tren para que M_{S-S} sea MAXIMO

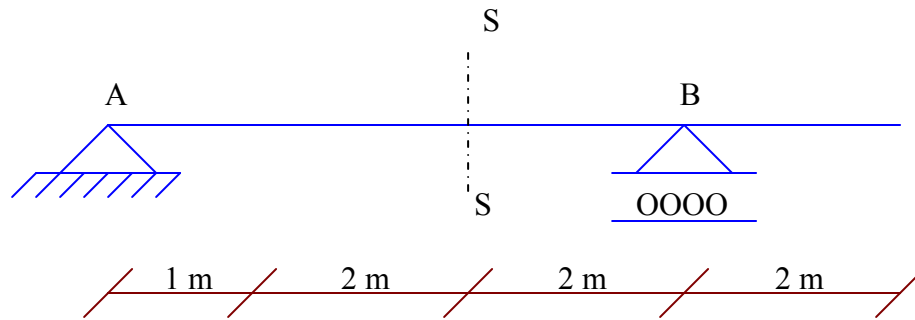


Respuesta:

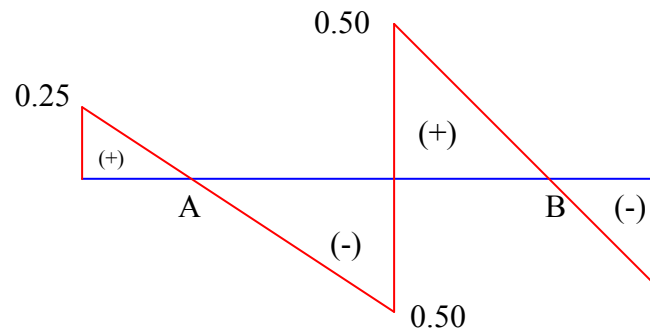
P_1 sobre S – S; $M_S = 2.5 \text{ t.m}$

Problema #2

Determinar la línea de influencia de esfuerzos cortantes en la sección S – S, considerando $P_1 = 1 \text{ t}$

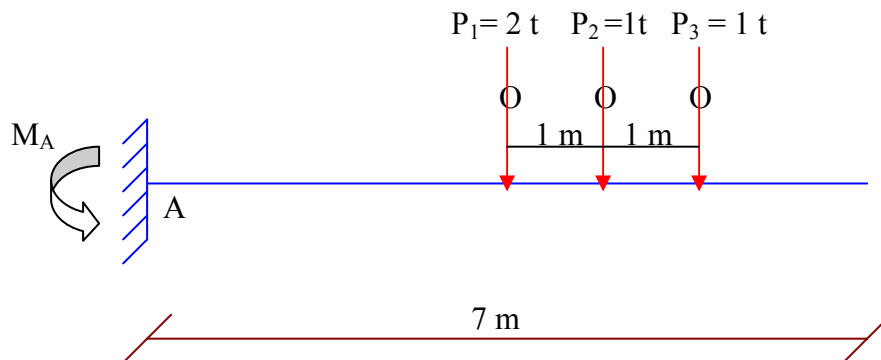


Respuesta:



Problema #3

Situar el tren de tal manera que M_A sea máximo en valor absoluto



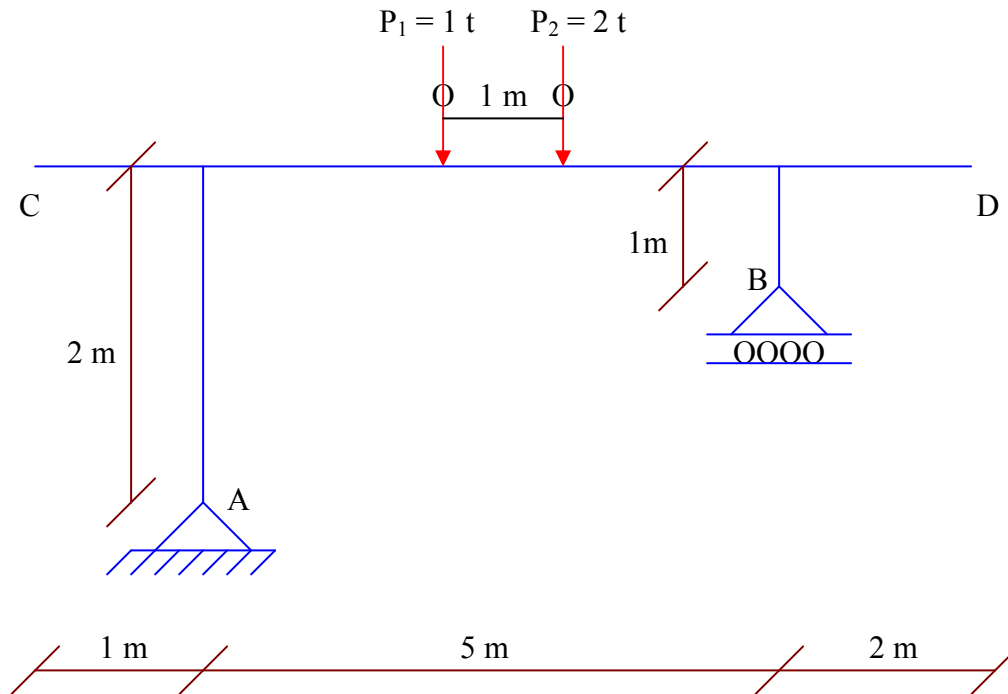


Respuesta:

P_1 a 5 m de A; $M_A = 23 \text{ t.m}$

Problema #4

Situar el tren de tal manera que V_A sea el mayor valor positivo y luego negativo



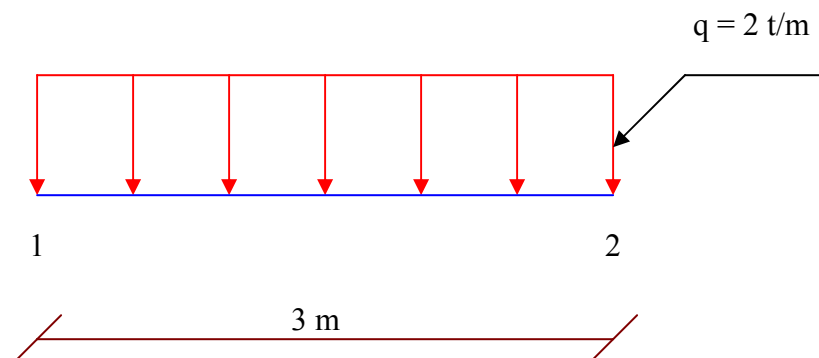
Respuesta:

P_1 sobre C; $V_A = + 2/2 \text{ t}$

P_2 sobre D; $V_B = - 3.0 \text{ t}$

Problema #5

Con los datos del ejercicio 5.4 situar la carga móvil



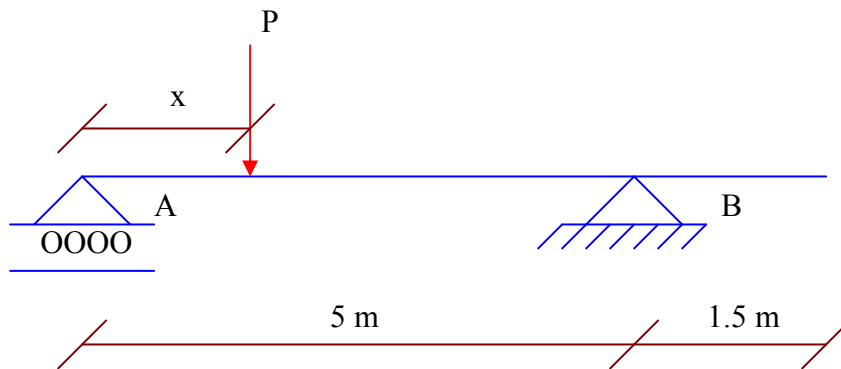
tal que V_A sea el mayor valor positivo

Respuesta:

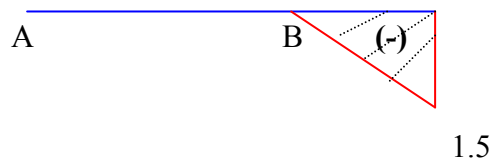
Extremo 1 sobre C; $V_A = 5.4 \text{ t}$

Problema #6

Determinar la LI de momentos en el apoyo B, considerando $P = 1 \text{ t}$

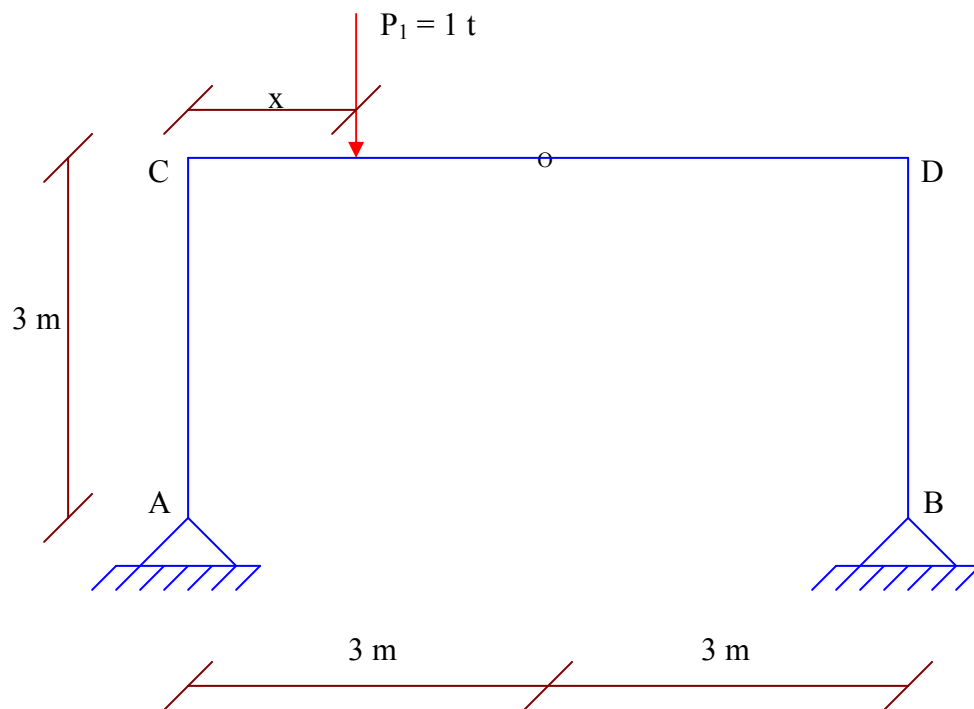


Respuesta:

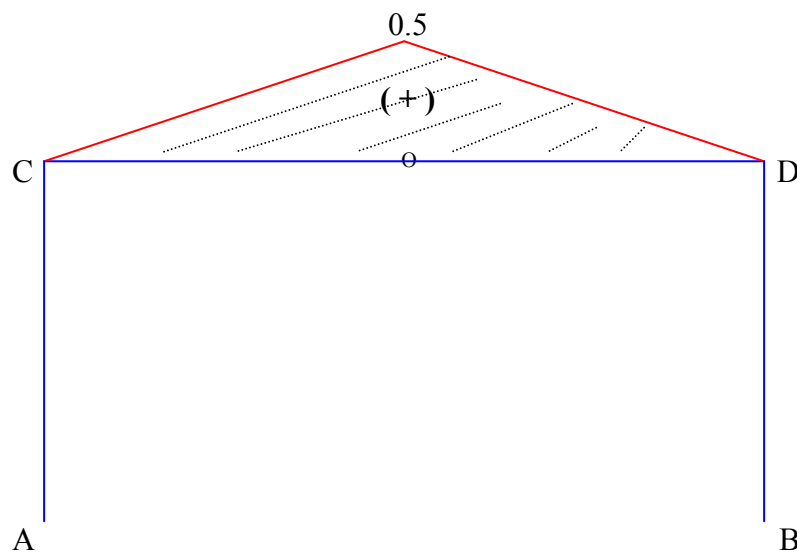


Problema #7

Determinar la LI de H_A , considerando $P = 1 \text{ t}$ que transita desde C hasta D.

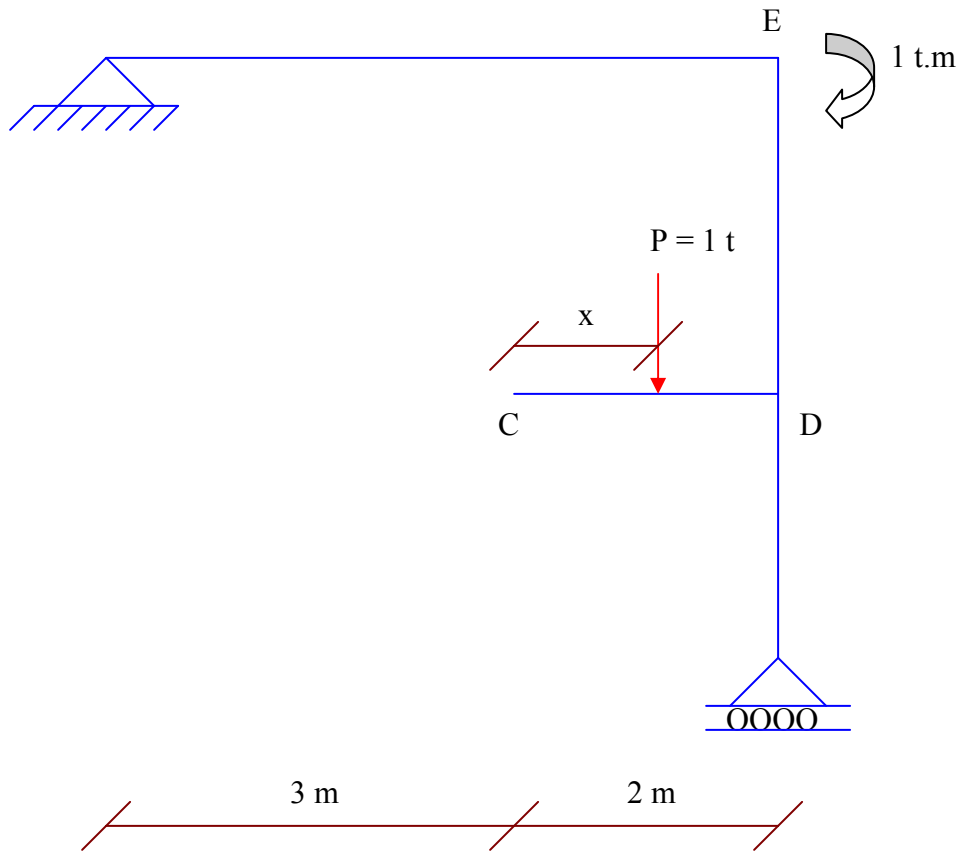


Respuesta:



Problema #8

Situar la carga $P = 1 \text{ t}$ en el tramo C – D, tal que $M_E = 0$



Respuesta:

La carga $P = 1 \text{ t}$ a 1 m de C

5.10 EVALUCION DIAGNOSTICO DEL CAPITULO.

Para realizar una evaluación diagnostico referente al presente capitulo, se propone al estudiante responder las siguientes preguntas

- Como plantearía una línea de influencia?
- Que es una línea de influencia?
- Como reconoce las secciones criticas de cortantes y momentos?
- Explique 3 casos para líneas de influencia de cortantes?
- Como se determina la línea de influencia del momento flector en la sección S?
- Dar un ejemplo de línea de influencia rectangular?



CAPÍTULO 6

CABLES

6.1 OBJETIVO GENERAL.

El objetivo fundamental de este capítulo es hacer que el estudiante conozca el concepto de cables, cuales son sus usos y cuales son las maneras de analizarlos y calcularlos.

6.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS.

Al terminar este capítulo el estudiante podrá:

- Realizar el cálculo de tensiones máximas y mínimas existentes en el análisis de cables.
- Reconocerá el uso de los distintos tipos de cables existentes sabrá a que tipo de estructuras son aplicables.
- Determinará las longitudes de los cables.
- Recordará brevemente el cálculo numérico (integración, límites, derivación).
- Conocerá los elementos básicos en puentes de luces largas y los tipos de cables que se usan para estos.

6.3 INTRODUCCION.

Las estructuras por su forma geométrica en el contexto de sus elementos que las integran se clasifican en rectas, curvas y de contacto; para su identificación se indicarán en algunas las cargas y apoyos únicamente para su identificación, ya que para su definición se exponen en las siguientes secciones de éste capítulo.

Los cables constituyen a menudo los elementos principales portadores de cargas en muchos tipos de estructuras; en este capítulo veremos algunos de los aspectos importantes relacionados con su análisis estructural.

El capítulo comienza con un análisis general de los cables, seguido de un análisis de aquellos cables que son sometidos a una carga concentrada y a una carga uniformemente distribuida.

Dentro del tipo de cables que existen analizaremos los que mostramos a continuación; los cables rectilíneos en cuyos puntos de inflexión soportan cargas concentradas, los cables parabólicos que soportan cargas repartidas y los cables que soportan su peso propio, mismos que se detallan en los siguientes gráficos:

a) Cables parabólicos que soportan cargas repartidas

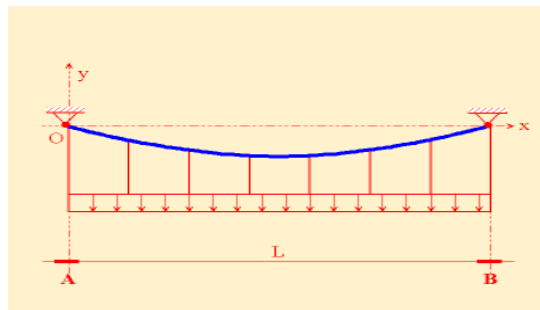


Figura 6.1

b) Cables que soportan su peso propio.

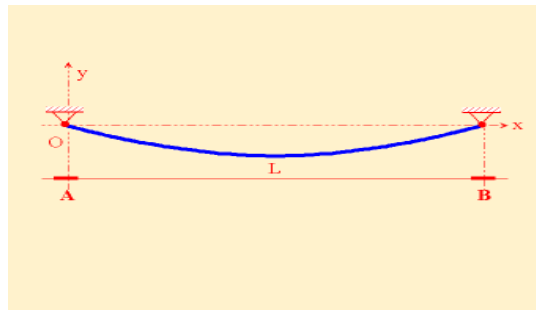


Figura 6.2

c) Cables rectilíneos en cuyos puntos de inflexión soportan cargas concentradas.

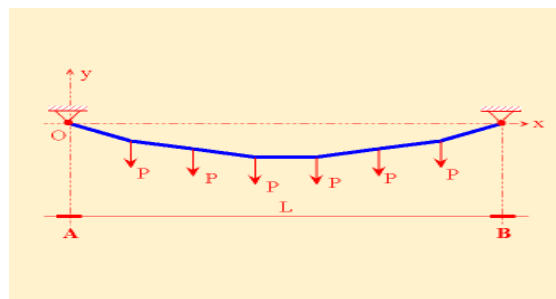


Figura 6.3

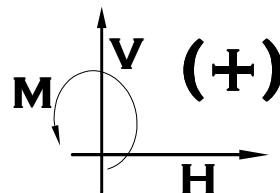
6.4 ANÁLISIS DE LOS TIPOS DE CABLES.

6.4.1 CABLES SOMETIDOS A CARGAS UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDAS.

Los cables proporcionan un medio muy eficaz para soportar el peso muerto de las traveses o cubiertas de puentes de claros o luces muy grandes, un puente colgante es un ejemplo típico en el que la cubierta está suspendida del cable usando una serie de colgantes más cercanos y uniformemente separados.

Para analizar este problema determinaremos primero la forma de un cable sometido a una carga vertical ω_o , distribuida horizontalmente en forma biforme como se muestra en la figura 6.4 (a) aquí los ejes x, y tienen su origen en el punto más bajo del cable, de manera que la pendiente es cero en este punto. El diagrama de cuerpo libre de un pequeño segmento de cable, con longitud Δs se muestra en la figura 4.2 (b). Como la fuerza de tensión en el cable cambia continuamente tanto en magnitud como en dirección a lo largo de la longitud del cable, el cambio se denota con ΔT en el diagrama de cuerpo libre, la carga distribuida se representa por su fuerza resultante R igual a $\omega_o \Delta x$ que actúa a una distancia de $\Delta x/2$ del punto O.

Para fines de facilidad de cálculo asumimos la siguiente convención de signos:



Realizamos el análisis en el siguiente cable y su diagrama de cuerpo libre.

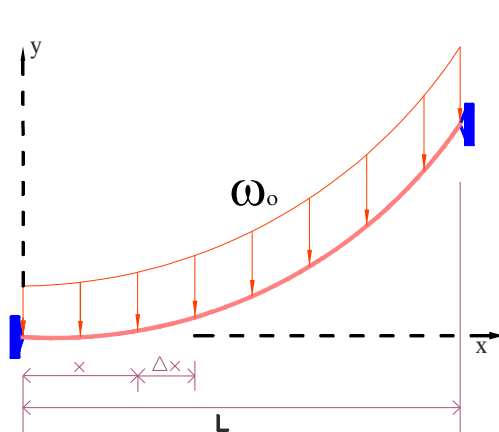


Figura 6.4 (a)

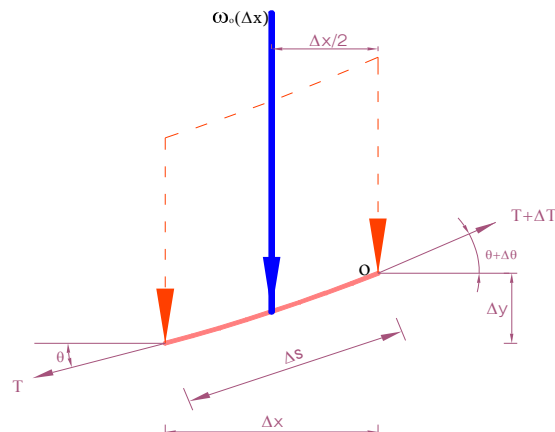


Figura 6.4 (b)

Aplicando las ecuaciones de equilibrio se obtiene:

$$\sum F_x = 0; \quad -T \cos \theta + (T + \Delta T) \cos(\theta + \Delta \theta) = 0$$

$$\sum F_y = 0; \quad -T \sin \theta + \omega_o (\Delta x) + (T + \Delta T) \sin(\theta + \Delta \theta) = 0$$

$$\sum M_o = 0; \quad \omega_o (\Delta x) (\Delta x / 2) - T \cos \theta \Delta y + T \sin \theta \Delta x = 0$$

Dividiendo cada una de estas ecuaciones entre Δx y tomando límites cuando $\Delta x \rightarrow 0$, por consiguiente $\Delta y \rightarrow 0$; $\Delta \theta \rightarrow 0$ y $\Delta T \rightarrow 0$, obtenemos.

$$\frac{d(T \cos \theta)}{dx} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d(T \sin \theta)}{dx} = \omega_o \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta \quad (3)$$

Integrando la ecuación (1), donde $T = F_H$ en $x=0$, tenemos:

$$T \cos \theta = F_H = \text{Cte} \quad (4)$$

Por lo tanto la componente horizontal de la fuerza en *cualquier punto* a lo largo del cable permanece *constante*. Integrando la ecuación (2), considerando que $T \sin \theta = 0$ en $x=0$, se obtiene:

$$T \sin \theta = \omega_o x \quad (5)$$

Dividiendo la ecuación (5) entre la ecuación (4) se elimina T . usando luego la ecuación (3), podemos obtener la pendiente en cualquier punto a lo largo del cable, ósea.

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\omega_o x}{F_H} \quad (6)$$

Efectuando una segunda integración con $y=0$ en $x=0$, resulta

$$y = \frac{\omega_o}{2F_H} x^2 \quad (7)$$

Esta ecuación es correspondiente a una *parábola*, la constante F_H puede encontrarse usando la condición de frontera $y=h$ en $x=L$. así entonces tendremos.

$$F_H = \frac{\omega_o L^2}{2h} \quad (8)$$

Finalmente sustituyendo en la ecuación (7) tenemos:

$$y = \frac{h}{L^2} x^2 \quad (9)$$

De acuerdo con la ecuación (4), la tensión máxima en el cable ocurre cuando θ es máxima; esto es en $x=L$. Por tanto de las ecuaciones (4) y (5) tenemos.

$$T_{MAX} = \sqrt{F_H^2 + (\omega_o L)^2} \quad (10)$$

Usando la ecuación (8), podemos también expresar el T_{MAX} en términos de ω_o esto es.

$$T_{MAX} = \omega_o L \sqrt{1 + (L/2h)^2} \quad (11)$$

Nótese que hemos despreciado el peso propio del cable, que es *uniforme* sobre la *longitud* del cable y no sobre su proyección horizontal. En realidad un cable sometido a su peso propio y libre de cualquier otra carga, tomara una forma de curva *catenaria*. Sin embargo, si la razón flecha a claro es pequeña, que es el caso en la mayoría de las aplicaciones estructurales, esta curva se aproxima bastante a una curva parabólica, como se determina aquí.

En el análisis de los cables es importante también conocer la longitud total del mismo, para tal efecto se recurre a la siguiente expresión:

$$L_s = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (12)$$

De los resultados de este análisis, se interfiere que si un cable *mantiene* una forma parabólica, la carga muerta de la cubierta de un puente colgante o de una trabe estará uniformemente distribuida sobre la longitud horizontal proyectada del cable. Por tanto si la trabe que se muestra en la siguiente figura esta soportada por una serie de colgantes cercanos y uniformemente separados, la carga en cada colgante debe ser la misma para garantizar que el cable tenga una forma parabólica. Además si suponemos que la trabe es rígida y que se mantiene la pendiente parabólica del cable, entonces cualquier carga móvil **P** debe ser igualmente compartida por cada colgante.

Usando esta hipótesis podemos efectuar el análisis estructural de la trabe o de cualquier otra estructura que este libremente suspendida por el cable así como se muestra en la fig 6.5(a), especialmente si la trabe esta simplemente soportada; así como soportada por el cable el análisis será estáticamente indeterminado de primer grado, sin embargo, si la trabe tiene un pasador interno en algún punto intermedio a lo largo de su longitud, esto dará una condición de momento nulo y puede entonces efectuarse un análisis estructural estáticamente determinado como se puede observar en la fig 6.5 (b).

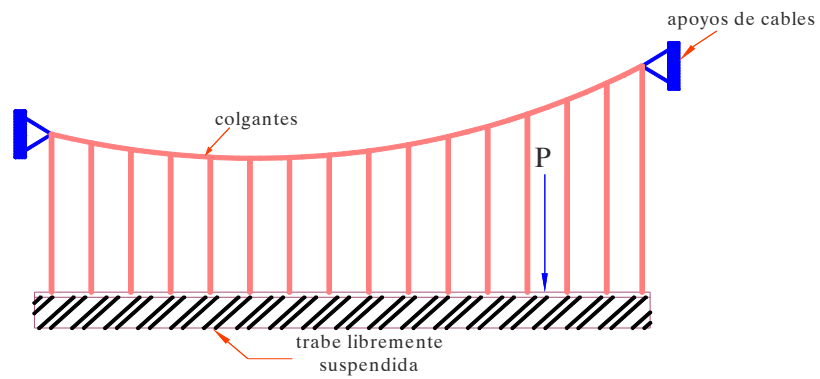


Figura 6.5(a)

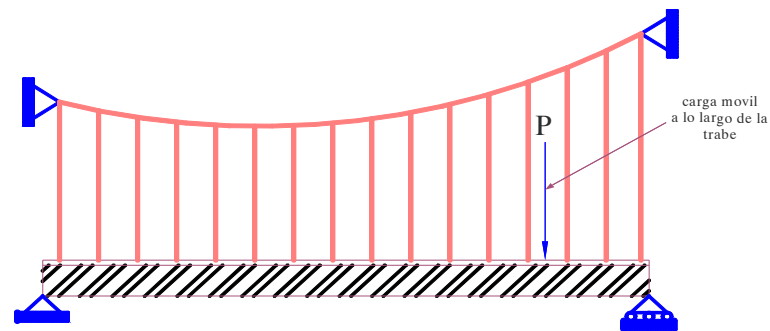


Figura 6.5(b)

Como ya hemos mencionado el uso de cables son prioridad en la construcción de puentes extensos o de luces muy grandes, a continuación mostraremos algunos puentes donde se observan los diferentes tipos de cables.



Puente de San Francisco, muestra cables con colgantes fijos a la trabe

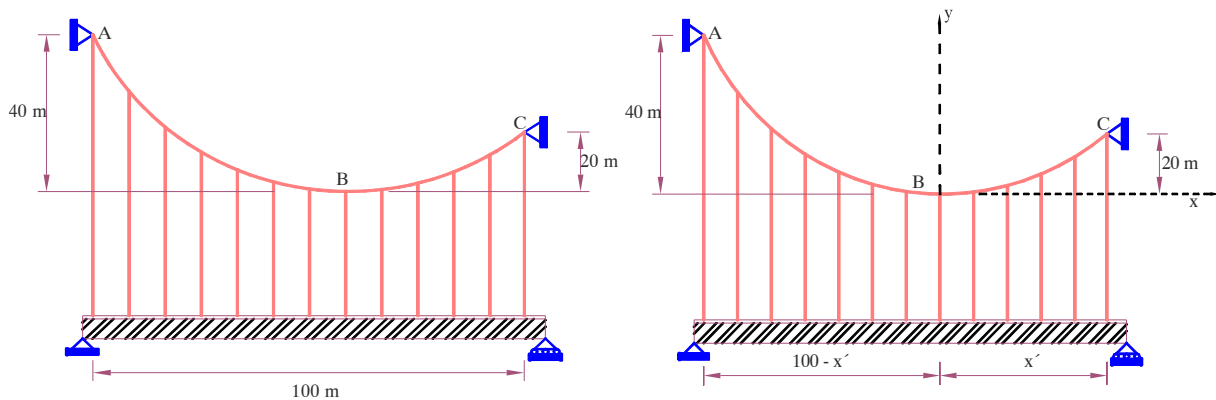


Puente de Normandia, muestra cables ajustados directamente a la trabe

Los siguientes ejemplos ilustraran numéricamente estos conceptos.

Ejemplo #1

En la siguiente figura el cable soporta una trabe que pesa 850 kg/m. determine la tensión en el cable en los puntos *A*, *B* y *C*. Así mismo ¿Cuál es la fuerza en cada uno de los colgantes?



Solución.- el origen de los ejes coordenados se fija en el punto B, que es el punto mas bajo del cable y en el que su pendiente es igual a cero; de la ecuación (7) sabemos que la ecuación parabólica del cable es:

$$y = \frac{\omega_o}{2F_H} x^2 = \frac{850 \text{ kg/m}}{2F_H} x^2 = \frac{425}{F_H} x^2$$

Suponiendo que el punto C esta ubicado a una distancia x' de B, tenemos:

$$20 = \frac{425}{F_H} x'^2$$

$$F_H = 21.25x'^2$$

Reemplazamos también para el punto A y reemplazamos el valor de F_H en la ecuación.

$$40 = \frac{425}{F_H} [-(100 - x')]^2$$

$$40 = \frac{425}{21.25x'^2} [-(100 - x')]^2$$

$$x'^2 + 200x' - 10000 = 0$$

$$x' = 41.42m$$

Entonces, de las ecuaciones ya enunciadas tenemos:

$$F_H = 21.25(41.42)^2 = 36459.2 \text{ kg}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{850}{36459.2} x = 0.02331x$$

En el punto A.

$$x = -(100 - 41.42) = -58.58 \text{ m}$$

$$\tan \theta_A = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-58.58} = 0.02331(-58.58) = -1.366$$

$$\theta_A = -53.79^\circ$$

Usando la ecuación (4) tenemos

$$T_A = \frac{F_H}{\cos \theta_A} = \frac{36459.2}{\cos(-53.79^\circ)} = 61.7t$$

En el punto B tenemos $x=0$.

$$\tan \theta_A = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0 ; \theta_B = 0$$

$$T_B = \frac{F_H}{\cos \theta_B} = \frac{36459.2}{\cos(0)} = 36.5t$$

En el punto C tenemos.

$$x = 41.42 \text{ m}$$

$$\tan \theta_C = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=41.42} = 0.02331(41.42) = 0.9657$$

$$\theta_C = 44.0^\circ$$

$$T_C = \frac{F_H}{\cos \theta_C} = \frac{36459.2}{\cos(44.0^\circ)} = 50.7t$$

Como la trabe esta soportada por 11 colgantes, la fuerza en cada uno de ellos es

$$F_h = \frac{850 \text{ kg} / \text{m}(100 \text{ m})}{11} = 7.76t$$

6.4.2 CABLES SOMETIDOS A SU PESO PROPIO

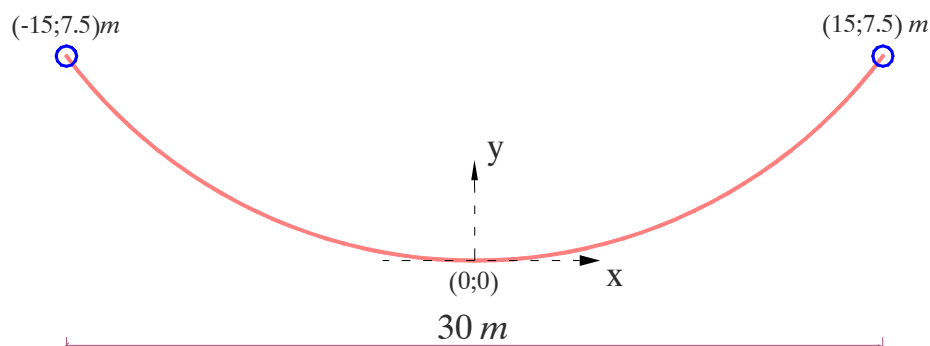
Como ya se ha mencionado los cables proporcionan un medio muy eficaz para soportar el peso muerto de las traveses o cubiertas de puentes de claros o luces muy grandes, pero también como un gran dispositivo de unión entre estructuras alejadas o separadas, para analizar aquellos cables que están sometidos a su propio peso determinaremos la forma del cable a lo largo de su longitud ΔS .

Como ya se ha mencionado, un cable que soporte solamente su peso propio tomara la forma de una curva *catenaria*, cuya ecuación corresponde a una parábola como se mostró anteriormente.

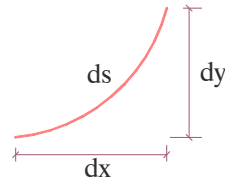
A continuación consideramos el caso de un cable que soporta únicamente su peso propio, entonces la carga puede darse como una función de arco S . las ecuaciones deducidas anteriormente son validas si se analizan como $\Delta x = \Delta s$ entonces:

Ejemplo #2

Analizar un cable que soporta únicamente su peso propio $w(s) = 10 \text{ k/m}$



En este caso:



$$T \cos \varphi = H$$

$$T \sin \varphi = \int \omega(s) ds \quad (13)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{H} \int \omega(s) ds \quad (14)$$

Además, $dy = \sqrt{(ds)^2 + (dx)^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 - 1} \quad (15)$$

De las ecuaciones (14) y (15) entonces

$$\sqrt{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 - 1} = \frac{1}{H} \int \omega(s) ds \quad (16)$$

Paso 1) Ecuación de la curva que representa el cable

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10}{H} |S + C_1| = \frac{10}{H} S + C_2$$

Cuando $S = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$ por lo tanto:

$$C_2 = 0$$

Utilizando la ecuación (16) tenemos

$$\sqrt{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 - 1} = \frac{10}{H} S$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 - 1 = \frac{100}{H^2} S^2$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \frac{100}{H^2} S^2 + 1$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{100}{H^2} S^2 + 1}$$

De la ecuación diferencial a variables separables se tiene

$$\frac{ds}{\sqrt{\frac{100}{H^2}S^2 + 1}} = dx$$
$$x = \frac{10}{H} \int \frac{ds}{\sqrt{S^2 + \left(\frac{H}{10}\right)^2}} = \frac{10}{H} \left[\ln \left(S + \sqrt{S^2 + \left(\frac{H}{10}\right)^2} \right) \right] + C_3$$

o bien

$$x = \frac{H}{10} \operatorname{arcsenh} \left(\frac{10S}{H} \right) + C_3$$

Cuando $s = 0$, $x = 0$ entonces $C_3 = 0$

$$x = \frac{H}{10} \operatorname{arcsenh} \left(\frac{10S}{H} \right) \Rightarrow \frac{10S}{H} = \operatorname{senh} \frac{10x}{H}$$

Por lo tanto

$$S = \frac{H}{10} \operatorname{senh} \left(\frac{10x}{H} \right)$$

Hasta esta parte se ha determinado S en función de x , entonces.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10S}{H} = \frac{10}{H} \left[\frac{H}{10} \operatorname{senh} \left(\frac{10x}{H} \right) \right] = \operatorname{senh} \frac{10x}{H}$$

Entonces

$$y = \frac{H}{10} \cosh \left(\frac{10x}{H} \right) + C_4$$

$$x = 0 ; y = 0 \Rightarrow C_4 = -\frac{H}{10}$$

Por lo tanto

$$y = \frac{H}{10} \cosh \left(\frac{10x}{H} \right) - \frac{H}{10}$$

$$x = 15 ; y = 7.5$$

Por lo tanto

$$7.5 = \frac{H}{10} \left(\cosh \left(\frac{150}{H} \right) - 1 \right) \Rightarrow 75 = H \left[\cosh \left(\frac{150}{H} \right) - 1 \right]$$

De donde $H=161$ aproximadamente, por lo tanto:

$$y = \frac{161}{10} \left[\cosh\left(\frac{10}{161}x\right) - 1 \right]$$

y finalmente

$$y = 16.1 [\cosh(0.062x) - 1] \quad \text{Catenaria}$$

Paso 2) Determinación de la tensión máxima

$$T = \frac{H}{\cos \varphi} \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \tan \varphi = \sinh(0.062x)$$

Por lo tanto

$$\varphi = \arctan[\sinh(0.062x)]$$

Entonces para $x=15 \text{ m}$

$$\varphi = \arctan[\sinh(0.93)]$$

Entonces

$$\cos \varphi = 0.683$$

De modo que la tensión es:

$$T = 235.72 \text{ kgr.}$$

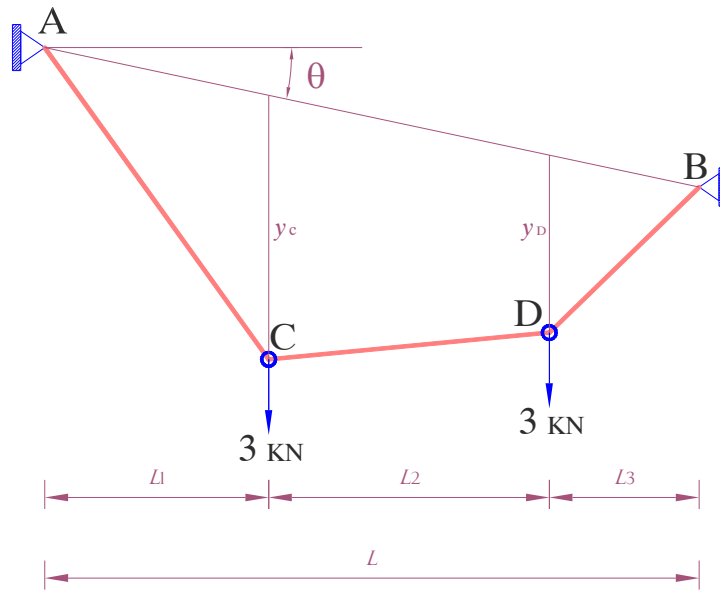
Paso 3) Determinación de la longitud del cable (S)

$$S = 2 \left[\frac{161}{10} \sinh\left(\frac{10}{161}x\right) \right]$$

$$S = 34.53 \text{ m}$$

6.4.3 CABLES SOMETIDOS A CARGAS CONCENTRADAS

Cuando un cable de peso despreciable soporta varias cargas concentradas, el cable adopta la forma de varios segmentos de línea recta, cada uno de los cuales esta sometido a una fuerza constante de tensión. Considere por ejemplo, el cable que se muestra en la siguiente figura:



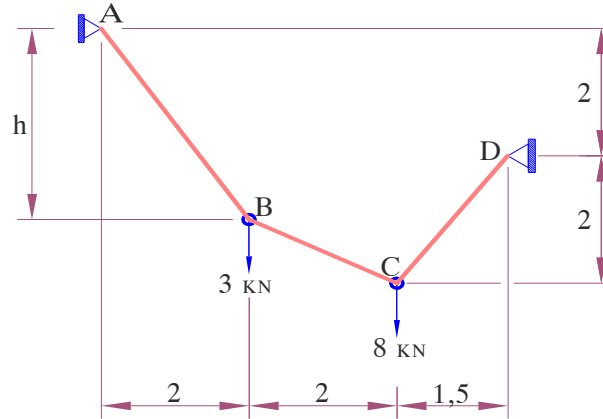
Aquí θ , representa el ángulo de la cuerda AB del cable y L es el claro del cable. Si las distancias L_1 , L_2 , y L_3 y las cargas P_1 y P_2 se conocen, *el problema es determinar las nueve incógnitas que conforman la tensión en cada uno de los tres segmentos*, las cuatro componentes de reacción en A y B y las flechas de y_C y y_D en los dos nudos C y D . para la solución podemos escribir dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas en cada uno de los puntos A, B, C y D . esto da un total de *ocho* ecuaciones; para completar la solución es preciso saber algo sobre la geometría del cable para obtener la *novena ecuación* necesaria. Por ejemplo si se especifica la longitud L total del cable podemos usar el teorema de Pitágoras para relacionar cada una de las tres longitudes de los segmentos, escritos en términos de θ , y_C , y_D , L_1 , L_2 , y L_3 , con la longitud total L . desafortunadamente, este tipo de problema no puede resolverse fácilmente a mano, sin embargo otra posibilidad es especificar una de las flechas, digamos y_C o y_D , en vez de la longitud del cable. Haciéndolo así, las ecuaciones de equilibrio son entonces suficientes para obtener las fuerzas desconocidas y la flecha restante. Una vez obtenida la flecha en cada punto de carga, la longitud del cable puede determinarse por trigonometría.

Al efectuar un análisis de equilibrio para un problema de este tipo, las fuerzas en el cable también pueden obtenerse escribiendo las ecuaciones de equilibrio para el cable entero o cualquier porción de el.

Los siguientes ejemplos nos ilustraran numéricamente estos conceptos.

Ejemplo #3

Determine la tensión en cada segmento del cable mostrado a continuación ¿Qué valor tiene la dimensión h ?



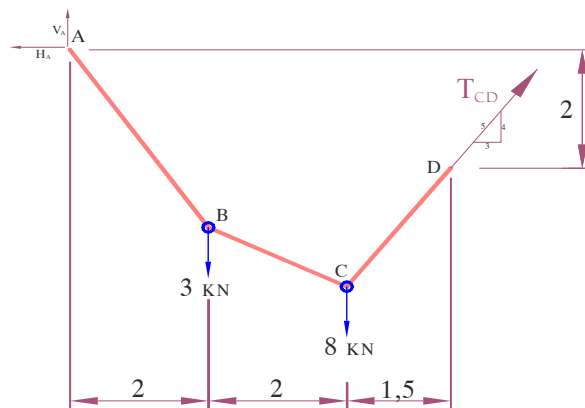
Solución.- por inspección vemos que hay cuatro reacciones externas desconocidas, dos en cada apoyo y tres tensiones desconocidas en el cable. Esas 7 incógnitas, junto con la distancia h , pueden determinarse con las 8 ecuaciones de equilibrio disponibles, $\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$, aplicables en los puntos A al D .

Un procedimiento mas directo de solución estriba en considerar la pendiente dada del cable CD ; en la siguiente figura se muestra un diagrama del cuerpo libre del cable entero y de ahí obtenemos la tensión en el segmento CD como se ve a continuación:

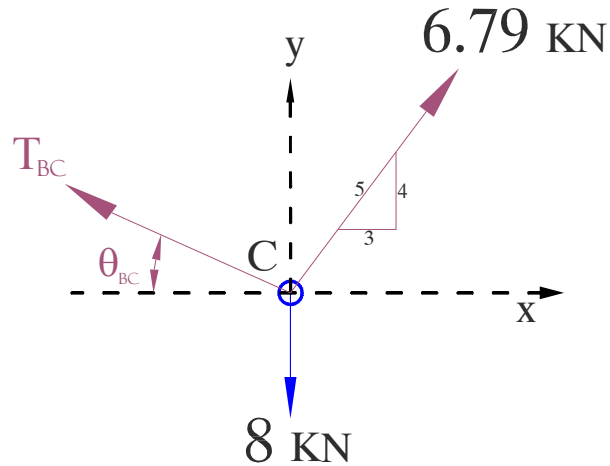
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow T_{CD}(3/5)(2m) + T_{CD}(4/5)(5.5m) - 3t(2m) - 8t(4m) = 0$$

$$T_{CD} = 6.79t$$

Podemos analizar ahora el equilibrio de los puntos C y B en secuencia, como vemos en el siguiente diagrama de cuerpo libre:

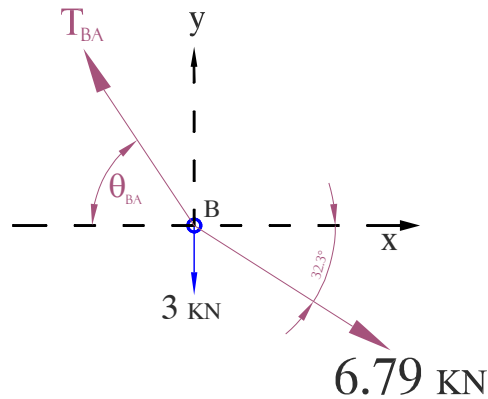


Punto C:



$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \Rightarrow 6.79t(3/5) - T_{BC} \cos \theta_{BC} = 0 \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow 6.79t(4/5) - 8t + T_{BC} \sin \theta_{BC} = 0 \\ \Rightarrow T_{BC} &= 4.82t \\ \theta_{BC} &= 32.3^\circ\end{aligned}$$

Punto B:



$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \Rightarrow -T_{BA} \cos \theta_{BA} + 4.82t \cos 32.3^\circ = 0 \\ \sum F_y &= 0 \Rightarrow T_{BA} \sin \theta_{BA} - 4.82t \sin 32.3^\circ - 3t = 0 \\ \Rightarrow \theta_{BA} &= 53.8^\circ \\ T_{BA} &= 6.90t\end{aligned}$$

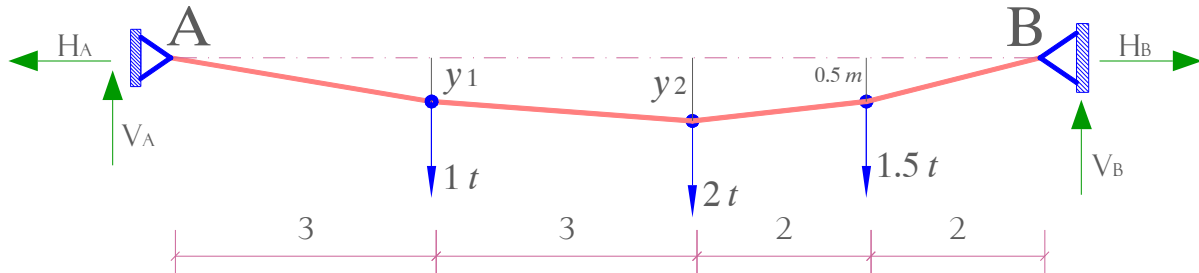
Entonces de la figura inicial podemos hallar el valor de h .

$$h = (2m) \tan 53.8^\circ = 2.74m$$

6.5 EJERCICIOS PROPUESTOS.

Problema #1

Determinar las reacciones de apoyo y la fecha correspondiente a P_1 y P_2

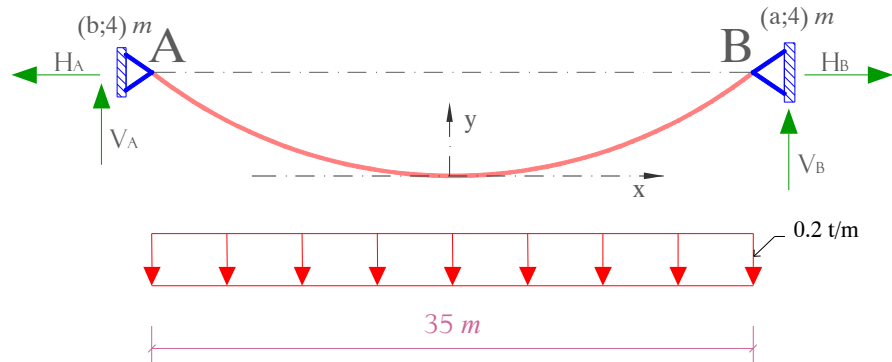


Respuesta:

$$\begin{aligned} H_A &= 10.8t & ; & & V_A &= 1.8t \\ H_B &= 10.8t & ; & & V_B &= 0.722t \\ y_1 &= 0.5m & ; & & y_2 &= 0.722m \end{aligned}$$

Problema #2

Determinar las reacciones en A; ecuación del cable y T_{max}

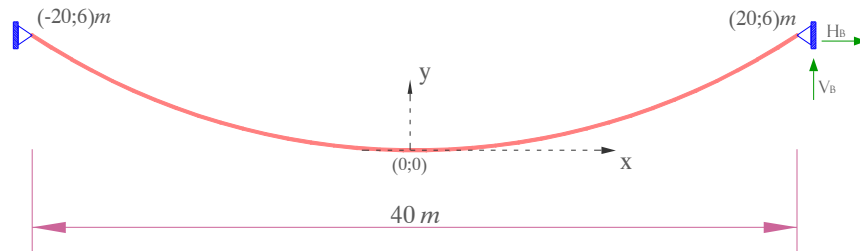


Respuesta:

$$\begin{aligned} H_A &= 7.656t & ; & & V_A &= 3.5t \\ \text{Ecuación} & & y &= 0.013x^2 \\ T_{max} &= 8.413t \end{aligned}$$

Problema #3

Determinar las reacciones en B; la ecuación del cable, longitud del cable y T_{max} , donde solo actúa el peso propio del cable $w(s)=20 \text{ k/m}$



$$H_B = 685.5 \text{ t} ; \quad V_B = 420.25 \text{ t}$$

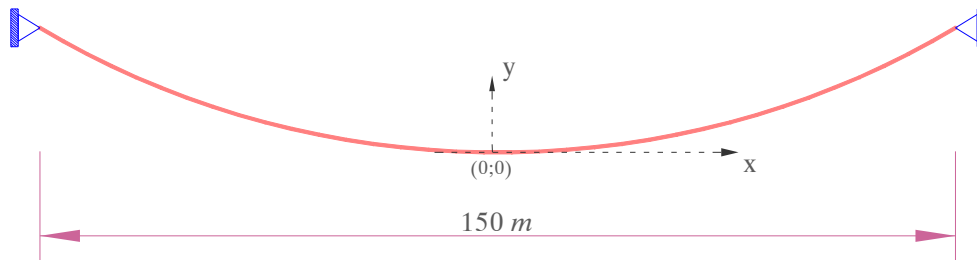
Respuesta:

$$\text{Ecuacion } y = 34.275 [\cosh(0.029x) - 1]$$

$$T_{\max} = 8.413 \text{ t} ; \quad L_S = 804.06 \text{ k}$$

Problema #4

Un cable pesa 5 k/m y está sujeto en sus extremos a dos apoyos situados a 15 m por encima de la horizontal y separados entre sí a 150 m . Determinar la longitud del cable y la tensión máxima.

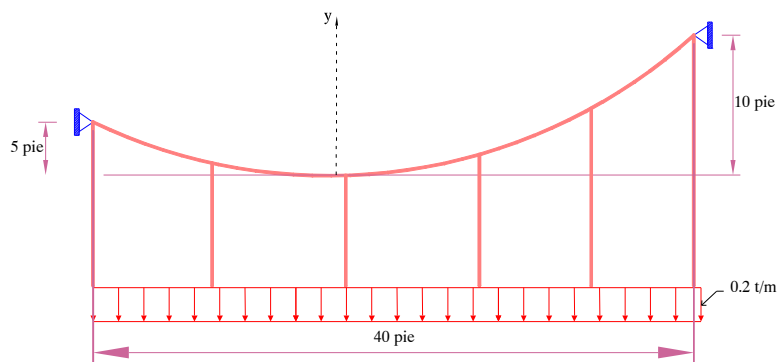


Respuesta:

$$T_{\max} = 1025 \text{ t} ; \quad L_S = 153.92 \text{ k}$$

Problema #5

Determinar la ecuación de la curva del cable y T_{\max}



Respuesta:

$$\text{Ecuación } y = 0.0182x^2 ; \quad T_{\max} = 1025 \text{ t}$$



6.6 EVALUCION DIAGNOSTICO DEL CAPITULO.

Para realizar una evaluación diagnostico referente al presente capitulo, se propone al estudiante responder las siguientes preguntas

- Que tipos de cables existen?
- Cual es la ecuación de un cable que soporta su peso propio?
- Que es una catenaria?



CAPITULO 7

TUTORIALES DE PROGRAMAS

7.1 OBJETIVO GENERAL.

El estudiante aprenderá a utilizar programas estructurales que le permitan resolver diferentes tipos de estructuras, mismas que estarán al alcance de sus manos siempre y cuando los oriente en sus pasos de resolución.

7.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS.

Al terminar este capítulo el estudiante será capaz de:

- Resolver vigas isostáticas mediante el programa de análisis estructural **vigaG** para calculadora HP 48G, G+, GX, 49G.
- Resolver cerchas por el método de nudos mediante el programa de análisis estructural **CERCHAS** para calculadora HP 48G, G+, GX, 49G.

7.3 INTRODUCCION A PROGRAMA VIGA-G.

El programa estructural **vigaG** es un programa diseñado para el cálculo de vigas isostáticas, mismas que nos proporcionan información segura y confiable acerca de lo ya visto en el capítulo.

Este programa esta disponible para las versiones de HEWLETT PACKARD 48G hasta la HP 49G+.

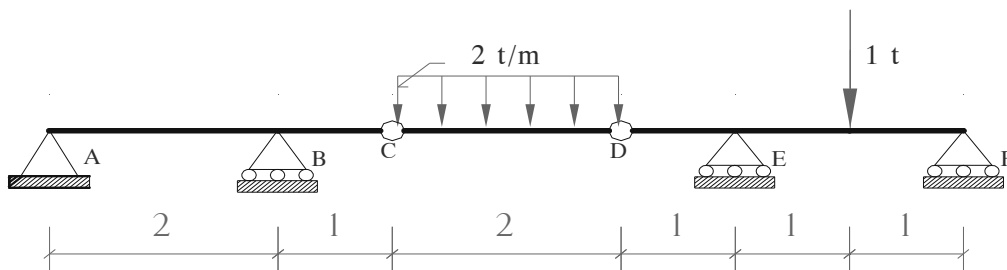
Efectuaremos la verificación del análisis estructural de una viga Isostática con el siguiente ejemplo.(verificación del ejemplo #4 del capítulo 3)

Calculadora hp 49 G



Paso1) Inicio del programa

- Habrà la carpeta vigaG dentro de su calculadora HP y luego presione la tecla F2 para crear un nuevo análisis.
- Luego empezamos a introducir los datos de la viga a analizar:



Paso2) Establecer la geometría

- Como primer dato, el programa nos pedirá que introduzcamos la longitud de la viga, en este caso 8 [m], también tenemos que introducir la rigidez del elemento, pero como estamos dando los primeros pasos en la introducción del análisis de las estructuras, no tomaremos en cuenta valores de elementos que afecten nuestro calculo, pero introduciremos 1, como elemento ideal para la no variación de los cálculos. Tal como se muestra a continuación:



- b) Empezamos a definir cuales serán las condiciones de equilibrio y los apoyos de la viga. Como vemos tenemos como condición inicial un apoyo fijo, y como condición final de la viga existe un apoyo móvil.



- c) Como se puede observar para definir las condiciones iniciales y/o finales solo se necesita presionar el botón correspondiente a un apoyo, empotramiento o volado.
- d) Una vez establecida las condiciones iniciales y finales de viga, comenzamos a definir los apoyos y las articulaciones existentes entre los apoyos ya definidos.



Paso3) Cargado de datos

- a) En la ventana que ahora aparece existen las opciones de colocar apoyos intermedios y articulaciones, presionando las funciones F1 y F2 podemos establecer los apoyos que estarán a: 2 y 6; y las articulaciones a 3 y 5 m de la condición inicial de la viga

```
RAD XYZ HEX R~ 'X'      ALG PRG
{HOME VIGA.TEM}
Distancia apoyos
intermedios{X1 ...}:?
```

```
{ 2. 6. }
████████████████████
```

```
RAD XYZ HEX R~ 'X'      ALG PRG
{HOME VIGA.TEM}
Distancia
pivotes {X1 ...}:?
```

```
{ 3. 5. }
████████████████████
```

- b) Una vez introducidos estos datos presionemos la tecla F6 para volver al menú principal.
- c) Estando en el menú principal, presionamos la tecla F2, que nos llevara a una ventana de opciones para seleccionar el tipo de carga que se desea, podemos aplicar cargas puntuales, cargas uniformemente distribuidas, cargas distribuidas no uniformes y momentos.



- d) En nuestro caso debemos aplicar una carga uniformemente distribuida, presionamos la tecla F2.
- e) Aparecerá una nueva ventana, donde tenemos que introducir las condiciones de la carga distribuida, en esta nos señala que el sentido positivo de la misma será hacia (\downarrow). Entonces definimos que el inicio de la carga distribuida tendrá un valor de 2 t/m, y empieza a una distancia de 3 m de la condición inicial de la viga, esta se mantendrá constante hasta una distancia de 5 m desde el inicio de la viga.

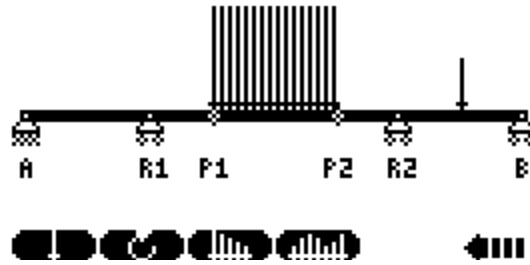
```
RAD XYZ HEX R~ 'X'      ALG PRG
{HOME VIGA.TEM}
W inicial{W1}:?↓(+)
```

```
2
████████████████████
```

```
RAD XYZ HEX R~ 'X'      ALG PRG
{HOME VIGA.TEM}
X inicial{X1}:?
```

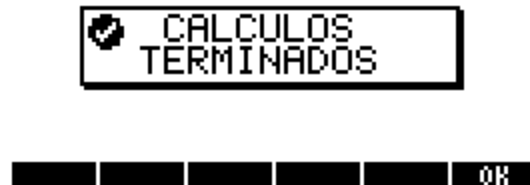
```
3
████████████████████
```

- f) Luego de introducir los valores observaremos la viga tal cual como hemos cargado, si los datos están correctos entonces salimos de esa ventana con el botón F6, y volvemos al menú principal.

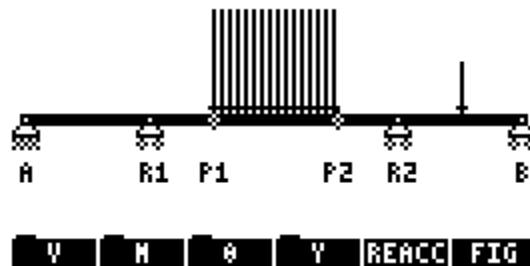


Paso4) Resultados del programa

- a) Una vez terminado de introducir los datos al programa, estando en el menú principal podemos ordenar a la calculadora analizar la viga, presionando F6 el programa empezara a analizar los datos, una vez concluidos te mostrara una ventana donde te diga: “Cálculos Terminados”.



- b) Presionando el botón F6, podremos acceder a la ventana de respuestas en la calculadora.



- c) Dentro de las respuestas que te ofrece este programa de análisis de vigas es; en la prime pestaña todos los componentes asociados a las respuestas del esfuerzos de corte “V”, momentos “M”, desplazamiento de los nudos “θ”, diagrama de deformación “Y”, las reacciones de apoyo.
- d) Empecemos verificando las reacciones en los apoyos presionando el botón F5:

```

Resultados
:Ra: -1.
:Rb: -.416666667312
:R1: 3.
:R2: 3.5
:Δθ1: 1.79166666696
OK

```

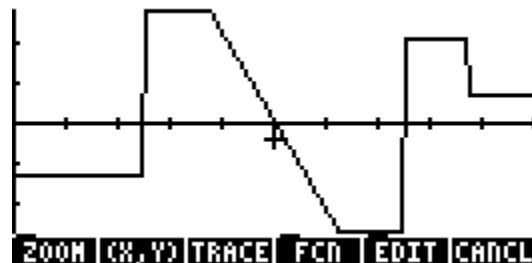
- e) Comparando el nombre de cada apoyo y verificando con el ejercicio resuelto del capítulo 3, observamos que son iguales, en esta ventana se observan las reacciones y desplazamientos de cada apoyo (si te son necesarios).
- f) Volviendo a la ventana principal presionando la función F6 (dos veces), analicemos los resultados de los elementos de corte.

```

RAD XYZ HEX R~ 'X'
~OME VIGA.TEN V3
5:
4:
3:
2:
1:
EVAL PLOT MAX MIN EQUAT MENU

```

- g) Observemos que en la ventana de salida de datos de los esfuerzos cortantes la opción PLOT es la que grafica la variación de esfuerzos corte a lo largo de toda la viga.



Si se quisiera saber los valores dentro de la grafica, solo desplazarse a la función (X,Y) o F2.

- h) Otra de las opciones dentro de la salida de cortantes es la de poder ver los valores máximos y mínimos a lo largo de la viga, solo presionar las funciones F3 y F4.

```

RAD XYZ HEX R~ 'X'
~OME VIGA.TEN V3
5:
4:
3:
2:
1:
EVAL PLOT MAX MIN EQUAT MENU

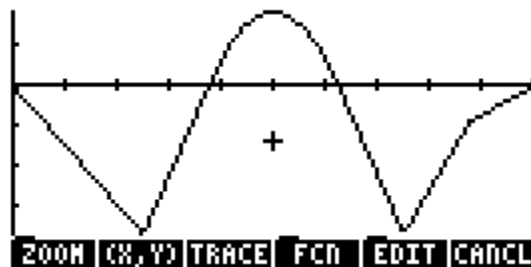
```

- i) Así como realizamos el análisis de la viga por el método de secciones y obtuvimos las ecuaciones de N, Q, y M. este programa también puede mostrarnos las ecuaciones de cortantes y momentos a lo largo de la viga, solo presionar “EQUAT” y elegir el tramo del cual quisiera ver la ecuación necesaria para obtener la grafica y presionar “ENTER”.



Nota.- se tiene un margen de error de 0.01

- j) Para ver los diagramas de momentos “M” volver al menú principal y presionar la tecla de M o F2, y luego ver las opciones que ya se han visto en el análisis de esfuerzos de corte.



Grafica de momentos

- k) A continuación mostramos la obtención de las ecuaciones para la obtención del diagrama de momentos.



Entonces realizando la comparación con el ejercicio planteado y resuelto en el capítulo 3 queda muy bien verificado.

7.4 INTRODUCCION A PROGRAMA CERCHAS

El programa estructural **CERCHA** es un programa diseñado para el cálculo de **CERCHAS ISOSTATICAS**, misma que nos proporciona información segura y confiable acerca de lo ya visto en el capítulo.

Este programa esta disponible para las versiones de HEWLETT PACKARD 48G hasta la HP 49G+.

Con afán de que se pueda resolver de una manera rápida una cercha plana, sin necesidad de que se recurra a la computadora (estos es muy beneficioso cuando se realiza un trabajo de campo), es necesario que el ingeniero tenga herramientas como la calculadora HP, que nos provee una gran ayuda en el desarrollo de la profesión.

Este programa permite resolver cualquier cercha sin importar el número de apoyos y elementos, hasta la capacidad de la calculadora, para la resolución se usa el método matricial de los desplazamientos.

El procedimiento es el siguiente:

Calculadora hp 49 G



Calculadora hp 48 GX



Pasos a seguir para la utilización del programa

- Se selecciona una entrada de cargas.
- Se define un sistema de ejes coordenados para poder ubicar los nudos que a su vez deben estar enumerados



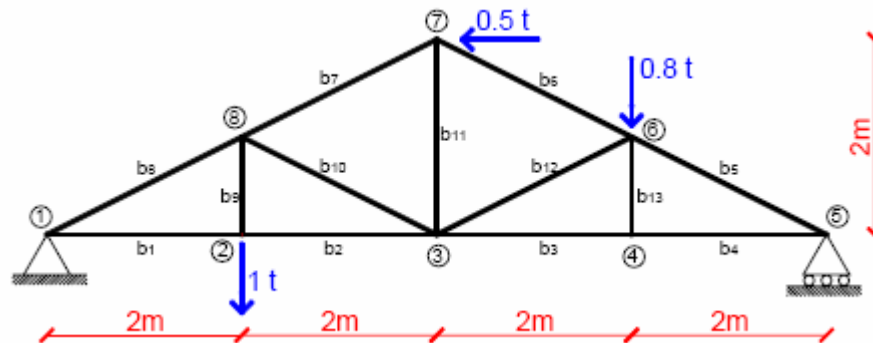
- c) Cuando se pide el numero de nudos es independiente el numero de apoyos, es decir, en una barra hay 2 nudos y puedes tener 0, 1 o 2 apoyos.
- d) Se entran las coordenadas de cada nudo en el orden al numero que se le asigno.
- e) Se especifica la cantidad de diferentes áreas de sección transversal en los elementos, quedando cada tipo de sección asignada a un numero (mismo que aparecerá en la pantalla).
- f) Luego se pasa a dar las ubicaciones de las barras asignándole una dirección o un sentido a cada barra, y se escriba su nudo inicial a final de acuerdo al sentido y su correspondiente TIPO de sección (el numero asignado a las diferentes áreas).
- g) Se especifican las restricciones en los apoyos de la siguiente manera:
 - Numero del nudo en el cual esta el apoyo.
 - Restricción en X (1 si hay o 0 si no hay).
 - Restricción en Y (1 si hay o 0 si no hay).
- h) Se ingresa el modulo de elasticidad
- i) Se ingresa el peso unitario (0 si se desprecia el peso propio de la cercha o carga muerta).
- j) Si se escoge la opción 2 y se procede con el número de nudos cargados.
- k) Se entra el nudo en el que actúa cada fuerza, y cada fuerza se descompone en X y Y, dando positiva hacia arriba y a la derecha.
- l) Si la memoria es suficiente para el tamaño de la cercha, esperamos que corra el programa.
- m) Para ver los resultados, donde aparecen los desplazamientos en los nudos, las reacciones y fuerzas internas de las barras (fuerzas según el sentido de las barras).
- n) La opción 4 permite ver la matriz de rigidez en su respectivo orden (opciones separadas).
- o) Borrar los resultados permite purgar las variables y resultados que contiene la cercha.

El programa permite variar las condiciones de las cargas para la misma cercha seleccionando (2) y además permite guardar los resultados después de salir.

A continuación se desarrollara un ejemplo, explicando paso a paso la ejecución del programa.

Ejemplo

Dad la siguiente armadura Howe se pide determinar las reacciones en los apoyos y las fuerzas en las barras (ejercicio # 13 del capítulo 4).



Paso1) Establecer la geometría

- Habrà la carpeta Cercha dentro de su calculadora HP y luego presione la opción “Run” para crear un nuevo análisis.
- Aparecerà la siguiente ventana en su HP.



- Presionando el botón 1, aparecerà la opción “ENTRADA DE DATOS”. presionar ENTER.

```
Defina el sentido de
las barras y numere
los nudos. Defina un
sistema de coordenadas
(cero esquina inf izq)
```



- Ahora se deben ingresar los datos según los valores pedidos, de acuerdo a la grafica entonces:

```
PRG
{ HOME CERCHA SUB }
Barras, nudos, apoyos
:No. de barras:13
:No. de nudos:8
:No. de apoyos:2
```

Luego presionar enter.



Paso2) Cargado de datos

- a) Ahora introducimos los datos de las coordenadas de los nudos.

Digite las coordenadas
de cada uno de los
nudos en metros



Luego de ingresar los datos de un nudo, presionar ENTER para ingresar los datos del siguiente nudo, como se ve a continuación:

```
PRG
{ HOME CERCHA SUB }
Coord X Y Nudo : 1
: X(m): 0
: Y(m): 0
[ ][ ][ ][ ][ ][ ]
```

```
PRG
{ HOME CERCHA SUB }
Coord X Y Nudo : 2
: X(m): 2
: Y(m): 0
[ ][ ][ ][ ][ ][ ]
```

```
PRG
{ HOME CERCHA SUB }
Coord X Y Nudo : 3
: X(m): 4
: Y(m): 0
[ ][ ][ ][ ][ ][ ]
```

```
PRG
{ HOME CERCHA SUB }
Coord X Y Nudo : 4
: X(m): 6
: Y(m): 0
[ ][ ][ ][ ][ ][ ]
```

```
PRG
{ HOME CERCHA SUB }
Coord X Y Nudo : 5
: X(m): 8
: Y(m): 0
[ ][ ][ ][ ][ ][ ]
```

```
PRG
{ HOME CERCHA SUB }
Coord X Y Nudo : 6
: X(m): 6
: Y(m): 1
[ ][ ][ ][ ][ ][ ]
```



```
PRG
{ HOME CERCHA SUB }
Coord X Y Nudo : 7

:X(m):4
:Y(m):2
■■■■■■■■■■
```

```
PRG
{ HOME CERCHA SUB }
Coord X Y Nudo : 8

:X(m):2
:Y(m):1
■■■■■■■■■■
```

- b) Una vez introducidos estos datos presionemos ENTER. Luego aquí la pregunta es cuantos tipos de secciones tiene, si se quiere se puede tener distintos tipo de secciones para las barras (esto es mas conveniente cuando ya se hizo correr el programa una vez, y se diseño con esas fuerzas, entonces para verificar el diseño se utiliza esta opción), pero para el ejemplo solo consideramos una sección, luego presionamos ENTER.

```
PRG
{ HOME CERCHA SUB }
Cuántas clases de
secciones hay

:Secc:1
■■■■■■■■■■
```

- c) Se pide ahora ingresar el área de cada “sección tipo”, como para el ejemplo es irrelevante, ingresamos la unidad (pero se puede tantear, pero cuando ya se diseño la cercha se deben poner las áreas para realizar la verificación); luego presionamos ENTER.

```
PRG
{ HOME CERCHA SUB }
Entre el area de la
seccion Transversal
ST(1) en cm²

1
■■■■■■■■■■
```

- d) Se debe ingresar los nudos inicial y final de cada barra; el orden de los nudos sirve para interpretar la salida de las fuerzas internas, por eso se debe anotar esto para poder interpretar los resultados. El valor ST# es para indicar al programa que tipo de sección corresponde a



cada barra. (para el ejemplo como solo existe una sección entonces solo poner 1) y presionar ENTER para asignar a todas la barras, entonces:

Escriba los nudos
inicial (NI) y
final (NF) de
cada barra y el
tipo de sección (ST)

■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■

PRG
{ HOME CERCHA SUB }
NI NF ST. Barra(1)
:NI:1
:NF:2
:ST#:1
■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■

PRG
{ HOME CERCHA SUB }
NI NF ST. Barra(2)
:NI:2
:NF:3
:ST#:1
■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■

PRG
{ HOME CERCHA SUB }
NI NF ST. Barra(3)
:NI:3
:NF:4
:ST#:1
■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■

PRG
{ HOME CERCHA SUB }
NI NF ST. Barra(4)
:NI:4
:NF:5
:ST#:1
■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■

PRG
{ HOME CERCHA SUB }
NI NF ST. Barra(5)
:NI:5
:NF:6
:ST#:1
■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■

PRG
{ HOME CERCHA SUB }
NI NF ST. Barra(6)
:NI:6
:NF:7
:ST#:1
■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■

PRG
{ HOME CERCHA SUB }
NI NF ST. Barra(7)
:NI:7
:NF:8
:ST#:1
■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■

PRG
{ HOME CERCHA SUB }
NI NF ST. Barra(8)
:NI:8
:NF:1
:ST#:1
■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■



```
PRG
{ HOME CERCHA SUB }
NI NF ST. Barra(9)
:NI:2
:Nf:8
:ST#:1

```

```
PRG
{ HOME CERCHA SUB }
NI NF ST. Barra(10)
:NI:8
:Nf:3
:ST#:1

```

```
PRG
{ HOME CERCHA SUB }
NI NF ST. Barra(11)
:NI:3
:Nf:7
:ST#:1

```

```
PRG
{ HOME CERCHA SUB }
NI NF ST. Barra(12)
:NI:3
:Nf:6
:ST#:1

```

```
PRG
{ HOME CERCHA SUB }
NI NF ST. Barra(13)
:NI:6
:Nf:4
:ST#:1

```

- e) Ahora especifiquemos los nudos donde se encuentran los apoyos, e indicamos si estos son fijos o móviles, luego presionar ENTER después del ingreso de cada apoyo, entonces:

```
Indique las restri-
cciones en los apoyos
a los desplazamientos
en X y Y. Escriba 1 si
hay restricción, 0 si
no la hay.

```



```
PRG
{ HOME CERCHA SUB }
Nudo del apoyo, Rx, Ry
:Apoyo:1
:Rx:1
:Ry:1

```

```
PRG
{ HOME CERCHA SUB }
Nudo del apoyo, Rx, Ry
:Apoyo:5
:Rx:0
:Ry:1

```

- f) Luego de presionar ENTER debemos ingresar el modulo de elasticidad, para el ejemplo tomemos $E=100000 \text{ kg/cm}^2$

```
PRG
{ HOME CERCHA SUB }
Modulo de Elasticidad

:E(ton/cm2):100

```

- g) Se debe ingresar el peso especifico del material, pero cuando se quiera que el programa compute ese peso propio, para el ejemplo no se requiere, entonces introducimos cero, presionamos ENTER.

```
PRG
{ HOME CERCHA SUB }
Peso unitario del ma-
terial (0 si desprecia
el peso de la cercha)

:(ton/m3):0

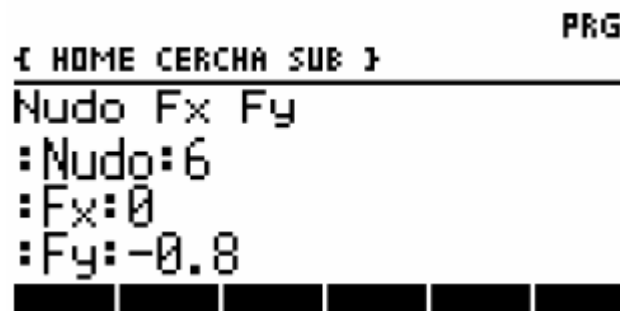
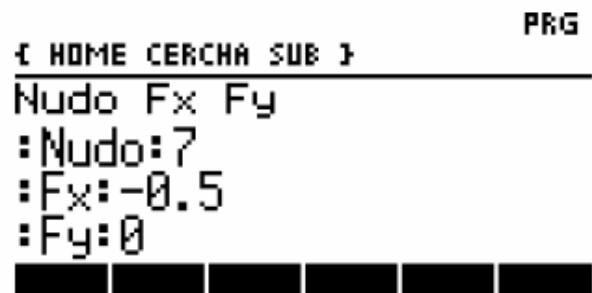
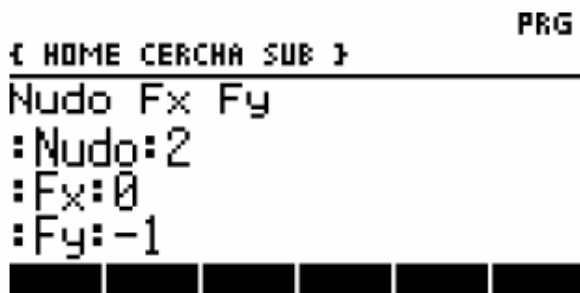
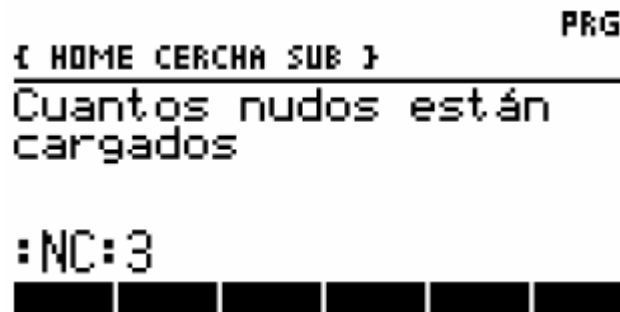
```

Paso3) Entrada de cargas

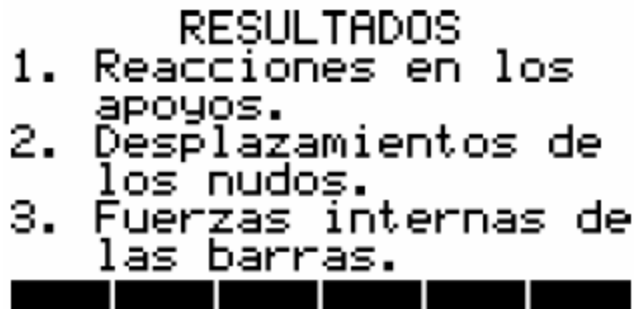
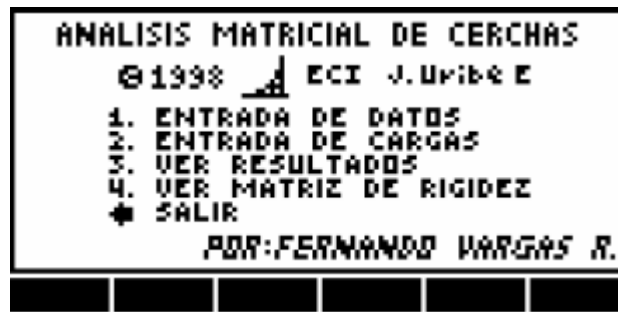
- a) Una vez que los datos de la armadura han sido introducidos, volvemos al menú principal e ingresamos a la opción #2 ENTRADA DE CARGAS.



- b) Ahora se debe ingresar el número de nudos cargados, se observa claramente que son 3, luego de presionar ENTER se debe ingresar el número de nudo y la carga externa (en toneladas), recordando siempre que positivo es a la derecha y hacia arriba; luego ingresar cada carga. Presionar ENTER:



- c) Luego presionar ENTER (ahora ya empieza a correr el programa, se debe esperar unos cuantos segundos), para ver los resultados presionar la opción 3, entonces:



d) Presionando la opción 1 par conocer las reacciones de apoyo tenemos:

Apoyo : 1

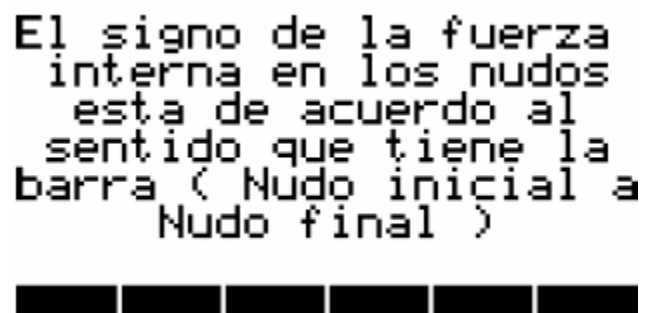
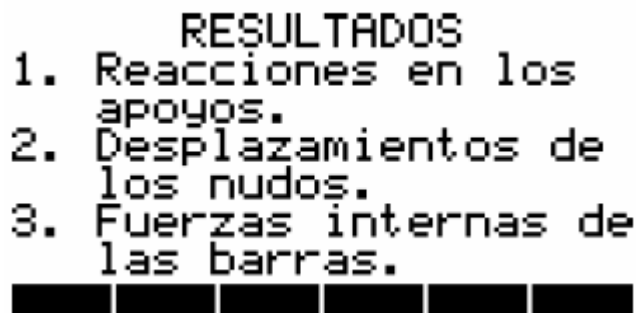
Rx : .5 ton
Ry : 1.08 ton

Apoyo : 5

Rx : 0 ton
Ry : .725 ton



e) Para poder ver los esfuerzos internos en cada una de las barras presionamos la opción 3 del menú: entonces:



f) Presionar ENTER, entonces aparecen las fuerzas internas en las barras, pero cabe aclarar la convención del programa para interpretar los resultados:

- En primer lugar el sentido positivo se toma de acuerdo del nudo final al nudo inicial (esto define el eje local longitudinal positivo), por ejemplo la barra 1 va desde el nudo 1 al nudo 2, entonces:



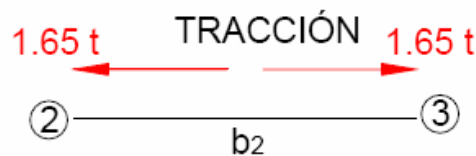
- La convención para definir la tracción y la compresión es la siguiente:



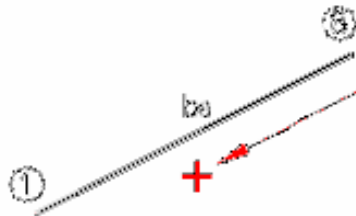
- Por ejemplo para la barra 2 se tiene:



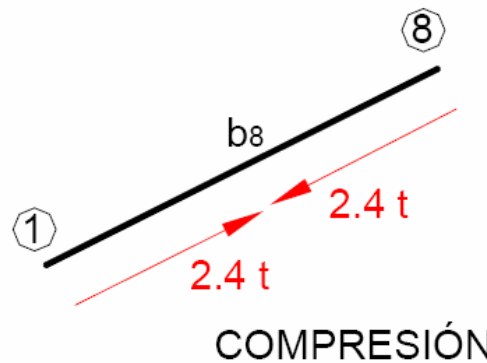
- Y de los resultados se tiene que el nudo 2 tiene un $F=1.65$ ton y el nudo 3 tiene un $F=1.65$ ton, lo que equivaldría a:



- Como otro ejemplo para la barra 8 se tiene:



- Y de los resultados se tiene que el nudo 8 tiene un $F=2.4$ ton y el nudo 1 tiene un $F=-2.4$ ton, lo que equivaldría a:



➤ Observemos en la salida de datos del programa.

BARRA : 1

Nudo inicial : 1
F : -1.65 ton
Nudo final : 2
F : 1.65 ton



BARRA : 2

Nudo inicial : 2
F : -1.65 ton
Nudo final : 3
F : 1.65 ton



BARRA : 3

Nudo inicial : 3
F : -1.45 ton
Nudo final : 4
F : 1.45 ton



BARRA : 4

Nudo inicial : 4
F : -1.45 ton
Nudo final : 5
F : 1.45 ton



BARRA : 5

Nudo inicial : 5
F : 1.62 ton
Nudo final : 6
F : -1.62 ton



BARRA : 6

Nudo inicial : 6
F : .727 ton
Nudo final : 7
F : -.727 ton





BARRA : 7

Nudo inicial : 7
F : 1.29 ton
Nudo final : 8
F : -1.29 ton



BARRA : 8

Nudo inicial : 8
F : 2.4 ton
Nudo final : 1
F : -2.4 ton



BARRA : 9

Nudo inicial : 2
F : -1 ton
Nudo final : 8
F : 1 ton



BARRA : 10

Nudo inicial : 8
F : 1.12 ton
Nudo final : 3
F : -1.12 ton



BARRA : 11

Nudo inicial : 3
F : -.9 ton
Nudo final : 7
F : .9 ton



BARRA : 12

Nudo inicial : 3
F : .894 ton
Nudo final : 6
F : -.894 ton



BARRA : 13

Nudo inicial : 6
F : 0 ton
Nudo final : 4
F : 0 ton





- g) Luego si presionamos ENTER volvemos al menú principal:

```
RESULTADOS
1. Reacciones en los
   apoyos.
2. Desplazamientos de
   los nudos.
3. Fuerzas internas de
   las barras.
[ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ]
```

- h) Para salir presionar ENTER, y aparecerá la siguiente ventana:

```
Desea borrar los
resultados?
```

```
[SI] [ ] [ ] [ ] [ ] [NO]
```

- i) Para guardar los datos, presionar la tecla F6 luego volvemos al menú principal y salimos definitivamente presionando la tecla ← (DROP), nuestros datos estarán cargados en la carpeta “SUB”.

ANALISIS MATRICIAL DE CERCHAS ©1998 ECI J. URBEL 1. ENTRADA DE DATOS 2. ENTRADA DE CARGAS 3. VER RESULTADOS 4. VER MATRIZ DE RIGIDEZ * SALIR POR: FERNANDO VARGAS R.	{ HOME CERCHA } 4: 3: 2: 1: [UPDIR] [RUN] [SUB] [] [] [] []
--	---