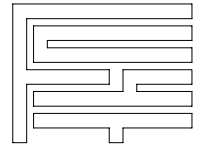


**UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN SIMÓN
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
CARRERA DE INGENIERÍA CIVIL**



**“APOYO DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA Y
APRENDIZAJE DE LA ASIGNATURA DE ESTRUCTURAS
HIPERESTÁTICAS
CIV 205”**

**TRABAJO DIRIGIDO, POR ADSCRIPCION, PARA
OPTAR AL DIPLOMA ACADEMICO DE
LICENCIATURA EN INGENIERÍA CIVIL**

**Presentado por: JOSÉ ANTONIO ARANIBAR ZÁRATE
RAÚL FELIX FLORES MEJÍA**

Tutor: Ing. FRANZ VARGAS LOAYZA

**COCHABAMBA – BOLIVIA
OCTUBRE DE 2005**

Dedicatoria:

A Dios, por regalarnos la oportunidad de disfrutar de estos momentos.

A la memoria de aquellas personas que ya no están con nosotros.

A nuestros padres, por ayudarnos a realizar nuestros sueños.

A nuestras hermanas por apoyarnos siempre.

Y a todos aquellos quienes se sienten felices por la conclusión de este objetivo.

Agradecimientos:

A Dios, por permitirnos alcanzar con éxito nuestro objetivo.

A nuestras familias, por el apoyo y confianza que nos brindan siempre.

A nuestro tutor Ing. Franz Vargas Loayza por toda la dedicación brindada durante la realización de este trabajo.

A los docentes de la carrera de Ingeniería Civil, por los conocimientos brindados.

A todos los compañeros con quienes compartimos gratos momentos.

FICHA RESUMEN

El análisis estructural es una rama de las ciencias físicas que tiene que ver con el comportamiento de las estructuras bajo determinadas condiciones de diseño. Las estructuras se definen como los sistemas que soportan cargas, y la palabra comportamiento se entiende como la tendencia a deformarse, vibrar, pandearse o fluir dependiendo de las condiciones a las que estén sometidas. Los resultados del análisis se usan entonces para determinar las características de las estructuras deformadas y verificar si son adecuadas para soportar las cargas para las cuales se han diseñado. El análisis de estructuras, tiene como esencia la determinación del estado de deformación y los esfuerzos en la estructura.

La asignatura de Estructuras Hiperestáticas CIV 205 corresponde al séptimo semestre de la Carrera de Ingeniería Civil de la Universidad Mayor de San Simón.

En los últimos tiempos, la Universidad Mayor de San Simón ha establecido la necesidad de mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje, a través de la realización de textos que permitan mejorar y apoyar el desempeño del estudiante. Por esta razón, se elabora este texto referido a la materia de “Estructuras Hiperestáticas” que surge como respuesta a la necesidad del estudiante de poder disponer de un texto totalmente actualizado, en un lenguaje simple y que cumpla cabalmente las exigencias del contenido de la materia.

El presente texto es producto de la investigación de una abundante bibliografía sintetizada en un volumen que engloba lo más importante y útil para el aprendizaje de la materia.

El texto se divide en seis capítulos. El primer capítulo presenta un panorama general, analizando las suposiciones básicas y las limitaciones del análisis lineal, dedicando un espacio a la clasificación de las estructuras para fines de análisis y a la identificación de las variables importantes en un análisis estructural. Se introducen los conceptos de indeterminación y grados de libertad, se pretende transmitir como son utilizados los conceptos fundamentales de equilibrio, compatibilidad y las relaciones entre fuerzas y desplazamientos en los métodos de resolución.

El segundo capítulo desarrolla la energía de deformación en barras para el análisis de deformaciones y esfuerzos en estructuras con pequeño grado de hiperestabilidad presentando conceptos y teoremas básicos de energía, estableciendo algunos métodos energéticos, que nos permiten el desarrollo de problemas, los cuales se presentan tanto resueltos como propuestos incrementando el grado de dificultad de estos gradualmente según el desarrollo del tema.

El tercer capítulo se refiere a la determinación de los coeficientes de rigidez y flexibilidad para barras prismáticas en su expresión tridimensional y referidos tanto al sistema local de ejes como al sistema global de ejes obtenido por rotación.

El cuarto capítulo desarrolla la construcción de la matriz de rigidez, introduciendo las condiciones especiales de carga aplicadas a la estructura y las condiciones de la estructura, hasta completar el análisis estático de una estructura con un grado arbitrario de hiperestaticidad, presentando ejercicios resueltos y propuestos.

El capítulo cinco desarrolla la aplicación del método de Cross para el análisis de estructuras en dos dimensiones, desplazables o indesplazables, simples sometidas a distintas acciones; si bien en la actualidad el método no tiene una aplicación significativa el conocimiento de este facilita la solución de algunos problemas.

El capítulo seis desarrolla un manual práctico para el uso básico del programa computacional de simulación estructural SAP2000; presentando ejemplos que sirven de base en el uso de este para algunas materias de la carrera de Ingeniería Civil donde el manejo del SAP2000 se hace indispensable.

CONTENIDO

CAPITULO 1 INTRODUCCION AL ANÁLISIS ESTRUCTURAL	1
1.1 Clasificación de las estructuras	1
1.2 Grado de indeterminación y grado de libertad	3
1.3 Métodos de análisis	5
1.4 Principios fundamentales	6
1.4.1 Teoría de las pequeñas deflexiones	7
1.4.2 Linealidad	7
1.4.3 Superposición	8
1.4.4 Equilibrio	9
1.4.5 Compatibilidad	11
1.4.6 Condiciones de contorno	12
1.4.7 Unicidad de las soluciones	13
CAPITULO 2 MÉTODOS ENERGÉTICOS	15
2.1 Energía de Deformación	15
2.2 Energía Complementaria de Deformación	18
2.3 Energía Específica de Deformación	18
2.4 Energía de Deformación en Barras	20
2.5 Teorema de Betti	24
2.6 Teorema de Maxwell	25
2.7 Teoremas de Castigliano	27
2.8 Principio del Trabajo Virtual	29
2.9 Energía Potencial	31
2.10 Energía Potencial Estacionaria	31
Ejemplos de Aplicación	32
Método energético de cálculo para sistemas hiperestáticos	34
2.11 Determinación de los desplazamientos elásticos generalizados	34
2.12 Método de la fuerza ficticia generalizada unitaria ó método de la carga unitaria	35
2.13 Principio del trabajo mínimo para el cálculo de sistemas hiperestáticos	36
2.14 Método de las fuerzas	39
2.15 Cálculo de anillos planos de paredes delgadas	40
Ejemplos de Aplicación	48
EJERCICIOS RESUELTOS	68
EJERCICIOS PROPUESTOS	111

CAPITULO 3 RIGIDEZ Y FLEXIBILIDAD	119
3.1 Influencia de los coeficientes de rigidez en elementos prismáticos	119
3.2 Ecuaciones de rigidez y flexibilidad de un elemento	125
3.3 Notación y transformación de Ejes	129
Ejemplos de Aplicación	137
CAPITULO 4 MÉTODO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ	139
4.1 Introducción	139
4.2 Método de Rigidez - Ejemplo simple	139
4.3 Suposiciones	141
4.4 Notación y ejes	142
4.5 Elementos rígidos	146
4.6 Transformación de coordenadas	146
4.7 Compatibilidad	149
4.8 Equilibrio	150
4.9 Matriz de Rigidez de una estructura	150
4.10 Nudos Restringidos y Simetría	153
4.11 Nudos articulados	158
4.12 Ejemplos de estructuras de barras rígidas	163
4.13 Estructuras de nudos articulados	173
4.14 Ejemplos de estructuras de nudos articulados	174
4.15 Cargas entre nudos	181
4.16 Variaciones de temperatura	183
4.17 Falta de ajuste	187
4.18 Vigas continuas	189
4.19 Estructuras tridimensionales	192
4.20 Entramados	194
4.21 Rigidez, flexibilidad y matrices de equilibrio para elementos simples	195
EJERCICIOS RESUELTOS	201
EJERCICIOS PROPUESTOS	217

CAPITULO 5 MÉTODO DE CROSS	221
5.1 Generalidades y primer problema fundamental	223
5.2 Estudio del primer caso: Nudos indesplazables	229
5.3 Estudio del segundo caso: Nudos desplazables	239
5.4 Método de Grinter	249
CAPITULO 6 SAP2000	257
Modelación y técnicas de análisis	257
6.1 Etiquetas	257
6.2 Sistemas de coordenadas	257
6.3 Joint Pattern	258
6.4 Nudos y Grados de libertad	260
6.4.1 Nudos	260
6.4.2 Grados de Libertad	261
6.4.3 Restricciones y Reacciones	263
6.4.4 Resortes	264
6.4.5 Masas	264
6.4.6 Cargas	265
6.5 Constraints y Welds	266
6.5.1 Constraint Body	267
6.5.2 Definición de Plano	268
6.5.3 Constraint Tipo Diafragma (Diaphragm)	268
6.5.4 Constraint tipo Lámina (Plate)	269
6.5.5 Definición de Ejes	269
6.5.6 Constraint tipo Barra (Rod)	270
6.5.7 Constraint Tipo Viga (Beam)	270
6.5.8 Constraint Equal	270
6.5.9 Acoplamiento entre partes de un modelo (Welds)	271
6.5.10 Nudos Maestros Automáticos (Master Joint)	272
6.5.11 Salida de constraints	272
6.6 Propiedades de los materiales	273
6.6.1 Esfuerzos y deformaciones	274
6.6.2 Materiales isotrópicos	274
6.6.3 Materiales ortotrópicos y anisotrópicos	275
6.6.4 Densidad de masa	275
6.6.5 Densidad de peso	275
6.7 Elementos Frame	276
6.7.1 Generalidades	276
6.7.2 Grados de libertad	276
6.7.3 Sistema de coordenadas local	277
6.7.4 Propiedades de sección	278

6.7.5	Brazos rígidos (End Offsets).....	281
6.7.6	Liberación de extremos (End Releases).....	283
6.7.7	Masa.....	284
6.7.8	Carga de peso propio.....	284
6.7.9	Carga de gravedad.....	284
6.7.10	Carga concentrada sobre paños.....	285
6.7.11	Carga distribuida sobre paño	285
6.7.12	Salida de resultados de las fuerzas internas	286
6.8	Elementos Shell.....	289
6.8.1	Generalidades.....	289
6.8.2	Nudos de conexión.....	290
6.8.3	Grados de libertad	291
6.8.4	Angulo del material.....	291
6.8.5	Masa.....	291
6.8.6	Carga del peso propio.....	292
6.8.7	Carga de gravedad.....	292
6.8.8	Carga uniforme.....	292
6.8.9	Cargas de presión superficial	292
6.8.10	Salida de resultados de Fuerzas y Esfuerzos internos.....	293
6.8.11	Fuerzas en nudos.....	295
6.9	INTERFASE GRÁFICA DE PRE PROCESAMIENTO.....	296
6.9.1	Modelo estructural	296
6.9.2	La pantalla del SAP2000.....	296
6.9.3	Opciones de vistas.....	297
6.9.4	Líneas Guia (gridlines).....	298
6.9.5	Operaciones Básicas.....	298
6.10	INTERFACE GRÁFICA DE POST PROCESAMIENTO.....	304
6.10.1	Exhibición de datos y resultados en pantalla (no en archivos de texto).....	304
6.10.2	Salida de datos y resultados en archivos de texto	306
	Ejemplos de Aplicación.....	308
	Ejemplo 1. Análisis Estático de un edificio.....	308
	Ejemplo 2. Análisis Estático de un Reservorio.....	336
	Ejemplo 3. Diseño en acero de un pórtico bidimensional	348
	Ejemplo 4. Diseño en hormigón de un pórtico bidimensional.....	364
	Ejemplo 5. Viga sobre fundación elástica.....	375
	Ejemplo 6. Losa sobre fundación elástica.....	385
	Ejemplo 7. Análisis Estático del “Instituto Oftalmológico Cochabamba”	399
	BIBLIOGRAFÍA	425
	ANEXOS	427

CAPITULO 1**INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS ESTRUCTURAL****1.1 Clasificación de las Estructuras.**

Una estructura, en general esta formada por elementos interconectados, los cuales independientemente de su forma, se consideran en una, dos o tres dimensiones. En realidad un elemento tiene siempre tres dimensiones: longitud, anchura y espesor; sin embargo, si la anchura y el espesor son pequeños en comparación con la longitud, como en el caso de vigas y columnas, tales elementos pueden considerarse como unidimensionales. En el caso de placas y cáscaras, el espesor es normalmente más pequeño que la longitud y la anchura del elemento; de ahí que las placas y cáscaras se consideran bidimensionales. Como para las relaciones entre longitud, anchura y espesor no hay una delimitación clara, de acuerdo con la cual los elementos puedan clasificarse como unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales, esto queda enteramente a juicio del ingeniero y a la exactitud esperada de los resultados. Por ejemplo, la viga continua, mostrada en la figura 1.1-1, se considera unidimensional en cambio la de la figura 1.1-2 es bidimensional. Mientras las reacciones en A y C en la figura 1.1-1 son cero, la fuerza P en la figura 1.1-2 adoptando un método de cálculo adecuado se propaga a través de la altura del elemento de tal manera que las reacciones en A y C son diferentes de cero. Las magnitudes de estas reacciones no dependen únicamente de la relación longitud-altura, sino también de las propiedades materiales y geométricas de la viga.

Las estructuras pueden dividirse en las tres categorías siguientes considerando sus elementos como de una, dos o tres dimensiones.

Estructuras de esqueleto

Estructuras laminares

Sólidos

En este texto se trata el análisis de aquellas estructuras que caen dentro de la primera categoría donde los elementos se consideran como unidimensionales.

La clasificación anterior de las estructuras es el resultado de la idealización de las estructuras reales con ciertas aproximaciones e hipótesis. Por ejemplo, un edificio se idealiza normalmente en tal forma que su entramado, es decir, el conjunto de las vigas y columnas de los pisos se considera como de tipo estructura de esqueleto y las placas son del tipo laminar, aunque el sistema completo es realmente una combinación de todos los tres tipos antes mencionados.

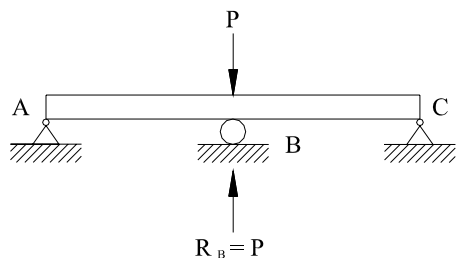


Figura 1.1-1 Viga continua unidimensional

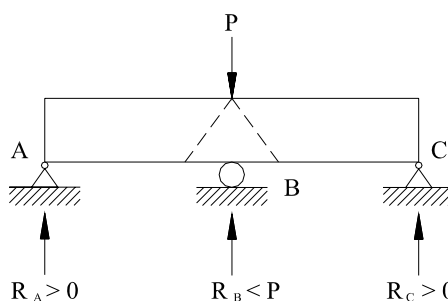


Figura 1.1-2. Viga continua bidimensional

Aún cuando es posible analizar una estructura completa como un sistema integrado (cimientos, pisos y entramados) las dificultades que se encontrarán no justifican el esfuerzo. Considerando otras incertidumbres tales como propiedades de los materiales, cargas y técnicas de construcción, hay algunas justificaciones para hacer la modelización de la estructura separando las diferentes partes en diferentes grupos (descomposición) y analizarlas luego independientemente.

El tipo de estructuras de esqueleto a su vez puede dividirse en los siguientes grupos.

- Cerchas
- Sistemas planos
- Reticulados ó entramados
- Marcos rígidos tridimensionales

En las *cerchas*, los elementos se unen entre si por articulaciones sin rozamiento y las cargas se aplican en los nudos. En consecuencia, los elementos están sometidos únicamente a fuerzas axiales (tensión o compresión). En la practica por supuesto, los elementos están unidos entre si por pernos, tornillos, o soldaduras, en lugar de estar unidos por un pasador sin rozamiento y están sujetos a cierta flexión y fuerza cortante. Sin embargo, como las rigideces a la flexión son muy pequeñas, los errores introducidos por tal idealización son también pequeños. Si se desearan conocer, por ejemplo, los esfuerzos de flexión, normalmente considerados como *esfuerzos secundarios* en las cerchas, las uniones pueden considerarse como uniones rígidas y el análisis puede desarrollarse de acuerdo con esto.

En los *sistemas planos*, los elementos están unidos entre si por nudos rígidos lo mismo que por articulaciones sin rozamiento y las cargas se pueden aplicar tanto en los nudos como en los elementos. La rigidez a la flexión de estos elementos normalmente es grande comparada con la de las cerchas. Los elementos no están sujetos a torsión, pues la estructura y las cargas “*están en el mismo plano*”.

Los *reticulados ó entramados* son los sistemas planos que están sujetos a cargas en diferentes planos. En otras palabras la estructura y las cargas no están en el mismo plano y como consecuencia de esto los elementos pueden estar sujetos tanto a torsión

como a flexión. Corresponden a esta categoría los cobertizos, los sistemas de tableros de puentes, los sistemas de pisos en edificios, etc.

Los *marcos rígidos tridimensionales* son el tipo más general de estructuras de esqueleto. Las cargas pueden estar aplicadas en cualquier punto y en cualquier dirección y los elementos pueden estar unidos entre si en cualquier forma.

1.2 Grado de indeterminación y Grado de libertad

Las estructuras, en cuanto concierne a su comportamiento estático, pueden clasificarse como estables e inestables. Las estructuras estables son aquellas capaces de soportar un sistema general de cargas cuyos valores tienen un límite de manera que no ocurra la falla por deformación excesiva. Las estructuras inestables por el contrario, no pueden sostener cargas a menos que estas sean de una naturaleza especial.

Las estructuras estables pueden ser estáticamente determinadas o estáticamente indeterminadas también denominadas estructuras hiperestáticas, dependiendo de si las ecuaciones de equilibrio son por si solas suficientes para determinar tanto las reacciones como las fuerzas internas. Si son suficientes, la estructura se clasifica simplemente como determinada; de lo contrario como indeterminada, la cual puede ser también externamente e internamente indeterminada. Si el número de las componentes de las reacciones es mayor que el número de ecuaciones independientes de equilibrio, se dice que la estructura es externamente indeterminada. Sin embargo, si algunas fuerzas internas del sistema no pueden determinarse por estática a pesar de que todas las reacciones sean conocidas, entonces la estructura se clasifica como internamente indeterminada. En cualquiera de los casos, su análisis depende de las propiedades físicas y geométricas, es decir, momentos de inercia, área y modulo de elasticidad de sus elementos.

La indeterminación implica restricciones o elementos adicionales a los mínimos requeridos para la estabilidad estática del sistema. A estas cantidades en exceso (reacciones o fuerzas internas en los elementos) se las denomina como redundantes, y su número representa el grado de indeterminación de la estructura. Consideremos por ejemplo, Las estructuras mostradas en las figuras 1.2-1, 1.2-2, 1.2-3, 1.2-4 y 1.2-5.

La estructura mostrada en la figura 1.2-1 es obviamente inestable debido a la falta de sujeción para prevenir el movimiento, mientras que en la figura 1.2-2 aunque exista un número adecuado de restricciones en los soportes su arreglo o distribución puede ser de tal forma que no pueda resistir el movimiento provocado por una carga arbitrariamente aplicada.

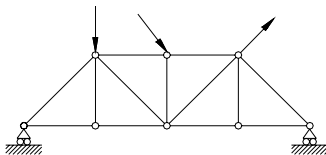


Figura 1.2-1
Estructura inestable debido a la
carencia de soporte

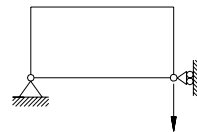


Figura 1.2-2
Estructura inestable debido a la
disposición de los apoyos

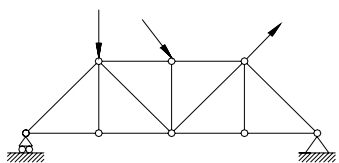


Figura 1.2-3

Estructura estable

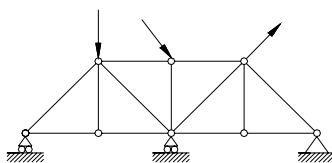


Figura 1.2-4

Estructura externamente indeterminada

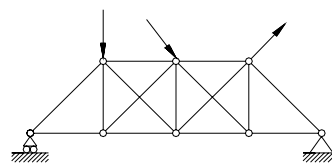


Figura 1.2-5

Estructura internamente indeterminada

En lo que a estática se refiere (independientemente de la resistencia), la estructura mostrada en la figura 1.2-3 es suficientemente estable para soportar cualquier sistema de cargas. La de la figura 1.2-4 es externamente indeterminada de primer grado, mientras la de la figura 1.2-5 es internamente indeterminada de segundo grado. Fuera de la economía y la seguridad hay muchas razones para diseñar una estructura indeterminada en lugar de una determinada. Sin embargo, este asunto está fuera del tema.

El grado de libertad, por otra parte, se define como el número total de desplazamientos desconocidos en los nudos de la estructura. Como máximo un nudo puede tener seis desplazamientos desconocidos, tres rotacionales y tres lineales en los marcos rígidos tridimensionales; dos rotacionales y uno lineal en los reticulados ó entramados; dos lineales y uno rotacional en los sistemas rígidos planos; dos y tres lineales en cerchas bi y tridimensionales. El grado de libertad puede determinarse, entonces, contando únicamente los desplazamientos desconocidos en los nudos.

En la mayoría de los casos, el grado de libertad y el grado de indeterminación están relacionados entre sí cuando disminuye el uno aumenta el otro y viceversa. Sin embargo, si se cambia el grado de indeterminación del sistema añadiendo o suprimiendo algunos elementos no necesariamente se altera su grado de libertad. Por ejemplo, la armadura de la figura 1.2-5 tiene dos barras adicionales comparada con la determinada en la figura 1.2-3, no obstante el grado de libertad de ambos sistemas es 13.

En resumen, el grado de indeterminación de una estructura es el número de componentes de las reacciones y fuerzas internas desconocidas que sobrepasan al número de ecuaciones de condición para el equilibrio estático. El grado de libertad es el número total de componentes de las deflexiones desconocidas de los nudos libres. Aunque estas dos cantidades se usan algunas veces para seleccionar el método matricial más adecuado para el análisis de una estructura dada, ninguno de los métodos matriciales hace discusión entre las estructuras determinadas e indeterminadas. Estos dos conceptos están involucrados en los métodos de tal modo que ni el Método de Flexibilidad ni el de Rigidez alteran su curso o se modifican porque la estructura sea o no determinada. El grado de indeterminación o el grado de libertad determinan, respectivamente, el orden en que deben ser invertidas las matrices de flexibilidad y de rigidez. Considerando que la mayor parte del tiempo de análisis se gasta en la inversión (o solución) de estas matrices, el grado de libertad o de indeterminación puede usarse como un factor para la selección del Método de Análisis; fuera de lo cual no sirven para otro propósito.

Luego de que se ha hecho la selección (la cual se hace frecuentemente por muchas razones diferentes a las que acabamos de discutir), ambos métodos siguen su

desarrollo, aunque una estructura determinada se comporte de manera diferente bajo circunstancias idénticas a una indeterminada. Por ejemplo, las variaciones de temperatura producen fuerzas internas en el sistema indeterminado pero no en el determinado.

En los métodos no matriciales, el concepto de indeterminación desempeña un papel muy importante.

1.3 Métodos de Análisis.

Entre los métodos de análisis utilizados podemos mencionar los métodos energéticos, métodos aplicados a estructuras con pequeño grado de hiperestaticidad y los denominados Métodos Matriciales, básicamente existen dos tipos diferentes de Métodos Matriciales para analizar estructuras, llamados, Método de Rigidez (desplazamientos) y Método de Flexibilidad (fuerzas); También conocidos como los Métodos de Equilibrio y Compatibilidad, respectivamente. Existe también un tercer método que no es tan común como los dos anteriores aunque tiene algunas ventajas cuando se aplica a ciertos tipos de estructuras. Este es llamado el *Método Combinado de Análisis*.

Antes de entrar a la descripción de cada método, el significado de la palabra *análisis* necesita una aclaración adicional. Si bien ahora se debe tener una idea acerca de su significado una definición explícita de ella puede ser provechosa debido a que analistas diferentes la entienden de diferentes maneras. Algunos pueden interpretarla como la determinación de fuerzas internas; y otros como la determinación de las deformaciones en varias partes de la estructura. Sin embargo, como hay una relación simple y única entre la forma deformada de la estructura y las fuerzas internas, el obtener la una, implica que las otras pueden determinarse con menos esfuerzo. Por consiguiente si el analista define su fin inmediato como la obtención de la forma deformada de la estructura, entonces sigue un procedimiento que difiere de aquel que le da prioridad a las fuerzas internas. Para algunas estructuras es mas fácil primero determinar los desplazamientos y después las fuerzas internas y viceversa. Es posible establecer los diferentes Métodos de Análisis teniendo presente estos fines inmediatos.

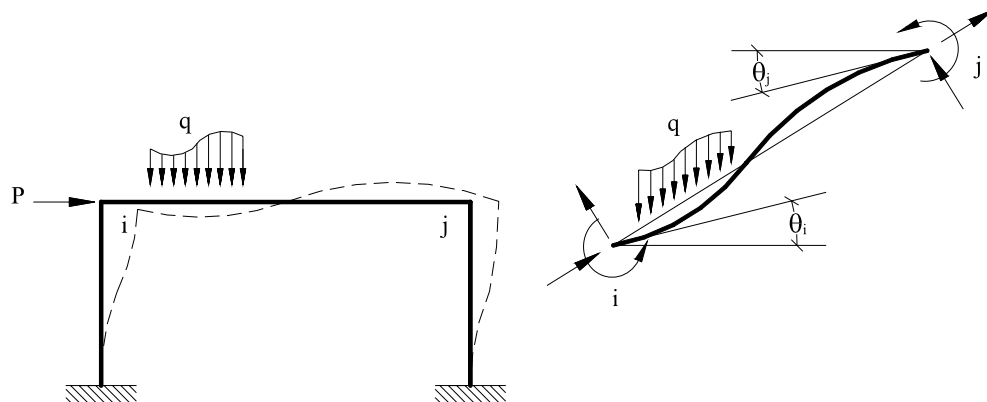


Figura 1.3-1 Diagrama de cuerpo libre de un elemento ij (exagerado)

Consideremos la estructura de esqueleto mostrada en la figura 1.3-1 y supongamos que uno de sus elementos, digamos el elemento $i-j$, se saca del sistema en su forma deformada. Supongamos además que se han calculado o se dan los

desplazamientos de i y de j (o el relativo de uno con respecto al otro). Entonces puede determinarse a partir de las relaciones fuerza-desplazamiento, las fuerzas internas de los puntos i y j o en cualquier punto entre ellos, así como de la curva elástica (forma deformada) de este elemento. Por ejemplo,

$$P_i = K_{ii} \Delta_i + K_{ij} \Delta_j$$

da las fuerzas internas desarrolladas en el extremo i de este elemento en función de las deflexiones de los puntos i y j . Las matrices K_{ii} y K_{ij} , las cuales llamaremos las *matrices de rigidez directa y de rigidez cruzada* del elemento $i-j$, estando estas en función de E , A , I , L del elemento. Una vez conocidas las deflexiones el cálculo de las fuerzas internas es bastante fácil. Entonces puede pensarse que lo que más interesa en el análisis estructural es la determinación de los desplazamientos de los extremos de cada elemento, ósea de cada nudo del sistema. Tal consideración conduce al análisis por el Método Matricial de Rigidez. Por el contrario, si el analista decide obtener primero las fuerzas internas, entonces sigue el Método de Flexibilidad.

Ambos métodos satisfacen las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y las condiciones de compatibilidad de los desplazamientos pero no en el mismo orden. En el Método de Rigidez primero se satisface el equilibrio de fuerzas y en el Método de Flexibilidad lo hacen las compatibilidades de los desplazamientos. La selección de un método o del otro depende de la estructura así como de la preferencia del analista. Para ciertas estructuras es fácil decidir que método de análisis deberá seguirse, mientras que para otras puede aun ser preferible usar un método en ciertas partes de la estructura y el otro en las otras. Este concepto sienta las bases para el método combinado de análisis.

Cada método involucra la solución de ecuaciones simultáneas en las cuales los desplazamientos de los nudos son las incógnitas en el método de rigidez, las fuerzas en los elementos en el Método de Flexibilidad y parcialmente desplazamientos en los nudos y fuerzas en los elementos en el método combinado. El Método de Flexibilidad esta asociado con el grado de indeterminación de la estructura y requiere resolver tantas ecuaciones simultaneas como número de redundantes. El Método de Rigidez, no tiene en cuenta si la estructura es determinada o indeterminada; lo que importa en este caso es el grado total de libertad del sistema. Contrariamente a lo que sucede en el Método de Flexibilidad o en cualquier otro método clásico, el Método de Rigidez es favorable en una estructura indeterminada a medida que se hace menor el grado de libertad.

1.4 Principios fundamentales

La clasificación de las estructuras hecha en la sección anterior se basó en su geometría y en la misma sección se mencionó que los métodos serían aplicables solamente a las estructuras de tipo esqueleto. Para decidir sobre el método de análisis, son importantes su comportamiento bajo cargas dadas y las propiedades del material de que están hechas. Los métodos presentados, se aplican a aquellas estructuras para las cuales los siguientes principios son válidos o se suponen válidos.

1.4.1 Teoría de las pequeñas deflexiones

Se supone que la geometría de una estructura no cambia apreciablemente bajo la aplicación de las cargas. Muchas estructuras cumplen este requisito; sin embargo en arcos esbeltos, puentes colgantes, en torres altas, etc., el cambio de la geometría tiene un papel importante. La teoría de las pequeñas deflexiones esta ilustrada en la figura 1.4.1-1. En cualquiera de las condiciones de carga, la deflexión Δ producida se supone que es la misma. Esto es, una hipótesis aceptable siempre que Δ sea pequeña y la presencia de P_2 no altere la flexión en la columna. Por ejemplo, el momento en el apoyo en la figura 1.4-1 se supone que es P_1L en vez de $P_1L + P_2\Delta$. En otras palabras, se supone que $P_2\Delta$ es despreciable comparado con P_1L .

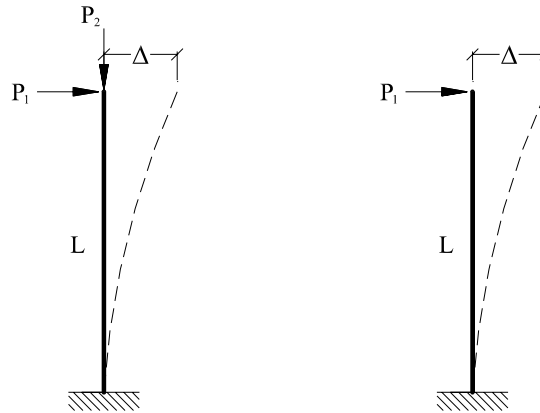


Figura 1.4.1-1 Columna sometida a cargas P_1 y P_2

Existen otros métodos tales como la teoría de las grandes deflexiones o teoría de segundo orden que tiene en cuenta el cambio en la geometría para el análisis de las estructuras, dichas teorías no serán tratadas.

1.4.2 Linealidad

Este principio supone que la relación carga-deflexión es lineal. Dicho de otra manera, si todas las cargas externas de la estructura son multiplicadas por un factor C , la deflexión de cualquier punto de la estructura será C veces la deflexión previa. Este principio esta controlado por la teoría de las pequeñas deflexiones así como por las propiedades físicas de los materiales de los cuales la estructura esta hecha.

Primero que todo los materiales son *elásticos* o *inelásticos*; segundo, ellos pueden ser *lineales* o *no lineales* en cuanto se refiere a la relación esfuerzo-deformación. Aun para un material linealmente elástico, la relación esfuerzo-deformación es valida normalmente hasta cierto punto. Por ejemplo, en acero estructural tal relación sigue una curva similar a la mostrada en la figura 1.4.2-1 donde σ_y y ϵ_y representan, respectivamente, el esfuerzo de fluencia y la deformación de fluencia del material. Por tanto este principio supone que bajo una condición de carga dada en ningún punto los esfuerzos o deformaciones deberán exceder los del *punto de fluencia* del material.

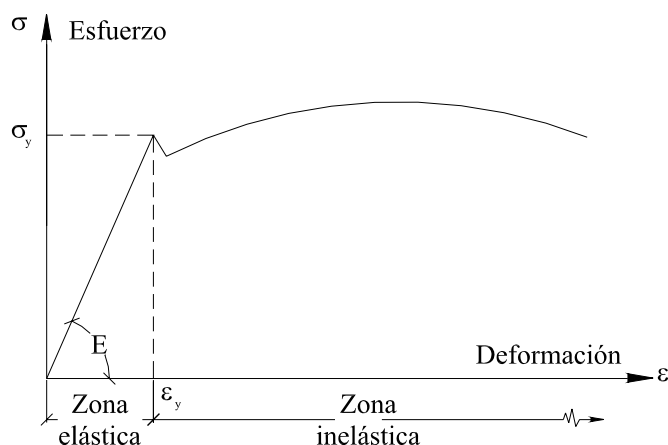


Figura 1.4.2-1 Curva esfuerzo-deformación

1.4.3 Superposición

Este principio establece que la secuencia en la aplicación de las cargas no altera los resultados finales siempre que no se violen los dos principios previos, es decir, el de las pequeñas deflexiones y el de linealidad. La figura 1.4.3-1 ilustra este principio. El principio de superposición es bastante empleado en el método de flexibilidad para confirmar el hecho de que el comportamiento de la estructura real puede expresarse como el comportamiento de estructuras primarias bajo dos efectos separados, el primero debido a la carga real y el segundo a las redundantes. La figura 1.4.3-2 demuestra este fenómeno para el análisis de la estructura de la figura 1.4.3-1 suponiendo que la reacción vertical en D ha sido seleccionada como redundante Δ_{DO} y Δ_{DD} representan en esta figura las deflexiones del punto D debidas a las cargas reales y a la redundante, respectivamente. Como la redundante no se conoce, Δ_{DD} no puede evaluarse en esta etapa. Sin embargo, de acuerdo al principio de linealidad

$$\Delta_{DD} = x_D \delta_{DD}$$

en donde δ_{DD} representa la deflexión del punto D debida a la carga unitaria aplicada en la dirección de x_D . Puesto que la deflexión vertical real de D en la estructura original es igual a cero,

$$\Delta_{DO} + x_D \delta_{DD} = 0$$

Finalmente,

$$x_D = -\frac{\Delta_{DO}}{\delta_{DD}}$$

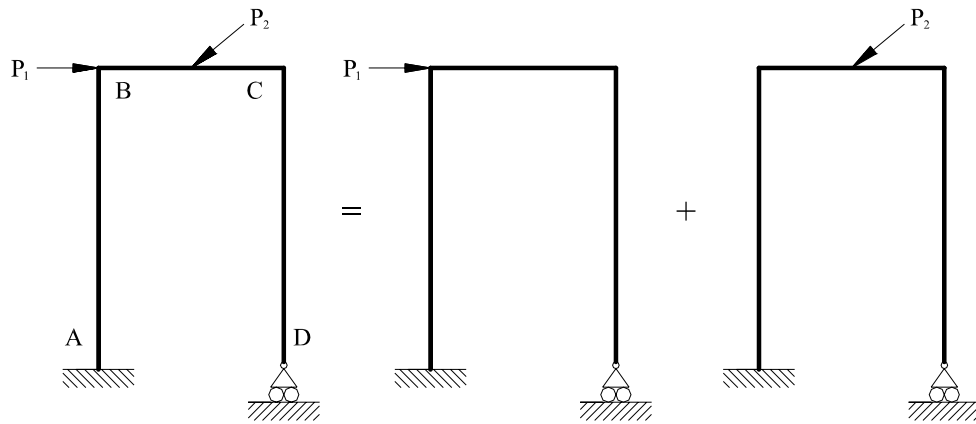


Figura 1.4.3-1 Principio de superposición.

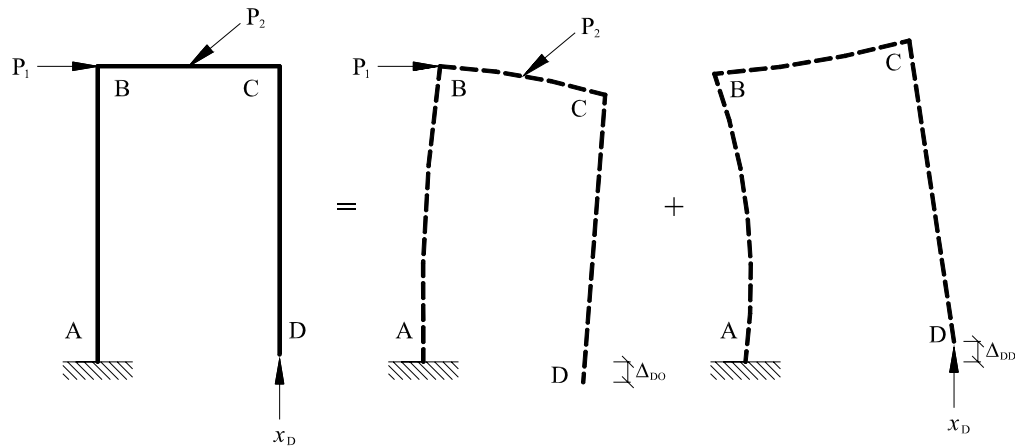


Figura 1.4.3-2 Principio de superposición con la aplicación de una redundante.

Otra explicación importante del principio de superposición es el uso de fuerzas equivalentes en el nudo calculadas a partir de las fuerzas de empotramiento cuando la estructura esta sujeta a cargas aplicadas sobre los elementos.

1.4.4 Equilibrio

Normalmente existen dos clases de equilibrio, equilibrio estático y equilibrio dinámico. Cuando las cargas están aplicadas sobre una estructura en forma cuasilineal (partiendo desde cero y alcanzado su valor final gradualmente), la estructura se deformara bajo estas cargas y quedara en reposo en su forma final. Desde este instante la estructura no sufre cambios en su posición ni en su forma deformada. Por el contrario, si las cargas se aplican súbitamente, la estructura alcanzara diferentes deformaciones en diferentes instantes.

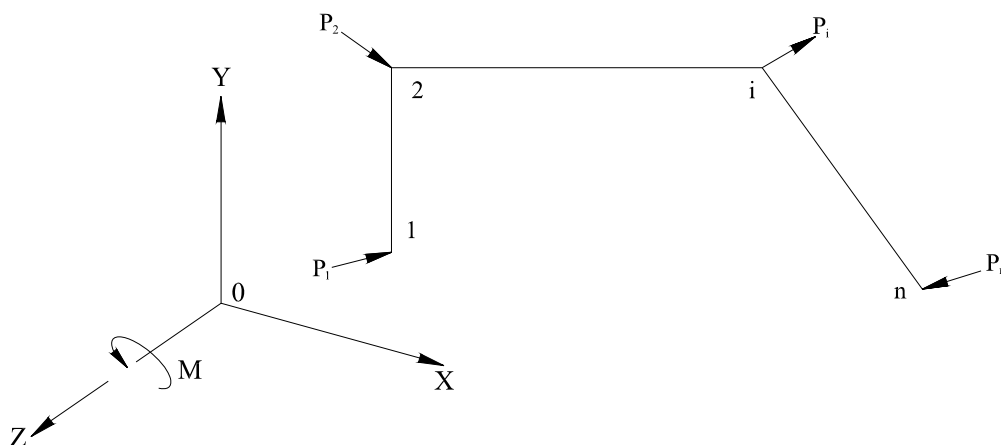


Figura 1.4.4-1 Equilibrio estático de un cuerpo elástico.

Si cualquier partícula o porción de la estructura está en equilibrio en cualquier instante bajo la acción de cargas externas, fuerzas gravitacionales, fuerzas elásticas y fuerzas inerciales que actúan sobre ella, entonces se dice que existe el llamado equilibrio dinámico de la estructura el cual no es tratado.

La condición de equilibrio estático establece que la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre la estructura (incluyendo las reacciones) trasladadas a un punto común, serán iguales a cero.

Supongamos que en un espacio físico bidimensional el cuerpo elástico mostrado en la figura 1.4.4-1 está en equilibrio estático bajo las cargas dadas (P_1, P_2, \dots, P_n) donde P_i representa las fuerzas generalizadas (incluyendo los momentos) aplicadas en el punto i . El equilibrio estático establece que

$$P'_1 + P'_2 + \dots + P'_n = 0 \quad (1.4.4-1)$$

donde P'_i representa P_i trasladada a un sistema de coordenadas comunes localizado en un punto arbitrario tal como el punto 0 en la figura 1.4.4-1.

Además de todo el equilibrio de la estructura, cualquier parte aislada de ella debe estar también en equilibrio. Supongamos que el nudo i en la figura 1.4.4-1 se aísla de la estructura como muestra la figura 1.4.4-2.

Representaremos por P_{ij} ($j=2, n$ en la figura 1.4.4-2) las fuerzas internas desarrolladas en el extremo i del elemento ij debidas a las cargas aplicadas.

$$-\sum_{j=1}^m P_{ij} + P_i = 0 \quad (1.4.4-2)$$

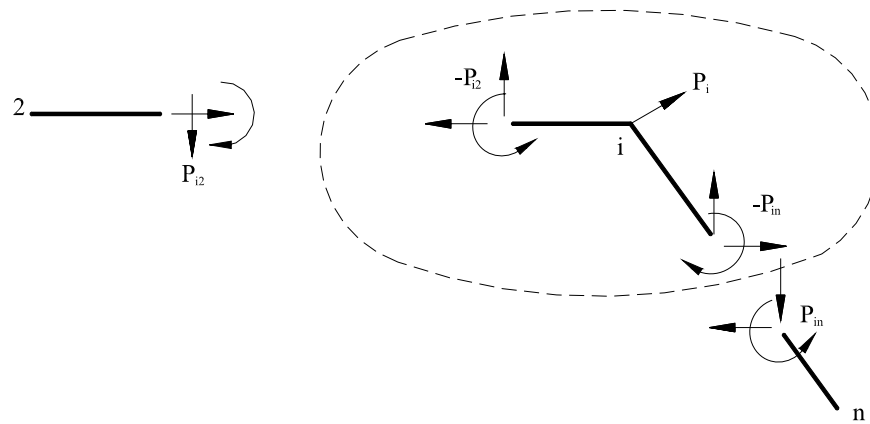


Figura 1.4.4-2 Fuerzas internas del nudo i.

Establece el equilibrio del nudo i , donde m es el número de elementos que concurren al nudo i . Si esta ecuación se satisface en cada nudo de la estructura, las condiciones de equilibrio para todo el sistema en conjunto también se cumplirán (ecuación 1.4.4-1). En los métodos presentados en este texto, se usaran frecuentemente las ecuaciones de equilibrio de los nudos

1.4.5 Compatibilidad

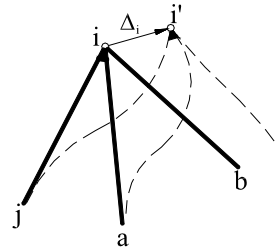
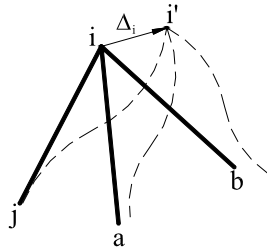


Figura 1.4.5-1 Estructura unida rígidamente

Figura 1.4.5-2 Estructura unida por una articulación

Este principio supone que la deformación y consecuentemente el desplazamiento, de cualquier punto particular de la estructura es *continuo y tiene un solo valor*. Normalmente esta condición se emplea, al igual que las condiciones de equilibrio, para satisfacer que los desplazamientos son únicos en los extremos de los elementos que concurren a un nudo.

Supongamos que unos pocos elementos están rígidamente unidos entre si en el nudo i como se muestra en la figura 1.4.5-1 se desplaza una cantidad Δ_i . La condición de compatibilidad requiere que

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ia} = \Delta_{ib} = \Delta_i \quad (1.4.5-1)$$

donde Δ_{ij} representa el desplazamiento del extremo i del elemento $i-j$. La ecuación (1.4.5-1) es válida siempre y cuando los elementos estén unidos entre si rígidamente y no se produzca fluencia o falla en el nudo.

Si los elementos están unidos entre si por uniones semirígidas o por articulaciones sin rozamiento, entonces algunas de las componentes de la condición de compatibilidad dadas en la ecuación (1.4.5-1) no se cumplirán.

Por ejemplo, si suponemos que la unión en el nudo i esta construida de tal manera que el elemento $i-b$ esta unido a los otros por una articulación sin rozamiento mientras que los elementos $i-j$ e $i-a$ permanecen rígidamente unidos, la compatibilidad rotacional del elemento $i-b$ no se cumple; esto es,

$$\theta_i = \theta_{ij} = \theta_{ia} \neq \theta_{ib}$$

sin embargo la ecuación (1.4.5-1) se mantiene aún para todas las otras componentes de los desplazamientos.

1.4.6 Condiciones de contorno

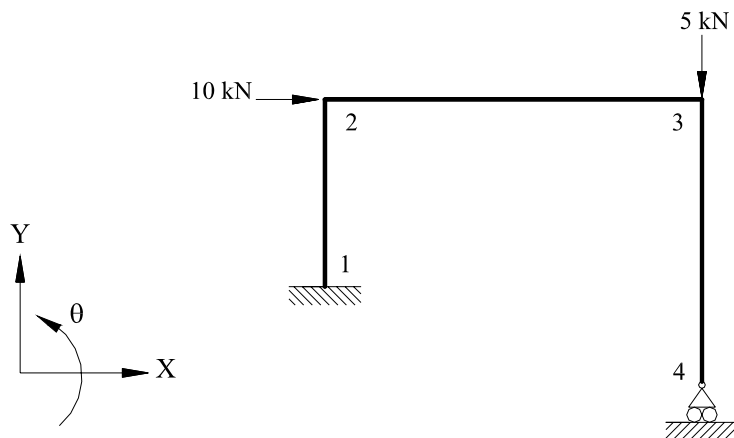


Figura 1.4.6-1 Condiciones de contorno de una estructura.

Sin introducir ciertas condiciones en los contornos, los problemas estructurales, como muchos otros problemas físicos, no se consideran enteramente definidos. Estas condiciones se especifican o en función de fuerzas (fuerzas en los nudos o en los elementos) o en función de desplazamientos. Por ejemplo, para la estructura mostrada en la figura 1.4.6-1 las condiciones de contorno en función de los desplazamientos son:

$$\Delta_{1X} = \Delta_{1Y} = \theta_1 = \Delta_{4Y} = 0 \quad (1.4.6-1)$$

mientras que las condiciones de contorno de las fuerzas son:

$$\begin{aligned} P_{2X} &= 10 \\ P_{3Y} &= -5 \\ P_{2Y} = M_2 &= P_{3X} = M_3 = 0 \end{aligned} \quad (1.4.6-2)$$

No obstante el uso de las condiciones de contorno se explica con mayor detalle posteriormente, se advierte recordar independientemente del método, los resultados deben satisfacer estas condiciones. Por ejemplo, los resultados del análisis indicarán que la rotación del nudo 1 de la estructura mostrada en la figura 1.4.6-1 es nula. A los puntos tales como los 1 y 4 en esta figura, que tienen el desplazamiento especificado por las condiciones de contorno, se les denomina *apoyos de la estructura*, y los desplazamientos en los apoyos prescritos, no necesariamente son iguales a cero como indica la

ecuación (1.4.6-1). Estos pueden especificarse como constantes o como funciones en los problemas que involucran asentamientos en los apoyos o en las uniones semirígidas.

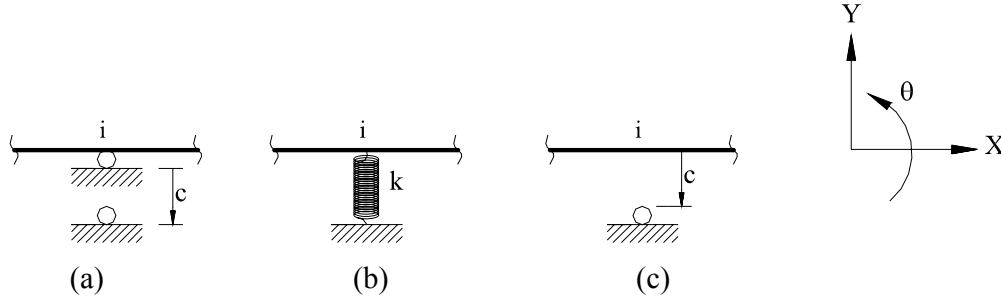


Figura 1.4.6-2 Distintas condiciones de contorno

Además de estos hay casos donde las condiciones de contorno pueden ser aun dependientes de otras condiciones. Por ejemplo, en la figura 1.4.6-2(a), para el punto i se espera un asentamiento vertical de magnitud c y la condición de contorno se especifica como $\Delta_{iY} = -c$. En la figura 1.4.6-2(b), donde el punto i esta apoyado sobre un resorte que tiene una constante de resorte k , lineal o no lineal, la condición de contorno viene a ser $\Delta_{iY} = f(k)$. En la figura 1.4.6-2(c), sin embargo, la condición de contorno en i o no esta especificada o es igual a $-c$, bajo las cargas dadas si i deflecta hacia abajo la cantidad c . Por consiguiente el análisis del sistema, en ese caso, puede requerir dos etapas. Primero, suponer que no hay prescritas condiciones de contorno en i y ver si la deflexión vertical de i es mayor o menor que c . Si es menor, la hipótesis es correcta; esto es, no hay apoyo en i , y el análisis queda terminado. En el otro caso, la estructura deberá volverse a analizar tomando un asentamiento $\Delta_{iY} = -c$ análogamente al de la figura 1.4.6-2(a).

1.4.7 Unicidad de las soluciones

Este principio asegura que no son posibles soluciones alternativas a los problemas de análisis estructural. Para un conjunto dado de cargas externas, tanto la forma deformada de la estructura y las fuerzas internas así como las reacciones tienen un valor único. Este enunciado se conoce como el teorema de unicidad de Kirchhoff, y puede comprobarse fácilmente con la hipótesis del contrario. Supongamos que un conjunto de cargas externas puede dar origen a dos modos diferentes de desplazamiento como indica la figura 1.4.7-1.

Si la figura 1.4.7-1(a) se resta de la figura 1.4.7-1(b), el resultado será otra forma deformada de la estructura sin ninguna carga externa sobre ella. Verdaderamente esto no es posible, lo cual prueba el teorema de unicidad. Este principio también es valido cuando las deformaciones son causadas por asentamientos de los apoyos, por cambio de temperatura o por cualquier otra causa.

Muy frecuentemente el analista verifica sus resultados por simple comprobación del equilibrio completo de toda la estructura (ecuación (1.4.4-1)). Esta parece ser la verificación más simple, pero no puede garantizar que los resultados sean realmente correctos. Por ejemplo, si del análisis de la estructura resultan dos respuestas diferentes,

tales como (a) y (b) de la figura 1.4.7-2, las ecuaciones de equilibrio no pueden determinar por si solas si es (a) o es (b) la verdadera solución del problema.

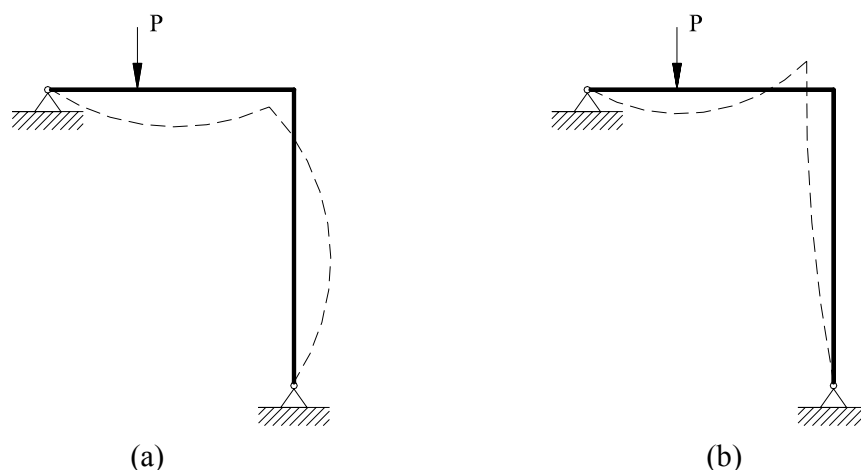


Figura 1.4.7-1 Estructura con dos modos diferentes de desplazamiento.

Un examen de las dos figuras muestra que las ecuaciones de equilibrio de fuerzas se satisfacen completamente en ambos casos. Sin embargo, los cálculos de deflexiones indican que los desplazamientos relativos de los dos apoyos en la figura 1.4.7-2(a) no son iguales a cero como deberían serlo de acuerdo con las condiciones de contorno. En la figura 1.4.7-2(b), sin embargo, esta condición se satisface también. La figura 1.4.7-2(b) es por consecuencia la *única* solución al problema. Luego, repetimos aquí una vez mas que *la respuesta correcta a cualquier problema estructural es aquella que satisface las tres condiciones denominadas, equilibrio, compatibilidad y de contorno.*

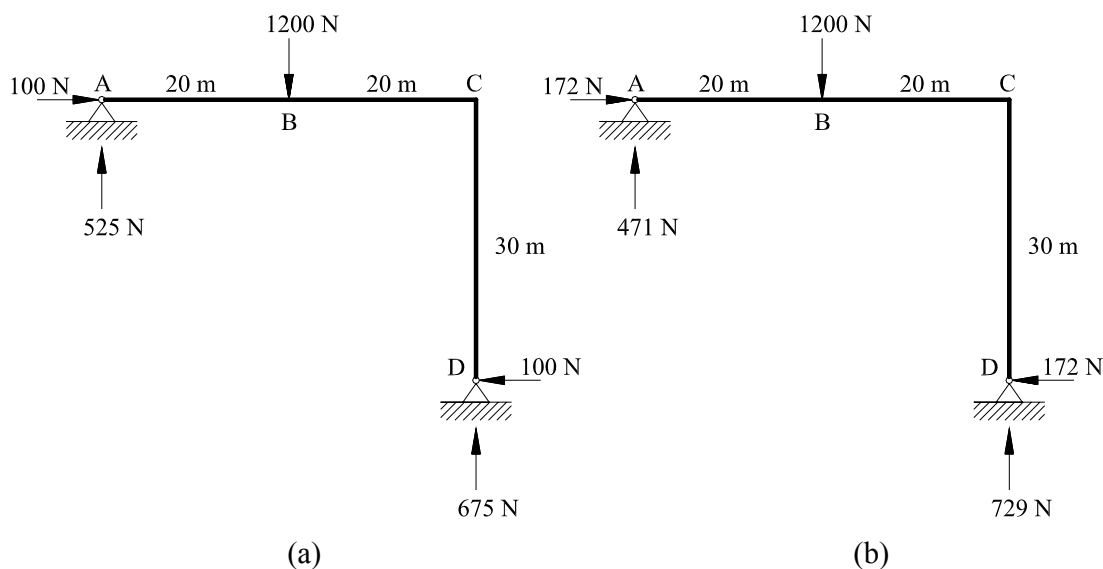


Figura 1.4.7-2 Ejemplo del principio de la unicidad de las soluciones.

CAPITULO 2

MÉTODOS ENERGÉTICOS

a. Energía de Deformación

Para los fines de las aplicaciones en la ingeniería, se considera que los cuerpos o sistemas mecánicos están formados por materia que consiste en partículas denominadas puntos materiales y cuyo conjunto constituye la configuración del sistema. Se dice que el sistema experimenta una deformación cuando cambia su configuración, o sea cuando se desplazan sus puntos materiales cambiando las distancias relativas entre los puntos.

Si se supone un sistema de fuerzas aplicado a un cuerpo, este se deforma hasta que el sistema de fuerzas internas equilibra el sistema de fuerzas externas. Las fuerzas externas realizan un trabajo que se transforma y acumula en el cuerpo. Este trabajo o energía de deformación es utilizado por el cuerpo para recuperar su forma cuando cesa la acción del sistema de fuerzas externas. Si el cuerpo recupera exactamente su forma inicial se dice que es un cuerpo perfectamente elástico, e indica que el trabajo de las fuerzas externas durante la deformación del cuerpo se transformo totalmente en energía de deformación, despreciándose la perdidas pequeñas por cambio de temperatura. En cualquier caso, se cumple siempre la ley de la Termodinámica: el trabajo efectuado por las fuerzas externas más el calor que absorbe el sistema del exterior es igual al incremento de energía cinética más el incremento de energía interna. Por otra parte, el incremento de energía cinética es igual a la suma de los trabajos de las fuerzas externas y de las fuerzas internas.

En los sistemas elásticos se desprecian las perdidas por calor y la energía interna del sistema (energía potencial de las fuerzas internas) es la energía o trabajo de deformación de dicho sistema.

Las estructuras por lo general se hacen de madera, concreto y acero. Cada una de ellas tiene diferentes propiedades materiales que deben ser consideradas para el análisis y el diseño. Debe conocerse el modulo de elasticidad E de cada material para cualquier cálculo de desplazamiento.

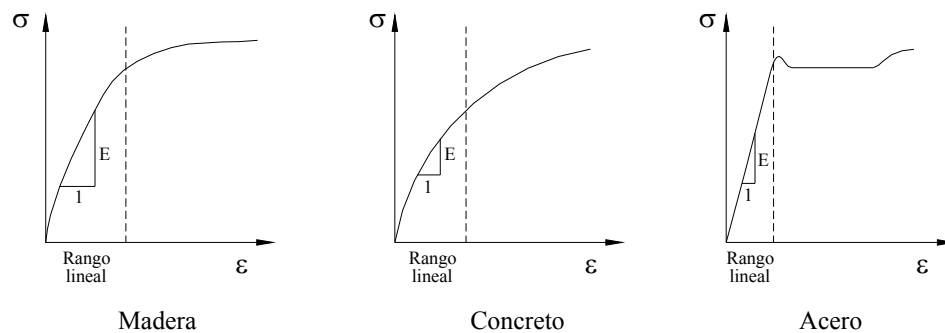


Figura 2.1-1 Leyes de esfuerzo-deformación.

En la figura 2.1-1, se muestran curvas típicas esfuerzo-deformación para los tres materiales antes mencionados. El modulo de elasticidad E se define como la pendiente de la curva esfuerzo-deformación. Para deformaciones localizadas a la izquierda de las líneas punteadas que se muestran en cada gráfica, la curva es aproximadamente una línea

recta. La pendiente es constante y por ello también E lo es. Dentro de esta región, el comportamiento se lo denomina lineal.

Considérese la barra elástica de sección transversal A y longitud L , sujeta a una carga axial P , aplicada gradualmente, como se muestra en la figura 2.1-2.

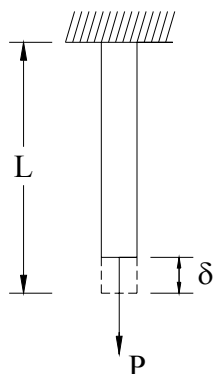


Figura 2.1-2 Barra sujeta a una carga axial P .

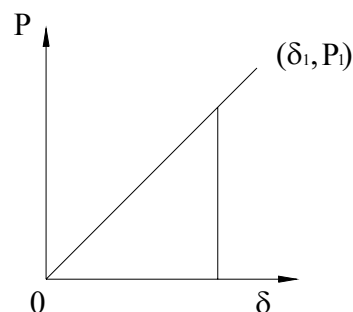


Figura 2.1-3. Relación P - δ lineal.

Se supone que se cumple la ley experimental de elasticidad lineal de Hooke, como se indica en la figura 2.1-3. Donde la fuerza por unidad de área que soporta un material se suele denominar esfuerzo en el material, y se expresa matemáticamente de la forma:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

donde σ es el esfuerzo o fuerza por unidad de área, P es la carga aplicada y A es el área de la sección transversal.

El valor de la deformación unitaria ε es el cociente del alargamiento (deformación total) δ y la longitud L en la que se ha producido. Por tanto.

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

Consideremos de nuevo los diagramas de esfuerzo-deformación representados en la figura 2.1-1, y observemos las partes rectilíneas. La pendiente de la recta es la relación entre el esfuerzo y la deformación; representada por modulo de elasticidad E .

$$\text{Pendiente de la línea esfuerzo-deformación} = E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$\text{Que suele escribirse de la forma} \quad \sigma = E\varepsilon$$

Esto no expresa otra cosa que la conocida ley de Hooke. En principio, Hooke solo enuncio la ley de que el esfuerzo es proporcional a la deformación. Fue Thomas Young, quien introdujo la expresión matemática con una constante de proporcionalidad que se llamo modulo de Young. Finalmente, este nombre se sustituyo por el modulo de elasticidad o modulo elástico

Otra forma de expresión de la ley de Hooke, muy conveniente a veces, es la que se obtiene al sustituir σ por su equivalente P/A y ε por δ/L de modo que:

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\frac{P}{A} = E \frac{\delta}{L}$$

O lo que da igual

$$\delta = \frac{PL}{AE} \quad (2.1-1)$$

donde:

δ : Deformación en la barra

E : Modulo de elasticidad de Young

La carga P se aplica gradualmente y la deformación aumenta gradualmente según la ecuación 2.1-1. El trabajo desarrollado en contra de las fuerzas internas del sistema es

$$W = \int P d\delta \quad (2.1-2)$$

De (2.1-1)

$$P = \frac{AE}{L} \delta \quad (2.1-3)$$

Sustituyendo (2.1-3) en (2.1-2)

$$W = \int \frac{AE}{L} \delta d\delta = \frac{AE}{L} \frac{\delta^2}{2} \quad (2.1-4)$$

Por lo tanto

$$W = \frac{1}{2} P \delta \quad (2.1-5)$$

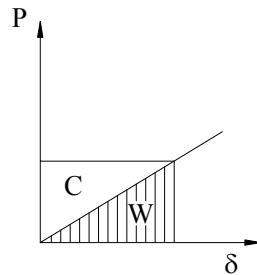


Figura 2.1-4. Energía de deformación
Caso Lineal

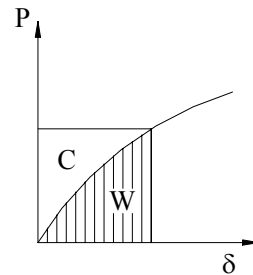


Figura 2.1-5. Energía de deformación
Caso No Lineal

El trabajo realizado por una fuerza se define como el producto de la fuerza por la distancia que esta recorre en su propia dirección. Cuando un cuerpo elástico esta sometido a un conjunto de fuerzas externas, ciertos esfuerzos internos se desarrollan en el cuerpo, y durante la deformación de esta, estos esfuerzos realizan algún trabajo. Este trabajo se designa normalmente como energía de deformación del cuerpo, siendo $W = U$.

El trabajo ó energía de deformación U corresponde al área sombreada del triangulo mostrado en la figura 2.1-4, es decir, está representado por el área bajo la recta.

La ecuación (2.1-5) se conoce como la Ley de Clapeyron, que nos dice que la energía de deformación, cuando la carga se aplica paulatinamente vale la mitad de la energía que se desarrolla cuando la misma carga se aplica instantáneamente.

En el caso de elasticidad no lineal (figura 2.1-5), la energía de deformación es el área bajo la curva, como se puede deducir de la ecuación (2.1-2).

2.2 Energía Complementaria de Deformación

Se denomina energía complementaria de deformación y se representa con C al área arriba de la curva Carga-Deformación y limitada superiormente por la recta horizontal que corresponde a la carga P , cuyo valor se calcula con la integral

$$C = \int \delta dP \quad (2.2-1)$$

y tiene importancia al considerar los Teoremas de Castigliano.

Cuando la aplicación de la carga es instantánea, el trabajo o energía de deformación es $P\delta$, es decir, el área del rectángulo que corresponde a la suma $C + W$.

2.3 Energía Específica de Deformación

Considerando el ejemplo de una barra con carga axial mostrado en la figura 2.1-2, se tiene que el esfuerzo normal es:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (2.3-1)$$

y la deformación unitaria

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \quad (2.3-2)$$

Despejando valores de las ecuaciones (2.3-1) y (2.3-2), y sustituyendo en la ecuación (2.1-5)

$$U = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon A L \quad (2.3-3)$$

donde $A L$ representa un volumen que se puede considerar unitario, obteniéndose la llamada “energía específica de deformación” U_u , es decir la energía de deformación almacenada en la unidad de volumen

$$U_u = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \quad (2.3-4)$$

Esta energía específica de deformación indicada en la ecuación (2.3-4) es la debida al esfuerzo *normal*.

Para el caso del esfuerzo cortante considérese una unidad de volumen como se muestra en la figura 2.3-1 y un corte paralelo al plano xy como se muestra en la figura 2.3-2.

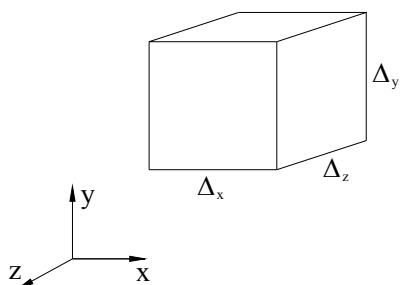


Figura 2.3-1. Unidad de Volumen

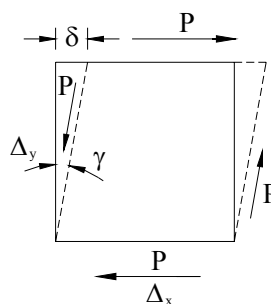


Figura 2.3-2. Elemento sujeto a fuerza cortante

Se tiene

$$\tau = \frac{P}{\Delta x \Delta z} \quad (2.3-5)$$

y

$$\gamma = \frac{\delta}{\Delta y} \quad (2.3-6)$$

Despejando P y δ de las ecuaciones (2.3-5) y (2.3-6), y reemplazando en la ecuación (2.1-5)

$$U = \frac{1}{2} \tau \gamma \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.3-7)$$

es decir

$$U_u = \frac{1}{2} \tau \gamma \quad (2.3-8)$$

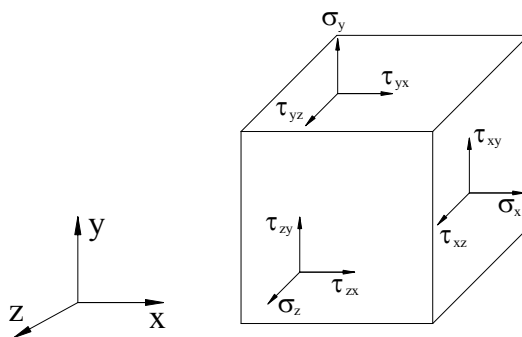


Figura 2.3-3 Elemento sujeto al caso general de esfuerzos.

En el caso general de esfuerzos normales y tangenciales que se indica en la figura 2.3-3, la energía específica de deformación por aplicación gradual de la carga es:

$$U_u = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) \quad (2.3-9)$$

donde ε_x , ε_y y ε_z son las deformaciones unitarias en dirección de los ejes respectivos y γ_{xy} , γ_{xz} y γ_{yz} son las deformaciones angulares en dirección de los planos coordenados indicados con los subíndices.

Obsérvese que por la condición de equilibrio:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2.3-10)$$

La ecuación (2.3-9) se obtuvo considerando independientemente los efectos de los esfuerzos normal y cortante, y sumándolos posteriormente, basándose en el principio de la superposición de causas y efectos.

Este principio es de uso frecuente en el análisis estructural y es aplicable a materiales linealmente elásticos, permitiéndose el análisis de efectos separadamente, siendo la suma de ellos el efecto del sistema total. En lo que sigue, se supone que se cumple siempre el requisito de elasticidad lineal y entonces se aplica el principio de superposición.

La energía de deformación total se obtiene integrando la ecuación (2.3-9) en todo el volumen del cuerpo

$$U = \iiint_V U_u \, dV \quad (2.3-11)$$

2.4 Energía de Deformación en Barras

Considérese una barra prismática en el espacio tridimensional, que cumple la Ley de Hooke y que se encuentra sujeta a los elementos mecánicos: fuerza normal, fuerzas cortantes, momentos flexionantes y momento torsionante.

Se supone que se cumple el estado de esfuerzos de Saint Venant, o sea:

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (2.4-1)$$

Cada uno de los elementos mecánicos se considera por separado y se aplica el principio de superposición de causas y efectos, mencionado anteriormente.

1 Efecto de Fuerza Normal

Si actúa la fuerza normal N , sólo se produce el esfuerzo normal

$$\sigma_z = \frac{N}{A} \quad (2.4-2)$$

Se tiene que

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \quad (2.4-3)$$

y por lo tanto

$$U_u = \frac{1}{2} \sigma_z \varepsilon_z = \frac{\sigma_z^2}{2E} \quad (2.4-4)$$

Reemplazando la ecuación (2.4-2) en la ecuación (2.4-4) e integrando:

$$U_N = \int_0^L ds \iint_A \frac{N^2}{2E A^2} dA \quad (2.4-5)$$

donde N , E y A son constantes de una sección transversal y

$$\iint_A dA = A \quad (2.4-6)$$

Finalmente,

$$U_N = \int_0^L \frac{N^2}{2EA} ds \quad (2.4-7)$$

es el trabajo o energía de deformación por fuerza normal.

2 Efecto del Momento Flexionante

Si actúa el momento flexionante M_x , las tensiones normales en un punto cualquiera de la sección transversal de la viga en la flexión se determinan por la fórmula:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \quad (2.4-8)$$

donde I_x es el momento de Inercia de la sección con respecto al eje x , e y es la distancia del punto donde se calcula el esfuerzo al eje neutro (eje sin compresión ni tensión).

Se cumple la ecuación (2.4-4) y teniendo en cuenta la ecuación (2.4-8)

$$U_{M_x} = \int_0^L ds \iint_A \frac{M_x^2}{2EI_x^2} y^2 dA \quad (2.4-9)$$

donde M_x , E e I_x son constantes en una sección entonces:

$$\iint_A y^2 dA = I_x \quad (2.4-10)$$

Por lo tanto

$$U_{M_x} = \int_0^L \frac{M_x^2}{2EI_x} ds \quad (2.4-11)$$

es el trabajo o energía de deformación por momento flexionante.

3 Efecto de la Fuerza Cortante

Se considera la fuerza cortante T_y , donde la magnitud de la tensión tangencial se determina por la fórmula de D. Zhuravski:

$$\tau = \frac{T_y Q}{I_x b_y} \quad (2.4-12)$$

donde:

Q = momento estático del área limitada entre la fibra en estudio y la fibra más alejada de la sección.

b_y = ancho de la fibra en estudio

Se tiene

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (2.4-13)$$

donde G es el módulo de elasticidad transversal y varía entre los valores $0,4 E$ y $0,5 E$.

Teniendo en cuenta la ecuación (2.3-8)

$$U_u = \frac{1}{2} \tau \gamma = \frac{\tau^2}{2G} \quad (2.4-14)$$

Sustituyendo la ecuación (2.4-12) en la ecuación (2.4-14) e integrando:

$$U_{T_y} = \int_0^L ds \iint_A \frac{T_y^2 Q^2}{2 G I_x^2 b_y^2} dA \quad (2.4-15)$$

Recordando que

$$I_x = A \rho^2 \quad (2.4-16)$$

donde ρ es el radio de giro de la sección, entonces se tiene

$$U_{T_y} = \int_0^L ds \iint_A \frac{T_y^2}{2 G A} \frac{Q^2}{\rho^2 I_x b_y^2} dA \quad (2.4-17)$$

donde T_y , G y A son constantes en una sección, entonces:

$$k = \iint_A \frac{Q^2}{\rho^2 I_x b_y^2} dA \quad (2.4-18)$$

k . solo depende de la forma de la sección (que puede cambiar a lo largo de la barra) y se denomina *coeficiente de forma*. En general, la forma de la sección se conserva aun para secciones variables a lo largo de la pieza.

Por lo tanto,

$$U_{T_y} = \int_0^L k \frac{T_y^2}{2 G A} ds \quad (2.4-19)$$

es el trabajo o energía de deformación por fuerza cortante.

El coeficiente de forma k vale 1.2 para secciones rectangulares y triangulares, 10/9 para secciones circulares y $A_{sección}/A_{alma}$ para perfiles laminados.

4 Efecto de Momento Torsionante

Se ha determinado que una barra sujeta a momento torsionante M_z produce esfuerzos tangenciales, que para secciones circulares o anulares están dados por

$$\tau = \frac{M_z}{J} r \quad (2.4-20)$$

donde:

J = momento polar de inercia

r = distancia del centro de la sección al punto en estudio

Se cumple la ecuación (2.4-14) y se tiene

$$U_{M_z} = \int_0^L ds \iint_A \frac{M_z^2}{2 G J^2} r^2 dA \quad (2.4-21)$$

donde M_z , G y J son constantes en una sección, entonces

$$\iint_A r^2 dA = J \quad (2.4-22)$$

Por lo tanto,

$$U_{M_z} = \int_0^L \frac{M_z^2}{2 G J} ds \quad (2.4-23)$$

En la mayoría de los casos las secciones no son circulares o anulares y se utiliza el momento polar de inercia modificado, J_m .

Finalmente,

$$U_{M_z} = \int_0^L \frac{M_z^2}{2 G J_m} ds \quad (2.4-24)$$

Para secciones rectangulares

$$J_m = \frac{1}{3} b t^3 \quad (2.4-25)$$

donde b representa el lado de mayor dimensión y t el de dimensión menor. La fórmula se puede aplicar también a secciones cuadradas, en cuyo caso $b = t$.

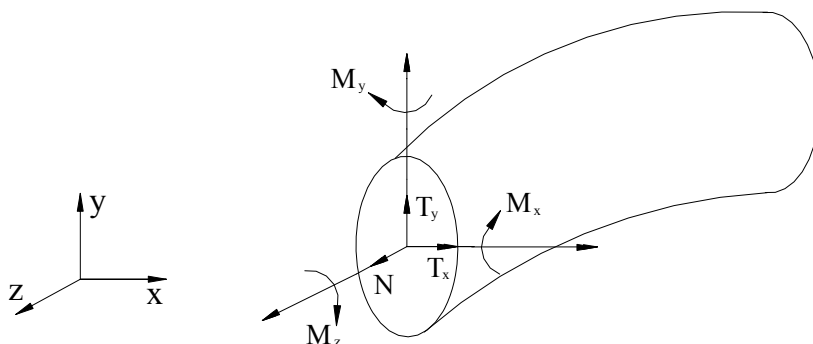


Figura 2.4-1. Barra curva sujeta a los seis elementos mecánicos.

Las fórmulas encontradas se aplican a barras de eje recto y de eje curvo. En el caso general de una barra sujeta a los seis elementos mecánicos (figura 2.4-1), se obtiene que:

$$U = \int_0^L \frac{N^2}{2EA} ds + \int_0^L k_x \frac{T_x^2}{2GA} ds + \int_0^L k_y \frac{T_y^2}{2GA} ds + \int_0^L \frac{M_x^2}{2EI_x} ds + \int_0^L \frac{M_y^2}{2EI_y} ds + \int_0^L \frac{M_z^2}{2GJ_m} ds \quad (2.4-26)$$

Para una barra en el espacio de tres dimensiones se supone que el eje longitudinal de la barra pasa por el centroide de las secciones transversales y que las direcciones principales son tangentes: normal y binormal, coincidiendo las dos últimas con los ejes centroidales y principales de la sección transversal.

Existe una limitación en cuanto a la curvatura de la pieza ya que en barras de eje recto la distribución del esfuerzo normal es lineal, transformándose dicha distribución en una curva cuando la barra no es de eje recto. El error es importante cuando la ecuación (2.4-26) se aplica a una barra de eje curvo en la cual el radio de curvatura en un punto es del mismo orden que la dimensión mayor de la sección transversal en ese punto. Sin embargo, cuando el radio de curvatura en un punto es igual a tres veces la dimensión mayor de la sección, el error es de un 2%* y por consiguiente la ecuación (2.4-26) se puede aplicar a barras de eje curvo en donde el radio de curvatura en un punto del eje no es menor que cinco veces la dimensión máxima en ese punto.

*Ver el libro *Strength of Materials* de S. Timoshenko

Es conveniente observar que para el cálculo de la energía de deformación, los efectos de varias cargas aplicadas sucesivamente no son en general simplemente aditivos. Por ejemplo, si se aplica la fuerza normal N_1 y después la fuerza normal N_2 , la energía de deformación no es:

$$\int_0^L \frac{N_1^2}{2EA} ds + \int_0^L \frac{N_2^2}{2EA} ds,$$

que correspondería a las áreas W_1 y W_2 , respectivamente, de la figura 2.4-2, sino que vale

$$U = \int_0^L \frac{(N_1 + N_2)^2}{2EA} ds \quad (2.4-27)$$

que corresponde al área total bajo la recta.

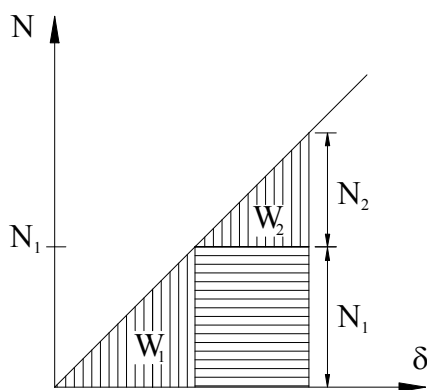


Figura. 2.4-2. Aplicación gradual sucesiva de las fuerzas normales N_1 y N_2 .

2.5 Teorema de Betti

Enunciado: El trabajo de las fuerzas de un sistema debido a los desplazamientos que en sus puntos de aplicación le produce otro sistema de carga es igual al trabajo de las fuerzas del segundo sistema debido a la aplicación del primer sistema de fuerzas.

Considérese un cuerpo elástico en equilibrio al que se aplican dos sistemas de carga A y B , como se indica en las figuras 2.5-1 y 2.5-2, respectivamente

Cada uno de los sistemas de carga se encuentra en equilibrio independientemente, al igual que su aplicación simultánea, y se calcula la energía de deformación debido a la aplicación sucesiva de dichos sistemas de carga, aplicados gradualmente.

Si se aplica primero el sistema A y después el sistema B , se tiene

$$U = \frac{1}{2} P_i \delta_i + \frac{1}{2} F_j \delta_j + P_i \Delta_{ij} \quad (2.5-1)$$

donde los índices repetidos indican suma,* correspondiendo los desplazamientos δ_i a las fuerzas P_i y los δ_j a las fuerzas F_j , respectivamente, indicando Δ_{ij} los desplazamientos de los puntos de aplicación de las fuerzas P_i debido a la aplicación del sistema F_j .

*La notación simplificada de la ecuación (2.5-1) corresponde al cálculo de

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} P_i \delta_i + \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} F_j \delta_j + \sum_{i=1}^n P_i \Delta_{ij}$$

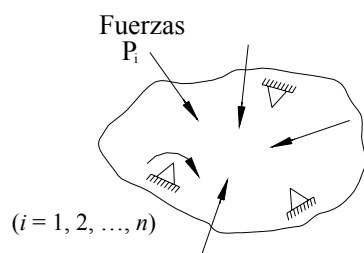


Figura. 2.5-1. Sistema *A*, aplicando gradualmente las fuerzas P_i

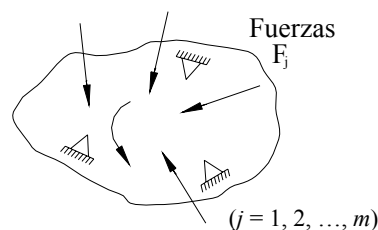


Figura. 2.5-2. Sistema *B*, aplicando gradualmente las fuerzas F_j

El último término de la ecuación (2.5-1) representa el trabajo del primer sistema de fuerzas debido a los desplazamientos que le causa la aplicación del segundo sistema de cargas. Con el término de fuerzas se indican fuerzas concentradas y momentos y el término desplazamientos se aplica a desplazamientos lineales y angulares.

De manera semejante, si se aplica primero el sistema *B* y después el sistema *A*, se obtiene:

$$U = \frac{1}{2} F_j \delta_j + \frac{1}{2} P_i \delta_i + F_j \Delta_{ji} \quad (2.5-2)$$

Las ecuaciones (2.5-1) y (2.5-2) son iguales ya que representan la misma energía de deformación, debido a que no dependen del orden de aplicación de los sistemas de carga.

Igualando las ecuaciones (2.5-1) y (2.5-2) se obtiene:

$$P_i \Delta_{ij} = F_j \Delta_{ji} \quad (2.5-3)$$

que es el Teorema de Betti

2.6 Teorema de Maxwell

Se conoce también con el nombre de Teorema de los “trabajos recíprocos” y es un caso particular del Teorema del Betti.

Considérese un cuerpo elástico en el actúa una fuerza P en un punto 1 y después una fuerza P en un punto 2, como se muestra en las figuras. 2.6-1 y 2.6-2.

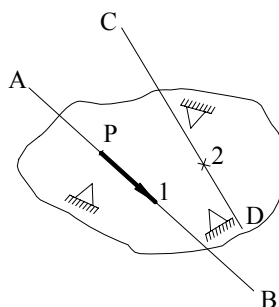


Figura 2.6-1. Aplicación de la carga P en el punto 1.

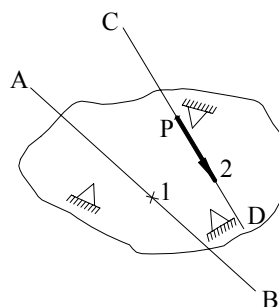


Figura 2.6-2. Aplicación de la carga P en el punto 2

Por el Teorema de Betti

$$P \Delta_{12} = P \Delta_{21} \quad (2.6-1)$$

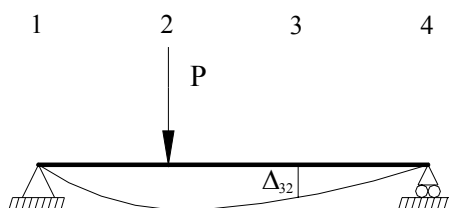
$$\Delta_{12} = \Delta_{21} \quad (2.6-2)$$

donde Δ_{12} es el desplazamiento en 1 cuando P se aplica en 2 y Δ_{21} es el desplazamiento en 2 cuando P se aplica en 1.

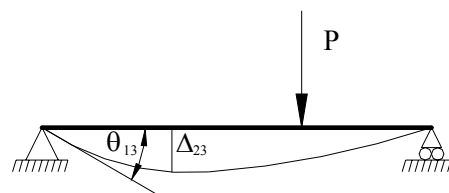
Enunciado: El desplazamiento de un punto 1 en la dirección AB cuando en el punto 2 actúa una fuerza P en la dirección CD es igual al desplazamiento del punto 2 en la dirección CD cuando en el punto 1 actúa una fuerza P en la dirección AB.

Como ejemplos de aplicación de este Teorema, considérense las estructuras presentadas en la figura 2.6-3.

- Estructura I



- b) Estructura II



- c) Estructura III



Figura 2.6-3. Estructuras para la aplicación del Teorema de Maxwell.

De las estructuras I y II

$$P \Delta_{23} = P \Delta_{32} \quad (2.6-3)$$

$$\Delta_{23} = \Delta_{32} \quad (2.6-4)$$

Estos resultados permiten, en un trabajo experimental con una carga móvil, verificar la exactitud de las mediciones o la posibilidad de efectuar la mitad de dichas mediciones.

De las estructuras II y III

$$P \Delta_{31} = M \theta_{13} \quad (2.6-5)$$

Si P y M son iguales o unitarios

$$\Delta_{31} = \theta_{13} \quad (2.6-6)$$

lo que permite medir desplazamientos lineales producidos por un par de fuerzas o giros, siendo dichas deformaciones iguales numéricamente, salvo la

existencia de un factor de escala debido a la diferencia entre las unidades de fuerza y las de momento.

2.7 Teoremas de Castigliano

En el año 1870, el ingeniero ferroviario italiano Alberto Castigliano publicó en dos partes su trabajo sobre la variación de la energía de deformación de los sistemas elásticos. Las partes I y II de su trabajo se conocen frecuentemente como primer y segundo teorema de Castigliano respectivamente.

Primer Teorema de Castigliano:

Enunciado: Si se aplica un conjunto de cargas sobre una estructura linealmente elástica y la energía de deformación U se expresa como una función de los desplazamientos en los puntos de aplicación de las cargas y actúa en sus direcciones, la derivada parcial de U con respecto a uno de estos desplazamientos δ_i es igual a la carga (esfuerzo) correspondiente P_i .

$$\frac{\partial U}{\partial \delta_i} = P_i \quad (2.7-1)$$

La ecuación (2.7-1) se conoce como el primer *Teorema de Castigliano* cuando se aplica a fuerzas concentradas y desplazamientos lineales.

Segundo Teorema de Castigliano

Enunciado: La derivada parcial de la energía de deformación con respecto a una fuerza que actúa en un cuerpo es igual al desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza en la dirección de dicha fuerza.

Considérese un cuerpo elástico sujeto a la acción de un sistema de fuerzas, como se muestra en la figura 2.5-1. El trabajo o energía de deformación está en función de las fuerzas es decir,

$$W = U = U(P_i) \quad (2.7-2)$$

Si esta función se supone diferenciable

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial P_i} \Delta P_i + \alpha \Delta P_i \quad (2.7-3)$$

donde α tiende a cero cuando ΔP_i tiende a cero y recíprocamente.

Supóngase que se aplica primero el sistema ΔP_i , y después el sistema P_i , obteniéndose:

$$U_{\Delta P_i, P_i} = \frac{1}{2} \Delta P_i \Delta \delta_i + \frac{1}{2} P_i \delta_i + \Delta P_i \delta_i \quad (2.7-4)$$

donde

$$U_{P_i} = \frac{1}{2} P_i \delta_i \quad (2.7-5)$$

o sea que

$$\Delta U = U_{\Delta P_i, P_i} - U_{P_i} = \frac{1}{2} \Delta P_i \Delta \delta_i + \Delta P_i \delta_i \quad (2.7-6)$$

Igualando las ecuaciones (2.7-3) y (2.7-6)

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} \Delta P_i + \alpha \Delta P_i = \frac{1}{2} \Delta P_i \Delta \delta_i + \Delta P_i \delta_i \quad (2.7-7)$$

Dividiendo ambos miembros entre ΔP_i y tomando límites cuando ΔP_i tiende a cero, se obtiene finalmente que

$$\frac{\partial U}{\partial P_i} = \delta_i \quad (2.7-8)$$

Similarmente la derivada parcial de la energía de deformación con respecto a un momento que actúa en un cuerpo es igual a la rotación del punto de aplicación del momento en la dirección de dicho momento lo que se expresa con:

$$\frac{\partial U}{\partial M_i} = \theta_i \quad (2.7-9)$$

Las ecuaciones (2.7-8) y (2.7-9) corresponden al caso particular representado por el diagrama de la energía de deformación caso lineal figura 2.1-4, es decir, cuando la energía de deformación es una expresión cuadrática en los desplazamientos como se presentan en la ecuación (2.1-4). Si la ecuación (2.1-5) se expresa solo en función de P , sustituyendo en ella la ecuación (2.1-1), y se deriva con respecto a P se obtiene la ecuación (2.7-8).

El Teorema de Castigliano *generalizado* se refiere a la energía complementaria de deformación y se deriva con respecto a P en la ecuación (2.2-1), obteniendo la ecuación *

$$\frac{\partial C}{\partial P_i} = \delta_i \quad (2.7-10)$$

La ecuación (2.7-10) se conoce también como el *verdadero* teorema de Castigliano. La derivación presentada de los Teoremas de Castigliano se ha efectuado entonces para el caso particular en que la energía de deformación complementaria es igual a la energía de deformación $C = U$, debido a que se trata estructuras linealmente elásticas, que es la hipótesis usual en la mayoría de los casos. Para condiciones distintas se deberá hacer uso de la ecuación (2.7-10).

* La derivación de la integral (2.2-1) se efectúa aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo Diferencial e Integral, que establece que la derivada de una integral con respecto a la variable de integración es igual al integrando, para funciones continuas (consúltese cualquier libro sobre Cálculo Diferencial e Integral).

2.8 Principio del Trabajo Virtual

El trabajo realizado por las fuerzas externas durante la deformación del cuerpo ocasionado por estas fuerzas se denomina trabajo externo o simplemente trabajo. Ahora el concepto de trabajo se extenderá al fenómeno en el cual el trabajo es realizado por un sistema de cargas durante su desplazamiento debido a causas diferentes a las cargas en si mismas. Por ejemplo, si se toma un cuerpo rígido en equilibrio bajo el sistema de fuerzas P como se muestra en la figura 2.8-1, y se supone que el cuerpo se mueve como un cuerpo rígido a causa de algunos otros efectos independientes del sistema P , y que toma una nueva posición como se indica con las líneas a trazos, el trabajo realizado por las fuerzas P durante este pequeño movimiento se llama trabajo virtual y a los desplazamientos v_i los llamaremos desplazamientos virtuales.

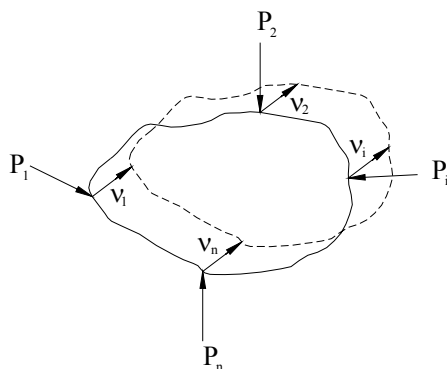


Figura 2.8-1 Cuerpo rígido en equilibrio bajo el sistema de fuerzas P .

En consecuencia, el trabajo virtual es

$$W_d = \sum_{i=1}^n P_i v_i \quad (2.8-1)$$

Puesto que el cuerpo ha experimentado un movimiento de cuerpo rígido, v_i será el mismo en todas partes, o sea $v_i = v_0$; por consiguiente

$$W_d = v_0 \sum_{i=1}^n P_i \quad (2.8-2)$$

Sin embargo, como se estableció previamente, el cuerpo estaba en equilibrio bajo el sistema de cargas P , luego

$$\sum_{i=1}^n P_i = 0 \quad (2.8-3)$$

que hace

$$W_d = 0 \quad (2.8-4)$$

La ecuación (2.8-4) establece que si un sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido está en equilibrio, cuando al cuerpo se le da un pequeño desplazamiento virtual, el trabajo total realizado por esas fuerzas es igual a cero. Inversamente, si el trabajo realizado por un sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido es cero, entonces dicho cuerpo está en equilibrio.

Este enunciado que normalmente se conoce como el principio de trabajo virtual de Bernoulli, puede aplicarse también a un cuerpo deformable. Por ejemplo, supongamos

que el cuerpo elástico mostrado en la figura 2.8-2 esta sometido a un conjunto de fuerzas P y permanece en equilibrio en su forma deformada. Un elemento diferencial sacado del cuerpo estará también en equilibrio bajo la acción de los esfuerzos desarrollados en su contorno interior por el sistema de fuerzas P .

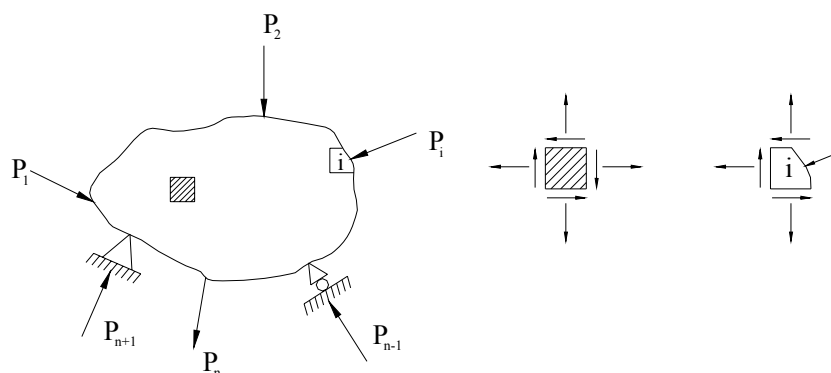


Figura 2.8-2. Cuerpo elástico sometido a un conjunto de fuerzas P .

Supongamos ahora que por alguna razón, por ejemplo otro conjunto de cargas, la temperatura, etc., el cuerpo se deforma mientras el sistema de cargas P esta presente.

Verdaderamente, durante su deformación cualquier elemento diferencial como el que se muestra achurado en la figura 2.8-2 se desplazara y los esfuerzos virtuales sobre sus contornos realizaran algún trabajo. Designemos este trabajo por dW_s . Parte de este trabajo se debe al movimiento como cuerpo rígido del elemento y la otra parte se debe al cambio de forma del elemento. Ya que al cambio de forma del elemento lo hemos llamado deformación del elemento, el trabajo realizado por los esfuerzos P durante tal deformación se llamara dW_d . En consecuencia, la parte remanente del trabajo, $dW_s - dW_d$, se realiza por los esfuerzos P durante el movimiento del elemento como cuerpo rígido, sin embargo como los esfuerzos sobre los contornos del elemento están en equilibrio, el trabajo realizado por ellos durante el movimiento de cuerpo rígido es igual a cero.

De donde

$$dW_s - dW_d = 0 \quad (2.8-5)$$

o, para el cuerpo completo

$$W_s - W_d = 0 \quad (2.8-6)$$

donde W_s representa la suma de los trabajos virtuales realizados por los esfuerzos P sobre los contornos de cada elemento del cuerpo. Sin embargo, cada elemento tiene superficies de contorno comunes con el elemento adyacente en las cuales los esfuerzos son iguales y opuestos uno a otro. Verdaderamente, el trabajo realizado por los esfuerzos iguales y opuestos durante el mismo desplazamiento es igual a cero. Como resultado de esto, el trabajo realizado por los esfuerzos P en todas las superficies de contorno interiores suma cero. Por tanto, W_s será únicamente el trabajo realizado por las fuerzas externas P aplicadas sobre los contornos externos.

En consecuencia, la ecuación (2.8-6) establece que *si un sistema de fuerzas P actúa sobre un cuerpo deformable está en equilibrio cuando en el cuerpo se presentan pequeñas deformaciones ocasionadas por otros efectos, el trabajo virtual externo realizado por las fuerzas P es igual al trabajo virtual interno realizado por los esfuerzos P .*

Este enunciado es válido independientemente de la causa o el tipo de deformación virtual teniendo en cuenta que durante las deformaciones virtuales la geometría de las estructuras no se altera apreciablemente y que las fuerzas P permanecen en equilibrio.

2.9 Energía Potencial

La energía potencial es la capacidad que tiene un cuerpo o un sistema mecánico de realizar un trabajo debido a su posición o configuración.

La energía potencial V del sistema es la suma de la energía potencial de las fuerzas externas y de la energía potencial de las fuerzas internas. Para sistemas elásticos, la energía potencial de las fuerzas internas es igual a la energía o trabajo de deformación del sistema, por consiguiente $V = U$.

2.10 Energía Potencial Estacionaria

El principio de trabajo virtual es equivalente a la condición $\delta V = \delta U = 0$, en donde δU es la diferencial de primer orden de la energía potencial y se refiere a los desplazamientos virtuales δx_i .

Si el sistema tiene n coordenadas generalizadas x_i ,

$$\delta U = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.10-1)$$

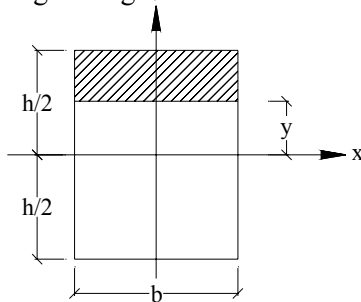
La condición de que δU sea nula para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales δx_i se cumple si:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.10-2)$$

lo que se conoce como el principio de energía potencial estacionaria, que se puede aplicar en el análisis de las estructuras.

Ejemplos de Aplicación

- a. Calcular el coeficiente de forma de una sección rectangular. Considérese la sección rectangular siguiente:



Se tiene

$$I_x = \frac{bh^3}{12}, \quad \rho^2 = \frac{h^2}{12}, \quad b_y = b$$

$$Q = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(y + \frac{h/2 - y}{2} \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(\frac{h}{2} + y \right)$$

$$Q = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.4-18)

$$k = \iint_A \frac{Q^2}{\rho^2 I_x b_y^2} dA$$

en la región

$$R_x = [-b/2, b/2, -h/2, h/2]$$

$$k = \int_{-b/2}^{b/2} dx \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\left[\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \right]^2}{\frac{h^2}{12} \frac{b h^3}{12} b^2} dy$$

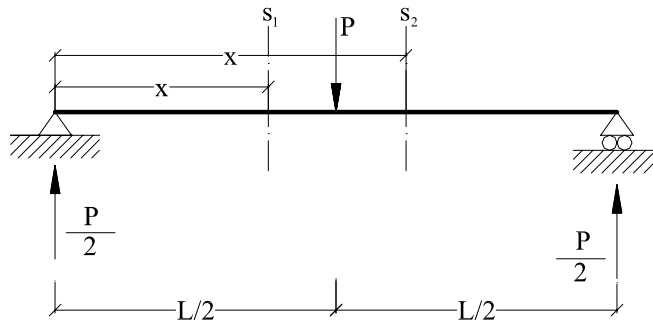
$$k = \frac{36}{h^5} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h^4}{16} - \frac{h^2}{2} y^2 + y^4 \right) dy$$

$$k = \frac{36}{h^5} \left[\frac{h^4}{16} y - \frac{h^2}{2} \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right]_{-h/2}^{h/2}$$

$$k = 36 \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{24} + \frac{1}{80} \right) = \frac{72}{60}$$

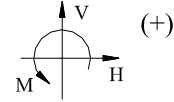
$$\therefore k = 1,2$$

- b. Calcular el desplazamiento en el centro de la viga considerando los efectos del momento flexionante y de fuerza cortante. ¿Qué porcentaje del desplazamiento por momento es el desplazamiento por cortante?



$EI = \text{constante}$,
 $G = 0.5 E$
 $h/L = 0.1$
 sección rectangular

Convención de signos



$$M_1 = -\frac{P}{2}x; \quad 0 \leq x \leq L/2$$

$$M_2 = -\frac{P}{2}x + P\left(x - \frac{L}{2}\right); \quad L/2 \leq x \leq L$$

$$T_1 = \frac{P}{2}; \quad 0 \leq x \leq L/2$$

$$T_2 = -\frac{P}{2}; \quad L/2 \leq x \leq L$$

Por simetría de geometría y de cargas sólo se necesita considerar la mitad de la viga, duplicando los resultados. Se tiene,

$$U = 2 \int_0^{L/2} \frac{M_x^2}{2EI} dx + 2 \int_0^{L/2} k \frac{T_y^2}{2GA} dx$$

$$U = \frac{2}{2EI} \int_0^{L/2} \left(-\frac{P}{2}x\right)^2 dx + \frac{2k}{2GA} \int_0^{L/2} \left(\frac{P}{2}\right)^2 dx$$

$$U = \frac{1}{EI} \frac{P^2}{4} \frac{1}{3} \frac{L^3}{8} + \frac{k}{GA} \frac{P^2}{4} \frac{L}{2}$$

$$U = \frac{P^2 L^3}{96EI} + \frac{1.2 P^2 L}{8GA}$$

Aplicando el Teorema de Castigliano

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{PL^3}{48EI} + \frac{1.2 PL}{4GA}$$

Se tiene

$$\frac{\delta_{T_y}}{\delta_{M_x}} = \frac{1.2 PL}{4GA} \frac{48EI}{PL^3} = \frac{1.2(12)Ebh^3/12}{0.5EbhL^2} = 2.4 \left(\frac{h}{L}\right)^2 = 0.024$$

Es decir

$$\delta_{T_y} = 2.4\% \delta_{M_x}$$

En los casos usuales, el efecto de la fuerza cortante es muy pequeño en comparación con el efecto del momento flexionante, y por lo tanto en lo que sigue sólo se considera el efecto de momento flexionante.

Método energético de cálculo para sistemas hiperestáticos

2.11. Determinación de los desplazamientos elásticos generalizados

La expresión que determina la energía potencial de la deformación elástica U acumulada por el cuerpo o el sistema durante la acción estática de las fuerzas, puede ser representada por una función homogénea, de segundo orden, de las fuerzas generalizadas P_i o de los desplazamientos generalizados δ_i , si entre los últimos existe dependencia lineal.

Las fuerzas generalizadas P_i están constituidas por cualquier tipo de acción (fuerzas, momentos, grupo de fuerzas, grupo de momentos, etc.) que conviene destacar para la obtención de la energía potencial.

Los desplazamientos generalizados δ_i son magnitudes que determinan los desplazamientos en los que las fuerzas generalizadas realizan trabajo (por ejemplo, a la fuerza concentrada le corresponde un desplazamiento lineal, al momento un desplazamiento angular, etc.).

El desplazamiento generalizado elástico δ que ocurre en el cuerpo o en el sistema, bajo la acción de las fuerzas generalizadas, se puede obtener por la formula de Castigliano,

$$\delta = \left(\frac{\partial U_F}{\partial P_F} \right)_{P_F=0}$$

siendo P_F la fuerza ficticia generalizada correspondiente al desplazamiento generalizado que se busca. Esta fuerza se aplica al cuerpo o sistema en el lugar donde se halla el desplazamiento; U_F , la energía potencial de la deformación elástica del cuerpo o sistema dado por una función homogénea de segundo orden de todas las fuerzas generalizadas que actúan P_i y de la fuerza ficticia generalizada P_F . Si en el lugar donde se busca el desplazamiento generalizado existe una fuerza generalizada dada P , correspondiente al desplazamiento generalizado que se halla, entonces desaparece la necesidad de aplicar P_F y entonces:

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P}$$

Si $\left(\frac{\partial U_F}{\partial P_F} \right)_{P_F=0} > 0$ ó $\frac{\partial U}{\partial P} > 0$, la dirección del desplazamiento generalizado δ

coincidirá con la dirección de la fuerza P_F ó P .

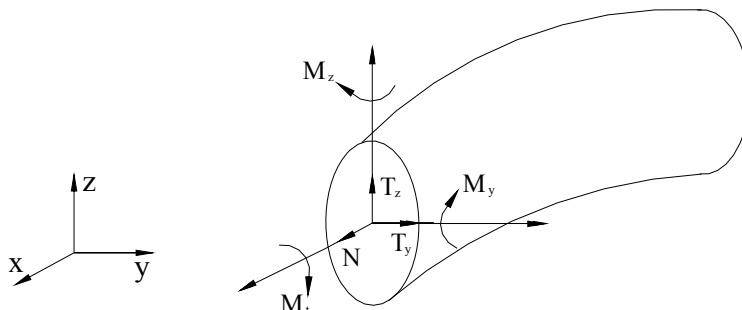
Si $\left(\frac{\partial U_F}{\partial P_F} \right)_{P_F=0} < 0$ ó $\frac{\partial U}{\partial P} < 0$, la dirección del desplazamiento generalizado δ será

opuesta a la dirección de la fuerza P_F ó P .

El desplazamiento lineal obtenido por la formula de Castigliano constituye la proyección del desplazamiento lineal del punto de aplicación de la fuerza correspondiente, sobre la dirección de la línea de acción de esta fuerza.

2.12. Método de la fuerza ficticia generalizada unitaria ó método de la carga unitaria

En el caso más general de sollicitación sobre un sistema elástico de barras, constituido por los elementos rectos cuyo eje centroidal coincide con el eje x , los desplazamientos generalizados conviene calcularlos por la formula de Maxwell-Mohr,



$$\delta = \sum \int \frac{Nn}{EA} dx + \sum \int \frac{M_z m_z}{EI_z} dx + \sum \int \frac{M_y m_y}{EI_y} dx + \sum \int \frac{M_t m_t}{GJ_m} dx + \sum k_y \int \frac{T_y t_y}{GA} dx + \sum k_z \int \frac{T_z t_z}{GA} dx$$

siendo:

$N, M_z, M_y, M_t, T_y, T_z$, respectivamente, los esfuerzos en una sección transversal arbitraria de cada tramo del sistema, originados por todas las fuerzas generalizadas que actúan sobre el sistema;

$n, m_z, m_y, m_t, t_y, t_z$ los mismos esfuerzos pero originados solamente por la fuerza ficticia generalizada unitaria aplicada al sistema y correspondiente al desplazamiento generalizado que se busca;

E y G los módulos de elasticidad longitudinal y tangencial del material del correspondiente tramo del elemento;

A el área de la sección transversal donde se determinan los esfuerzos;

I_z e I_y los momentos centrales principales de inercia del área A ;

J_m el momento de inercia a la torsión del área A o momento de inercia polar

k_y y k_z los coeficientes que dependen de la forma de la sección y que caracterizan la desuniformidad de las tensiones tangenciales en la flexión;

dx el elemento geométrico del tramo.

La integración se lleva a cabo sobre la longitud de cada tramo y la suma, sobre todos los tramos.

En el caso de sistemas planos constituidos por barras articuladas, con fuerzas aplicadas en los nudos,

$$\delta = \sum \frac{Nn}{EA} l$$

siendo l las longitudes de los tramos.

En el caso de sistemas cuyos tramos sufren exclusivamente torsión,

$$\delta = \sum \int \frac{M_t m_t}{GJ_m} dx$$

En el caso de sistemas planos constituidos por vigas y columnas que forman pórticos en los que la influencia de N y T sobre la deformación es pequeña,

$$\delta = \sum \int \frac{M m}{EI} dx$$

En el caso de sistemas de elementos de curvatura pequeña,

$$\delta = \sum \int \frac{M m}{EI} ds$$

siendo ds el elemento del eje geométrico del tramo curvilíneo.

Si el cálculo se realiza con mayor exactitud,

$$\delta = \sum \int \frac{N n}{EA} ds + \sum \int \frac{M m}{EI} ds$$

2.13. Principio del trabajo mínimo para el cálculo de sistemas hiperestáticos

El cálculo de los sistemas elásticos hiperestáticos se puede realizar basándose en el principio del trabajo mínimo. Según este principio los valores de las incógnitas superfluas denominadas *redundantes* constituidas por fuerzas generalizadas son tales que realizan el trabajo mínimo posible.

La resolución de los problemas se realiza según el esquema siguiente:

El sistema hiperestático se libra de las ligaduras superfluas hasta convertirse en isostático y cinemáticamente invariable, obteniendo el así llamado *sistema base*.

Para que el sistema base sea equivalente al dado, el primero se solicita por todas las fuerzas P_i , que actúan sobre el sistema dado, más todas las fuerzas generalizadas x_i superfluas desconocidas que constituyen las incógnitas.

Se determinan después la energía potencial de la deformación elástica del sistema base en función de segundo orden de P_i y x_i

Puesto que los desplazamientos generalizados correspondientes a las fuerzas generalizadas superfluas desconocidas son iguales a cero, se plantean las ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.13-1)$$

De estas ecuaciones se determinan todas las fuerzas generalizadas superfluas desconocidas x_i .

Las ecuaciones (2.13-1) constituyen las condiciones del mínimo de la energía potencial de la deformación elástica del sistema en función de las fuerzas generalizadas superfluas desconocidas.

En el caso de sistemas constituidos por barras las ecuaciones del principio del trabajo mínimo pueden ser expresadas por la formula de Maxwell-Mohr.

Si el sistema consta de elementos rectilíneos sometidos a tracción, compresión, flexión recta y torsión, entonces cada ecuación del tipo (2.13-1) se puede escribir en la forma siguiente:

$$\sum \int \frac{N n}{E A} dx + \sum \int \frac{M m}{E I} dx + \sum k \int \frac{T t}{G A} dx + \sum \int \frac{M_t m_t}{G J_m} dx = 0 \quad (2.13-2)$$

siendo N , M , T y M_t los esfuerzos correspondientes en una sección cualquiera de cada tramo del sistema base equivalente, originados por todas las fuerzas dadas P_i y las fuerzas generalizadas superfluas desconocidas x_i ;

n , m , t y m_t los mismos esfuerzos en el sistema base pero originados exclusivamente por una de las fuerzas generalizadas superfluas desconocidas $x_i=1$.

Por consiguiente, para resolver un problema hiperestático de grado de hiperestaticidad n se debe analizar $n+1$ estados: el estado básico equivalente correspondiente a la acción de las fuerzas P_i y x_i ; y n auxiliares cada uno de los cuales corresponde a la acción de cada una de las fuerzas $x_i=1$.

En el caso de sistemas planos constituidos por barras articuladas con fuerzas aplicadas en los nudos, las ecuaciones (2.13-2) se simplificarán considerablemente,

$$\sum \int \frac{N n}{E A} dx = 0$$

En el caso de sistemas planos constituidos por vigas y columnas que dan lugar a los pórticos, en los que el valor de los esfuerzos axiales N y de las fuerzas cortantes T es pequeño, se puede emplear la ecuación simplificada,

$$\sum \int \frac{M m}{E I} dx = 0$$

En los sistemas cuyos elementos están sometidos a torsión exclusivamente,

$$\sum \int \frac{M_t m_t}{G J_m} dx = 0$$

En las barras hiperestáticas planas de curvatura pequeña,

$$\sum \int \frac{M m}{E I} ds = 0$$

Si se desea realizar un cálculo más preciso, las ecuaciones se deben plantear teniendo en cuenta también los esfuerzos axiales,

$$\sum \int \frac{N n}{E A} ds + \sum \int \frac{M m}{E I} ds = 0$$

La eliminación de las ligaduras superfluas en el sistema estáticamente indeterminado debe realizarse de manera tal que el sistema base resulte lo más simple y cómodo posible para el cálculo.

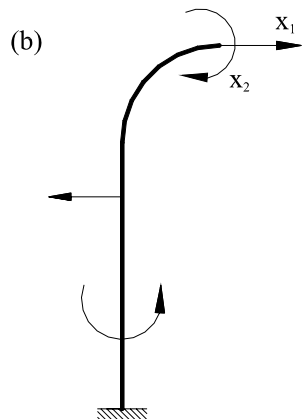
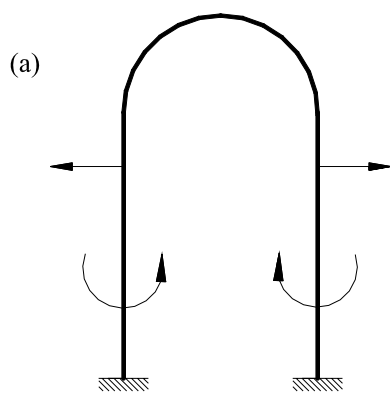


Figura 2.13-1

Pórtico geoméricamente simétrico
con cargas simétricas.

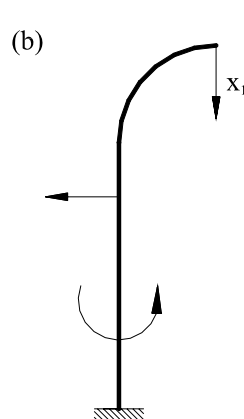
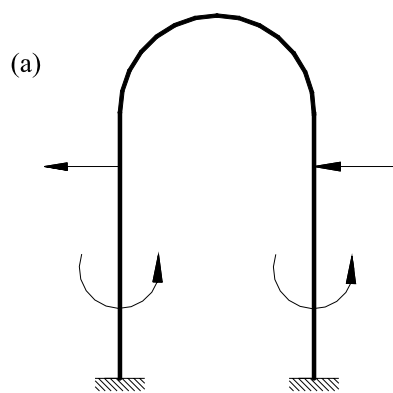


Figura 2.13-2

Pórtico geoméricamente simétrico
con cargas antisimétricas.

Los sistema geoméricamente simétricos solicitados por cargas simétricas figura 2.13-1(a) o antisimétricas figura 2.13-2(a) conviene librarlos de las ligaduras superfluas, cortándolos por el plano de simetría. Esto conduce a la disminución del número de fuerzas generalizadas superfluas desconocidas y solo permite analizar una de las partes seccionadas del sistema figura 2.13-1(b) y figura 2.13-2(b).

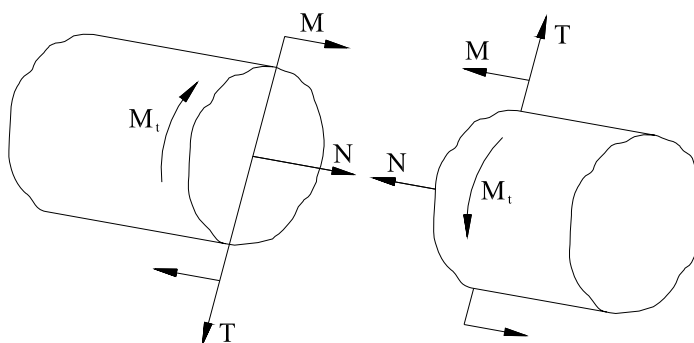


Figura 2.13-3 Esfuerzos producidos al seccionar un elemento por simetría.

En la sección que coincide con el plano de simetría, en el caso de carga simétrica, desaparecen los esfuerzos antisimétricos T y M_t y, en el caso de carga antisimétrica, los esfuerzos simétricos N y M figura 2.13-3.

Para vencer la hiperestaticidad de los sistemas elásticos por el método de las fuerzas se plantean y resuelven las ecuaciones canónicas,

Cada una de estas ecuaciones expresa la condición (2.13-1), es decir, la igualdad a cero del desplazamiento generalizado en el sistema estáticamente indeterminado, correspondiente a cada una de las fuerzas generalizadas superfluas desconocidas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Los términos independientes de las ecuaciones δ_{ip} y todos los coeficientes δ_{ii} y δ_{ik} son desplazamientos generalizados en el sistema base, en dirección a la fuerza generalizada superflua desconocida i (primer subíndice) x_i ; δ_{ip} se debe a la acción de todas las fuerzas generalizadas dadas P , δ_{ii} y δ_{ik} a cada fuerza generalizada superflua desconocida unitaria $x_i=1$ ó $x_k=1$ indicada por el segundo subíndice.

Todos estos desplazamientos generalizados se pueden obtener por cualquiera de los métodos conocidos.

Los desplazamientos δ_{ip} pueden ser mayores o menores a cero o incluso iguales a cero. Ellos dependen de las fuerzas dadas, de la configuración del sistema y del sistema base escogido.

Los desplazamientos δ_{ii} y δ_{ik} no dependen de las fuerzas dadas si no que se determinan plenamente por la configuración del sistema y por las incógnitas superfluas elegidas. Los coeficientes principales δ_{ii} son magnitudes positivas y diferentes de cero; los coeficientes auxiliares $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ pueden ser mayores, menores o iguales a cero.

Al escoger el sistema base se debe tender a que el mayor número posible de coeficientes auxiliares sea igual a cero. Cuando se trata de sistemas simétricos resulta conveniente eliminar las ligaduras superfluas como esto se indica en el ejemplo de aplicación 2.3.

39

Si el sistema hiperestático se somete solamente a una variación de la temperatura, entonces los términos independientes de las ecuaciones canónicas serán δ_{it} , desplazamientos generalizados correspondientes a la fuerza generalizada superflua unitaria i en el sistema base originados por la variación de la temperatura. Si sobre el sistema actúan simultáneamente una carga y una variación de la temperatura, entonces los términos independientes de las ecuaciones canónicas serán la suma de $\delta_{ip} + \delta_{it}$.

Durante el montaje, para tener en cuenta los errores cometidos en la fabricación de los elementos del sistema, se introducen en los términos independientes de las ecuaciones canónicas las magnitudes $\delta_{i\Delta}$ que expresan los desplazamientos generalizados correspondiente a la fuerza generalizada superflua i en el sistema base, originados por los errores Δ de fabricación.

Se escoge el signo positivo o negativo de estos desplazamientos δ_{it} y $\delta_{i\Delta}$ según coincidan o no las direcciones de los desplazamientos con la dirección admitida para x_i .

En el caso de sistema de un grado de hiperestaticidad la ecuación canónica del método de las fuerzas será:

$$\delta_{11} x_1 + \delta_{1p} = 0$$

resultando para la fuerza generalizada superflua desconocida:

$$x_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} \quad (2.14-2)$$

Si se calculan los sistemas formados por vigas y columnas que dan lugar a los pórticos de un grado de hiperestaticidad o sistemas de elementos curvilíneos de poca curvatura, en los cuales la influencia de los esfuerzos axiales y de la fuerza cortante es pequeña, entonces:

$$\delta_{ip} = \sum \int \frac{M m}{EI} ds; \quad \delta_{11} = \sum \int \frac{M^2}{EI} ds$$

y

$$x_1 = -\frac{\sum \int \frac{M m}{EI} ds}{\sum \int \frac{M^2}{EI} ds} \quad (2.14-3)$$

siendo ds un elemento de la longitud del eje geométrico del tramo.

2.15 Cálculo de anillos planos de paredes delgadas

Se entiende por anillo plano de paredes delgadas cualquier sistema elástico plano de barras cerrado, cuyas longitudes de los tramos son mucho mayores que las dimensiones de las secciones transversales. Este sistema es de triple hiperestaticidad. Son incógnitas superfluas el momento flector, x_1 , el esfuerzo axial x_2 y la fuerza cortante x_3 , es decir, los esfuerzos interiores que surgen en la sección transversal que se traza para obtener el sistema base, figura 2.15-1. Entonces, los sistemas cerrados son de hiperestaticidad interna.

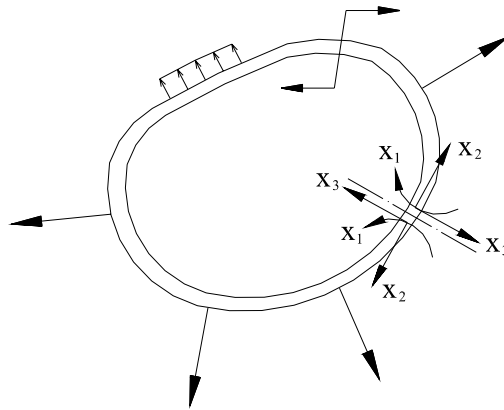


Figura 2.15-1 Esfuerzos interiores de la sección transversal de anillos de paredes delgadas

La hiperestaticidad de los anillos se puede vencer ya sea por el principio del trabajo mínimo o (lo que es más cómodo) mediante ecuaciones canónicas del método de las fuerzas. Puesto que los anillos son de paredes delgadas, al plantear las ecuaciones para vencer la hiperestaticidad es suficiente considerar solamente la deformación originada por el momento flector.

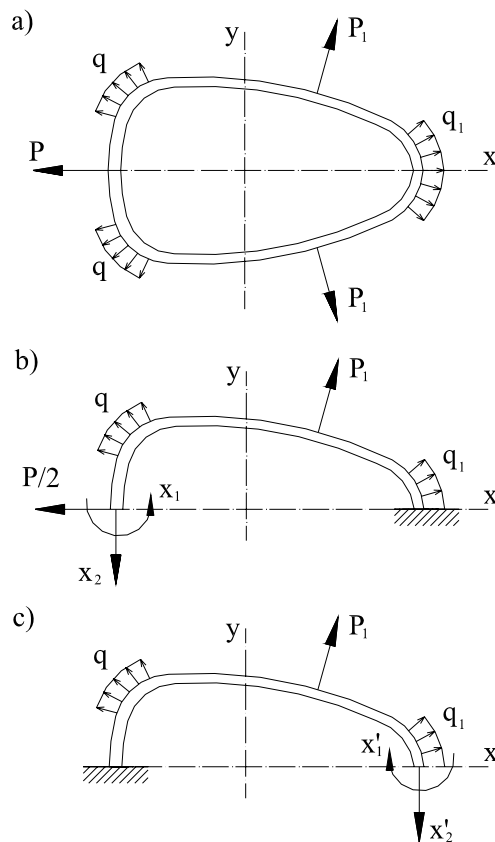


Figura 2.15-2

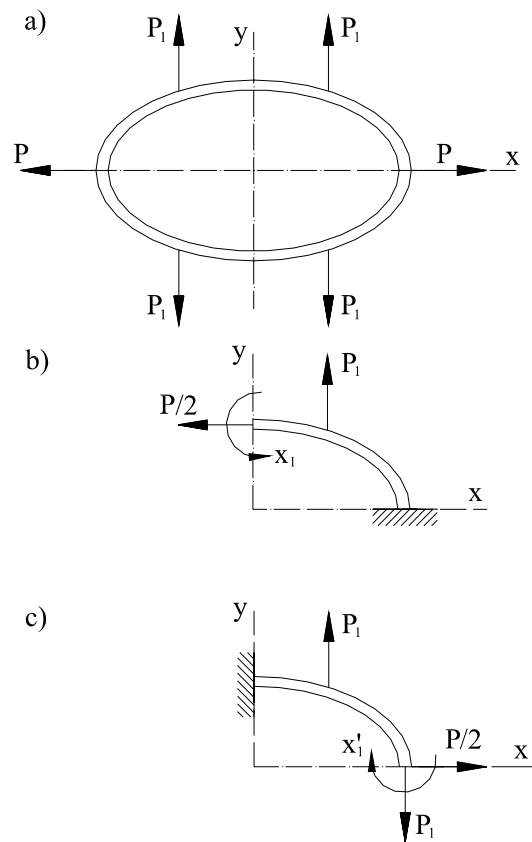


Figura 2.15-3

Si el anillo y la carga son simétricos respecto a uno de los ejes figura 2.15-2(a), entonces en las secciones transversales que coinciden con el eje de simetría, las fuerzas cortantes serán iguales a cero. Por lo tanto, serán incógnitas superfluas solamente el

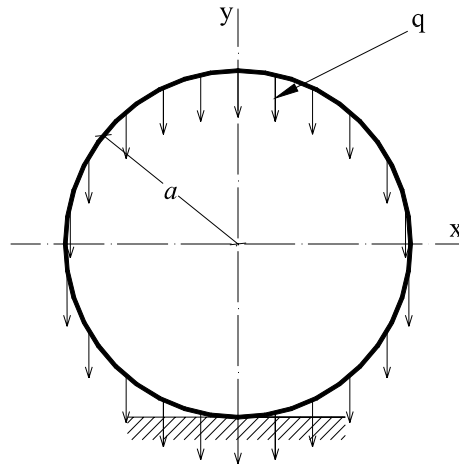
momento flector (x_1 ó x'_1) y el esfuerzo axial (x_2 o x'_2). Entonces, se puede analizar, solamente la mitad simétrica del anillo en lugar de analizarlo todo figura 2.15-2 (b) ó (c)

Si el anillo y la carga son simétricos respecto a dos ejes figura 2.15-3(a), entonces en las secciones situadas en los ejes de simetría las fuerzas cortantes serán iguales a cero y las fuerzas axiales se podrán obtener de las ecuaciones de la estática como la suma de las proyecciones de las fuerzas y esfuerzos aplicados a la mitad de anillo, sobre el eje de simetría correspondiente. En este caso solamente el momento flector (x_1 o x'_1) será incógnita superflua. Entonces es suficiente analizar en lugar de todo el anillo solamente la cuarta parte ubicada entre los ejes de simetría figura 2.15-3 (b) ó (c).

Si el anillo tiene más de dos ejes de simetría, entonces se podrá analizar solamente la parte del anillo ubicada entre las secciones que se encuentran entre los ejes contiguos de simetría.

En estas secciones las fuerzas cortantes serán nulas, los esfuerzos axiales se obtendrán de las ecuaciones de la estática y solo el momento flector será incógnita superflua.

- a. Dado q, a, E, I en un anillo de paredes delgadas solicitado simétricamente respecto al eje y . Determinar δ , la variación de la longitud del diámetro vertical del anillo por acción de la carga q .



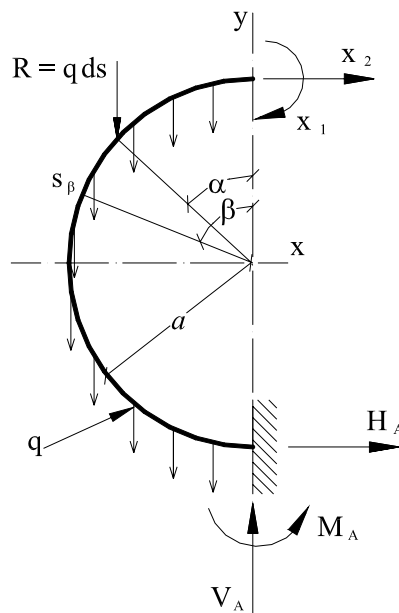
SOLUCION:

$$g = n - e - c$$

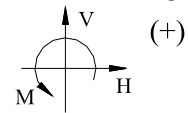
$$g = 5 - 3 - 0$$

$$g = 2 \text{ redundantes}$$

g : grado de hiperestaticidad
 n : número de reacciones
 e : ecuaciones de equilibrio de la estática
 c : ecuaciones especiales de la estática



Convención de signos



Carga distribuida:

$$R = q ds$$

$$ds = a d\beta$$

Descomponiendo:

$$V_q = \int_0^\pi q ds = \int_0^\pi q a d\beta = \pi a q$$

$$H_q = \int_0^\pi 0 ds = 0$$

$$M_A^q = \int_0^\pi q ds a \sin\beta = \int_0^\pi q a^2 \sin\beta d\beta = 2a^2 q$$

Estática

$$\Sigma H = 0 \Rightarrow H_A + x_2 = 0 \Rightarrow H_A = -x_2$$

$$\Sigma V = 0 \Rightarrow V_A - \pi a q = 0 \Rightarrow V_A = \pi a q$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A - x_1 + M_A^q - x_2(2a) = 0 \Rightarrow M_A = 2a x_2 + x_1 - 2a^2 q$$

$$M_\beta^q = \int_0^\beta q ds (a \sin \beta - a \sin \alpha) = \int_0^\beta q a^2 (\sin \beta - \sin \alpha) d\alpha = -a^2 q (\cos \beta - 1 + \beta \sin \beta)$$

$$0 \leq \beta \leq \pi$$

$$M_\beta = M_\beta^q - x_1 - x_2(a - a \cos \beta)$$

$$M_\beta = -a^2 q (\beta \sin \beta + \cos \beta - 1) - x_1 - x_2(a - a \cos \beta)$$

$$\frac{\partial M_\beta}{\partial x_1} = -1$$

$$\frac{\partial M_\beta}{\partial x_2} = -a + a \cos \beta$$

$$\Rightarrow U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} ds \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \Sigma \int_0^l M_i \frac{\partial M_i}{\partial x_1} dx$$

$$\Rightarrow U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} ds \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0 = \Sigma \int_0^l M_i \frac{\partial M_i}{\partial x_2} dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \frac{1}{2EI} \int_0^\pi (-a^2 q (\beta \sin \beta + \cos \beta - 1) - x_1 - x_2(a - a \cos \beta))(-a + a \cos \beta) a d\beta$$

$$\Rightarrow -a^2 q + 4x_1 + 6ax_2 = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0 = \frac{1}{2EI} \int_0^\pi (-a^2 q (\beta \sin \beta + \cos \beta - 1) - x_1 - x_2(a - a \cos \beta))(-1) a d\beta$$

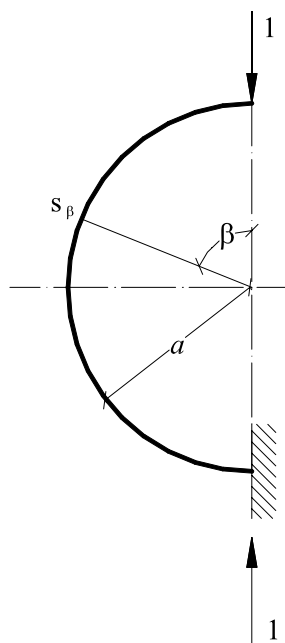
$$\Rightarrow x_1 + ax_2 = 0 \quad (2)$$

Resolviendo (1) y (2)

$$x_1 = -\frac{1}{2} a^2 q$$

$$x_2 = \frac{1}{2} a q$$

Deformación



$$0 \leq \beta \leq \pi$$

$$m_\beta = -a \sin \beta$$

$$\delta = \frac{1}{EI} \sum \int_0^l M_i m_i ds$$

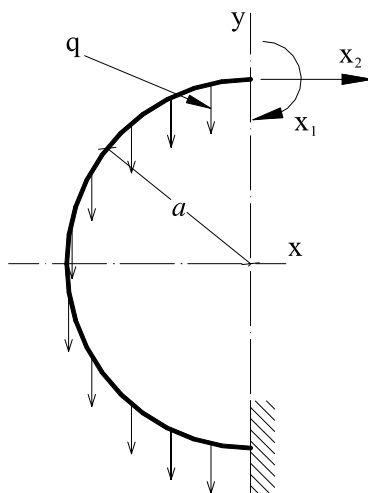
$$EI\delta = \int_0^\pi M_\beta m_\beta ds$$

$$\Rightarrow \delta EI = \int_0^\pi \left(-a^2 q (\beta \sin \beta + \cos \beta - 1) + \frac{1}{2} a^2 q - \frac{1}{2} a q (a - a \cos \beta) \right) (-a \sin \beta) a d\beta$$

$$\Rightarrow \delta = \left(\frac{\pi^2}{4} - 2 \right) \frac{qa^4}{EI}$$

Resolviendo por el método de las fuerzas

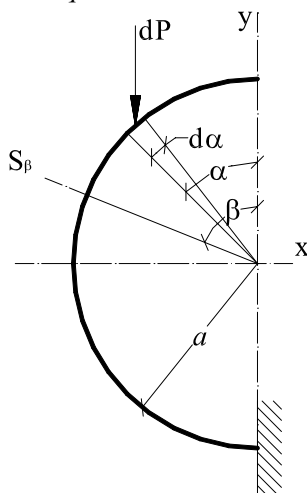
Analizamos la mitad del anillo; en la sección que se encuentra el eje y , la fuerza cortante x_3 es igual a cero; el momento flector x_1 y la fuerza axial x_2 se interpretan como fuerzas generalizadas superfluas desconocidas o redundantes.



Las ecuaciones canónicas del método de las fuerzas son:

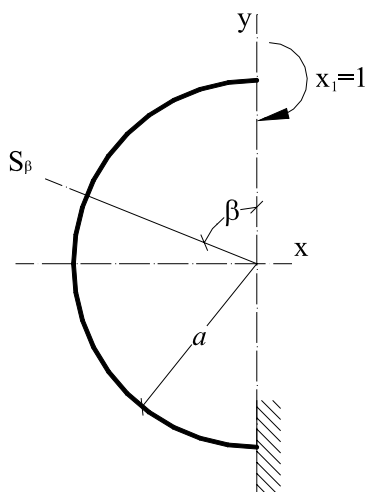
$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} x_1 + \delta_{12} x_2 + \delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{21} x_1 + \delta_{22} x_2 + \delta_{2p} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Calculamos el momento flector en una sección transversal arbitraria determinada por el ángulo β , debido a la carga dada q .

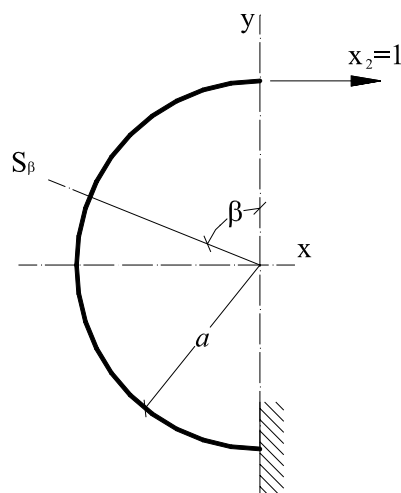


El momento flector producido por la carga distribuida q en la sección β será:

$$M_{\beta}^q = -a^2 q (\cos \beta - 1 + \beta \operatorname{sen} \beta)$$



$$m_1 = -1$$



$$m_2 = -a + a \cos \beta$$

Puesto que:

$$EI\delta_{1P} = \int_0^s M_{\beta}^q m_1 ds = \int_0^{\pi} -a^2 q (\cos \beta - 1 + \beta \operatorname{sen} \beta) (-1) a d\beta$$

$$EI\delta_{1P} = 0$$

$$EI\delta_{2P} = \int_0^s M_{\beta}^q m_2 ds = \int_0^{\pi} -a^2 q (\cos \beta - 1 + \beta \operatorname{sen} \beta) (-a + a \cos \beta) a d\beta$$

$$EI\delta_{2P} = -\frac{\pi}{4} a^4 q$$

$$EI\delta_{11} = \int_0^s (m_1)^2 ds = \int_0^{\pi} (-1)^2 a d\beta$$

$$EI\delta_{11} = \pi a$$

$$EI\delta_{2P} = \int_0^s (m_2)^2 ds = \int_0^{\pi} (-a + a \cos \beta)^2 a d\beta$$

$$EI\delta_{2P} = \frac{3}{2} \pi a^3 q$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \int_0^s m_1 m_2 ds = \int_0^{\pi} (-1) (-a + a \cos \beta) a d\beta$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \pi a^2$$

Obteniendo para las ecuaciones canónicas del método de las fuerzas:

$$\left. \begin{aligned} \pi a x_1 + \pi a^2 x_2 &= 0 \\ \pi a^2 x_1 + \frac{3}{2} \pi a^3 x_2 &= \frac{1}{4} \pi a^4 q \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x_1 + a x_2 &= 0 \\ x_1 + \frac{3}{2} a x_2 &= \frac{1}{4} a^2 q \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

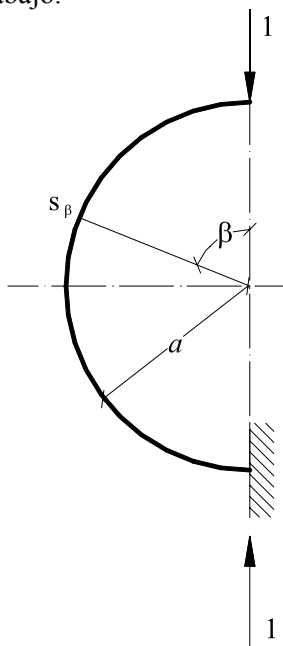
$$x_1 = -\frac{1}{2} a^2 q; \quad x_2 = \frac{1}{2} a q$$

El momento flector en la sección β :

$$M_\beta = -a^2 q (\beta \sin \beta + \cos \beta - 1) - x_1 - x_2 (a - a \cos \beta)$$

$$M_\beta = -a^2 q (\beta \sin \beta + \cos \beta - 1) + \frac{1}{2} a^2 q - \frac{1}{2} a q (a - a \cos \beta)$$

Para determinar la variación de la longitud diámetro vertical del anillo, aplicamos una fuerza vertical $P=1$ dirigida hacia abajo.



El momento flector originado por esta fuerza en la sección β es:

$$m_\beta = -a \sin \beta$$

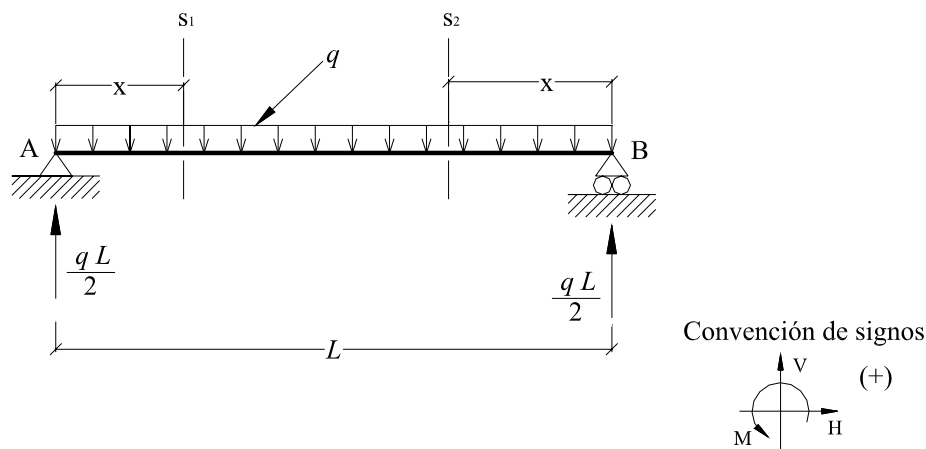
$$EI \delta = \int_0^\pi M_\beta m_\beta ds$$

$$\Rightarrow \delta EI = \int_0^\pi \left(-a^2 q (\beta \sin \beta + \cos \beta - 1) + \frac{1}{2} a^2 q - \frac{1}{2} a q (a - a \cos \beta) \right) (-a \sin \beta) a d\beta$$

$$\Rightarrow \delta = \left(\frac{\pi^2}{4} - 2 \right) \frac{qa^4}{EI}$$

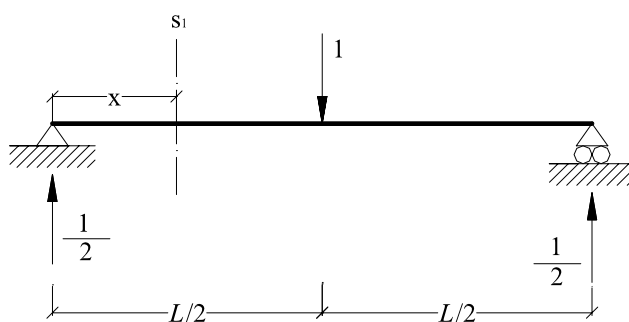
Ejemplos de Aplicación.

1-1. Calcular el desplazamiento lineal en el punto medio de la viga y el giro en el apoyo A; donde EI es constante.



$$M_1 = -\frac{qL}{2}x + \frac{qx^2}{2} \quad ; 0 \leq x \leq L/2$$

$$M_2 = \frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2} \quad ; 0 \leq x \leq L/2$$



$$m_1 = -\frac{1}{2}x \quad ; 0 \leq x \leq L/2$$

Teniendo en cuenta la simetría de geometría y cargas en las dos vigas anteriores

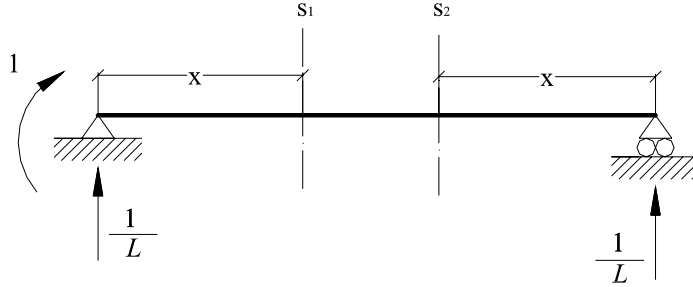
$$\delta = \frac{1}{EI} \sum \int_0^L M_i m_i ds$$

$$\frac{EI\delta}{2} = \int_0^{L/2} M_1 m_1 dx$$

$$\delta = 2 \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left(-\frac{qL}{2}x + \frac{qx^2}{2} \right) \left(-\frac{x}{2} \right) dx$$

$$\delta = \frac{2}{EI} \left(\frac{qL^4}{96} - \frac{qL^4}{256} \right) = \frac{5qL^4}{384EI}$$

Para calcular el giro en el apoyo A:



$$m_1 = -1 + \frac{x}{L} \quad ; 0 \leq x \leq L/2$$

$$m_2 = \frac{x}{L} \quad ; 0 \leq x \leq L/2$$

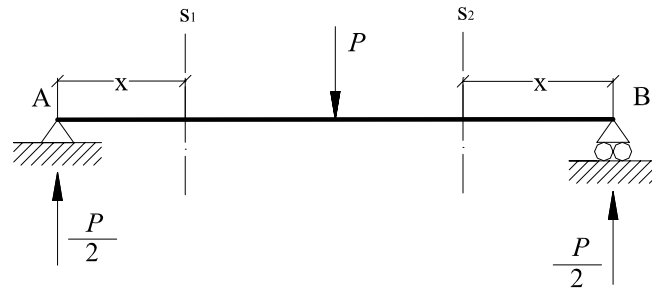
$$\theta = \frac{1}{EI} \sum \int_0^L M_i m_i ds$$

$$EI\theta_A = \int_0^{L/2} M_1 m_1 dx + \int_0^{L/2} M_2 m_2 dx$$

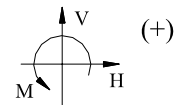
$$\theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left(-\frac{qL}{2}x + \frac{qx^2}{2} \right) \left(-1 + \frac{x}{L} \right) dx + \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left(\frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right) \left(\frac{x}{L} \right) dx$$

$$\theta_A = \frac{qL^3}{24EI}$$

2.5. Encontrar el giro en el apoyo A de la siguiente viga; donde EI es constante.

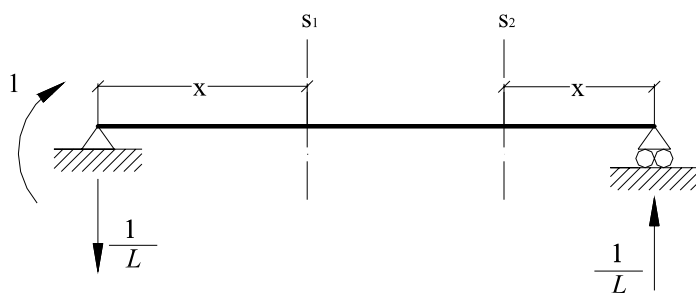


Convención de signos



$$M_1 = -\frac{P}{2}x \quad ; 0 \leq x \leq L/2$$

$$M_2 = \frac{P}{2}x \quad ; 0 \leq x \leq L/2$$



$$m_1 = -1 + \frac{x}{L} \quad ; 0 \leq x \leq L/2$$

$$m_2 = \frac{x}{L} \quad ; 0 \leq x \leq L/2$$

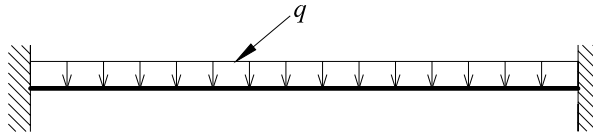
$$\theta = \frac{1}{EI} \sum \int_0^l M_i m_i ds$$

$$EI\theta_1 = \int_0^{L/2} M_1 m_1 dx + \int_0^{L/2} M_2 m_2 dx$$

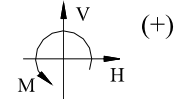
$$\theta_1 = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} -\frac{P}{2} x \left(-1 + \frac{x}{L} \right) dx + \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left(\frac{P}{2} x \right) \left(\frac{x}{L} \right) dx$$

$$\theta_1 = \frac{PL^2}{16EI}$$

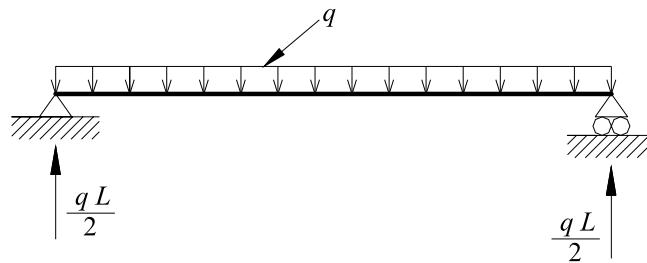
2.6. Calcular el desplazamiento del punto medio de la viga; donde EI constante



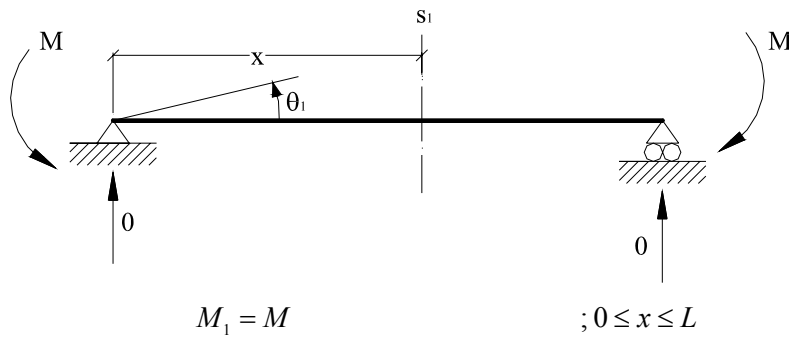
Convención de signos



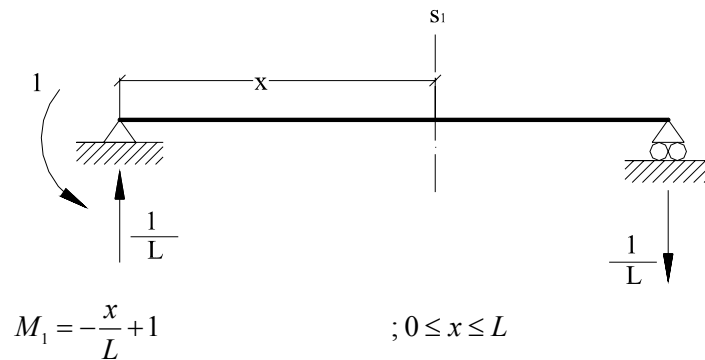
Se puede utilizar los resultados obtenidos en el ejemplo 2.4 y sumarle a la viga simplemente apoyada



La estructura



Con la condición de que M Produzca el giro θ_A calculado en el ejemplo 2.4. Se utiliza la estructura



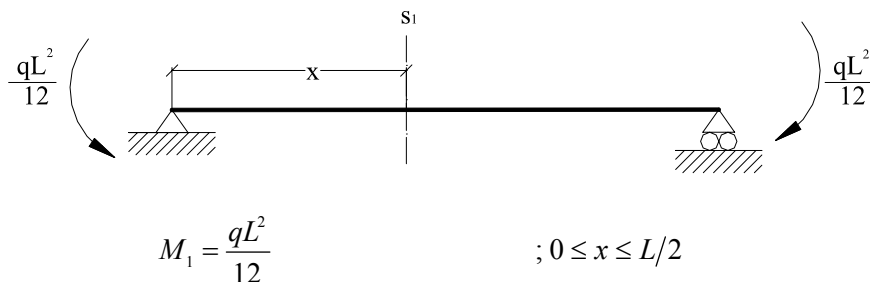
Y se tiene

$$\frac{qL^3}{24EI} = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(M \left(-\frac{x}{L} + 1 \right) \right) dx = \frac{M L}{EI} - \frac{M L}{2EI} = \frac{M L}{2EI}$$

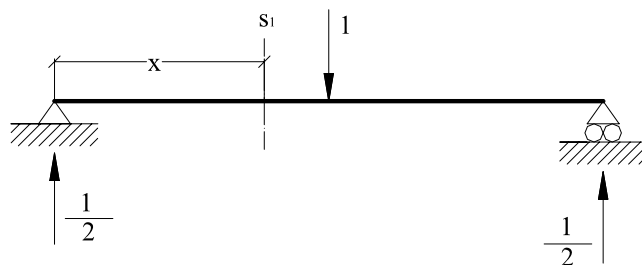
$$\Rightarrow M = \frac{qL^2}{12}$$

Este método proporciona una alternativa para calcular el momento de empotramiento de la viga original, que es M .

Entonces, el desplazamiento del punto medio de la viga



Se calcula con la estructura



$$m_1 = -\frac{x}{2} \quad ; 0 \leq x \leq L/2$$

Y se tiene

$$\delta = \frac{1}{EI} \sum \int_0^L M_i m_i ds$$

$$EI\delta = \int_0^{L/2} M_1 m_1 dx$$

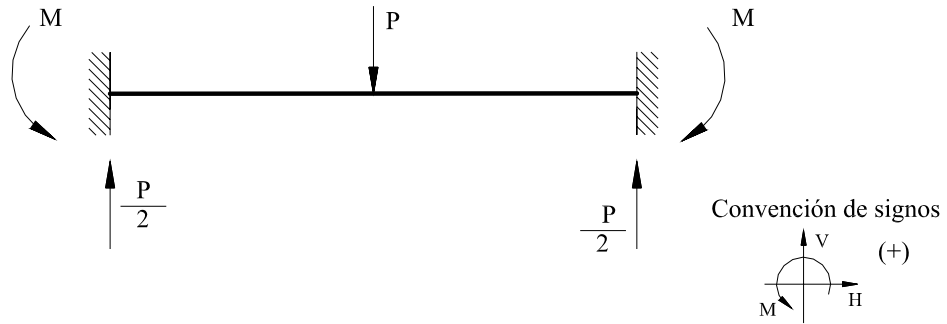
$$\delta = \frac{1}{EI} 2 \int_0^{L/2} \frac{qL^2}{12} \left(-\frac{x}{2} \right) dx = -\frac{qL^2}{12EI} \frac{L^2}{8}$$

$$\delta = -\frac{qL^4}{96EI} = -\frac{4qL^4}{384EI}$$

Finalmente, por el principio de superposición se tiene para la viga doblemente empotrada, que

$$\delta = \frac{5qL^4}{384EI} - \frac{4qL^4}{384EI} = \frac{qL^4}{384EI}$$

2.7. Calcular el momento del empotramiento para la viga mostrada en la siguiente; donde EI constante.



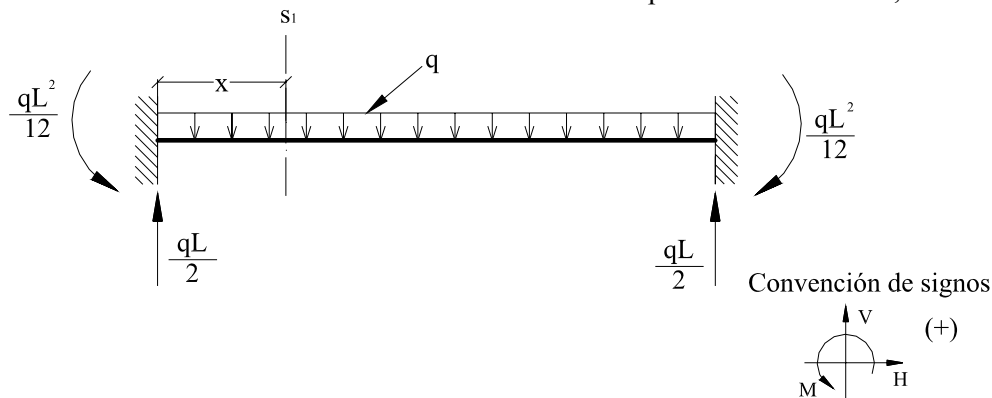
Utilizando el método del ejemplo anterior y el resultado del problema 2.5.

$$\frac{PL^2}{16EI} = \frac{M L}{EI} - \frac{M L}{2EI} = \frac{M L}{2EI}$$

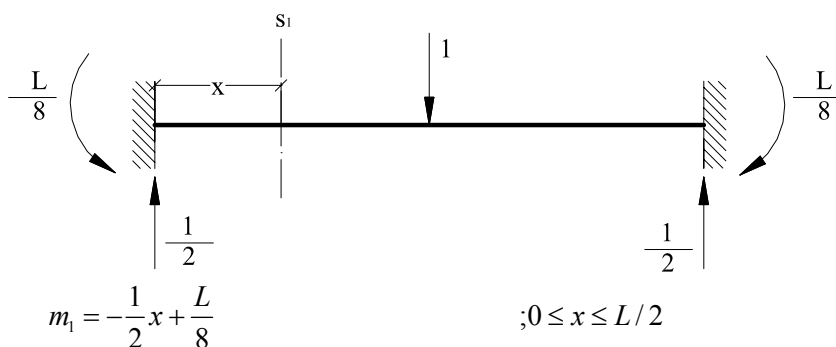
$$\Rightarrow M = \frac{PL}{8}$$

2.8. Determinar el desplazamiento en el punto medio de la viga del ejemplo 2.6 aplicando directamente el método de la carga unitaria.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los problemas anteriores, se tiene



$$M_1 = -\frac{qL}{2}x + \frac{qL^2}{12} + \frac{qx^2}{2} \quad ; 0 \leq x \leq L/2$$

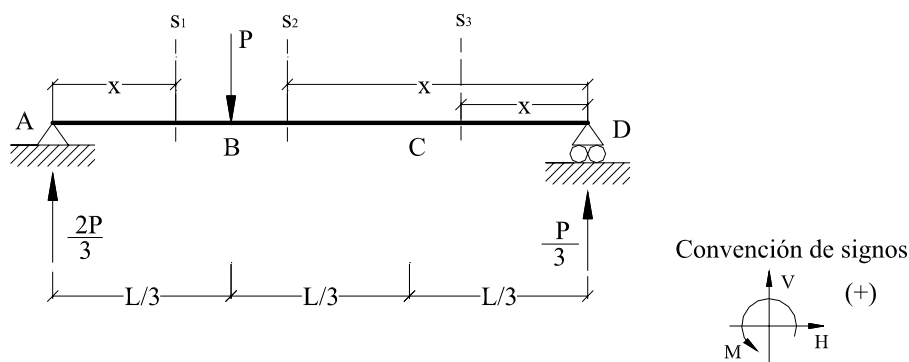


Dada la simetría del problema

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{EI} \sum \int_0^L M_i m_i ds \\ EI\delta &= \int_0^L M_1 m_1 dx \\ \delta &= \frac{1}{EI} 2 \int_0^{L/2} \left(-\frac{qL}{2}x + \frac{qL^2}{12} + \frac{qx^2}{2} \right) \left(-\frac{x}{2} + \frac{L}{8} \right) dx \\ \delta &= \frac{2qL^4}{EI} \left(\frac{1}{96} - \frac{1}{192} - \frac{1}{256} - \frac{1}{128} + \frac{1}{192} + \frac{1}{348} \right) \\ \delta &= \frac{2qL^4}{EI} \left(\frac{5}{384} - \frac{3}{256} \right) \\ \delta &= \frac{2qL^4}{EI} \frac{10-9}{768} \\ \delta &= \frac{qL^4}{384EI} \end{aligned}$$

Que coincide con el resultado del ejemplo 2.6

2.9. Calcular el desplazamiento vertical de los puntos B y C; donde EI constante.

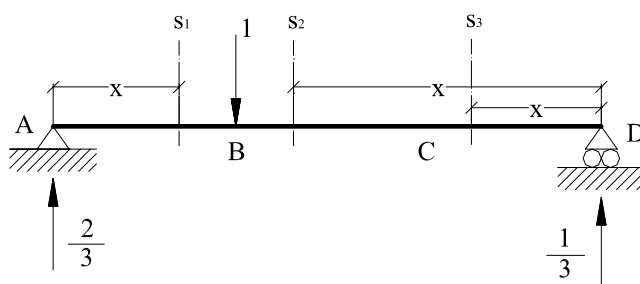


$$M_1 = -\frac{2}{3}Px \quad ; 0 \leq x \leq L/3$$

$$M_2 = \frac{P}{3}x \quad ; L/3 \leq x \leq 2L/3$$

$$M_3 = \frac{P}{3}x \quad ; 0 \leq x \leq L/3$$

Para el desplazamiento vertical del punto C



$$m_1 = -\frac{2}{3}x \quad ; 0 \leq x \leq L/3$$

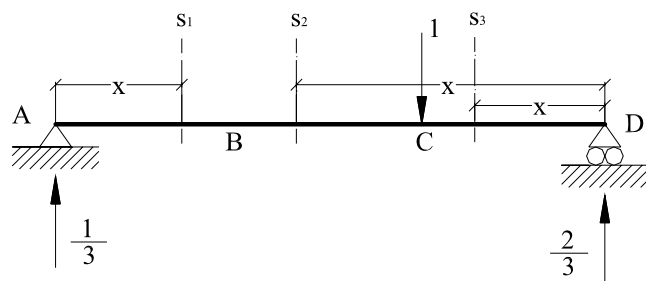
$$m_2 = \frac{1}{3}x \quad ; L/3 \leq x \leq 2L/3$$

$$m_3 = \frac{1}{3}x \quad ; 0 \leq x \leq L/3$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{EI} \sum \int_0^L M_i m_i ds \\ EI\delta_B &= \int_0^{L/3} M_1 m_1 dx + \int_{L/3}^{2L/3} M_2 m_2 dx + \int_0^{L/3} M_3 m_3 dx \\ \delta_B &= \frac{1}{EI} \int_0^{L/3} -\frac{2}{3}Px \left(-\frac{2}{3}x\right) dx + \frac{1}{EI} \int_{L/3}^{2L/3} \left(\frac{P}{3}x\right) \left(\frac{1}{3}x\right) dx + \frac{1}{EI} \int_0^{L/3} \left(\frac{P}{3}x\right) \left(\frac{1}{3}x\right) dx \\ \delta_B &= \frac{4PL^3}{243EI} \end{aligned}$$

Para el desplazamiento vertical del punto D



$$m_1 = -\frac{1}{3}x \quad ; 0 \leq x \leq L/3$$

$$m_2 = \frac{2}{3}x - 1\left(x - \frac{L}{3}\right) \quad ; L/3 \leq x \leq 2L/3$$

$$m_3 = \frac{2}{3}x \quad ; 0 \leq x \leq L/3$$

Se tiene

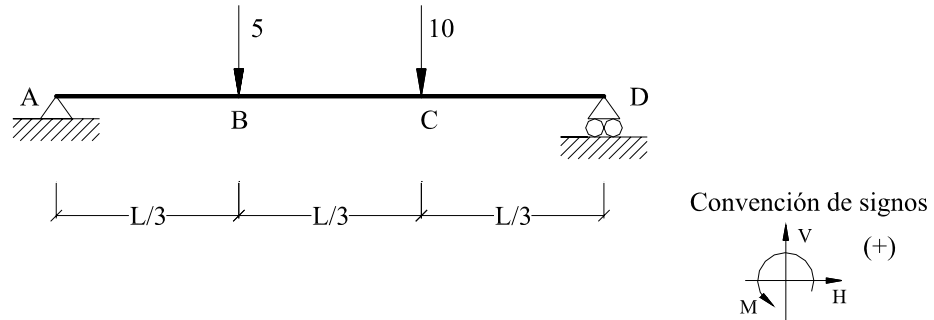
$$\delta = \frac{1}{EI} \sum \int_0^l M_i m_i ds$$

$$EI\delta_c = \int_0^{L/3} M_1 m_1 dx + \int_{L/3}^{2L/3} M_2 m_2 dx + \int_0^{L/3} M_3 m_3 dx$$

$$EI\delta_c = \int_0^{L/3} -\frac{2}{3}Px \left(-\frac{x}{3}\right) dx + \int_{L/3}^{2L/3} \frac{P}{3}x \left(\frac{2}{3}x - x + \frac{L}{3}\right) dx + \int_0^{L/3} \frac{P}{3}x \left(\frac{2}{3}x\right) dx$$

$$\Rightarrow \delta_c = \frac{7PL^3}{486EI}$$

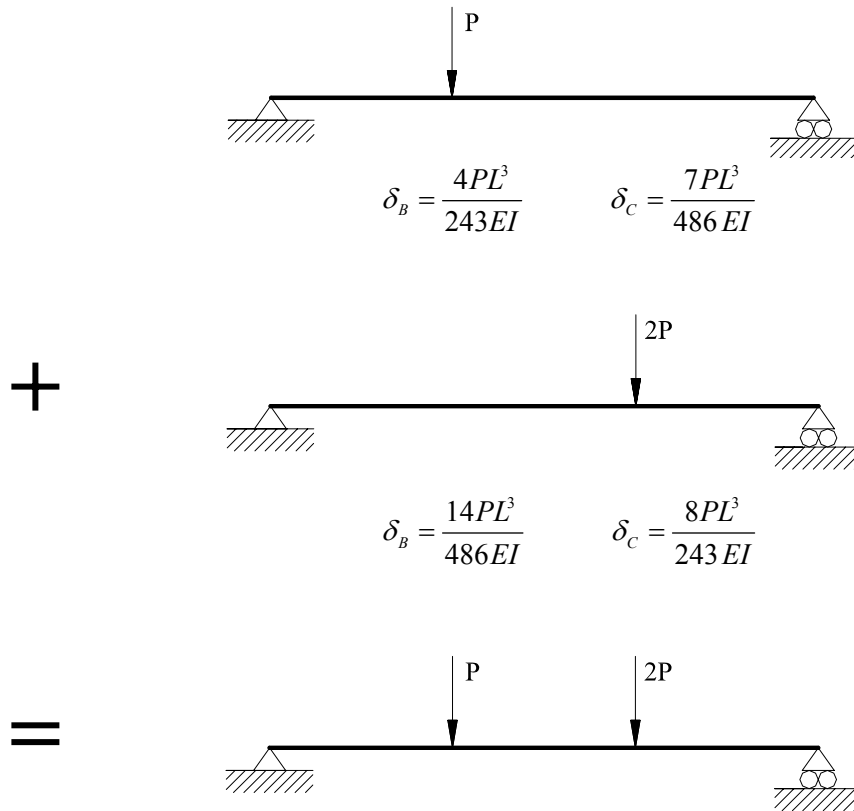
2.10. Determinar los desplazamientos bajo las cargas, sabiendo que $EI = \text{constante}$.



La solución más sencilla es utilizar los resultados del problema anterior; aplicando el principio de superposición de causas y efectos.

$$\Rightarrow \quad \delta_B = \frac{4PL^3}{243EI} \quad \delta_C = \frac{7PL^3}{486EI}$$

Se tiene

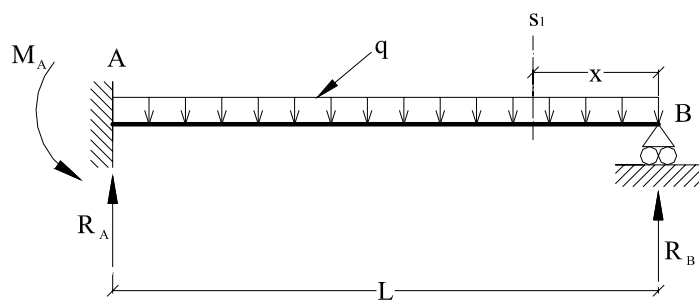


Por lo tanto

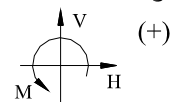
$$\delta_B = \frac{11PL^3}{243EI} \quad \delta_C = \frac{23PL^3}{486EI}$$

En donde solo falta sustituir los valores de P, L, E, I , para obtener las magnitudes de los desplazamientos bajo las cargas.

2.11. Calcular el valor de las reacciones en los apoyos de la viga; donde EI constante.

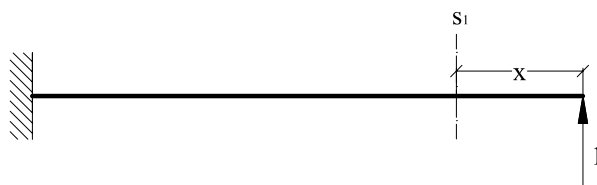


Convención de signos



$$M_1 = R_B x - \frac{qx^2}{2} \quad ; 0 \leq x \leq L$$

Se utiliza la estructura



$$m_1 = x \quad ; 0 \leq x \leq L$$

con la condición

$$\begin{aligned} \delta_B &= 0 \\ \delta &= \frac{1}{EI} \sum \int_0^L M_i m_i ds \\ EI\delta_B &= \int_0^L M_1 m_1 dx \\ \delta_B = 0 &= \frac{1}{EI} \int_0^L \left(R_B x - \frac{qx^2}{2} \right) x dx \end{aligned}$$

$$0 = R_B \frac{L^3}{3} - \frac{q}{8} L^4$$

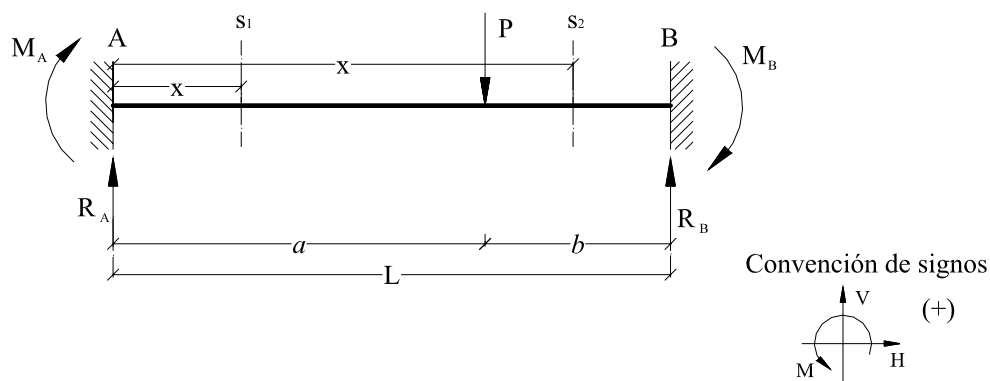
$$\Rightarrow R_B = \frac{3}{8} qL$$

Y por el equilibrio estático se encuentran las reacciones en el apoyo A.

$$R_A - qL + R_B = 0$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{5}{8} qL$$

2.12. Determinar las reacciones en los apoyos de la estructura

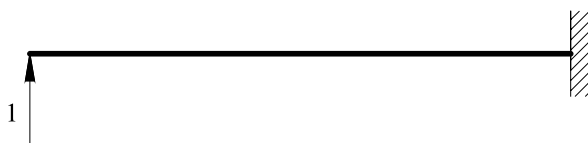


$$M_1 = -M_A - R_A x \quad ; 0 \leq x \leq a$$

$$M_2 = -M_A - R_A x + P(x - a) \quad ; a \leq x \leq L$$

Se utilizan las estructuras

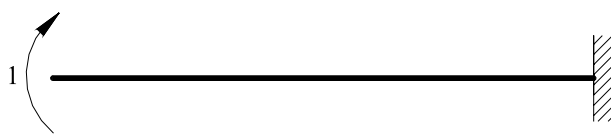
Para δ :



$$m_1 = -x \quad ; 0 \leq x \leq a$$

$$m_2 = -x \quad ; a \leq x \leq L$$

Para θ :



$$m_1 = -1 \quad ; 0 \leq x \leq L$$

$$m_2 = -1 \quad ; a \leq x \leq L$$

Para δ se tiene:

$$\delta = \frac{1}{EI} \sum \int_0^L M_i m_i ds$$

$$EI\delta_A = \int_0^a M_1 m_1 dx + \int_a^L M_2 m_2 dx$$

$$EI\delta_A = 0 = \int_0^a (-M_A - R_A x)(-x)dx + \int_a^L [-M_A - R_A x + P(x - a)](-x)dx$$

Integrando y reduciendo términos

$$0 = M_A \frac{L^2}{2} + R_A \frac{L^3}{3} - PL^2 \left(\frac{L}{3} - \frac{a}{2} \right) - \frac{Pa^3}{6}$$

Para θ se tiene:

$$EI\theta_A = 0 = \int_0^a (-M_A - R_A x)(-1)dx + \int_a^L [-M_A - R_A x + P(x-a)](-1)dx$$

$$0 = M_A L + R_A \frac{L^2}{2} - PL\left(\frac{L}{2} - a\right) - \frac{Pa^2}{2}$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones anteriores, se obtiene

$$\Rightarrow M_A = -\frac{Pab^2}{L^2}$$

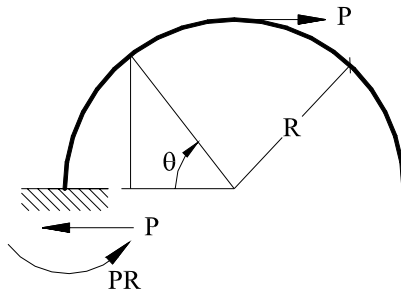
$$\Rightarrow R_A = \frac{Pb^2}{L^3}(b+3a)$$

En donde el signo menos M_A de indica que el momento tiene sentido contrario al supuesto en la figura.

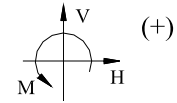
Por equilibrio estático

$$M_B = \frac{Pa^2b}{L^2} \quad ; \quad R_B = \frac{Pa^2}{L^3}(a+3b)$$

2.13. Encontrar los desplazamientos lineales y el giro en el extremo libre de la barra semicircular.



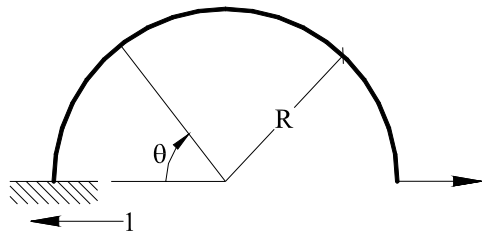
Convención de signos



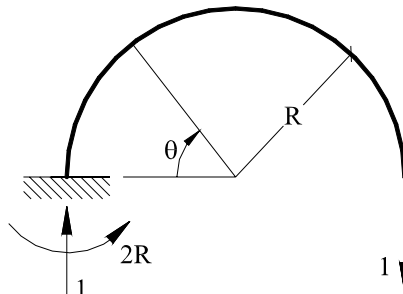
$$M_{\theta} = PR - PR \sin \theta \quad ; 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$M_{\theta} = 0 \quad ; \pi/2 \leq \theta \leq \pi$$

Se utilizan las estructuras siguientes

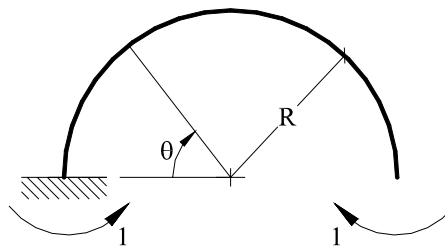


$$m_{\theta} = -R \sin \theta$$



$$m_{\theta} = 2R - R(1 - \cos \theta)$$

$$m_{\theta} = R(1 + \cos \theta)$$



$$m_{\theta} = 1$$

para las cuales $0 \leq \theta \leq \pi$

Recuérdese que $ds = R d\theta$

Se tiene:

Desplazamiento producido por la carga horizontal unitaria:

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1}{EI} \sum \int_0^l M_i m_i ds \\ EI\delta_{H,1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_\theta m_\theta ds \\ EI\delta_{H,1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} PR(1 - \sin\theta)(-R\sin\theta)R d\theta \\ EI\delta_{H,1} &= PR^3 \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta + \cos\theta \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ \Rightarrow \delta_{H,1} &= -\frac{PR^3}{EI} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)\end{aligned}$$

el signo menos indica que el desplazamiento es hacia la izquierda

Desplazamiento producido por la carga vertical unitaria:

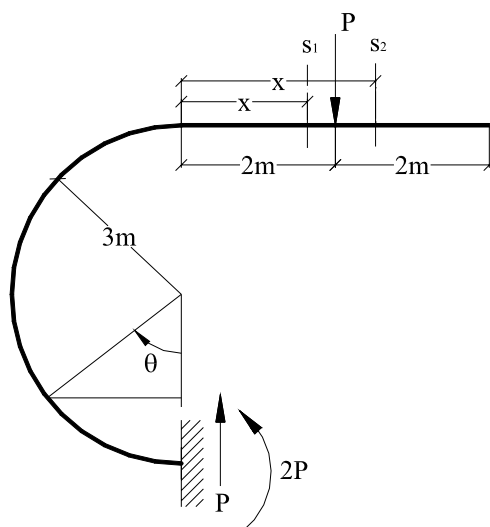
$$\begin{aligned}EI\delta_{V,1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_\theta m_\theta ds \\ EI\delta_{V,1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} PR(1 - \sin\theta)R(1 + \cos\theta)R d\theta \\ EI\delta_{V,1} &= PR^3 \left[\cos\theta + \theta + \sin\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ \Rightarrow \delta_{V,1} &= \frac{PR^3}{EI} \left(\frac{\pi - 1}{2} \right)\end{aligned}$$

desplazamiento hacia abajo.

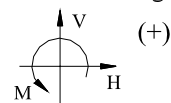
Desplazamiento producido por el momento unitario:

$$\begin{aligned}EI\theta_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_\theta m_\theta ds \\ EI\theta_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} PR(1 - \sin\theta)(1)R d\theta \\ EI\theta_1 &= PR^2 [\cos\theta + \theta] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ \Rightarrow \theta_1 &= \frac{PR^2}{EI} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)\end{aligned}$$

2.14. Calcular los desplazamientos lineales y el giro en el extremo libre de la estructura; donde EI constante.



Convención de signos

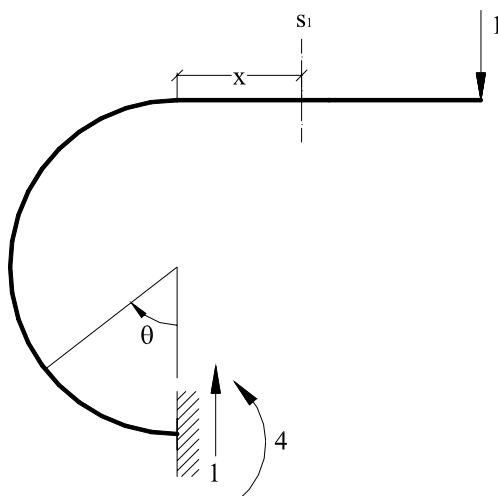


$$M_0 = 2P + 3P \sin \theta \quad ; 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$M_1 = 2P - Px \quad ; 0 \leq x \leq 2$$

$$M_2 = 2P - Px + P(x - 2) = 0 \quad ; 2 \leq x \leq 4$$

Para el desplazamiento vertical



$$m_\theta = 4 + 3 \sin \theta \quad ; 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$m_1 = 4 - x \quad ; 0 \leq x \leq 2$$

$$\delta = \frac{1}{EI} \sum \int_0^l M_i m_i ds$$

$$EI \delta_{V,1} = \int_0^\pi M_\theta m_\theta ds + \int_0^2 M_1 m_1 dx$$

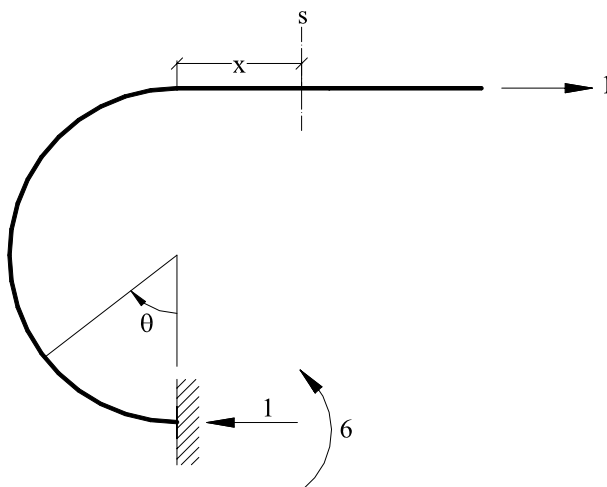
$$EI \delta_{V,1} = \int_0^\pi (2P + 3P \sin \theta)(4 + 3 \sin \theta) 3 d\theta + \int_0^2 (2P - Px)(4 - x) dx$$

$$EI \delta_{V,1} = P \left[24\theta - 54 \cos \theta + 27 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \right] \Big|_0^\pi + P \left[8x - 3x^2 + \frac{1}{3} x^3 \right] \Big|_0^2$$

$$EI\delta_{V,1} = P\left(\frac{75\pi}{2} + 108\right) + P\left(4 + \frac{8}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \delta_{V,1} = \left(\frac{75\pi}{2} + \frac{344}{3}\right) \frac{P}{EI}$$

Para el desplazamiento horizontal



$$m_\theta = 6 - 3(1 - \cos\theta) \quad ; 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$m_\theta = 3(1 + \cos\theta)$$

$$m_1 = 0 \quad ; 0 \leq x \leq 2$$

Entonces:

$$\delta = \frac{1}{EI} \sum \int_0^l M_i m_i ds$$

$$EI\delta_{H,1} = \int_0^\pi M_\theta m_\theta ds$$

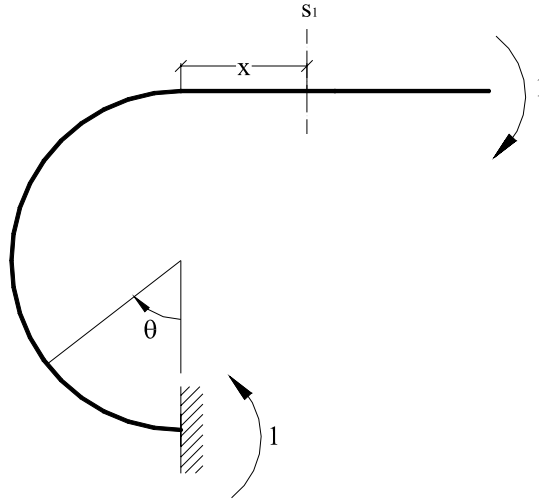
$$EI\delta_{H,1} = \int_0^\pi (2P + 3P\sin\theta)(3(1 + \cos\theta))3d\theta$$

$$EI\delta_{H,1} = P \left[18\theta - 27\cos\theta + 18\sin\theta + \frac{27}{2}\sin^2\theta \right]_0^\pi$$

$$EI\delta_{H,1} = P[18\pi - 27(-1 - 1)]$$

$$\Rightarrow \delta_{H,1} = \frac{(18\pi + 54)P}{EI}$$

Para el giro en el extremo libre



$$m_{\theta} = 1 \quad ; 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$m_1 = 1 \quad ; 0 \leq x \leq 2$$

$$\theta = \frac{1}{EI} \sum \int_0^l M_i m_i ds$$

$$EI\theta_1 = \int_0^{\pi} M_{\theta} m_{\theta} ds + \int_0^2 M_1 m_1 dx$$

$$EI\theta_1 = \int_0^{\pi} (2P + 3\text{sen}\theta)(1)3d\theta + \int_0^2 (2P - Px)(1)dx$$

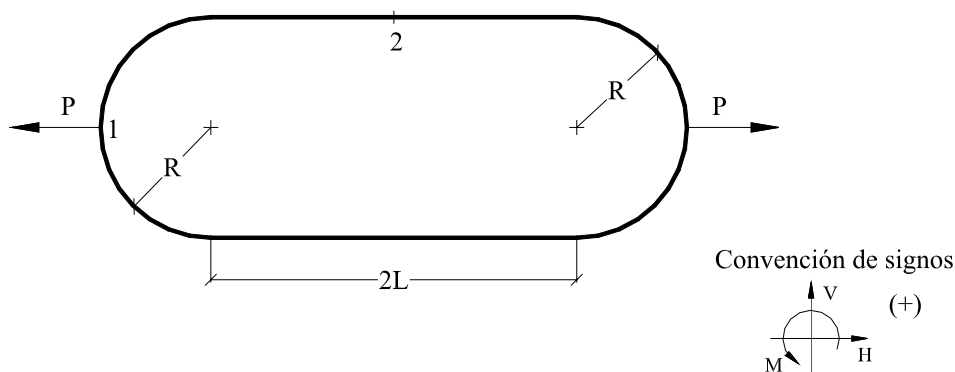
$$EI\theta_1 = P[6\theta - 9\cos\theta]_0^{\pi} + P\left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^2$$

$$EI\theta_1 = P(6\theta - 9\cos\theta)\Big|_0^{\pi} + P\left(2x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^2$$

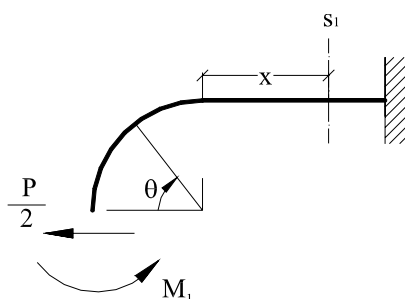
$$EI\theta_1 = P[6\pi - 9(-1-1)] + P(4-2)$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{(6\pi + 20)P}{EI}$$

2.15. Calcular las fuerzas internas en la sección en donde se aplica la carga P.

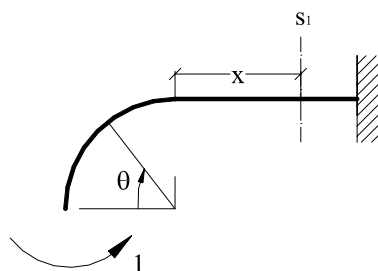


Debido a que se trata de una estructura simétrica respecto a sus dos ejes se procede a considerar una parte de la estructura como se indico en la sección 2.15, figura 2.15-3 (c), entonces se procede a empotrar la sección en 2, debido a que no hay giro en dicha sección, por consideraciones de dicha simetría.



$$M_{\theta} = -\frac{P}{2} R \sin \theta + M_1 \quad ; 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$M_1 = -\frac{PR}{2} + M_1 \quad ; 0 \leq x \leq L$$



$$m_{\theta} = 1 \quad ; 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$m_1 = 1 \quad ; 0 \leq x \leq L$$

$$\theta = \frac{1}{EI} \sum \int_0^L M_i m_i ds$$

$$EI\theta_1 = \int_0^{\pi/2} M_{\theta} m_{\theta} ds + \int_0^L M_1 m_1 dx$$

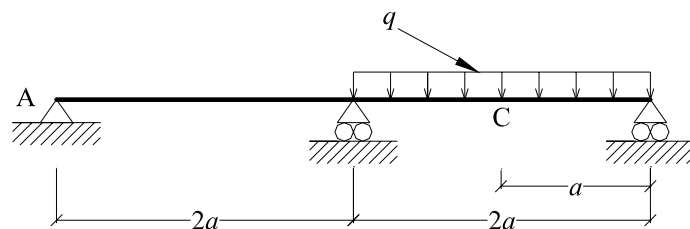
$$EI\theta_1 = \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{P}{2} R \sin \theta + M_1 \right) R d\theta + \int_0^L \left(-\frac{PR}{2} + M_1 \right) dx = 0$$

$$-\frac{PR^2}{2} + M_1 R \frac{\pi}{2} - \frac{PR}{2} L + M_1 L = 0$$
$$M_1 = \frac{PR(R+L)}{\pi R + 2L}$$

Es obvio que en el punto dos no se puede empotrar si se desea calcular el desplazamiento vertical en el punto 2, para cuyo cálculo se puede empotrar el punto 1.

EJERCICIOS RESUELTOS

2.1.- Calcular las reacciones en el apoyo A y el desplazamiento vertical δ de la sección C de la viga.

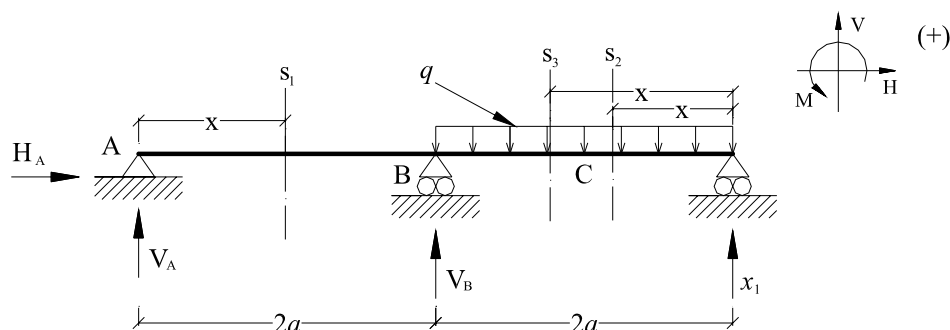


SOLUCION:

$$\begin{aligned} g &= n - e - c \\ g &= 4 - 3 - 0 \\ g &= 1 \text{ redundante} \end{aligned}$$

g : grado de hiperestaticidad
 n : número de reacciones
 e : ecuaciones de equilibrio de la estática
 c : ecuaciones especiales de la estática

Convención de signos



Estática

$$\begin{aligned} \sum H &= 0 \Rightarrow H_A = 0 \\ \sum V &= 0 \Rightarrow V_A + V_B + x_1 - 2aq \\ &\Rightarrow V_A = 2aq - V_B - x_1 \\ \sum M_A &= 0 \Rightarrow V_B(2a) - 2aq(3a) + x_1(4a) = 0 \\ &\Rightarrow V_B = 3aq - 2x_1 = 0 \\ &\Rightarrow V_A = x_1 - aq \end{aligned}$$

$$0 \leq x \leq 2a$$

$$M_1 = -V_A x \Rightarrow M_1 = aqx - xx_1 \quad \frac{\partial M_1}{\partial x_1} = -x$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_2 = xx_1 - \frac{1}{2}qx^2 \quad \frac{\partial M_2}{\partial x_1} = x$$

$$a \leq x \leq 2a$$

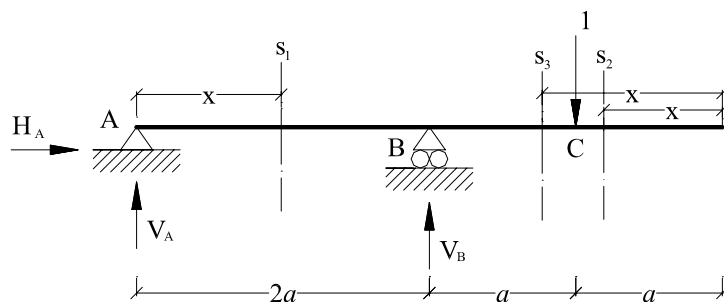
$$\begin{aligned}
 M_3 &= x x_1 - \frac{1}{2} q x^2 & \frac{\partial M_3}{\partial x_1} &= x \\
 \Rightarrow U &= \int_0^l \frac{M^2}{2EI} ds \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \sum \int_0^l M_i \frac{\partial M_i}{\partial x_1} dx \\
 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} &= 0 = \int_0^{2a} M_1 \frac{\partial M_1}{\partial x_1} dx + \int_0^a M_2 \frac{\partial M_2}{\partial x_1} dx + \int_a^{2a} M_3 \frac{\partial M_3}{\partial x_1} dx \\
 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} &= 0 = \int_0^{2a} (a q x - x x_1)(-x) dx + \int_0^a \left(x x_1 - \frac{1}{2} q x^2 \right)(x) dx + \int_a^{2a} \left(x x_1 - \frac{1}{2} q x^2 \right)(x) dx \\
 \Rightarrow \frac{-14 a^4 q + 16 a^3 x_1}{3} &= 0 \Rightarrow -14 a q + 16 x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{14}{16} a q \\
 &\Rightarrow x_1 = \frac{7}{8} a q
 \end{aligned}$$

$$H_A = 0$$

$$V_A = \frac{7}{8} a q - a q \Rightarrow V_A = -\frac{1}{8} a q$$

$$V_B = 3 a q - \frac{7}{4} a q \Rightarrow V_B = -\frac{5}{4} a q$$

Deformación



Estática

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow V_A + V_B = 1$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2a V_B - 3a = 0$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow V_A = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq x \leq 2a$$

$$m_1 = -V_A x \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{2} x$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$m_2 = 0$$

$$a \leq x \leq 2a$$

$$m_3 = 1(x - a) \Rightarrow m_3 = x - a$$

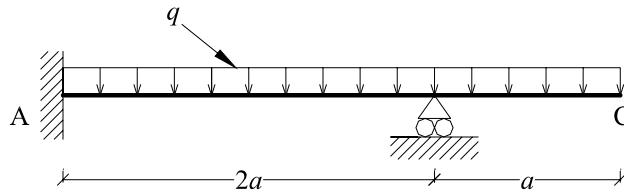
$$\delta = \frac{1}{EI} \sum \int_0^l M_i m_i ds$$

$$EI\delta = \int_0^{2a} M_1 m_1 dx + \int_0^a M_2 m_2 dx + \int_a^{2a} M_3 m_3 dx$$

$$\Rightarrow EI\delta = \int_0^{2a} \left(\frac{1}{8} a q x \right) \left(\frac{1}{2} x \right) dx + \int_a^{2a} \left(-\frac{7}{8} a q x + \frac{1}{2} q x^2 \right) (x - a) dx$$

$$\delta = \frac{7}{48} \frac{q a^4}{EI}$$

2.2.- Calcular las reacciones en el apoyo A y el desplazamiento vertical δ en C de la siguiente viga.



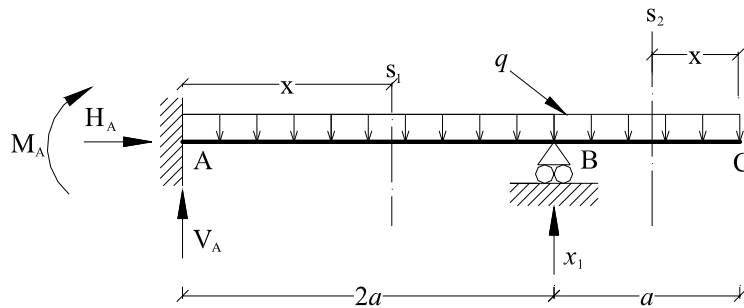
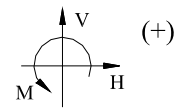
SOLUCION

$$g = n - e - c$$

$$g = 4 - 3 - 0$$

$$g = 1 \text{ redundante}$$

Convención de signos



Estática

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow V_A + x_1 - 3aq = 0 \Rightarrow V_A = 3aq - x_1$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A + x_1(2a) - (3aq)(1.5a) = 0$$

$$\Rightarrow M_A = 2ax_1 - 4.5a^2q$$

$$0 \leq x \leq 2a$$

$$M_1 = -M_A - V_A x + qx \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow M_1 = -2ax_1 + 4.5a^2q - 3aqx + x_1x + \frac{1}{2}qx^2$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} = -2a + x$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_2 = -qx \left(\frac{x}{2} \right)$$

$$\Rightarrow M_2 = -\frac{1}{2}qx^2$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial x_1} = 0$$

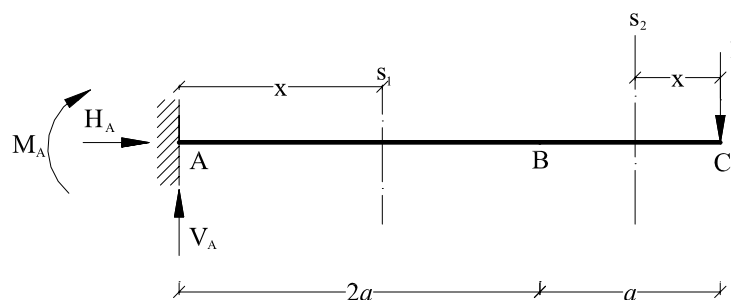
$$\begin{aligned}
 \Rightarrow U &= \int_0^l \frac{M^2}{2EI} ds \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \sum \int_0^l M_i \frac{\partial M_i}{\partial x_1} dx \\
 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} &= 0 = \int_0^{2a} M_1 \frac{\partial M_1}{\partial x_1} dx + \int_0^a M_2 \frac{\partial M_2}{\partial x_1} dx \\
 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} &= 0 = \int_0^{2a} \left(-2ax_1 + 4.5a^2q - 3aqx + x_1x + \frac{1}{2}qx^2 \right) (x-2a) dx + \int_0^a \left(-\frac{1}{2}qx \right) (0) dx \\
 &\Rightarrow -\frac{17}{3}a^4q + \frac{8}{3}x_1a^3 = 0 \\
 &\Rightarrow x_1 = \frac{17}{8}aq
 \end{aligned}$$

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow V_A = 3aq - \frac{17}{8}aq \Rightarrow V_A = \frac{7}{8}aq$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A = 2ax_1 - 4.5a^2q \Rightarrow M_A = -\frac{1}{4}a^2q$$

Deformación



Estática

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow V_A - 1 = 0 \Rightarrow V_A = 1$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A - 1(3a) = 0 \Rightarrow M_A = -3a$$

$$0 \leq x \leq 2a$$

$$m_1 = -M_A - 1(x) \Rightarrow m_1 = -x + 3a$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$m_2 = -1(x) \Rightarrow m_2 = -x$$

$$0 \leq x \leq 2a$$

$$M_1 = -2ax_1 + 4.5a^2q - 3aqx + x_1x + \frac{1}{2}qx^2$$

$$\Rightarrow M_1 = -2a\left(\frac{17}{8}aq\right) + 4.5a^2q - 3aqx + \left(\frac{17}{8}aq\right)x + \frac{1}{2}qx^2$$

$$\Rightarrow M_1 = \frac{1}{4}a^2q - \frac{7}{8}aqx + \frac{1}{2}qx^2$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_2 = -\frac{1}{2}q x^2$$

$$\delta = \frac{1}{EI} \sum \int_0^l M_i m_i ds$$

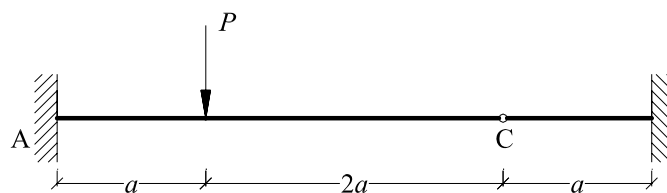
$$EI\delta = \int_0^{2a} M_1 m_1 dx + \int_0^a M_2 m_2 dx$$

$$\Rightarrow EI\delta = \int_0^{2a} \left(\frac{1}{4}a^2 q - \frac{7}{8}aqx + \frac{1}{2}qx^2 \right) (3a-x) dx + \int_0^a \left(-\frac{1}{2}qx^2 \right) (-x) dx$$

$$\Rightarrow EI\delta = \frac{5}{24}a^4 q$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{5}{24} \frac{a^4 q}{EI}$$

2.3.- Calcular las reacciones en A y el desplazamiento vertical δ en C de la siguiente viga.

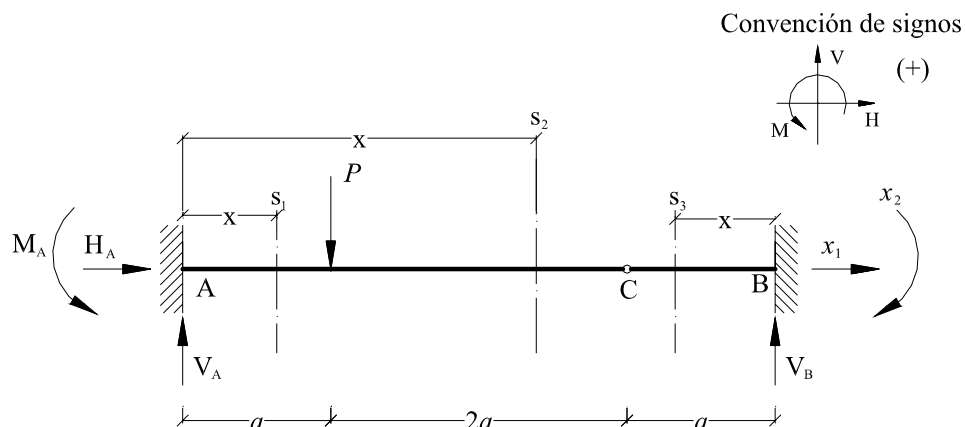


SOLUCION

$$g = n - e - c$$

$$g = 6 - 3 - 1$$

$$g = 2 \text{ redundantes}$$



Estática

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A + x_1 = 0 \Rightarrow H_A = -x_1$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow V_A + V_B = P \Rightarrow V_A = P - V_B$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - Pa + V_B(4a) - x_2 = 0 \Rightarrow M_A = Pa - V_B(4a) + x_2$$

$$\sum M_C^{DER} = 0 \Rightarrow V_B(a) - x_2 = 0 \Rightarrow V_B = \frac{x_2}{a}$$

$$\Rightarrow M_A = -3x_2 + aP = 0$$

$$\Rightarrow V_A = P - \frac{x_2}{a}$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_1 = M_A - V_A x$$

$$\Rightarrow M_1 = aP - 3x_2 - \left(P - \frac{x_2}{a}\right)x \Rightarrow M_1 = aP - 3x_2 - Px + \frac{x_2}{a}x$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_2} = -3 + \frac{x}{a}$$

$$0 \leq x \leq 3a$$

$$M_2 = P(x - a) - V_A x + M_A$$

$$\Rightarrow M_2 = Px - aP - \left(P - \frac{x_2}{a}\right)x - 3x_2 + aP \Rightarrow M_2 = \frac{x_2}{a}x - 3x_2$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial x_2} = \frac{x}{a} - 3$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_3 = V_B x - x_2$$

$$\Rightarrow M_3 = \left(\frac{x_2}{a} \right) x - x_2 \quad \frac{\partial M_3}{\partial x_2} = \frac{x}{a} - 1$$

$$\Rightarrow U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} ds \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \sum \int_0^l M_i \frac{\partial M_i}{\partial x_1} dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0 = \int_0^a M_1 \frac{\partial M_1}{\partial x_2} dx + \int_0^{3a} M_2 \frac{\partial M_2}{\partial x_2} dx + \int_0^a M_3 \frac{\partial M_3}{\partial x_2} dx$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = 0 = \int_0^a \left(aP - 3x_2 - Px + \frac{xx_2}{a} \right) \left(\frac{x}{a} - 3 \right) dx + \int_a^{3a} \left(\frac{x_2}{a} x - 3x_2 \right) \left(\frac{x}{a} - 3 \right) dx + \int_0^a \left(\frac{x_2}{a} x - x_2 \right) \left(\frac{x}{a} - 1 \right) dx$$

$$-\frac{4Pa^2 - 20ax_2}{3} + \frac{8ax_2}{3} = 0$$

$$4Pa^2 - 20ax_2 - 8ax_2 = 4Pa^2 - 12ax_2$$

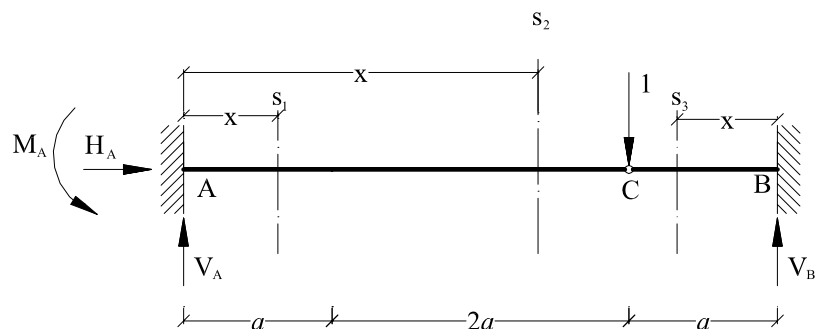
$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{7} aP$$

$$\Rightarrow V_A = P - \frac{x_2}{a} \Rightarrow V_A = \frac{6}{7} P$$

$$\Rightarrow M_A = -3x_2 + aP \Rightarrow M_A = \frac{4}{7} aP$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{x_2}{a} \Rightarrow V_B = \frac{1}{7} P$$

Deformación



Estática

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow V_A - 1 + V_B = 0 \Rightarrow V_A = 1 - V_B$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - 1(3a) + V_B(4a) = 0 \Rightarrow M_A = 3a - V_B(4a)$$

$$\sum M_C^{DER} = 0 \Rightarrow V_B a = 0 \Rightarrow V_B = 0$$

$$\Rightarrow V_A = 1$$

$$\Rightarrow M_A = 3a$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_1 = aP - 3x_2 - Px + \frac{x_2}{a}x \Rightarrow M_1 = aP - \frac{3}{7}aP - Px + \frac{1}{7}Px \Rightarrow M_1 = \frac{4}{7}aP - \frac{6}{7}Px$$

$$m_1 = M_A - V_A x \Rightarrow m_1 = 3a - x$$

$$0 \leq x \leq 3a$$

$$M_2 = \frac{x_2}{a}x - 3x_2 \Rightarrow M_2 = \frac{1}{7}xP - \frac{3}{7}aP$$

$$m_2 = M_A - V_A x \Rightarrow m_2 = 3a - 1(x) \Rightarrow m_2 = 3a - x$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_3 = \left(\frac{x_2}{a}\right)x - x_2 \Rightarrow M_3 = \frac{1}{7}Px - \frac{1}{7}aP$$

$$m_3 = 0$$

$$\delta = \frac{1}{EI} \sum \int_0^l M_i m_i ds$$

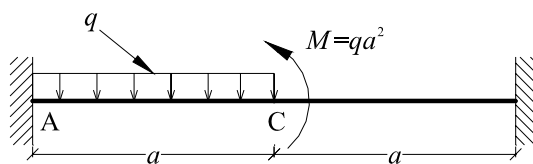
$$EI\delta = \int_0^a M_1 m_1 dx + \int_0^{3a} M_2 m_2 dx + \int_0^a M_3 m_3 dx$$

$$\Rightarrow EI\delta = \int_0^a \left(\frac{4}{7}aP - \frac{6}{7}Px\right)(3a - x)dx + \int_a^{3a} \left(\frac{1}{7}xP - \frac{3}{7}aP\right)(3a - x)dx + \int_0^a \left(\frac{1}{7}Px - \frac{1}{7}aP\right)0dx$$

$$\Rightarrow EI\delta = \frac{a^3 P}{21}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{a^3 P}{21EI}$$

2.4.- Calcular las reacciones en el apoyo A y el desplazamiento vertical δ en C de la siguiente viga.



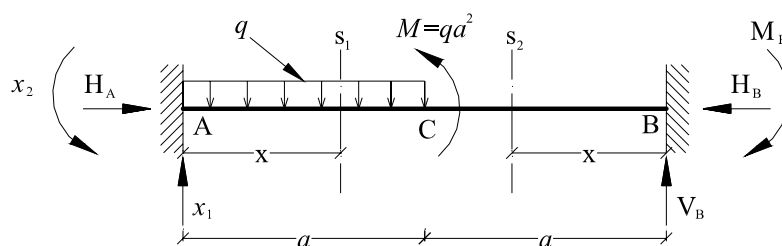
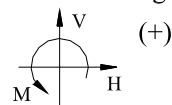
SOLUCION

$$g = n - e - c$$

$$g = 6 - 3 - 1$$

$$g = 2 \text{ redundantes}$$

Convención de signos



Estática

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A - H_B = 0 \Rightarrow H_A = H_B$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow x_1 - aq + V_B = 0 \Rightarrow V_B = aq - x_1$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow x_2 - aq\left(\frac{a}{2}\right) + M + V_B(2a) - M_B = 0$$

$$\Rightarrow M_B = x_2 + \frac{5}{2}qa^2 - 2ax_1$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_1 = x_2 - x x_1 + q x \left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow M_1 = x_2 - x x_1 + \frac{1}{2} q x^2$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} = -x$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_2} = 1$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_2 = V_B x - M_B \Rightarrow M_2 = aq x - x x_1 - x_2 - \frac{5}{2} a^2 q + 2 a x_1$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial x_1} = -x + 2a$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial x_2} = -1$$

$$\Rightarrow U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} ds \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \sum \int_0^l M_i \frac{\partial M_i}{\partial x_1} dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \int_0^a M_1 \frac{\partial M_1}{\partial x_1} dx + \int_0^a M_2 \frac{\partial M_2}{\partial x_1} dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0 = \int_0^a M_1 \frac{\partial M_1}{\partial x_2} dx + \int_0^a M_2 \frac{\partial M_2}{\partial x_2} dx$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 &= \int_0^a \left(x_2 - x x_1 + \frac{1}{2} q x^2 \right) (-x) dx + \int_0^a (a q x - x x_1 - x_2 - 2.5 a^2 q + 2 a x_1) (-x + 2a) dx \\ &64 a^3 x_1 - (48 a^2 x_2 + 77 q a^4) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = 0 = \int_0^a \left(x_2 - x x_1 + \frac{1}{2} q x^2 \right) (1) dx + \int_0^a (a q x - x x_1 - x_2 - 2.5 a^2 q + 2 a x_1) (-1) dx$$

$$12 a^2 x_1 - (12 a x_2 + 13 q a^3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{12 x_2 + 13 q a^2}{12 a}$$

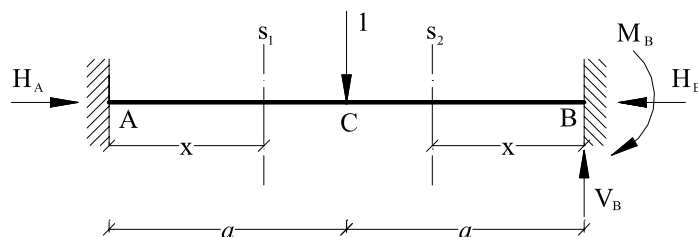
$$64 a \left(\frac{12 x_2 + 13 q a^2}{12 a} \right) - (48 x_2 + 77 q a^2) = 0$$

$$768 x_2 + 832 q a^2 - 576 x_2 - 924 q a^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{92}{192} q a^2$$

$$x_2 = \frac{23}{48} q a^2 \quad ; \quad x_1 = \frac{25}{16} q a$$

Deformación



Estática

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A - H_B = 0 \Rightarrow H_A = H_B$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow V_B - 1 = 0 \Rightarrow V_B = 1$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -M_B - 1(a) = 0 \Rightarrow M_B = a$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_1 = x_2 - x x_1 + \frac{1}{2} q x^2 \Rightarrow M_1 = \frac{23}{48} q a^2 - \frac{25}{16} q a x + \frac{1}{2} q x^2$$

$$m_1 = 0$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_2 = a q x - x x_1 - x_2 - \frac{5}{2} a^2 q + 2 a x_1 \Rightarrow M_2 = a q x - \frac{25}{16} q a x - \frac{23}{48} q a^2 - \frac{5}{2} q a^2 + (2a) \frac{25}{16} q a$$

$$M_2 = -\frac{9}{16} q a x + \frac{7}{48} q a^2$$

$$m_2 = V_B x - M_B \Rightarrow m_2 = x - a$$

$$\delta = \frac{1}{EI} \sum \int_0^l M_i m_i ds$$

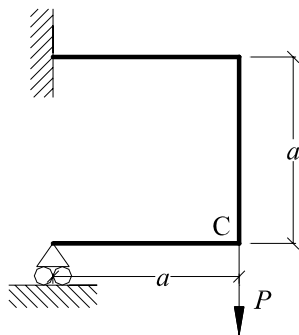
$$EI \delta = \int_0^a M_1 m_1 dx + \int_0^a M_2 m_2 dx$$

$$\Rightarrow EI \delta = \int_0^a \left(\frac{23}{48} q a^2 - \frac{25}{16} q a x + \frac{1}{2} q x^2 \right) 0 dx + \int_0^a \left(-\frac{9}{16} q a x + \frac{7}{48} q a^2 \right) (x - a) dx$$

$$\Rightarrow EI \delta = \frac{1}{48} q a^4$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{48} \frac{q a^4}{EI}$$

2.5.- Calcular las reacciones en el apoyo móvil del sistema y el desplazamiento lineal vertical δ_v de la sección C ; prescídase de las deformaciones longitudinales de los elementos del sistema y considérese iguales las rigideces EI de los elementos flexionados

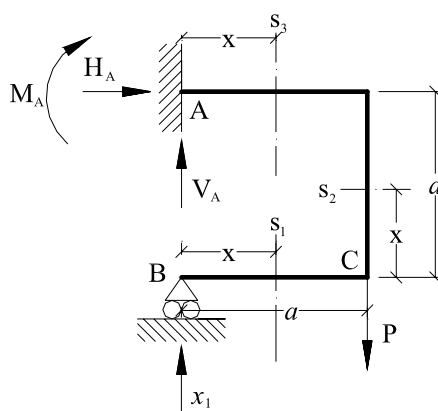


SOLUCION:

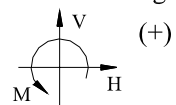
$$g = n - e - c$$

$$g = 4 - 3 - 0$$

$$g = 1 \text{ redundante}$$



Convención de signos



Estática

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow V_A + x_1 - P = 0 \Rightarrow V_A = P - x_1$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A - aP = 0 \Rightarrow M_A = -aP$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_1 = -x x_1$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} = -x$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_2 = -a x_1$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial x_1} = -a$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_3 = -M_A - V_A x$$

$$M_3 = aP - Px + x_1 x \quad \frac{\partial M_3}{\partial x_1} = x$$

$$\Rightarrow U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} ds \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \sum \int_0^l M_i \frac{\partial M_i}{\partial x_1} dx$$

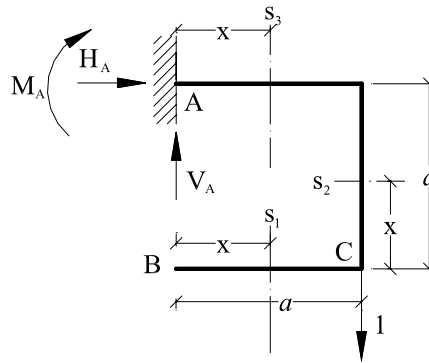
$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \int_0^a M_1 \frac{\partial M_1}{\partial x_1} dx + \int_0^a M_2 \frac{\partial M_2}{\partial x_1} dx + \int_0^a M_3 \frac{\partial M_3}{\partial x_1} dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \int_0^a (-x x_1)(-x) dx + \int_0^a (-a x_1)(-a) dx + \int_0^a (aP - Px + x_1 x)(x) dx$$

$$\Rightarrow \frac{(P + 10x_1)a^3}{6} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{10}P$$

Deformación



$$M_1 = \frac{1}{10}Px$$

$$M_2 = \frac{1}{10}aP$$

$$M_3 = aP - Px - \frac{1}{10}Px \Rightarrow M_3 = aP - \frac{11}{10}Px$$

Estática

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow V_A - 1 = 0 \Rightarrow V_A = 1$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A - 1(a) = 0$$

$$\Rightarrow M_A = -a$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$m_1 = 0$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$m_2 = 0$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$m_3 = -M_A - V_A(x) \Rightarrow m_3 = a - x$$

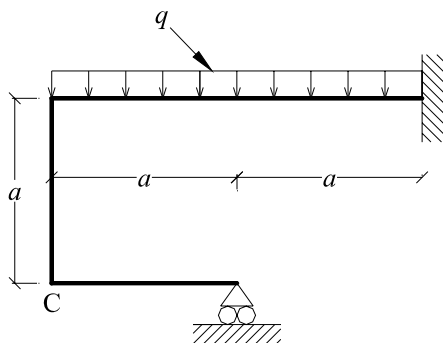
$$\delta = \frac{1}{EI} \sum \int_0^l M_i m_i ds$$

$$EI\delta = \int_0^a M_1 m_1 dx + \int_0^a M_2 m_2 dx + \int_0^a M_3 m_3 dx$$

$$\Rightarrow EI\delta = \int_0^a \left(\frac{1}{10} Px \right) 0 dx + \int_0^a \left(\frac{1}{10} aP \right) 0 dx + \int_0^a \left(aP - \frac{11}{10} Px \right) (a-x) dx$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{19}{60} \frac{Pa^3}{EI}$$

2.6.- Calcular la reacción en el apoyo móvil del sistema y el desplazamiento lineal vertical δ_v de la sección C ; prescúndase de las deformaciones longitudinales de los elementos del sistema y considérese iguales las rigideces EI de los elementos flexionados

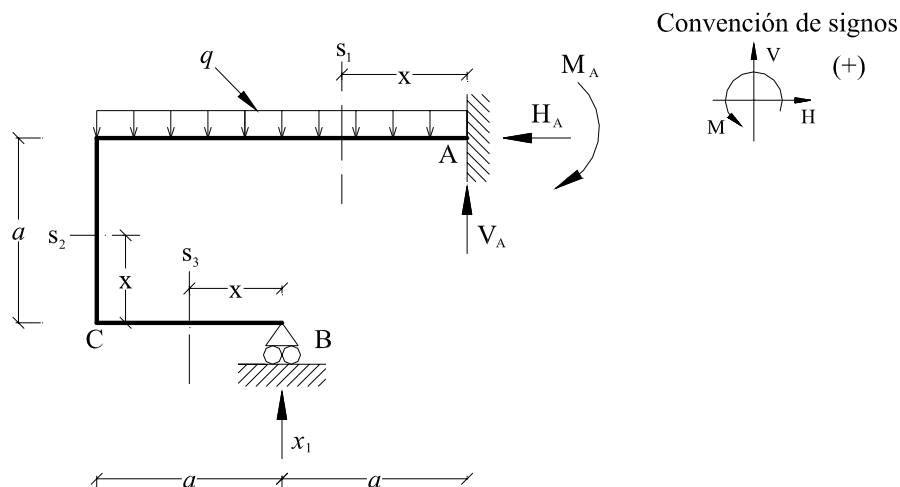


SOLUCION

$$g = n - e - c$$

$$g = 4 - 3 - 0$$

$$g = 1 \text{ redundante}$$



Estática

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow V_A + x_1 - q(2a) = 0 \Rightarrow V_A = 2aq - x_1$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A + 2qa(a) - x_1 a = 0 \Rightarrow M_A = 2a^2 q - a x_1$$

$$0 \leq x \leq 2a$$

$$M_1 = V_A x - M_A - q x \left(\frac{x}{2} \right) \Rightarrow M_1 = 2aqx - x_1 x - 2a^2 q + a x_1 - \frac{1}{2} q x^2$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} = a - x$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_2 = x_1 a$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial x_1} = a$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_3 = x_1 x \quad \frac{\partial M_3}{\partial x_1} = x$$

$$\Rightarrow U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} ds \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \sum \int_0^l M_i \frac{\partial M_i}{\partial x_1} dx$$

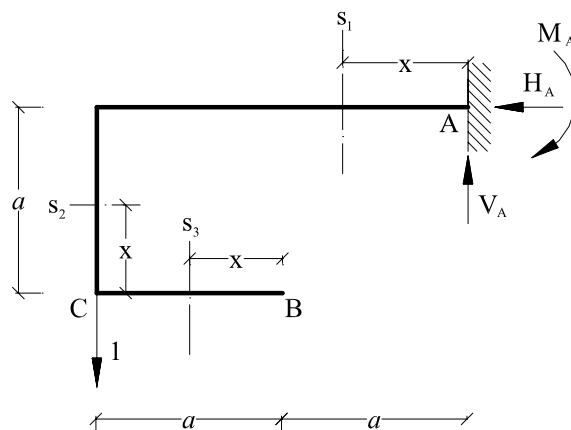
$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \int_0^{2a} M_1 \frac{\partial M_1}{\partial x_1} dx + \int_0^a M_2 \frac{\partial M_2}{\partial x_1} dx + \int_0^a M_3 \frac{\partial M_3}{\partial x_1} dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \int_0^{2a} \left(2aqx - x_1x - 2a^2q + ax_1 - \frac{1}{2}qx^2 \right) (a-x) dx + \int_0^a (x_1a)(a) dx + \int_0^a (x_1x)(x) dx$$

$$\Rightarrow \frac{2qa^4 - 6x_1a^3}{3} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}qa$$

Deformación



$$M_1 = 2aqx - x_1x - 2a^2q + ax_1 - \frac{1}{2}qx^2 \Rightarrow M_1 = 2aqx - \frac{1}{3}aqx - 2a^2q + \frac{1}{3}a^2q - \frac{1}{2}qx^2$$

$$\Rightarrow M_1 = \frac{5}{3}aqx - \frac{5}{3}a^2q - \frac{1}{2}qx^2$$

$$M_2 = x_1(a) \Rightarrow M_2 = \frac{1}{3}aq(a) \Rightarrow M_2 = \frac{1}{3}a^2q$$

$$M_3 = x_1(x) \Rightarrow M_3 = \frac{1}{3}aq(x) \Rightarrow M_3 = \frac{1}{3}aqx$$

Estática

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow V_A - 1 = 0 \Rightarrow V_A = 1$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A + 1(2a) = 0$$

$$\Rightarrow M_A = 2a$$

$$0 \leq x \leq 2a$$

$$m_1 = V_A(x) - M_A \Rightarrow m_1 = x - 2a$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$m_2 = 0$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$m_3 = 0$$

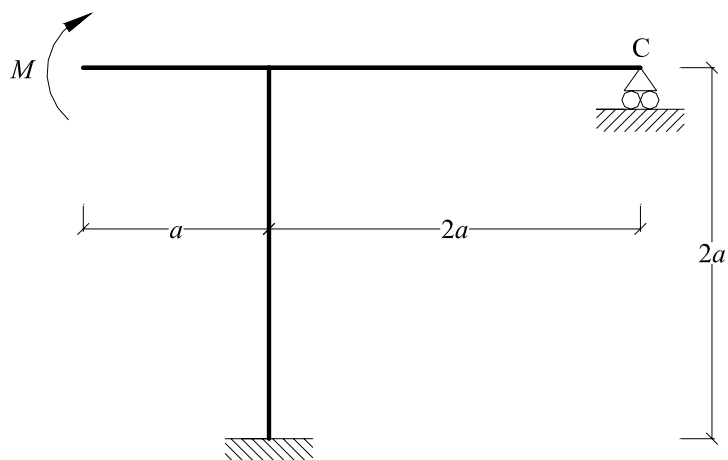
$$\delta = \frac{1}{EI} \sum \int_0^l M_i m_i ds$$

$$EI\delta = \int_0^{2a} M_1 m_1 dx + \int_0^a M_2 m_2 dx + \int_0^a M_3 m_3 dx$$

$$\Rightarrow EI\delta = \int_0^{2a} \left(\frac{5}{3} a q x - \frac{5}{3} a^2 q - \frac{1}{2} q x^2 \right) (x - 2a) dx + \int_0^a \left(\frac{1}{3} a^2 q \right) 0 dx + \int_0^a \left(\frac{1}{3} a q x \right) 0 dx$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{16}{9} \frac{q a^4}{EI}$$

2.7.- Calcular la reacción en el apoyo móvil del sistema y el desplazamiento lineal horizontal δ_h de la sección C; prescindiéndose de las deformaciones longitudinales de los elementos del sistema y considérese iguales las rigideces EI de los elementos flexionados.

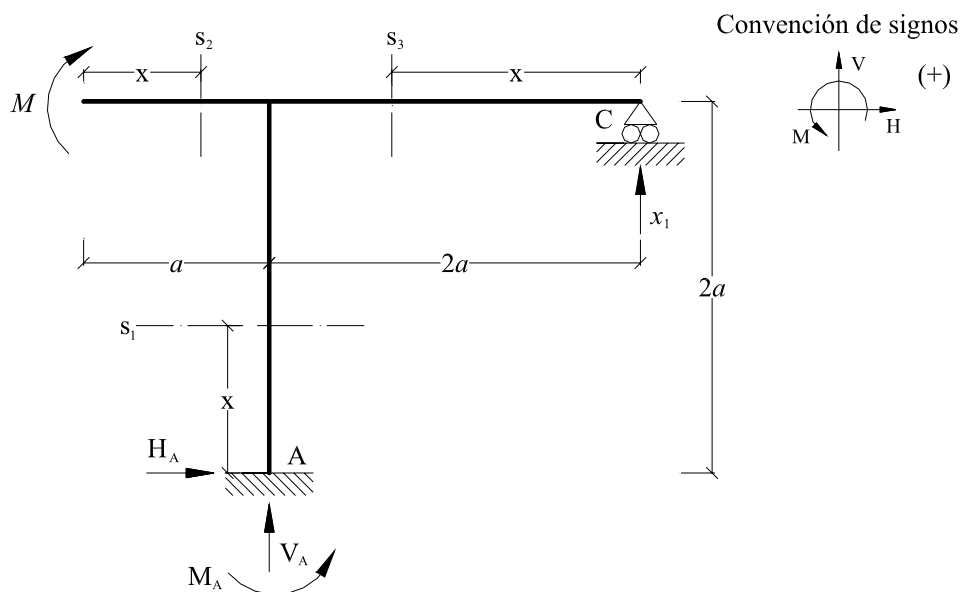


SOLUCION

$$g = n - e - c$$

$$g = 4 - 3 - 0$$

$$g = 1 \text{ redundante}$$



Estática

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow V_A + x_1 = 0 \Rightarrow V_A = -x_1$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - M + x_1(2a) = 0 \Rightarrow M_A = M - 2a x_1$$

$$0 \leq x \leq 2a$$

$$M_1 = H_A x + M_A \Rightarrow M_1 = M - 2a x_1 \quad \frac{\partial M_1}{\partial x_1} = -2a$$

$$0 \leq x \leq a$$

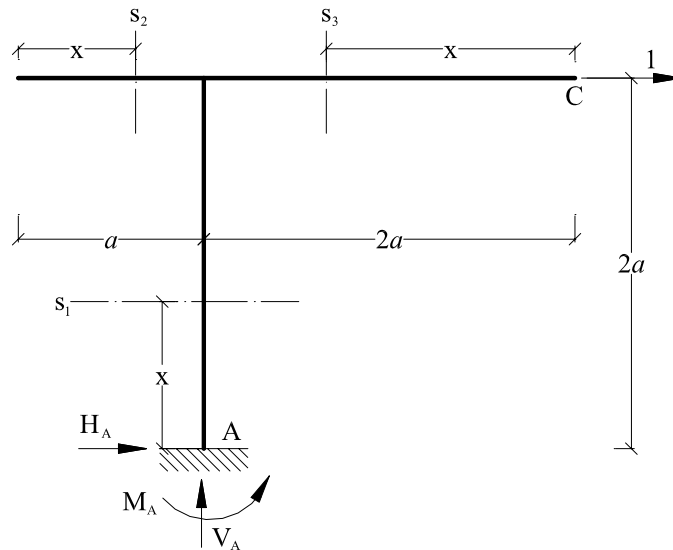
$$M_2 = -M \quad \frac{\partial M_2}{\partial x_1} = 0$$

$$0 \leq x \leq 2a$$

$$M_3 = x_1 x \quad \frac{\partial M_3}{\partial x_1} = x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow U &= \int_0^l \frac{M^2}{2EI} ds \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \sum \int_0^l M_i \frac{\partial M_i}{\partial x_1} dx \\ \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} &= 0 = \int_0^{2a} M_1 \frac{\partial M_1}{\partial x_1} dx + \int_0^a M_2 \frac{\partial M_2}{\partial x_1} dx + \int_0^{2a} M_3 \frac{\partial M_3}{\partial x_1} dx \\ \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} &= 0 = \int_0^{2a} (M - 2ax_1)(-2a) dx + \int_0^a (-M)0 dx + \int_0^{2a} (x_1 x)(x) dx \\ &\Rightarrow \frac{32a^3 x_1 - 12M a^2}{3} = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = \frac{3M}{8a} \end{aligned}$$

Deformación



$$M_1 = M - 2a x_1 \Rightarrow M_1 = M - 2a \left(\frac{3M}{8a} \right) \Rightarrow M_1 = \frac{1}{4}M$$

$$M_2 = -M$$

$$M_3 = x_1 x \Rightarrow M_3 = \frac{3}{8} \frac{M}{a} x$$

Estática

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A + 1 = 0 \Rightarrow H_A = -1$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow V_A = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - 1(2a) = 0 \Rightarrow M_A = 2a$$

$$0 \leq x \leq 2a$$

$$m_1 = M_A + H_A(x) \Rightarrow m_1 = 2a - x$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$m_2 = 0$$

$$0 \leq x \leq 2a$$

$$m_3 = 0$$

$$\delta = \frac{1}{EI} \sum \int_0^l M_i m_i ds$$

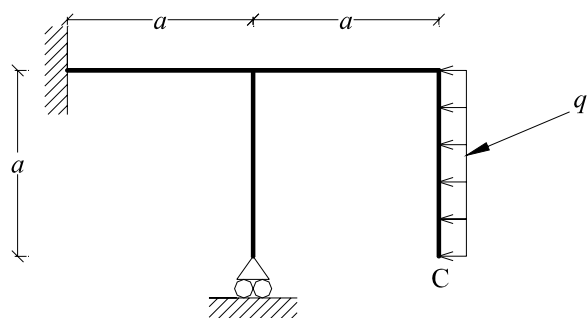
$$EI\delta = \int_0^{2a} M_1 m_1 dx + \int_0^a M_2 m_2 dx + \int_0^{2a} M_3 m_3 dx$$

$$\Rightarrow EI\delta = \int_0^{2a} \left(\frac{1}{4} M \right) (2a - x) dx + \int_0^a (-M) 0 dx + \int_0^{2a} \left(\frac{3}{8} \frac{M}{a} x \right) 0 dx$$

$$\Rightarrow EI\delta = \frac{1}{2} M a$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{2} \frac{M a^2}{EI}$$

2.8.- Calcular la reacción en el apoyo móvil del sistema y el desplazamiento lineal horizontal δ_h de la sección C; prescindiéndose de las deformaciones longitudinales de los elementos del sistema y considérese iguales las rigideces EI de los elementos flexionados.

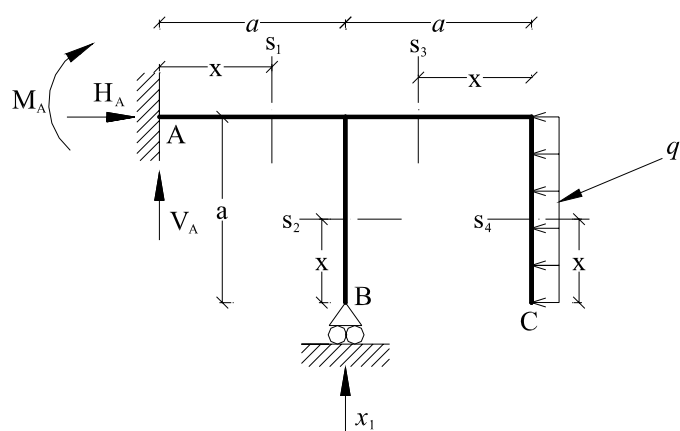


SOLUCION

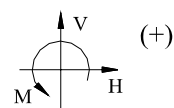
$$g = n - e - c$$

$$g = 4 - 3 - 0$$

$$g = 1 \text{ redundante}$$



Convención de signos



Estática

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A - qa = 0 \Rightarrow H_A = qa$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow V_A + x_1 = 0 \Rightarrow V_A = -x_1$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A + x_1 a - qa \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow M_A = x_1 a - \frac{1}{2} a^2 q$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_1 = -M_A - V_A x \Rightarrow M_1 = \frac{1}{2} a^2 q - a x_1 + x_1 x \quad \frac{\partial M_1}{\partial x_1} = x - a$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_2 = 0 \quad \frac{\partial M_2}{\partial x_1} = 0$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_3 = -qa \left(\frac{a}{2} \right) \Rightarrow M_3 = -\frac{1}{2} a^2 q \quad \frac{\partial M_3}{\partial x_1} = 0$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_4 = -qx \left(\frac{x}{2} \right) \Rightarrow M_4 = -\frac{1}{2} q x^2 \quad \frac{\partial M_4}{\partial x_1} = 0$$

$$\Rightarrow U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} ds \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \sum \int_0^l M_i \frac{\partial M_i}{\partial x_1} dx$$

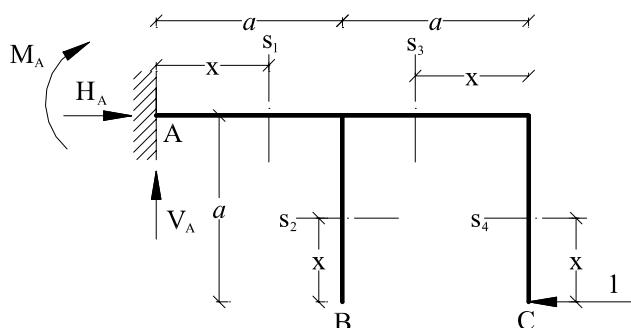
$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \int_0^a M_1 \frac{\partial M_1}{\partial x_1} dx + \int_0^a M_2 \frac{\partial M_2}{\partial x_1} dx + \int_0^a M_3 \frac{\partial M_3}{\partial x_1} dx + \int_0^a M_4 \frac{\partial M_4}{\partial x_1} dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \int_0^a \left(\frac{1}{2} a^2 q - a x_1 + x_1 x \right) (x - a) dx + \int_0^a 0 dx + \int_0^a \left(-\frac{1}{2} a^2 q \right) (0) dx + \int_0^a \left(-\frac{1}{2} q x^2 \right) (0) dx$$

$$\Rightarrow \frac{3qa^4 - 4a^3 x_1}{12} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{3}{4} qa$$

Deformación



$$M_1 = \frac{1}{2} a^2 q - a x_1 + x_1 x \Rightarrow M_1 = \frac{1}{2} a^2 q - a \left(\frac{3}{4} qa \right) + \frac{3}{4} a q x \Rightarrow M_1 = \frac{3}{4} a q x - \frac{1}{4} a^2 q$$

$$M_2 = 0$$

$$M_3 = -\frac{1}{2} a^2 q$$

$$M_4 = -\frac{1}{2} q x^2$$

Estática

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A - 1 = 0 \Rightarrow H_A = 1$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow V_A = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A - 1(a) = 0 \Rightarrow M_A = -a$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$m_1 = -M_A \Rightarrow m_1 = a$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$m_2 = 0$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$m_3 = -1(a) \Rightarrow m_3 = -a$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$m_4 = -1(x) \Rightarrow m_4 = -x$$

$$\delta = \frac{1}{EI} \sum \int_0^l M_i m_i ds$$

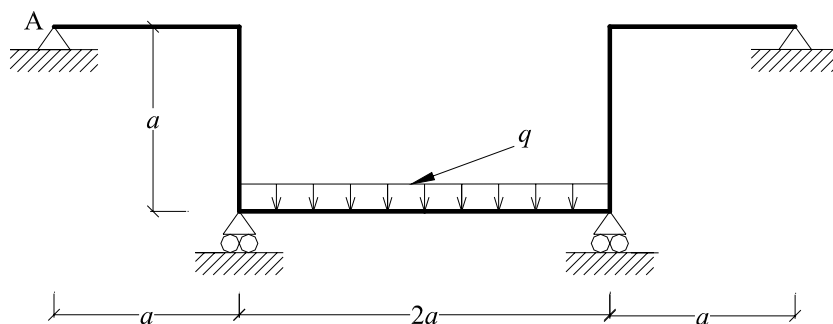
$$EI\delta = \int_0^a M_1 m_1 dx + \int_0^a M_2 m_2 dx + \int_0^a M_3 m_3 dx + \int_0^a M_4 m_4 dx$$

$$\Rightarrow EI\delta = \int_0^a \left(\frac{3}{4} a q x - \frac{1}{4} a^2 q \right) (a) dx + \int_0^a 0 dx + \int_0^a \left(-\frac{1}{2} a^2 q \right) (-a) dx + \int_0^a \left(-\frac{1}{2} q x^2 \right) (-x) dx$$

$$\Rightarrow EI\delta = \frac{3}{4} q a^4$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{3}{4} \frac{q a^4}{EI}$$

2.9.- Determinar las reacciones en el apoyo A y el desplazamiento vertical en la sección situada en el eje de simetría del sistema.

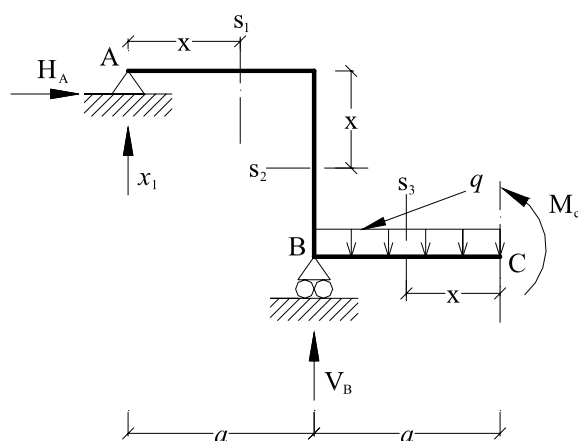


SOLUCION

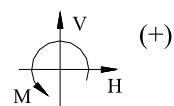
$$g = n - e - c$$

$$g = 4 - 3 - 0$$

$$g = 1 \text{ redundante}$$



Convención de signos



Estática

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow V_B + x_1 - qa = 0 \Rightarrow V_B = qa - x_1$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B(a) - aq\left(\frac{3}{2}a\right) + M_c \Rightarrow (qa - x_1)(a) - aq\left(\frac{3}{2}a\right) + M_c \Rightarrow M_c = ax_1 + \frac{1}{2}a^2q$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_1 = -x_1x$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} = -x$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_2 = -ax_1$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial x_1} = -a$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_3 = M_C - q x \left(\frac{x}{2} \right) \Rightarrow M_3 = a x_1 + \frac{1}{2} a^2 q - \frac{1}{2} q x^2 \quad \frac{\partial M_3}{\partial x_1} = a$$

$$\Rightarrow U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} ds \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \sum \int_0^l M_i \frac{\partial M_i}{\partial x_1} dx$$

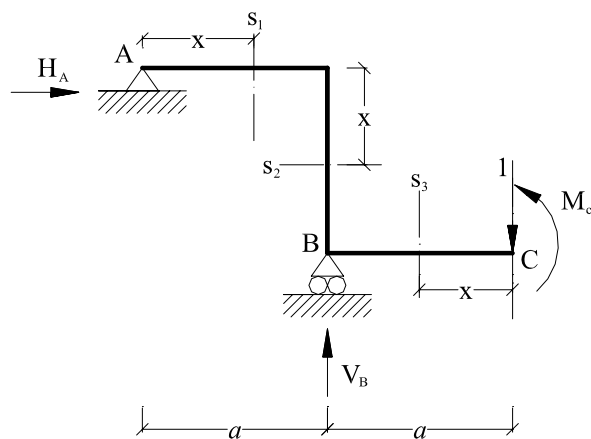
$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \int_0^a M_1 \frac{\partial M_1}{\partial x_1} dx + \int_0^a M_2 \frac{\partial M_2}{\partial x_1} dx + \int_0^a M_3 \frac{\partial M_3}{\partial x_1} dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \int_0^a (-x_1 x)(-x) dx + \int_0^a (-a x_1)(-a) dx + \int_0^a \left(a x_1 + \frac{1}{2} a^2 q - \frac{1}{2} q x^2 \right) (a) dx$$

$$\Rightarrow \frac{q a^4 + 7 a^3 x_1}{3} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{7} q a$$

Deformación



$$M_1 = -x_1 x \Rightarrow M_1 = \frac{1}{7} a q x$$

$$M_2 = -a x_1 \Rightarrow M_2 = \frac{1}{7} a^2 q$$

$$M_3 = a x_1 + \frac{1}{2} q a^2 - \frac{1}{2} q x^2 \Rightarrow M_3 = \frac{5}{14} q a^2 - \frac{1}{2} q x^2$$

Estática

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow V_B - 1 = 0 \Rightarrow V_B = 1$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B(a) - 1(2a) + M_C = 0 \Rightarrow M_C = a$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$m_1 = 0$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$m_2 = -H_4 x \quad \Rightarrow m_2 = 0$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$m_3 = -1(x) + M_c \quad \Rightarrow m_3 = -x + a$$

$$\delta = \frac{1}{EI} \sum \int_0^l M_i m_i ds$$

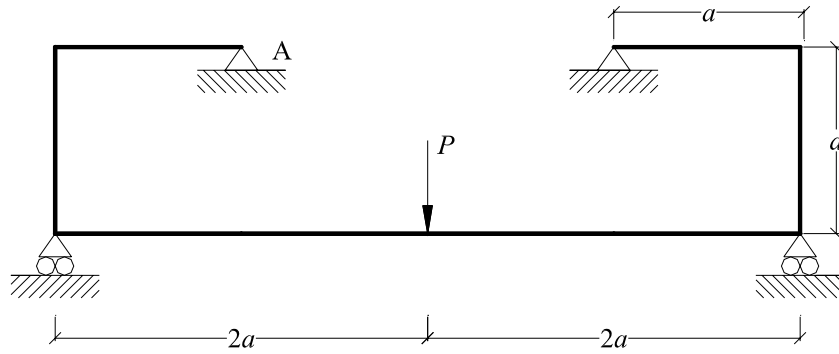
$$EI\delta = \int_0^a M_1 m_1 dx + \int_0^a M_2 m_2 dx + \int_0^a M_3 m_3 dx$$

$$\Rightarrow EI\delta = \int_0^a \left(\frac{1}{7} a q x \right) 0 dx + \int_0^a \left(\frac{1}{7} q a^2 \right) 0 dx + \int_0^a \left(\frac{5}{14} q a^2 - \frac{1}{2} q x^2 \right) (a - x) dx$$

$$\Rightarrow EI\delta = \frac{23 q a^4}{168}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{23 q a^4}{168 EI}$$

2.10.- Determinar las reacciones en el apoyo A y el desplazamiento vertical en la sección situada en el eje de simetría del sistema.

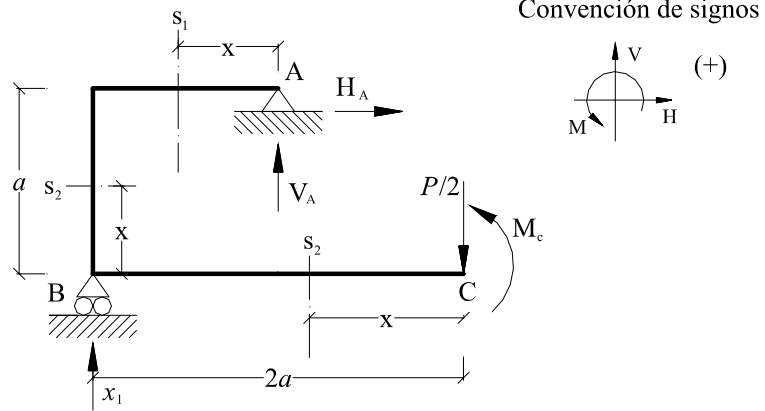


SOLUCION

$$g = n - e - c$$

$$g = 4 - 3 - 0$$

$$g = 1 \text{ redundante}$$



Estática

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow V_A + x_1 - \frac{P}{2} = 0 \Rightarrow V_A = \frac{P}{2} - x_1$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -x_1 a - \frac{P}{2}(a) + M_C = 0 \Rightarrow M_C = a x_1 + \frac{P}{2} a$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_1 = V_A(x) \Rightarrow M_1 = \left(\frac{P}{2} - x_1 \right) x \Rightarrow M_1 = \frac{P}{2} x - x_1 x$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} = -x$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_2 = M_C - \frac{P}{2}(2a) \Rightarrow M_2 = a x_1 + \frac{P}{2} a - P a \Rightarrow M_2 = a x_1 - \frac{P}{2} a$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial x_1} = a$$

$$0 \leq x \leq 2a$$

$$M_3 = M_C - \frac{P}{2}(x) \Rightarrow M_3 = ax_1 + \frac{P}{2}a - \frac{P}{2}x \quad \frac{\partial M_3}{\partial x_1} = a$$

$$\Rightarrow U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} ds \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \sum \int_0^l M_i \frac{\partial M_i}{\partial x_1} dx$$

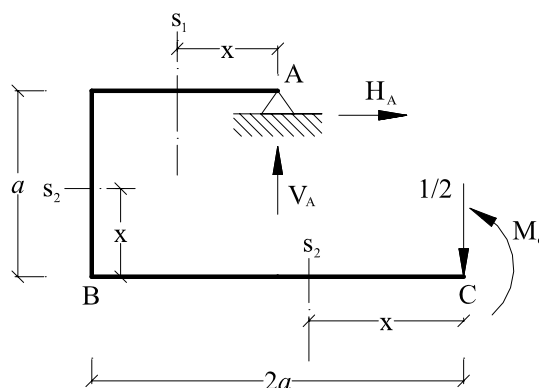
$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \int_0^a M_1 \frac{\partial M_1}{\partial x_1} dx + \int_0^a M_2 \frac{\partial M_2}{\partial x_1} dx + \int_0^{2a} M_3 \frac{\partial M_3}{\partial x_1} dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \int_0^a \left(\frac{P}{2}x - x_1x \right) (-x) dx + \int_0^a \left(ax_1 - \frac{P}{2}a \right) (a) dx + \int_0^{2a} \left(ax_1 + \frac{P}{2}a - \frac{P}{2}x \right) (a) dx$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{(2P - 10x_1)}{3} a^3$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{5}P$$

Deformación



$$M_1 = \frac{P}{2}x - x_1x \Rightarrow M_1 = \frac{P}{2}x - \frac{P}{5}x \quad \Rightarrow M_1 = \frac{3}{10}Px$$

$$M_2 = ax_1 - \frac{P}{2}a \Rightarrow M_2 = \frac{P}{5}a - \frac{P}{2}a \quad \Rightarrow M_2 = -\frac{3}{10}Pa$$

$$M_3 = ax_1 + \frac{P}{2}a - \frac{P}{2}x \Rightarrow M_3 = \frac{P}{5}a + \frac{P}{2}a - \frac{P}{2}x \quad \Rightarrow M_3 = \frac{7}{10}Pa - \frac{P}{2}x$$

Estática

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow V_A - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow V_A = \frac{1}{2}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}(a) + M_C = 0 \Rightarrow M_C = \frac{1}{2}a$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$m_1 = V_A x \quad \Rightarrow m_1 = \frac{1}{2} x$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$m_2 = -\frac{1}{2}(2a) + M_C \quad \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{2} a$$

$$0 \leq x \leq 2a$$

$$m_3 = -\frac{1}{2}x + M_C \quad \Rightarrow m_3 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a$$

$$\delta = \frac{1}{EI} \sum \int_0^l M_i m_i ds$$

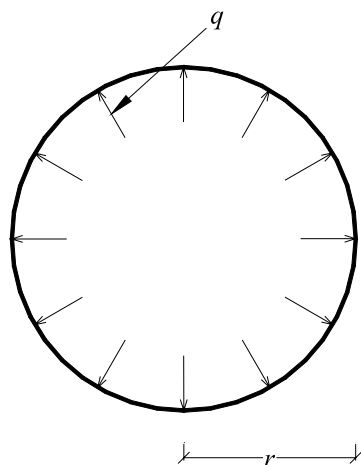
$$EI\delta = \int_0^a M_1 m_1 dx + \int_0^a M_2 m_2 dx + \int_0^{2a} M_3 m_3 dx$$

$$\Rightarrow EI\delta = \int_0^a \left(\frac{3}{10} Px \right) \left(\frac{1}{2} x \right) dx + \int_0^a \left(-\frac{3}{10} Pa \right) \left(-\frac{1}{2} a \right) dx + \int_0^{2a} \left(\frac{7}{10} Pa - \frac{P}{2} x \right) \left(-\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} a \right) dx$$

$$\Rightarrow EI\delta = \frac{11}{30} Pa^3$$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{2} = \frac{11}{30} Pa^3 \quad \Rightarrow \delta_{TOTAL} = \frac{11}{15} Pa^3$$

2.11.- Determinar el incremento del diámetro por acción de la carga q .

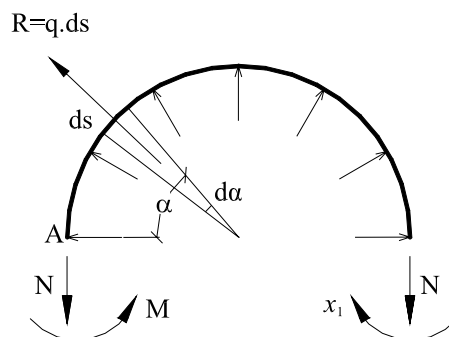


SOLUCION:

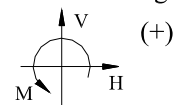
$$g = n - e - c$$

$$g = 4 - 3 - 0$$

$$g = 1 \text{ redundante}$$



Convención de signos



Carga distribuida:

$$R = q ds$$

$$ds = r d\alpha$$

Descomponiendo:

$$V_q = \int_0^l q ds \sin \alpha = \int_0^\pi q r \sin \alpha d\alpha = 2rq \uparrow$$

$$H_q = \int_0^\pi q r \cos \alpha d\alpha = 0$$

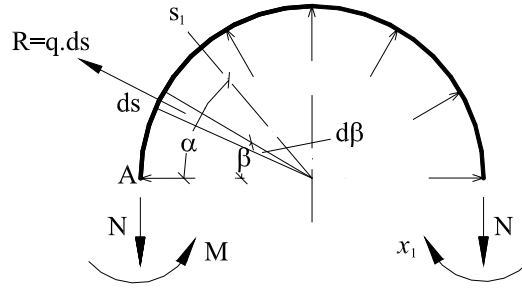
$$M_A^q = \int_0^l q ds r \sin \alpha = \int_0^\pi q r^2 \sin \alpha d\alpha = 2r^2 q$$

Estática

$$\Sigma H = 0$$

$$\Sigma V = 0 \Rightarrow -2N + 2rq = 0 \Rightarrow N = rq$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M - x_1 + 2r^2 q - 2rN = 0 \Rightarrow M = x_1$$



$$M_{\alpha}^q = \int_0^l q ds r \sin(\alpha - \beta) = \int_0^{\alpha} q r^2 \sin(\alpha - \beta) d\beta = r^2 q (1 - \cos \alpha)$$

$$0 \leq \alpha \leq \pi$$

$$M_1 = M - r^2 q (1 - \cos \alpha) + N(r - r \cos \alpha)$$

$$M_1 = x_1 - r^2 q (1 - \cos \alpha) + r q (r - r \cos \alpha)$$

$$M_1 = x_1$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} = 1$$

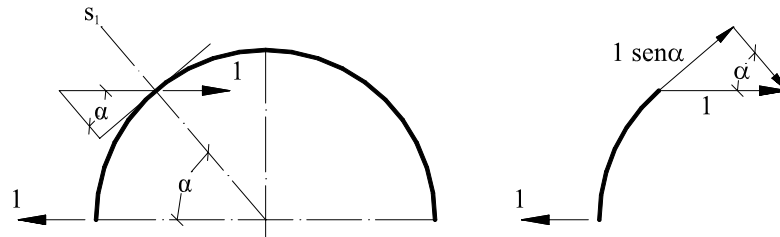
$$\Rightarrow U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} ds \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \sum \int_0^{\pi} M_i \frac{\partial M_i}{\partial x_1} dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \frac{1}{2EI} \int_0^{\pi} x_1(1) r d\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 r}{2EI} \pi = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0$$

Deformación



$$N_1 = N = r q$$

$$0 \leq \alpha \leq \pi$$

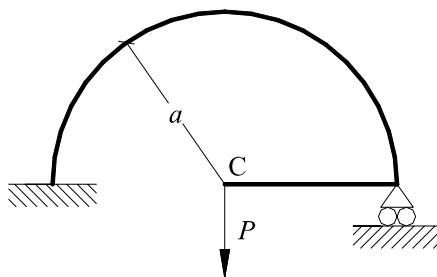
$$n_1 = 1 \sin \alpha$$

$$\delta = \int_0^l \frac{N_i n_i}{EA} ds$$

$$\delta = \int_0^{\pi} \frac{r^2 q \sin \alpha d\alpha}{EA}$$

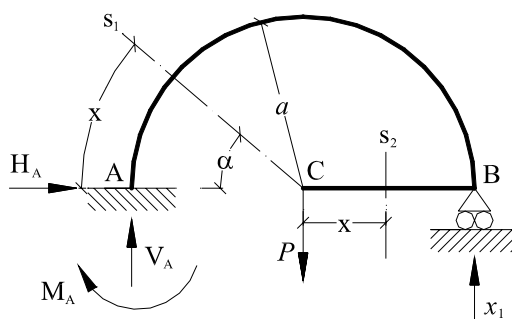
$$\Rightarrow \delta = \frac{2 q r^2}{EA}$$

2.12.- Determinar la reacción en el apoyo derecho y el desplazamiento vertical δ_v de la sección C del sistema.

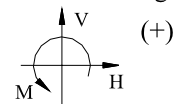


SOLUCION:

$$\begin{aligned} g &= n - e - c \\ g &= 4 - 3 - 0 \\ g &= 1 \text{ redundante} \end{aligned}$$



Convención de signos



Estática

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow V_A - P + x_1 = 0 \Rightarrow V_A = P - x_1$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow x_1 2a - M_A - Pa = 0 \Rightarrow M_A = x_1 2a - Pa$$

$$0 \leq \alpha \leq \pi$$

$$M_1 = -V_A(a - a \cos \alpha) - M_A$$

$$M_1 = -(P - x_1)(a - a \cos \alpha) - x_1 2a + Pa$$

$$M_1 = Pa \cos \alpha - x_1 a \cos \alpha - x_1 a$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} = -a \cos \alpha - a$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_2 = Px$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial x_1} = 0$$

$$\Rightarrow U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} ds \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \sum \int_0^l M_i \frac{\partial M_i}{\partial x_1} dx$$

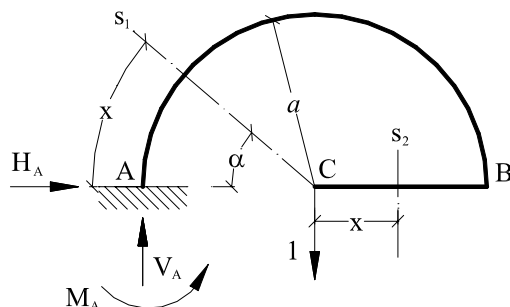
$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \int_0^\pi M_1 \frac{\partial M_1}{\partial x_1} ds + \int_0^a M_2 \frac{\partial M_2}{\partial x_1} ds \quad \text{para } M_1; ds = a d\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \int_0^\pi (Pa \cos \alpha - x_1 a \cos \alpha - x_1 a)(-a \cos \alpha - a) a d\alpha + \int_0^a Px(0) dx$$

$$\Rightarrow -\frac{(P-3x_1)a^3\pi}{2} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}P$$

Desplazamiento en C



$$M_1 = Pa \cos \alpha - x_1 a \cos \alpha - x_1 a$$

$$M_1 = Pa \cos \alpha - \frac{1}{3}Pa \cos \alpha - \frac{1}{3}Pa$$

$$M_1 = \frac{2}{3}Pa \cos \alpha - \frac{1}{3}Pa$$

$$M_2 = Px$$

Estática

$$\sum H = 0 \quad \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum V = 0 \quad \Rightarrow V_A - 1 = 0 \quad \Rightarrow V_A = 1$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow -M_A - 1(a) = 0 \quad \Rightarrow M_A = -a$$

$$0 \leq \alpha \leq \pi$$

$$m_1 = -M_A - V_A(a - a \cos \alpha)$$

$$m_1 = a - a + a \cos \alpha$$

$$m_1 = a \cos \alpha$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$m_2 = x$$

$$\delta = \frac{1}{EI} \sum \int_0^l M_i m_i ds$$

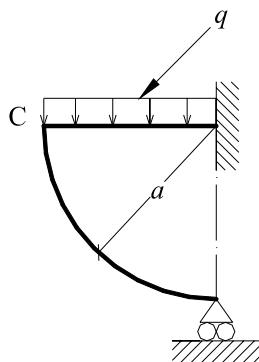
$$EI\delta = \int_0^\pi M_1 m_1 ds + \int_0^a M_2 m_2 ds$$

$$\Rightarrow EI\delta = \int_0^\pi \left(\frac{2}{3}Pa \cos \alpha - \frac{1}{3}Pa \right) (a \cos \alpha) a d\alpha + \int_0^a Px(x) dx$$

$$\Rightarrow EI\delta = \frac{Pa^3\pi + Pa^3}{3}$$

$$\Rightarrow \delta = 1.3805 \frac{Pa^3}{EI}$$

2.13.- Determinar la reacción en el apoyo móvil y el desplazamiento vertical δ_v de la sección C del sistema.

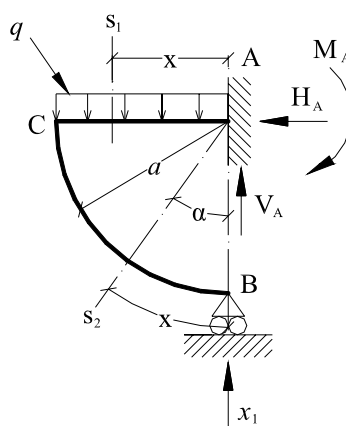


SOLUCION:

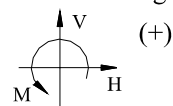
$$g = n - e - c$$

$$g = 4 - 3 - 0$$

$$g = 1 \text{ redundante}$$



Convención de signos



Estática

$$\sum H = 0 \Rightarrow -H_A = 0$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow V_A + x_1 - qa = 0 \Rightarrow V_A = qa - x_1$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A + q \frac{a^2}{2} = 0 \Rightarrow M_A = \frac{1}{2} qa^2$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_1 = V_A x - M_A - q \frac{x^2}{2}$$

$$M_1 = (qa - x_1)x - \frac{1}{2} qa^2 - q \frac{x^2}{2}$$

$$M_1 = qax - x_1 x - \frac{1}{2} qa^2 - \frac{1}{2} qx^2$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} = -x$$

$$0 \leq \alpha \leq \pi/2$$

$$M_2 = x_1 (a \sin \alpha)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} = a \sin \alpha$$

$$\Rightarrow U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} ds \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \sum \int_0^l M_i \frac{\partial M_i}{\partial x_1} dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \int_0^x M_1 \frac{\partial M_1}{\partial x_1} ds + \int_0^{\pi/2} M_2 \frac{\partial M_2}{\partial x_1} ds \quad \text{para } M_2; ds = a d\alpha$$

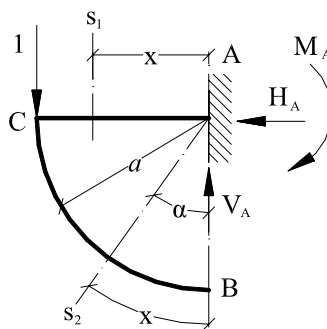
$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \int_0^x \left(qax - x_1 x - \frac{1}{2} qa^2 - \frac{1}{2} qx^2 \right) (-x) d\alpha + \int_0^{\pi/2} x_1 a \sin \alpha (a \sin \alpha) a d\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{qa^4 + 8x_1 a^3}{24} + \frac{x_1 a^3 \pi}{4} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -0.0372 qa$$

el signo negativo indica que el sentido de la reacción es contrario al asumido

Desplazamiento en C



$$M_1 = qax - (-0.0372 qa)x - \frac{1}{2} qa^2 - \frac{1}{2} qx^2$$

$$M_1 = 1.0372 qax - \frac{1}{2} qa^2 - \frac{1}{2} qx^2$$

$$M_2 = -0.0372 qa (a \sin \alpha)$$

Estática

$$\sum H = 0 \quad \Rightarrow -H_A = 0$$

$$\sum V = 0 \quad \Rightarrow V_A - 1 = 0 \quad \Rightarrow V_A = 1$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow -M_A + 1(a) = 0 \quad \Rightarrow M_A = a$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$m_1 = V_A(x) - M_A$$

$$m_1 = x - a$$

$$0 \leq \alpha \leq \pi/2$$

$$m_2 = 0$$

$$\delta = \frac{1}{EI} \sum \int_0^l M_i m_i ds$$

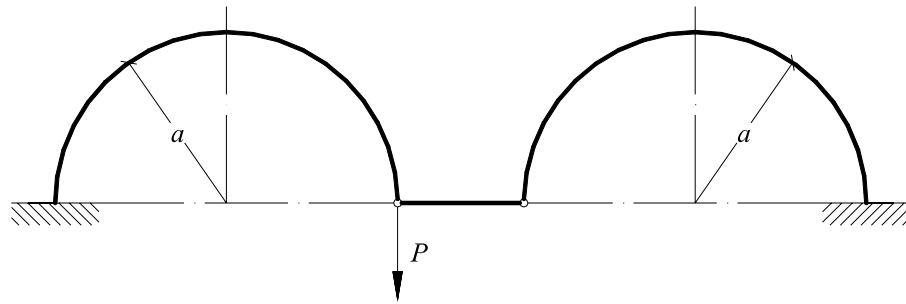
$$EI\delta = \int_0^\pi M_1 m_1 ds + \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_2 m_2 ds$$

$$\Rightarrow EI\delta = \int_0^\pi \left(1.0372qax - \frac{1}{2}qa^2 - \frac{1}{2}qx^2 \right) (x-a) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} -0.0372qa^2 \sin \alpha (0) a d\alpha$$

$$\Rightarrow EI\delta = 0.1187qa^4$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{0.1187qa^4}{EI}$$

2.14.- Determinar el desplazamiento vertical δ_v de la sección de aplicación de la fuerza P .

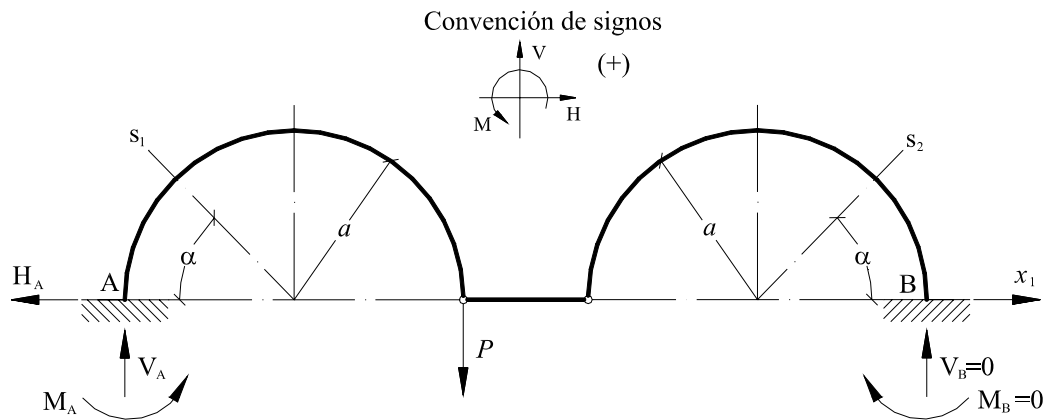


SOLUCION:

$$g = n - e - c$$

$$g = 6 - 3 - 2$$

$$g = 1 \text{ redundante}$$



Estática

$$\Sigma H = 0 \Rightarrow x_1 - H_A = 0 \Rightarrow H_A = x_1$$

$$\Sigma V = 0 \Rightarrow V_A - P = 0 \Rightarrow V_A = P$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A - P2a = 0 \Rightarrow M_A = 2Pa$$

$$0 \leq \alpha \leq \pi$$

$$M_1 = M_A - V_A(a - a \cos \alpha) - H_A(a \sin \alpha)$$

$$M_1 = 2Pa - P(a - a \cos \alpha) - x_1(a \sin \alpha)$$

$$M_1 = Pa + Pa \cos \alpha - x_1(a \sin \alpha)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} = -a \sin \alpha$$

$$0 \leq \alpha \leq \pi$$

$$M_2 = x_1 a \operatorname{sen} \alpha$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial x_1} = a \operatorname{sen} \alpha$$

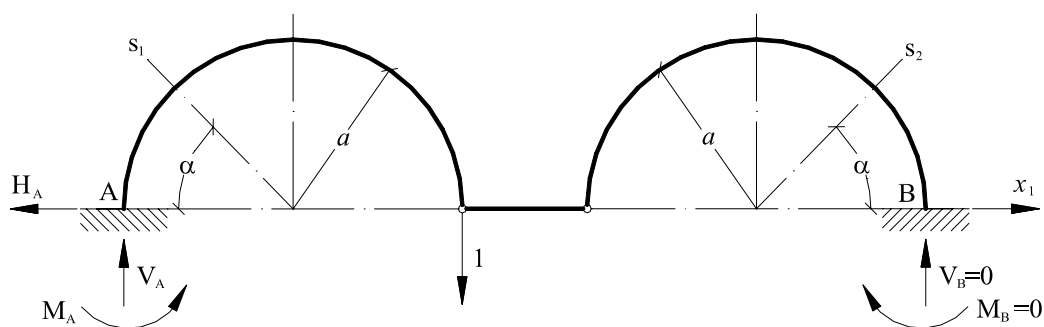
$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \int_0^\pi M_1 \frac{\partial M_1}{\partial x_1} ds + 0 + \int_0^\pi M_2 \frac{\partial M_2}{\partial x_1} ds \quad ds = a d\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \int_0^\pi (Pa + Pa \cos \alpha - x_1 (a \operatorname{sen} \alpha)) (-a \operatorname{sen} \alpha) a d\alpha + \int_0^\pi x_1 a \operatorname{sen} \alpha (a \operatorname{sen} \alpha) a d\alpha$$

$$\Rightarrow x_1 a^3 \pi - 2Pa^3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2P}{\pi}$$

Desplazamiento



Estática

$$\Sigma H = 0 \quad \Rightarrow x_1 - H_A = 0 \quad \Rightarrow H_A = x_1$$

$$\Sigma V = 0 \quad \Rightarrow V_A - 1 = 0 \quad \Rightarrow V_A = 1$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad \Rightarrow M_A - 1(2a) = 0 \quad \Rightarrow M_A = 2a$$

$$0 \leq \alpha \leq \pi$$

$$m_1 = a + a \cos \alpha - \frac{2}{\pi} (a \operatorname{sen} \alpha)$$

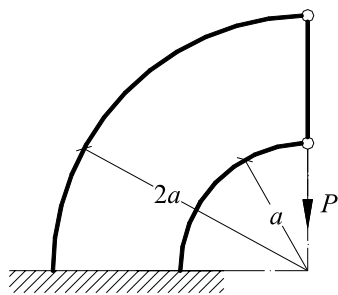
$$0 \leq \alpha \leq \pi$$

$$m_2 = x_1 a \operatorname{sen} \alpha$$

$$m_2 = \frac{2}{\pi} a \operatorname{sen} \alpha$$

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1}{EI} \sum \int_0^l M_i m_i ds \\ EI\delta &= \int_0^\pi M_1 m_1 ds + \int_0^\pi M_2 m_2 ds \\ \Rightarrow EI\delta &= \int_0^\pi \left(Pa + Pa \cos \alpha - \frac{2P}{\pi} (a \sin \alpha) \right) \left(a + a \cos \alpha - \frac{2}{\pi} (a \sin \alpha) \right) a d\alpha + \int_0^\pi \frac{2}{\pi} Pa \sin \alpha \left(\frac{2}{\pi} a \sin \alpha \right) a d\alpha \\ \Rightarrow EI\delta &= \frac{3Pa^3\pi^2 - 8Pa^3}{2\pi} \\ \Rightarrow \delta &= 3.44 \frac{Pa^3}{EI}\end{aligned}$$

2.15.- Determinar el desplazamiento vertical δ_v de la sección de aplicación de la fuerza P .

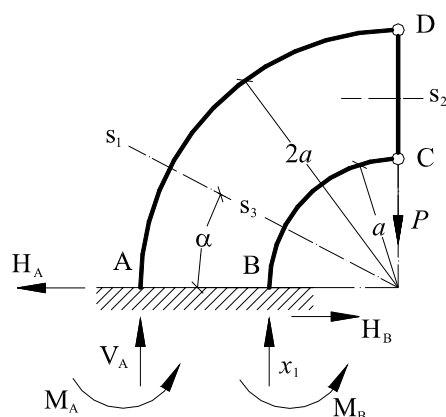


SOLUCION:

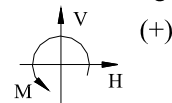
$$g = n - e - c$$

$$g = 6 - 3 - 2$$

$$g = 1 \text{ redundante}$$



Convención de signos



Estática

$$\Sigma H = 0 \Rightarrow H_B - H_A = 0 \Rightarrow H_B = H_A$$

$$\Sigma V = 0 \Rightarrow V_A + x_1 - P = 0 \Rightarrow V_A = P - x_1$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A + M_B + x_1 a - P 2a = 0$$

$$\Sigma M_{Izq}^D = 0 \Rightarrow M_A - V_A 2a - H_A 2a = 0 \Rightarrow M_A = V_A 2a + H_A 2a$$

$$\Sigma M_{Der}^C = 0 \Rightarrow M_B - x_1 a + H_B a = 0 \Rightarrow M_B = x_1 a - H_B a$$

$$\Rightarrow M_A + M_B + x_1 a - P 2a = 0$$

$$\Rightarrow V_A 2a + H_A 2a + x_1 a - H_B a + x_1 a - P 2a = 0$$

$$\Rightarrow (P - x_1) 2a + H_A 2a + x_1 a - H_B a + x_1 a - P 2a = 0$$

$$\Rightarrow H_A 2a - H_B a = 0$$

$$\Rightarrow H_B 2a - H_B a = 0$$

$$\Rightarrow H_B = 0$$

$$\Rightarrow H_A = 0$$

$$\Rightarrow M_A = 2Pa - 2x_1a$$

$$\Rightarrow M_B = x_1a$$

$$0 \leq \alpha \leq \pi/2$$

$$M_1 = M_A - V_A(2a - 2a\cos\alpha)$$

$$M_1 = 2Pa - 2x_1a - (P - x_1)(2a - 2a\cos\alpha)$$

$$M_1 = 2Pa\cos\alpha - 2x_1a\cos\alpha$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} = -2a\cos\alpha$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$M_2 = 0$$

$$0 \leq \alpha \leq \pi/2$$

$$M_3 = M_B - x_1(a - a\cos\alpha)$$

$$M_3 = x_1a - x_1(a - a\cos\alpha)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} = a - (a - a\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} ds \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \sum \int_0^l M_i \frac{\partial M_i}{\partial x_1} dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \int_0^{\pi/2} M_1 \frac{\partial M_1}{\partial x_1} ds + 0 + \int_0^{\pi/2} M_3 \frac{\partial M_3}{\partial x_1} ds$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 = \int_0^{\pi/2} (2Pa\cos\alpha - 2x_1a\cos\alpha)(-2a\cos\alpha)2a d\alpha + \int_0^{\pi/2} (x_1a - x_1(a - a\cos\alpha))(a - (a - a\cos\alpha))a d\alpha$$

$$\Rightarrow -\frac{(8P - 9x_1)a^3\pi}{4} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{8}{9}P$$

Desplazamiento

$$0 \leq \alpha \leq \pi/2$$

$$M_1 = 2Pa\cos\alpha - 2x_1a\cos\alpha$$

$$M_1 = 2Pa\cos\alpha - 2\left(\frac{8}{9}P\right)a\cos\alpha$$

$$M_1 = \frac{2}{9}Pa\cos\alpha$$

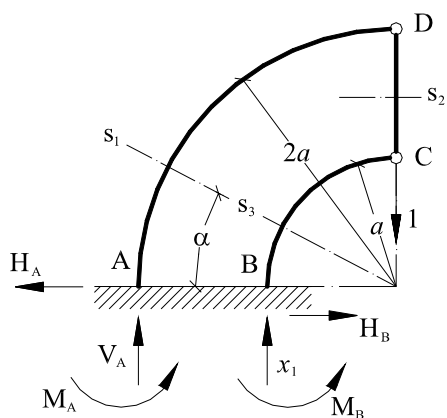
$$0 \leq \alpha \leq \pi/2$$

$$M_3 = x_1a - x_1(a - a\cos\alpha)$$

$$M_3 = \frac{8}{9}Pa - \frac{8}{9}P(a - a\cos\alpha)$$

$$M_3 = \frac{8}{9}Pa\cos\alpha$$

Para determinar los valores de m_i se debe remplazar la carga unitaria $P=1$ en las ecuaciones de M_i esto debido a que la carga P esta situada en el punto en el cual se desea hallar el desplazamiento,



$$0 \leq \alpha \leq \pi/2$$

$$m_1 = \frac{2}{9} a \cos \alpha$$

$$0 \leq \alpha \leq \pi/2$$

$$m_3 = \frac{8}{9} a \cos \alpha$$

$$\delta = \frac{1}{EI} \sum \int_0^l M_i m_i ds$$

$$EI\delta = \int_0^{\pi/2} M_1 m_1 ds + \int_0^{\pi/2} M_3 m_3 ds$$

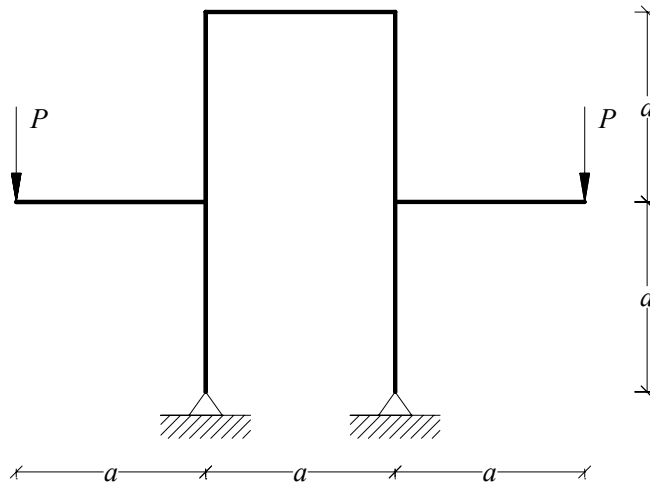
$$\Rightarrow EI\delta = \int_0^{\pi/2} \frac{2}{9} P a \cos \alpha \left(\frac{2}{9} a \cos \alpha \right) 2a d\alpha + \int_0^{\pi/2} \frac{8}{9} P a \cos \alpha \left(\frac{8}{9} a \cos \alpha \right) a d\alpha$$

$$\Rightarrow EI\delta = \frac{2\pi P a^3}{9}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{2\pi P a^3}{9 EI}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

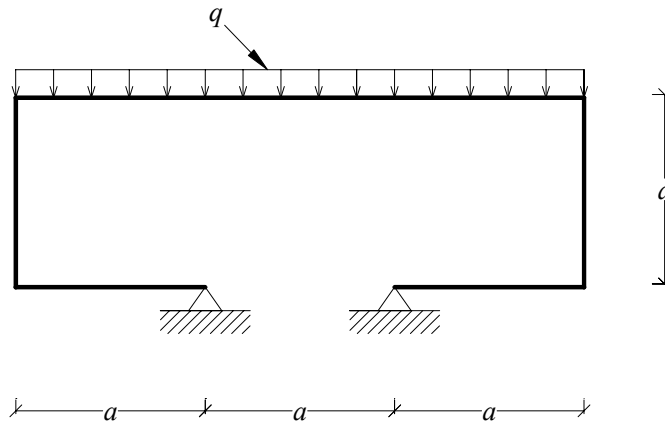
2.1.- Determinar las reacciones horizontales de los apoyos en el sistema.



SOLUCIÓN:

$$x_1 = \frac{15}{28} P$$

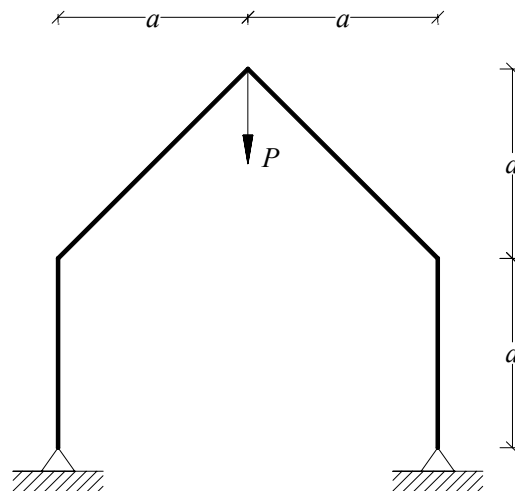
2.2.- Determinar las reacciones horizontales de los apoyos en el sistema.



SOLUCIÓN:

$$x_1 = \frac{45}{44} a q$$

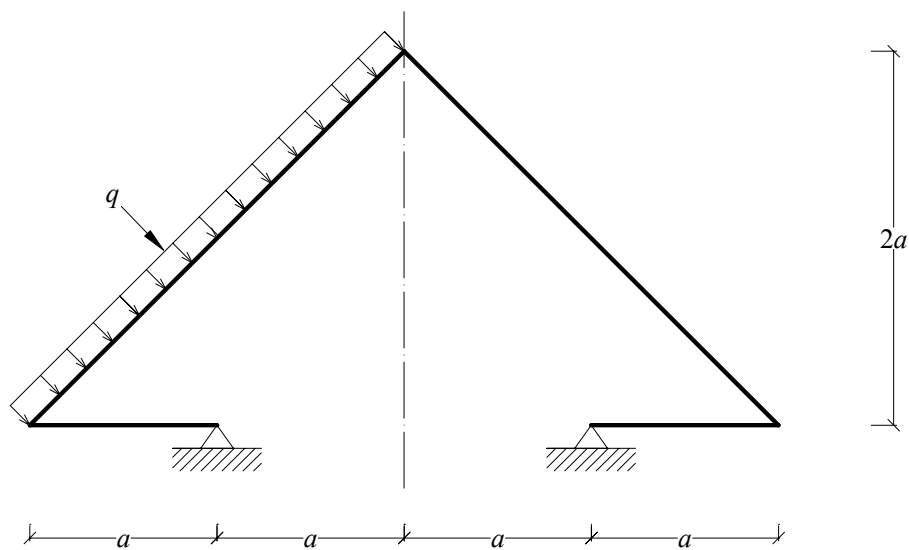
2.3.- Determinar las reacciones horizontales de los apoyos en el sistema.



SOLUCIÓN:

$$x_1 \approx 0.162 P$$

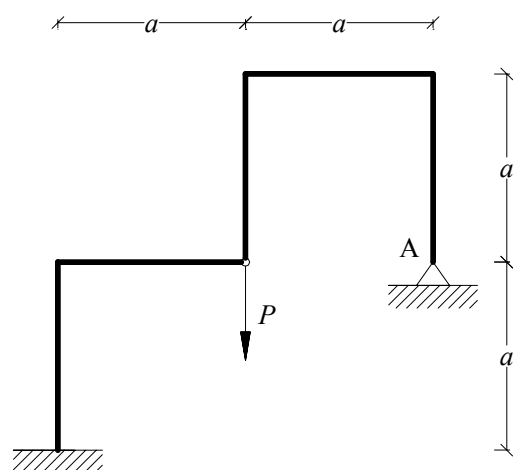
2.4.- Determinar las reacciones horizontales de los apoyos en el sistema.



SOLUCIÓN:

$$x_1 = \frac{3}{2} a q$$

2.5.- Calcular las componentes de las reacciones en el apoyo A del sistema.

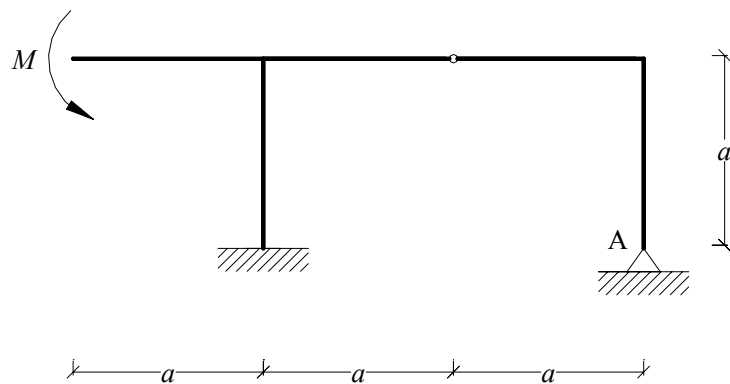


SOLUCIÓN:

$$V_A = 0$$

$$H_A = \frac{1}{4} P$$

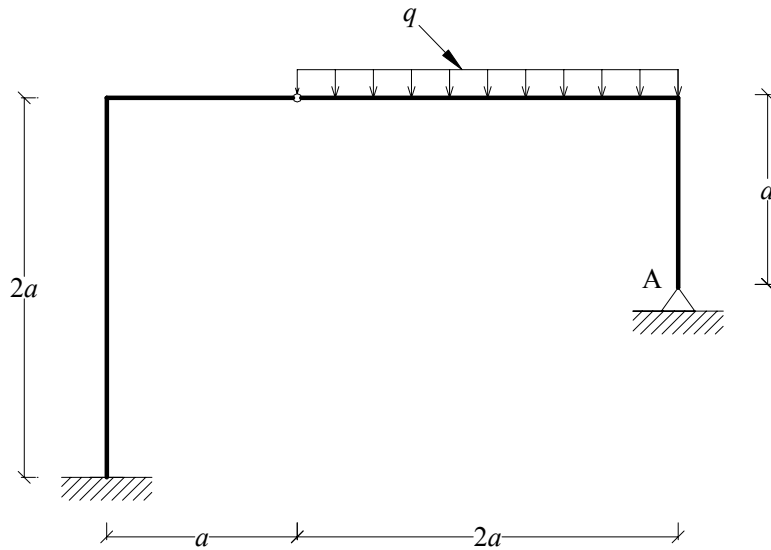
2.6.- Calcular las componentes de las reacciones en el apoyo A del sistema.



SOLUCIÓN:

$$H_A = V_A = \frac{9}{20} \frac{M}{a}$$

2.7.- Calcular las componentes de las reacciones en el apoyo A del sistema.

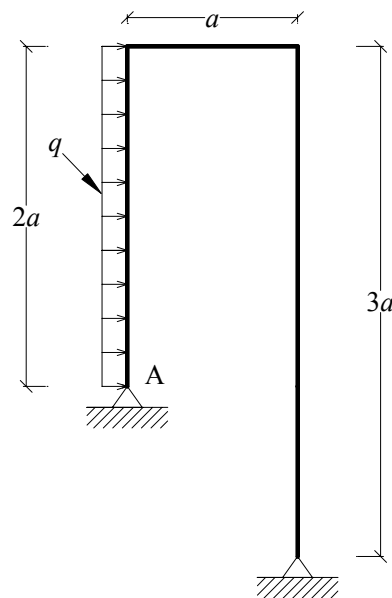


SOLUCIÓN:

$$H_A = \frac{14}{25}qa$$

$$V_A = \frac{32}{25}qa$$

2.8.- Calcular las componentes de las reacciones en el apoyo A del sistema.

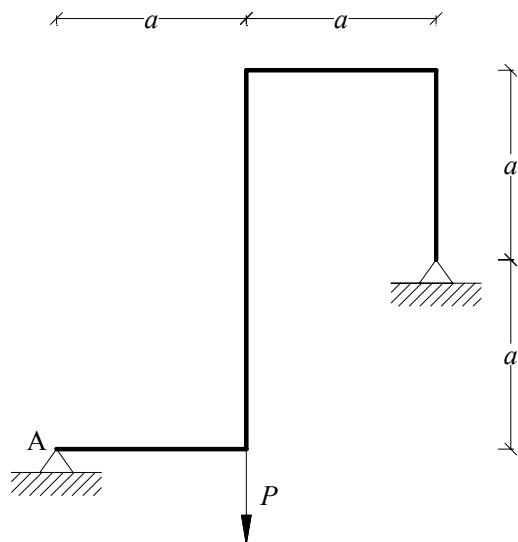


SOLUCIÓN:

$$H_A = \frac{91}{54}aq$$

$$V_A = \frac{125}{54}aq$$

2.9.- Calcular las componentes de las reacciones en el apoyo A del sistema.

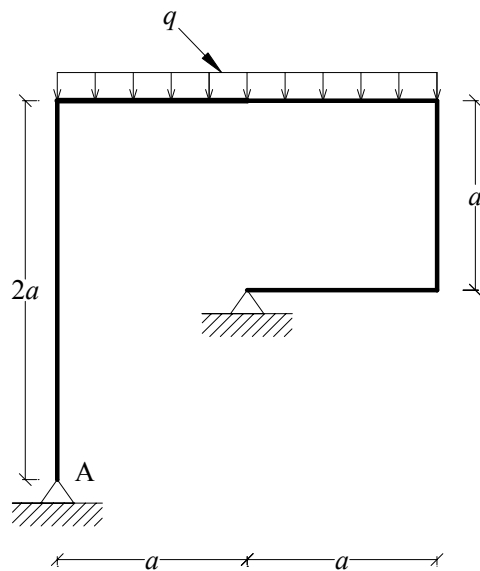


SOLUCIÓN:

$$H_A = \frac{9}{38} P$$

$$V_A = \frac{14}{19} P$$

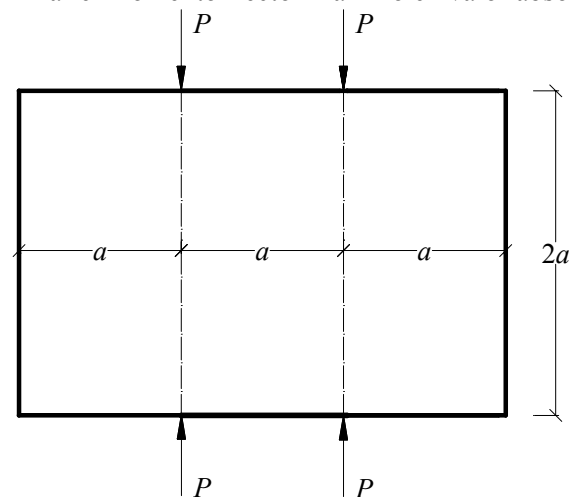
2.10.- Calcular las componentes de las reacciones en el apoyo A del sistema.



SOLUCIÓN:

$$H_A = V_A = \frac{1}{6} q a$$

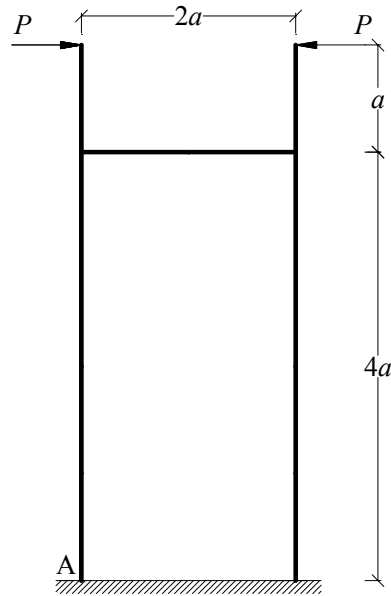
2.11.- Determinar el momento flector máximo en valor absoluto del siguiente sistema.



SOLUCIÓN:

$$x_1 = \frac{3}{5} P a$$

2.12.- Determinar las componentes reactivas en la sección de apoyo A del sistema.



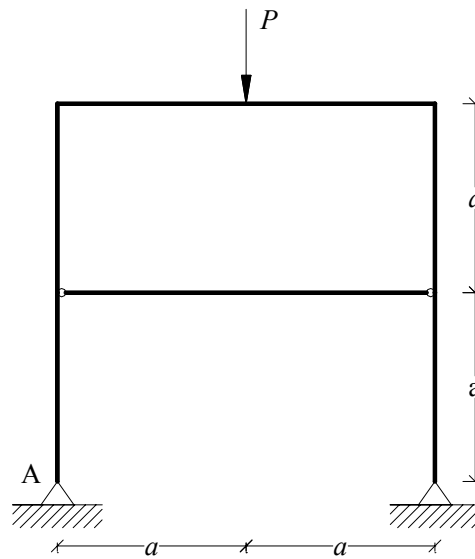
SOLUCIÓN:

$$H_A = \frac{3}{16}P$$

$$V_A = 0$$

$$M_A = \frac{1}{4}Pa$$

2.13.- Determinar las componentes reactivas en la sección de apoyo A del sistema.

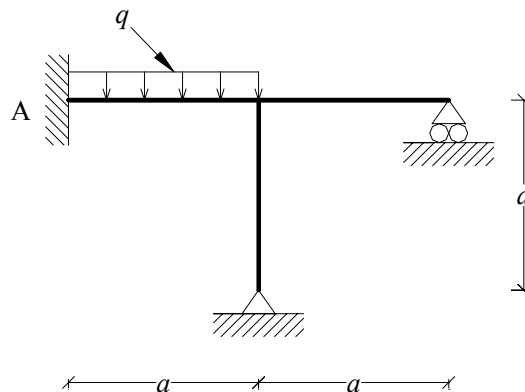


SOLUCIÓN:

$$H_A = \frac{3}{62}P$$

$$V_A = \frac{P}{2}$$

2.14.- Determinar las componentes reactivas en la sección de apoyo A del sistema.

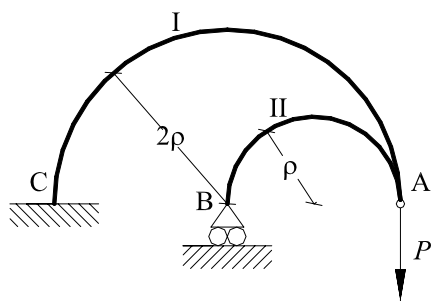


SOLUCIÓN:

$$H_A = \frac{1}{40}qa$$

$$V_A = \frac{11}{20}qa$$

2.15.- Dado P , ρ , E e $I_I = 2I_I$ de una barra de curvatura pequeña. Determinar los desplazamientos horizontal δ_x y vertical δ_y de la articulación A.

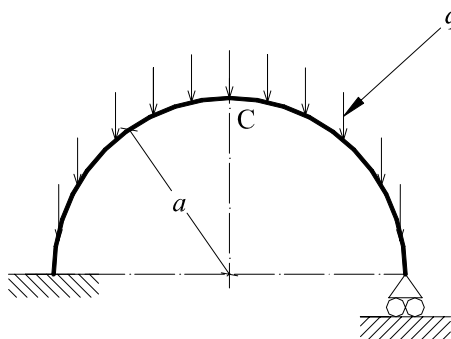


SOLUCIÓN:

$$\delta_x = \frac{16 P \rho^3}{17 E I_I} \approx 0.941 \frac{P \rho^3}{E I_I}$$

$$\delta_y = 8 \left(\frac{3}{2} \pi - \frac{128}{17\pi} \right) \frac{P \rho^3}{E I_I} \approx 18.5 \frac{P \rho^3}{E I_I}$$

2.16.- Determinar la reacción en el apoyo derecho y el desplazamiento vertical δ de la sección C del sistema. Considere que la carga q está distribuida uniformemente en dirección horizontal

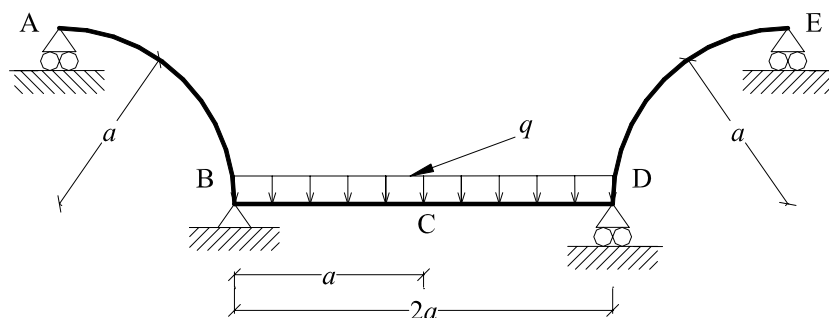


SOLUCIÓN:

$$x_1 = \frac{5}{6} q a$$

$$\delta = \frac{\pi q a^4}{24 E I}$$

2.17.- Determinar la reacción en el apoyo E y el desplazamiento vertical δ de la sección C del siguiente sistema.

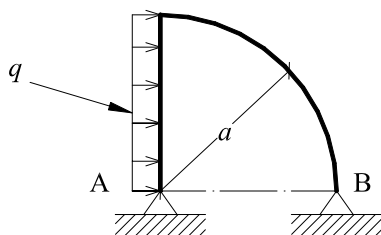


SOLUCIÓN:

$$x_1 = 0.18669 q a$$

$$\delta = 0.115 \frac{q a^4}{E I}$$

2.18.- Determinar las componentes reactivas en el apoyo A del sistema.



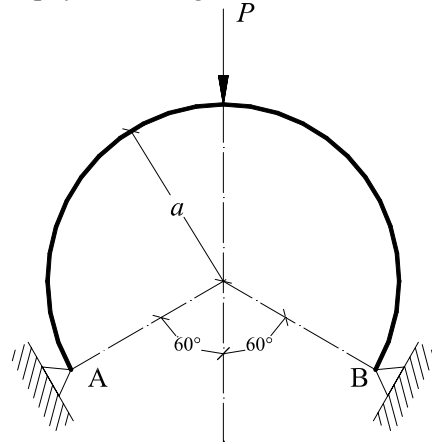
SOLUCIÓN:

$$H_A = 0.590 q a$$

$$V_A = \frac{1}{2} q a$$

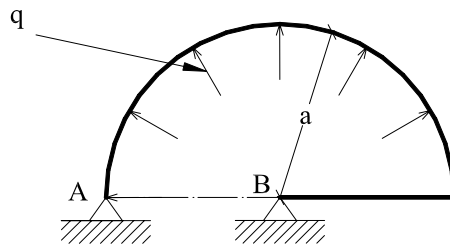
2.19.- Determinar las componentes

reactivas en el apoyo A del siguiente sistema.



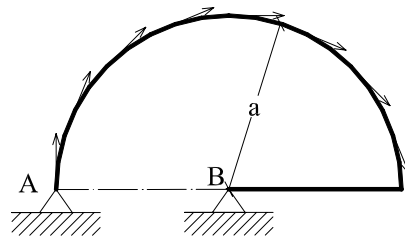
SOLUCIÓN:
 $H_A = 0.786 P$
 $V_A = \frac{1}{2} P$

20.- Determinar las componentes reactivas en el apoyo A del sistema.



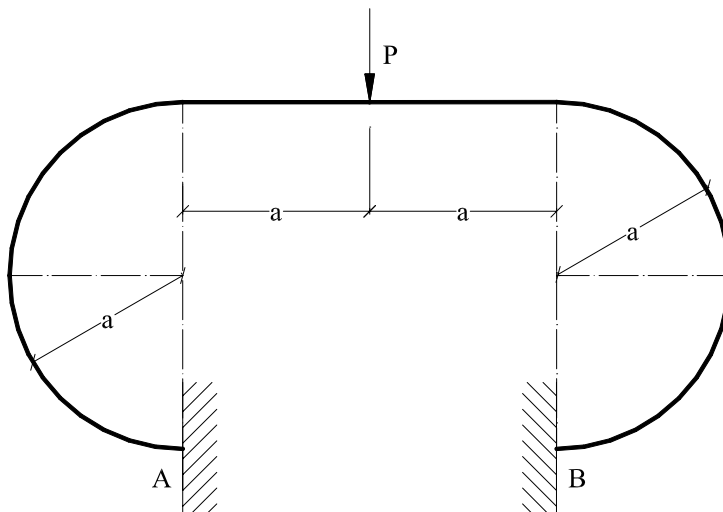
SOLUCIÓN:
 $H_A = \frac{4}{\pi} q a$
 $V_A = 0$

21.- Determinar las componentes reactivas en el apoyo A del sistema.



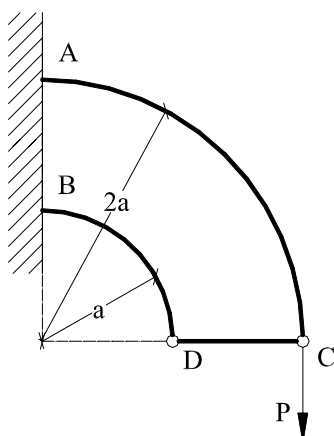
SOLUCIÓN:
 $H_A = 3 q a$
 $V_A = \pi q a$

22.- Determinar las componentes reactivas en el apoyo A del sistema.



SOLUCIÓN:
 $H = 0.722 P$
 $V = \frac{1}{2} P$
 $M = 1.077 P a$

23.- Determinar el desplazamiento vertical δ de la sección de aplicación de la fuerza P

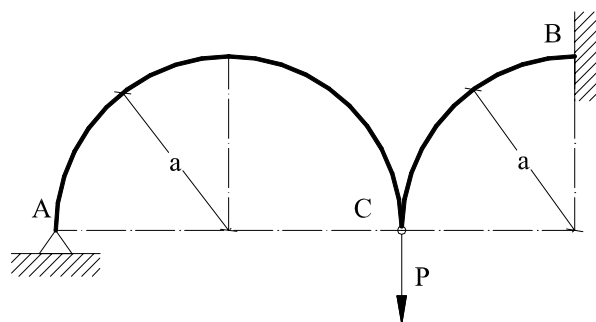


SOLUCIÓN:

$$x_1 = \frac{16}{9\pi} P$$

$$\delta = 0.586 \frac{P a^3}{E I}$$

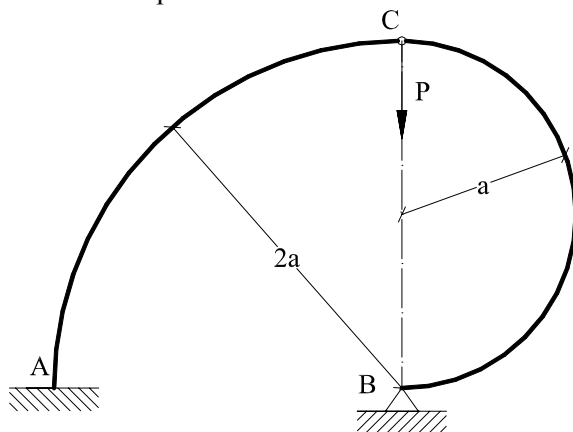
24.- Determinar el desplazamiento vertical δ de la sección de aplicación de la fuerza P



SOLUCIÓN:

$$\delta = 0.25 \frac{P a^3}{E I}$$

25.- Determinar el desplazamiento vertical de la sección de aplicación de la fuerza P



SOLUCIÓN:

$$\delta = \frac{2\pi}{5} \frac{P a^3}{E I}$$

CAPITULO 3

RIGIDEZ Y FLEXIBILIDAD

3.1 Influencia de los coeficientes de rigidez en elementos prismáticos

En esta sección se calcularán coeficientes reales para elementos de sección transversal constante (elementos prismáticos). Elementos similares a los empleados en ingeniería estructural. Se asumirá que los desplazamientos son pequeños, para que los efectos secundarios como la reducción en la longitud de la viga debido a la flexión puedan ignorarse, y las fuerzas axiales que producen esta flexión, son mucho menores a la carga de pandeo de Euler $P_E = \pi^2(EI/L^2)$.

Un elemento es mostrado en la figura 3.1-1. Asociado al elemento se encuentran un grupo de ejes los cuales no coinciden con los ejes de los otros elementos de la estructura. El eje x se define a lo largo del eje centroidal del elemento, la dirección del eje positivo es de 1 a 2, los ejes y y z completan el sistema de giro de la mano derecha, y estos se escogen como los ejes principales de la sección transversal del elemento, se asume que si una fuerza se aplica en la dirección de un plano solo causara desplazamiento en ese plano.

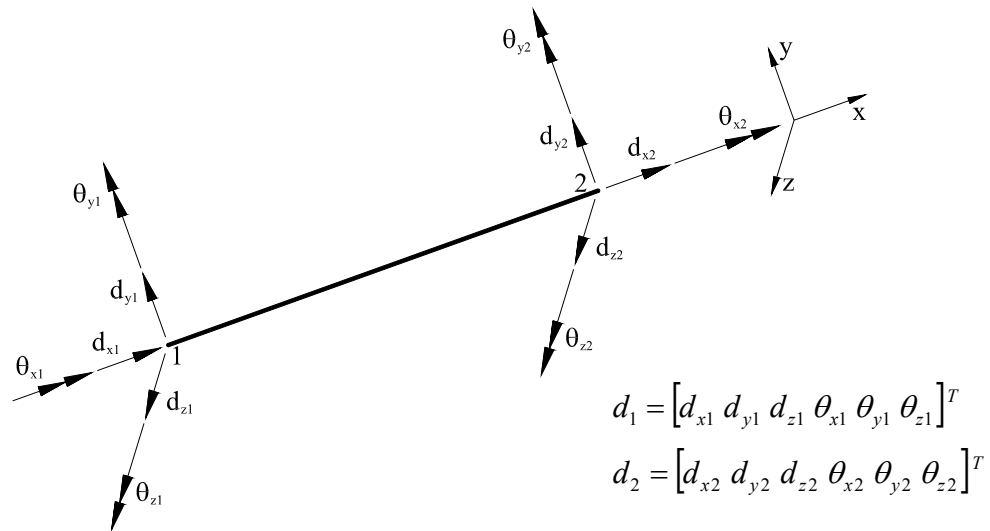


Figura 3.1-1 Grados de libertad de un elemento de extremos 1-2 en el espacio.

En la figura 3.1-1 se aprecia la posible existencia de tres desplazamientos lineales y tres rotaciones que afectan a cada extremo del elemento.

Donde d denota los desplazamientos lineales y θ denota las rotaciones. El primer sufijo representa la dirección del desplazamiento, o el eje alrededor del cual se da la rotación. El segundo sufijo denota el extremo en el que sucede el desplazamiento lineal como la rotación del elemento involucrado. Existen 12 posibles direcciones de desplazamiento o 12 grados de libertad.

Asociado a cada desplazamiento existe una fuerza o momento correspondiente como se muestra en la figura 3.1-2: p denota la dirección de la fuerza y m denota los momentos: p_x denota la fuerza axial, p_y y p_z son cortantes; m_x es un momento de torsión; siendo m_y y m_z son momentos flexionantes.

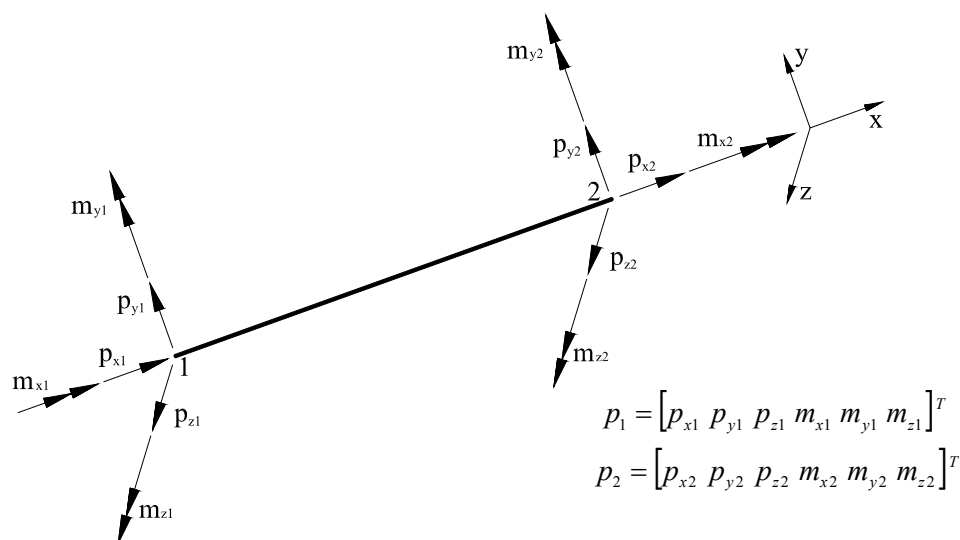


Figura 3.1-2 Fuerzas y Momentos de un elemento de extremos 1-2 en el espacio.

Las propiedades físicas del elemento son designadas de manera convencional donde: E , G , L , y A denotan: modulo de Young, modulo de corte, longitud y área de la sección transversal respectivamente.

Los momentos de inercia principales son I_y e I_z , el subíndice indica el eje en el cual tiene lugar el momento. El momento de inercia polar es I_x donde el subíndice indica el eje en el cual tiene lugar el momento torsor. Como la palabra fuerza pudo ser usada frecuentemente para denotar una fuerza directa o un momento de flexión. Similarmente la palabra desplazamiento puede indicar un desplazamiento lineal o rotacional.

La influencia de los coeficientes de rigidez de un elemento esta condicionada por el tipo de apoyos, donde los desplazamientos unitarios ocurren en aislamiento para cada extremo del elemento. Para desplazamientos unitarios, se asume que ocurre uno en un instante de tiempo; donde todos estos desplazamientos son cercanos a cero. Esto se muestra en las figuras 3.1-3 a 3.1-6. Las fuerzas resultantes siempre están en equilibrio, y por consiguiente se elaboran seis ecuaciones generales:

$$\begin{aligned} p_{x1} + p_{x2} &= 0 \\ p_{y1} + p_{y2} &= 0 \\ p_{z1} + p_{z2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1-1)$$

$$\begin{aligned} m_{x1} + m_{x2} &= 0 \\ m_{y1} + m_{y2} &= -p_{z1}L \\ m_{z1} + m_{z2} &= p_{y1}L \end{aligned} \quad (3.1-2)$$

Considerando el desplazamiento d_{x1} en la figura 3.1-3(a); debido a que p_{x1} es una fuerza normal al elemento, entonces:

$$N_x = p_{x1}$$

La energía de deformación (U) es:

$$U = \int_0^L \frac{p_{x1}^2}{2EA} dx \quad \frac{\partial U}{\partial p_{x1}} = \int_0^L \frac{2p_{x1}}{2EA} dx \quad \frac{\partial U}{\partial p_{x1}} = \frac{p_{x1}}{EA} L$$

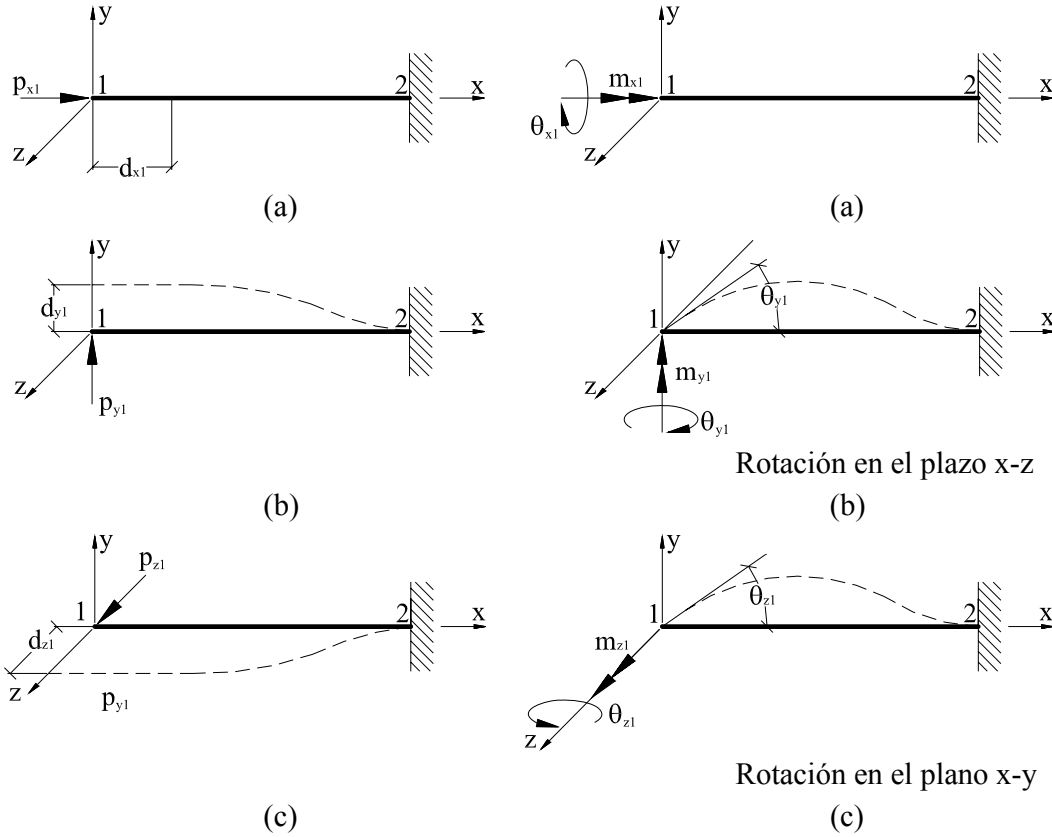


Figura 3.1-3 Desplazamientos lineales en el extremo 1 producidos por la fuerza p_1 .

Figura 3.1-4 Rotaciones en el extremo 1 producidas por el momento m_1 .

(Del teorema de Castigliano ecuación (2.7-8), debido a la correspondencia entre p_{x1} y d_{x1}) se tiene:

$$\frac{\partial U}{\partial p_{x1}} = d_{x1}$$

Igualando ambas ecuaciones, se obtiene:

$$\frac{p_{x1}}{EA} L = d_{x1}$$

Entonces:

$$p_{x1} = \frac{EA}{L} d_{x1} \quad (3.1-3)$$

Por tanto

$$p_{x2} = -\frac{EA}{L} d_{x1} \quad (\text{Por la ecuación (3.1-1)})$$

El desplazamiento d_{x2} es tratado de manera similar Figura 3.1-5(a). Entonces

$$p_{x2} = \frac{EA}{L} d_{x2} \quad y \quad p_{x1} = -\frac{EA}{L} d_{x2}$$

La existencia de d_{x1} o d_{x2} solo produce restricciones en la dirección axial, y todas las fuerzas que no son axiales son por consiguiente cero. Cuando se asume que los desplazamientos son pequeños; la existencia de θ_{x1} o θ_{x2} solo produce restricción torsional, por lo tanto.

$$\begin{aligned} m_{x1} &= \frac{GJ}{L} \theta_{x1} & m_{x2} &= -\frac{GJ}{L} \theta_{x1} \\ m_{x2} &= \frac{GJ}{L} \theta_{x2} & m_{x1} &= -\frac{GJ}{L} \theta_{x2} \end{aligned} \quad (3.1-4)$$

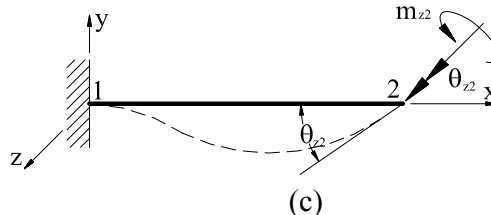
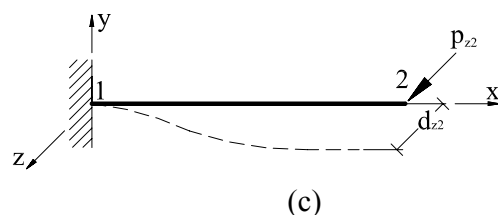
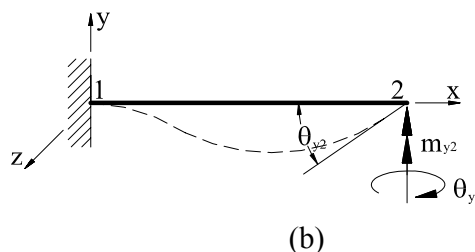
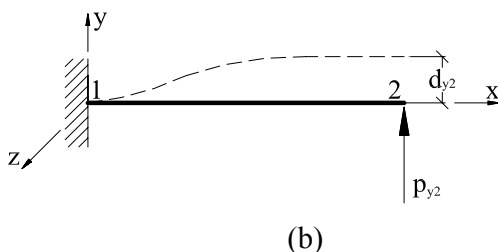
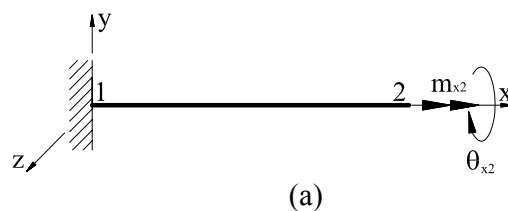
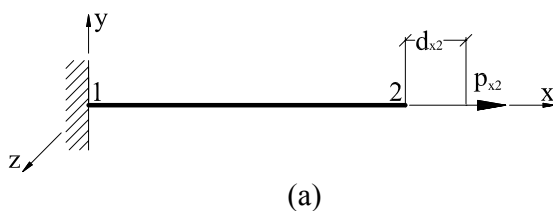


Figura 3.1-5 Desplazamientos lineales en el extremo 2 producidos por la fuerza p_2 .

Figura 3.1-6 Rotaciones en el extremo 2 producidas por el momento m_2 .

Los coeficientes de influencia involucrados θ_z , d_y , θ_y , y d_z pueden ser determinados usando el método de la energía (teorema de Castigliano.) como un ejemplo del principio de trabajo virtual, el cual nos llevaría a la misma expresión.

Rotación θ_z . El elemento 1-2 mostrado en la figura 3.1-7 es inicialmente recto, asumiendo que existe una rotación en uno de los extremos (θ_{z2} rotación extremo 2). El momento de flexión (M) a una distancia x del extremo 1 está dado por:

$$M = -m_{z1} + p_{y1}x \quad (3.1-5)$$

De la ecuación (3.1-2):

$$m_{z1} + m_{z2} - p_{y1}L = 0 \quad (3.1-6)$$

Reemplazando la ecuación (3.1-5) en la ecuación (3.1-6), se obtiene:

$$M = -p_{y1}(L-x) + m_{z2}$$

La energía de deformación (U) es

$$U = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI_z} = \frac{1}{2EI_z} \left[p_{y1}^2 \frac{L^3}{3} + m_{z2}^2 L - p_{y1} m_{z1} L^2 \right] \quad (3.1-7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial p_{y1}} = d_{y1} = 0$$

(Por el teorema de Castigliano ecuación (2.7-8), debido a la correspondencia entre p_{y1} y d_{y1})

$$\frac{2L^3}{3} p_{y1} - m_{z2} L^2 = 0$$

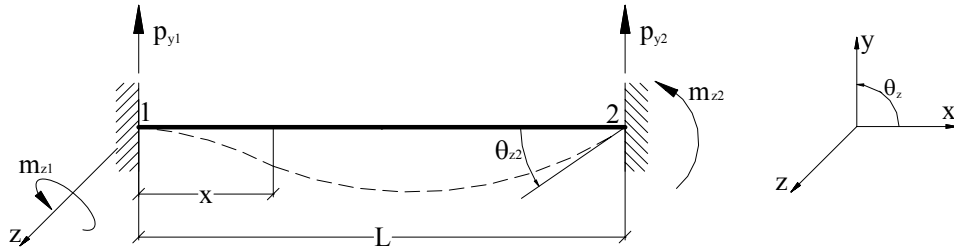


Figura 3.1-7

Por tanto.

$$p_{y1} = \frac{3m_{z2}}{2L} \quad (3.1-8)$$

Y

$$\frac{\partial U}{\partial m_{z2}} = \theta_{z2}$$

(Por el teorema de Castigliano, debido a la correspondencia entre m_{z2} y θ_{z2})

$$\frac{1}{2EI_z} [2m_{z2}L - p_{y1}L^2] = \theta_{z2}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2EI_z} \left[2m_{z2}L - \frac{3m_{z2}}{2} L \right] = \theta_{z2}$$

dando:

$$m_{z2} = \frac{4EI_z}{L} \theta_{z2} \quad (3.1-9)$$

y

$$p_{y1} = \frac{6EI_z}{L^2} \theta_{z2} \quad (3.1-10)$$

De la ecuación (3.1-6):

$$m_{z1} = p_{y1}L - m_{z2} = \frac{3m_{z2}}{2} - m_{z2} = \frac{m_{z2}}{2}$$

$$m_{z1} = \frac{2EI_z}{L} \theta_{z2} \quad (3.1-11)$$

Similares expresiones en las ecuaciones (3.1-9) a (3.1-11) pueden ser usadas para la rotación θ_{z1} transponiendo los subíndices.

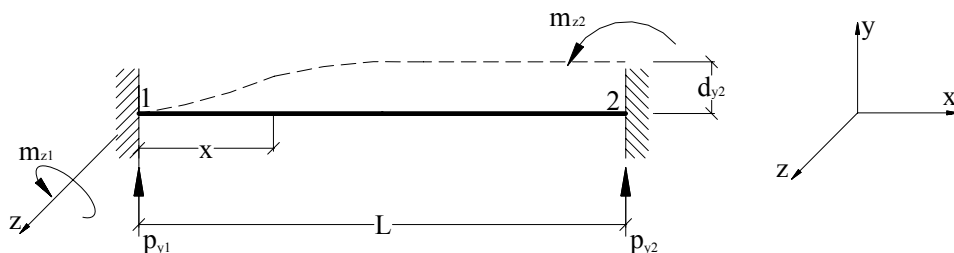


Figura 3.1-8

Desplazamiento d_y . El elemento 1-2 mostrado en la figura 3.1-8 es inicialmente recto, asumiendo que sucede un desplazamiento d_{y2} . El momento de flexión a una distancia x es:

$$M = -m_{z1} + p_{y1}x$$

De la ecuación (3.1-1)

$$M = -m_{z1} - p_{y2}x \quad (3.1-12)$$

La energía de deformación es:

$$U = \frac{1}{2EI_z} \left[m_{z1}^2 L + p_{y2}^2 \frac{L^3}{3} + m_{z1} p_{y2} L^2 \right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial m_{z1}} = 0 \quad (3.1-13)$$

(Por el teorema de Castigliano, donde θ_{z1} es cero).

Entonces:

$$2m_{z1}L + p_{y2}L^2 = 0$$

Por lo tanto

$$p_{y2} = -\frac{2m_{z1}}{L} \quad (3.1-14)$$

y

$$\frac{\partial U}{\partial p_{y2}} = d_{y2}$$

(Por el teorema de Castigliano, debido a la correspondencia entre p_{y2} y d_{y2})

$$\frac{1}{2EI_z} \left[2p_{y2} \frac{L^3}{3} + m_{z1} L^2 \right] = d_{y2}$$

Por lo tanto

$$m_{z1} = -\frac{6EI_z}{L^2} d_{y2} \quad (3.1-15)$$

y de la ecuación (3.1-6)

$$m_{z2} = -p_{y2}L - m_{z1} = 2m_{z1} - m_{z1} = -\frac{6EI_z}{L^2} d_{y2} \quad (3.1-16)$$

De la ecuación (3.1-14)

$$p_{y2} = \frac{12EI_z}{L^3} d_{y2} \quad (3.1-17)$$

Expresiones similares para las ecuaciones (3.1-15) a (3.1-17) pueden ser usadas para un desplazamiento d_{y1} , transponiendo los subíndices.

Los términos θ_y y d_z , pueden ser deducidos de θ_z y d_y respectivamente (ecuaciones (3.1-9) a (3.1-11) y ecuaciones (3.1-15) a (3.1-17)), utilizando la figura 3.1-9.

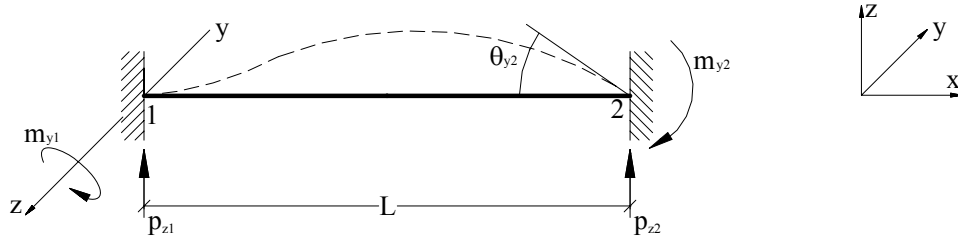


Figura 3.1-9

3.2 Ecuaciones de rigidez y flexibilidad de un elemento

Los resultados de la sección anterior pueden resumirse en una sola ecuación matricial para elementos rígidos, mostrada en la ecuación (3.2-1) (ver página 126).

Al permitir que el modulo de Young E sea tomado como un factor común; el modulo de corte G puede ser reemplazado por $E/2(1+\nu)$ (ν : coeficiente de Poisson)

Pudiendo escribirse la ecuación (3.2-1) en forma matricial de la siguiente manera:

$$p = Kd \quad (3.2-2)$$

Esta es la ecuación de rigidez para un elemento donde p y d son vectores (de 12 términos) de fuerza y desplazamiento respectivamente, y K es la matriz de rigidez 12x12 del elemento. Esta es la matriz de rigidez para el caso general de un elemento prismático en el espacio (despreciando la deformación debido a corte), y con la condición de que las deformaciones son tan pequeñas que la geometría inicial del elemento queda inalterada.

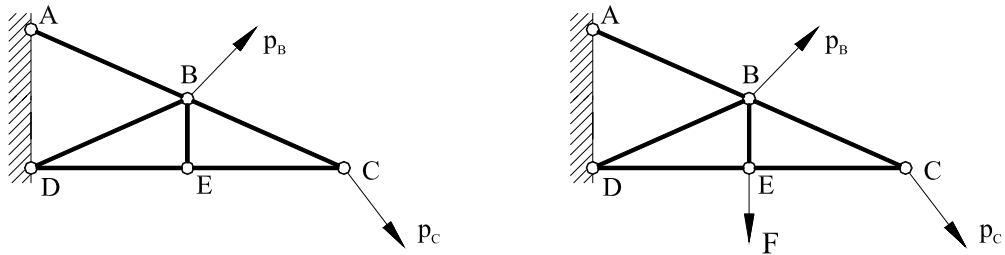
Muchos elementos estructurales requieren menos de 12 grados de libertad para expresar sus deformaciones. Cuando un elemento en el espacio no tiene momentos en sus extremos, su deformación solo depende de los tres desplazamientos lineales que se dan en dichos extremos, dándole un total de seis grados de libertad. La matriz de rigidez en este caso puede obtenerse seleccionando los términos relevantes de la matriz de rigidez completa 12x12, varios ejemplos se muestran en el capítulo siguiente.

MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA BARRA EN EL ESPACIO EN EL SISTEMA LOCAL DE COORDENADAS

$$\begin{matrix}
 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12
 \end{matrix}
 \begin{bmatrix}
 p_{x1} \\ p_{y1} \\ p_{z1} \\ m_{x1} \\ m_{y1} \\ m_{z1} \\ p_{x2} \\ p_{y2} \\ p_{z2} \\ m_{x2} \\ m_{y2} \\ m_{z2}
 \end{bmatrix}
 = E
 \begin{bmatrix}
 A/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 12I_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6I_z/L^2 & 0 & -12I_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6I_z/L^2 \\
 0 & 0 & 12I_y/L^3 & 0 & -6I_y/L^2 & 0 & 0 & 0 & -12I_y/L^3 & 0 & -6I_y/L^2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & J/2(1+\nu)L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J/2(1+\nu)L & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -6I_y/L^2 & 0 & 4I_y/L & 0 & 0 & 0 & 6I_y/L^2 & 0 & 2I_y/L & 0 \\
 0 & 6I_z/L^2 & 0 & 0 & 0 & 4I_z/L & 0 & -6I_z/L^2 & 0 & 0 & 0 & 2I_z/L \\
 \hline
 -A/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -12I_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & -6I_z/L^2 & 0 & 12I_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & -6I_z/L^2 \\
 0 & 0 & -12I_y/L^3 & 0 & 6I_y/L^2 & 0 & 0 & 0 & 12I_y/L^3 & 0 & 6I_y/L^2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -J/2(1+\nu)L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J/2(1+\nu)L & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -6I_y/L^2 & 0 & 2I_y/L & 0 & 0 & 0 & 6I_y/L^2 & 0 & 4I_y/L & 0 \\
 0 & 6I_z/L^2 & 0 & 0 & 0 & 2I_z/L & 0 & -6I_z/L^2 & 0 & 0 & 0 & 4I_z/L
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 d_{x1} \\ d_{y1} \\ d_{z1} \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \theta_{z1} \\ \hline d_{x2} \\ d_{y2} \\ d_{z2} \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{z2}
 \end{bmatrix}$$

(3.2-1)

No es posible resolver la ecuación (3.2-2) cuando la matriz K es singular, siendo esta matriz singular por la posibilidad de que la barra experimente movimientos de cuerpo rígido, es decir movimientos que no afectan los esfuerzos finales por no involucrar ninguna deformación. Por tanto, existe un número infinito de vectores d en la ecuación (3.2-2) para cualquier vector p . Por ejemplo, el elemento BE de la estructura de barras articuladas de la figura 3.2-1(a) es normal al elemento DE y EC. Por consiguiente, cuando ninguna carga externa esta aplicada en E los esfuerzos en BE son siempre cero, aunque las cargas en B y C produzcan deflexiones en los extremos B y E del elemento BE. Similarmente, si se aplica una fuerza F colineal con BE como se muestra en la figura 3.2-1(b), cualquier desplazamiento que se produce en B y E es debido a las cargas p_B y p_C . Este argumento es aplicado considerando que los desplazamientos son pequeños.



2 (b)

Figura 3.2-1 Estructura de barras articuladas.

Obteniendo una ecuación para la determinación de los desplazamientos a partir de la ecuación (3.2-2) se tiene:

$$d = K^{-1} p \quad (3.2-3)$$

(donde K^{-1} es la matriz de flexibilidad del elemento)

Una ecuación similar a la ecuación (3.2-3) puede ser escrita, en términos de distorsión del elemento, donde la distorsión es definida como el desplazamiento del extremo 2 respecto al extremo 1. En la figura 3.2-2 se muestra un elemento en el plano de extremos 1-2, el cual experimenta un desplazamiento desde la posición inicial (A-B) antes de la aplicación de la carga, hasta la posición final (A'-B'') después de la aplicación de la carga.

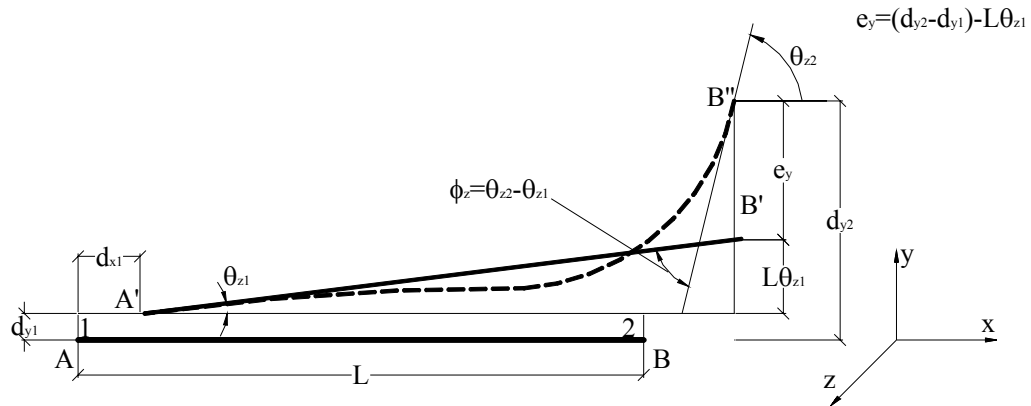


Figura 3.2-2 Distorsión de un elemento.

Para un mejor entendimiento el desplazamiento completo se dividirá en dos partes:

2. Un movimiento de cuerpo rígido de la posición A-B a la posición A'-B'. La posición se define por los valores finales de los desplazamientos lineales y angulares en el extremo 1 (dados por d_1).
3. Una deformación del elemento 1-2 de la posición A'-B' hasta posición final A'-B''.

Como el extremo 1 está en su posición final y solo se requiere una componente adicional de los desplazamientos en el extremo 2. Estos desplazamientos adicionales son las distorsiones del elemento denotadas por e , y están relacionadas únicamente con las fuerzas del elemento.

En este ejemplo debido a que el elemento está en el plano, e es un vector de tres términos, cuya componente e_y resulta de la diferencia del desplazamiento vertical relativo del extremo 2 respecto al extremo 1 de la posición A-B hasta la posición A'-B'' ($d_{y2} - d_{y1}$) menos el desplazamiento vertical relativo del extremo 2 con respecto al extremo 1 de la posición A-B a la posición A'-B' ($L\theta_{z1}$); y la componente de la deformación ϕ_z resulta de la diferencia del desplazamiento angular del extremo 2 debido a la deformación del elemento θ_{z2} menos el desplazamiento angular del extremo 1 debido al movimiento de cuerpo rígido θ_{z1} . Para el mismo elemento en el espacio, e será un vector de seis términos. Las fuerzas asociadas a las deformaciones del elemento se encuentran en el extremo 2 (p_2).

Una modificación de la ecuación (3.2-1) puede ser deducida ahora asumiendo un desplazamiento d_1 igual a cero. Los desplazamientos d_2 son entonces las distorsiones del elemento (distorsiones en las direcciones x , y y z que son denotadas por e_x , e_y y e_z respectivamente, y las distorsiones alrededor de los ejes x , y y z son denotadas por ϕ_x , ϕ_y y ϕ_z respectivamente.)

$$\begin{bmatrix} p_{x2} \\ p_{y2} \\ p_{z2} \\ m_{x2} \\ m_{y2} \\ m_{z2} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \frac{A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6I_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12I_y}{L^3} & 0 & \frac{6I_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J}{2L(1+\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6I_y}{L^2} & 0 & \frac{4I_y}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6I_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4I_z}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix} \quad (3.2-4)$$

Dando lugar a una matriz de rigidez de 6x6. Una ecuación equivalente a la ecuación (3.2-3) es:

$$e = Fp \quad (3.2-5)$$

donde: p es el vector fuerza de seis términos en el extremo 2, e es el vector distorsión del elemento y F es la inversa de la matriz de rigidez (matriz de flexibilidad) ecuación (3.2-4).

$$F = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \frac{L}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3I_z} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{2I_z} \\ 0 & 0 & \frac{L^3}{3I_y} & 0 & -\frac{L^2}{2I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2L(1+\nu)}{J} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L^2}{2I_y} & 0 & \frac{L}{I_y} & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{2I_z} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{I_z} \end{bmatrix} \quad (3.2-6)$$

Los términos de F son los coeficientes de influencia de flexibilidad, estos ocurren en el extremo 2 del elemento considerando el extremo 1 como fijo, cuando una carga es aplicada en el extremo 2. Por ejemplo, el valor $L^2/2I_z$ es el sexto valor de la segunda columna, indica que el elemento tiene un momento unitario en el extremo 2 el cual provoca un desplazamiento relativo en la dirección y entre los extremos 1 y 2 (e_y).

La matriz F es simétrica como es de esperar. Cuando existan menos de 12 grados de libertad, y menos de seis términos en el vector e para el estado de distorsión del elemento, corresponderán también un menor número de términos en la matriz F debiendo estos ser utilizados.

3.3 Notación y transformación de Ejes

El sistema de ejes para un elemento prismático usado anteriormente en este capítulo se definió en la sección 3.1. Donde el eje x coincide con el eje centroidal del elemento. En una estructura de muchos elementos, existirán por consiguiente muchos sistemas de ejes, uno para cada elemento. Antes de que las fuerzas internas de los elementos puedan relacionarse, todas las fuerzas y desplazamientos deben estar en términos de un sistema común de coordenadas para toda la estructura, denominado sistema global de coordenadas. Cada elemento tendrá un sistema local de coordenadas (SLC) cuyos ejes se denominarán por: x , y , y z por consiguiente la estructura tendrá un sistema global de coordenadas (SGC) cuyos ejes se denominarán por: x' , y' y z' (figura 3.3-1).

Las primas son utilizadas para indicar el sistema global de coordenadas, y también para las fuerzas y desplazamientos respecto a este sistema, el vector fuerza que actúa en el extremo 1 del cuerpo según el sistema global de coordenadas es p'_1 ecuación (3.3-1) y p'_2 para el vector fuerza en el extremo 2, representando d'_1 y d'_2 los desplazamientos en los extremos 1 y 2 respectivamente.

$$p'_1 = [p'_{x1} \ p'_{y1} \ p'_{z1} \ m'_{x1} \ m'_{y1} \ m'_{z1}]^T \quad (3.3-1)$$

El eje x marca los ángulos θ'_{xx} , θ'_{xy} y θ'_{xz} respecto a los ejes x' , y' y z' y los cosenos de estos tres ángulos son conocidos como: “cosenos directores” de x con respecto a x' , y' y z' y son denotados por l_1 , m_1 , n_1 respectivamente. Similarmente los “cosenos directores” de y y z con respecto a x' , y' y z' son denotados por l_2 , m_2 , n_2 y l_3 , m_3 , n_3 respectivamente.

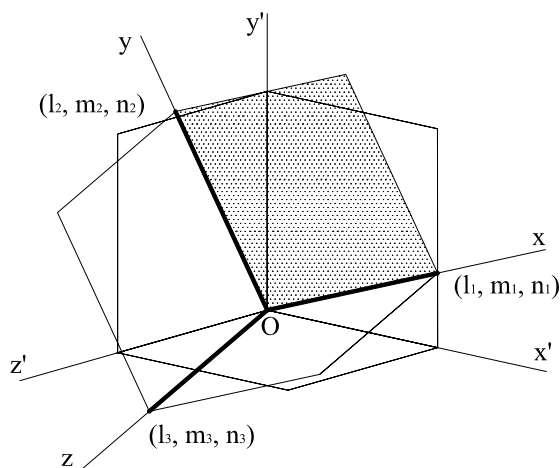


Figura 3.3-1 Sistemas Global y Sistema Local de Coordenadas.

Supongamos el vector OP definido en la figura 3.3-2, este vector tendrá como proyecciones las componentes rectangulares OA , OB y OC en los ejes x' , y' , y z' respectivamente como se muestra a continuación.

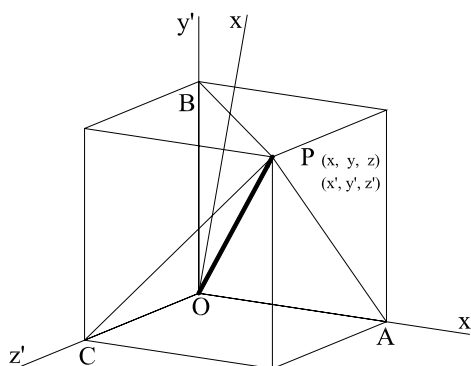


Figura 3.3-2 Proyecciones del vector OP .

Puesto que todo vector es igual a la suma de sus componentes rectangulares el vector OP en x debe ser igual a la suma de las proyecciones de OA , OB , y OC en x , lo que implica multiplicar estas componentes rectangulares por sus respectivos cosenos directores dando lugar a: $OA \ l_1 + OB \ m_1 + OC \ n_1$.

Expresando matricialmente las componentes en la dirección x :

$$[l_1 \ m_1 \ n_1][OA \ OB \ OC]^T$$

En términos generales

$$x = [l_1 \ m_1 \ n_1] [x' \ y' \ z']^T$$

Similares expresiones pueden desarrollarse para las componentes en las direcciones y y z .

$$y = [l_2 \ m_2 \ n_2] [x' \ y' \ z']^T$$

$$z = [l_3 \ m_3 \ n_3] [x' \ y' \ z']^T$$

Pudiendo resumirse esto matricialmente:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (3.3-2)$$

ó

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [R_o] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (3.3-3)$$

Puede pensarse que inicialmente x , y , y z coinciden con x' , y' , y z' y luego rotan los ángulos apropiados hasta llegar a sus posiciones finales. Los “cosenos directores” en la matriz de la ecuación (3.3-2) forman una matriz de rotación R_o de 3×3 , cualquier cantidad definida en términos de x' , y' , y z' puede ser redefinida en los ejes x , y y z multiplicando previamente por la matriz de rotación, este concepto puede usarse para redefinir las fuerzas y desplazamientos en el sistema global de coordenadas, este proceso se refiere convencionalmente a la transformación de ejes, dando lugar a la matriz de transformación R_1 .

$$\begin{aligned} p_1 &= R_1 p'_1 & p_2 &= R_1 p'_2 \\ d_1 &= R_1 d'_1 & d_2 &= R_1 d'_2 \end{aligned} \quad (3.3-4)$$

p_1 , p_2 y d_1 , d_2 son vectores de seis términos de fuerza y desplazamiento en los extremos 1 y 2 del elemento respectivamente, elemento de extremos 1-2 que se usó en la sección 3.1. Entonces la matriz de transformación R_1 resulta ser una matriz de 6×6 . En la transformación no hay ninguna interferencia entre la dirección de las fuerzas y la dirección de los momentos. Debido a que la dirección de las fuerzas en el sistema global de coordenadas es afectada solamente por las fuerzas directas en el sistema local de coordenadas. Y los momentos en el sistema global de coordenadas son afectados solamente por los momentos en el sistema local de coordenadas. Entonces R_1 toma la siguiente forma:

$$R_1 = \begin{bmatrix} R_o & 0 \\ 0 & R_o \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (3.3-5)$$

Una de las propiedades de la matriz de transformación R_1 es que es ortogonal, y que su inversa es igual a su transpuesta. Esto puede ser demostrado realizando la multiplicación matricial $R_1 R_1^T$. Si el producto es igual a la matriz unitaria entonces $R_1^T = R_1^{-1}$.

$$R_1 R_1^T = \begin{bmatrix} R_o & 0 \\ 0 & R_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_o^T & 0 \\ 0 & R_o^T \end{bmatrix}$$

$$R_1 R_1^T = \begin{bmatrix} R_o R_o^T & 0 \\ 0 & R_o R_o^T \end{bmatrix}$$

donde el siguiente paso es examinar el producto $R_o R_o^T$.

$$R_o R_o^T = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}$$

De esta multiplicación se tienen dos tipos de términos:

- 2 El primer término de la diagonal principal, producto de la multiplicación de ambas matrices esta expresado por: $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2$. Este es la suma de los cuadrados de los cosenos directores entre los ejes x y x' , y y y' , y z y z' en unidades iguales, dando lugar a:

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \text{ (entre } x \text{ y } x')$$

- 3 En las posiciones fuera de la diagonal principal los términos son del tipo: $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$, y la suma de estos es igual a cero, debido a que R_o es una matriz ortogonal

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

Por lo tanto:

$$R_o R_o^T = \text{matriz unitaria}$$

$$R_1 R_1^T = \text{matriz unitaria}$$

$$R_1^T = R_1^{-1}$$

Por tanto:

$$p'_1 = R_1^T p_1 \quad \text{y} \quad d'_1 = R_1^T d_1$$

Similarmente: (3.3-6)

$$p'_2 = R_1^T p_2 \quad \text{y} \quad d'_2 = R_1^T d_2$$

De la ecuación (3.2-2)

$$p = Kd$$

Entonces

$$R_2 p' = K R_2 d'$$

Multiplicando previamente ambos términos por R_2^T se obtiene:

$$p' = (R_2^T K R_2) d' \quad \text{o} \quad p' = K' d' \quad (3.3-7)$$

K' es la matriz de rigidez del elemento en el sistema global de coordenadas, siendo:

$$K' = R_2^T K R_2 \quad (3.3-8)$$

Similarmente, de la ecuación (3.2-4) se tiene:

$$e' = F' p'_2 \quad (3.3-9)$$

Donde: $F' = R_I^T F R_I$

El orden de multiplicación de la matriz R_2 en la ecuación (3.3-8) debe seguirse estrictamente, teniendo cuidado de siempre multiplicar la transpuesta de la matriz de transformación R_2^T por la matriz de rigidez K y el resultado de esta multiplicación por la matriz de transformación R_2 ó R_2^T por el resultado de la multiplicación la multiplicación de K por R_2 .

En resumen, para la ecuación (3.3-8)

$$R_2 = \begin{bmatrix} R_1 & \\ & R_1 \end{bmatrix}_{(12 \times 12)} \quad \text{ó} \quad R_2 = \begin{bmatrix} R_o & & \\ & R_o & \\ & & R_o \\ & & & R_o \end{bmatrix}_{(12 \times 12)}$$

Para la ecuación (3.3-9).

$$R_1 = \begin{bmatrix} R_o & \\ & R_o \end{bmatrix}_{(6 \times 6)}$$

Con respecto a la matriz de los cosenos directores para cada elemento de la estructura, podemos mencionar que la orientación de los elementos con respecto al sistema global de coordenadas puede causar algunas dificultades, por consiguiente es conveniente reducir la matriz R_o , para las proyecciones de los elementos en el sistema global de coordenadas. Esto puede ser mucho más fácil, imaginando los ejes del elemento como inicialmente fueron alineados el eje x con su correspondiente y . y z coincidiendo con x' , y' y z' para luego realizar tres rotaciones. Las tres rotaciones son: (1) una rotación α alrededor del eje y (2) una rotación β alrededor del eje z y (3) una rotación γ alrededor del eje x . (Aunque existan varias maneras en que los elementos puedan colocarse de su posición inicial a su posición final es necesario conservar el orden indicado).

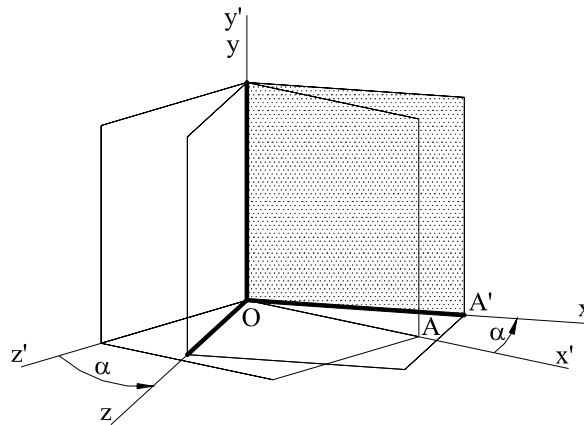


Figura 3.3-3

(1) *Rotación α alrededor del eje y .* La figura 3.3-3 muestra la rotación α del elemento de la posición OA a la posición OA' esta rotación sucede en el plano xz . Entonces la matriz de rotación R_α es obtenida a partir de la matriz de rotación R_O :

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3.3-10)$$

De la ecuación (3.3-2):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_\alpha \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (3.3-11)$$

(2) *Rotación β alrededor del eje z .* La figura 3.3-4 muestra la rotación β del elemento de la posición OA' a la posición OA'' esta rotación sucede en el plano xy . Entonces la matriz de rotación R_β es obtenida a partir de la matriz de rotación R_O :

$$R_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3-12)$$

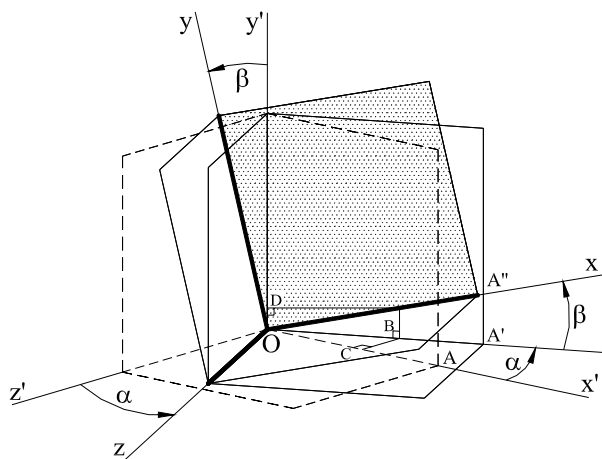


Figura 3.3-4

El resultado de R_O de la segunda rotación es obtenido multiplicando R_α por R_β , dando lugar a:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_\beta R_\alpha \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (3.3-13)$$

(3) *Rotación γ alrededor del eje x .* Luego de realizadas las rotaciones α y β el elemento se encuentra en su posición final, posición en la que el elemento ya no se encuentra en el plano $x'z'$.

Para esta instancia el plano $x'y'$ es un plano vertical, y es necesario previamente al elemento de sección I incluirle una membrana o plano vertical a lo largo de su eje x , manteniéndose el elemento en su posición final después de las rotaciones α y β , para luego realizar una rotación adicional γ como se muestra en la figura 3.3-5

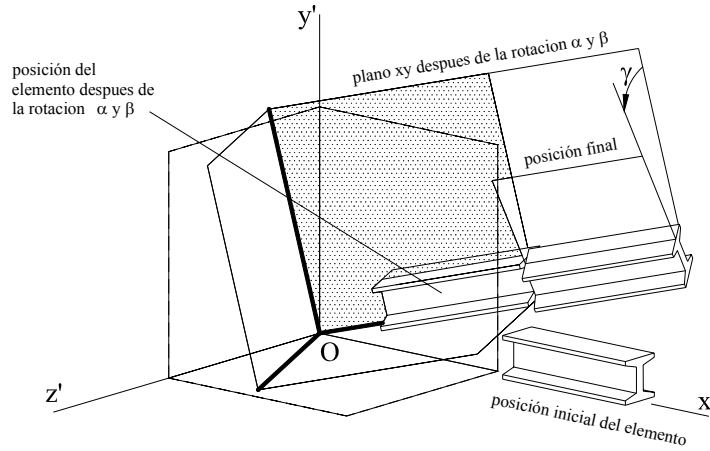


Figura 3.3-5

La figura 3.3-6 muestra la rotación final γ en el plano yz alrededor del eje centroidal del elemento.

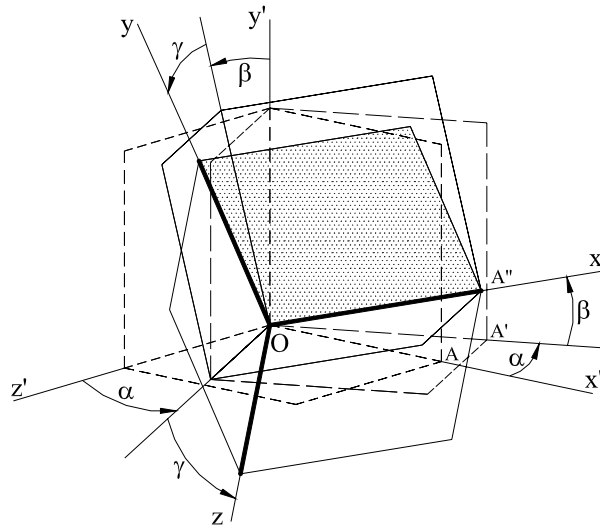


Figura 3.3-6

Entonces la matriz de rotación R_γ es obtenida a partir de la matriz de rotación R_O :

$$R_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \text{sen } \gamma \\ 0 & -\text{sen } \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (3.3-14)$$

El resultado de la rotación final es obtenido por la multiplicación previa del resultado de la ecuación (3.3-13) por R_γ , dando lugar a:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_\gamma R_\beta R_\alpha \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (3.3-15)$$

Entonces la matriz de rotación R_O es:

$$R_O = R_\gamma R_\beta R_\alpha$$

Para el elemento OA, de longitud L las proyecciones de su posición final OA'' sobre los ejes x'_z , y'_z y z' son L_x , L_y , y L_z respectivamente, esto puede verse en la figura 3.3-4

$$\begin{aligned} OC &= L_x & OD = BA'' &= L_y & BC &= -L_z \\ OB &= \sqrt{(L^2 - L_y^2)} = \sqrt{(L_x^2 + L_z^2)} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{OC}{OB} = \frac{L_x}{\sqrt{(L_x^2 + L_z^2)}} \\ \sen \alpha &= -\frac{L_z}{\sqrt{(L_x^2 + L_z^2)}} \\ \cos \beta &= \frac{\sqrt{(L_x^2 + L_z^2)}}{L} \\ \sen \beta &= \frac{L_y}{L} \\ R_O &= R_\gamma R_\beta R_\alpha \\ R_O &= \begin{bmatrix} L_x/L & L_y/L & L_z/L \\ \frac{(-L_x L_y \cos \gamma - L L_z \sen \gamma)}{L \sqrt{(L_x^2 + L_z^2)}} & \frac{\sqrt{(L_x^2 + L_z^2)} \cos \gamma}{L} & \frac{(-L_y L_z \cos \gamma + L L_x \sen \gamma)}{L \sqrt{(L_x^2 + L_z^2)}} \\ \frac{(L_x L_y \sen \gamma - L L_z \cos \gamma)}{L \sqrt{(L_x^2 + L_z^2)}} & -\frac{\sqrt{(L_x^2 + L_z^2)} \sen \gamma}{L} & \frac{(L_y L_z \sen \gamma + L L_x \cos \gamma)}{L \sqrt{(L_x^2 + L_z^2)}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3-16)$$

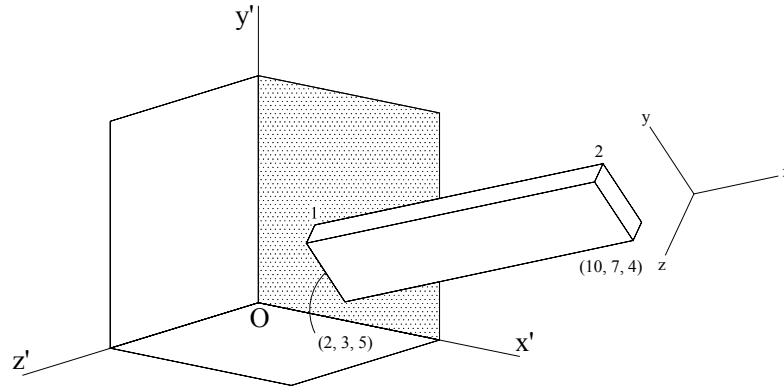
La ecuación (3.3-16) da la forma general de la matriz de rotación, la cual se empleará para un elemento en el espacio. Se utilizarán versiones simplificadas para elementos en el plano.

Para un elemento en el plano donde los ejes z y z' coinciden; y γ y L_z son cero, se tiene:

$$R_O = \begin{bmatrix} L_x/L & L_y/L & 0 \\ -L_y/L & L_x/L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3-17)$$

Ejemplos de Aplicación.

3.1. Calcular los términos de la matriz de rotación R_O para el elemento de sección rectangular de extremos 1-2 mostrado en la figura. Las posiciones de los extremos 1 y 2 del centroide de la sección transversal del elemento son: (2, 3, 5) y (10, 7, 4) respectivamente. El plano xy forma un ángulo de 30° con el plano vertical a lo largo del eje x del elemento.



SOLUCION:

Las proyecciones en los ejes x' , y' , y z' son:

$$L_x = 10 - 2 = 8 \quad L_y = 7 - 3 = 4 \quad L_z = 4 - 5 = -1$$

$$L^2 = 8^2 + 4^2 + 1^2 = 81 \quad \rightarrow \quad L = 9$$

$$\text{Angulo } \gamma = 30^\circ, \quad \cos \gamma = \sqrt{\frac{(3)}{2}} \quad \text{y} \quad \text{sen } \gamma = \frac{1}{2}$$

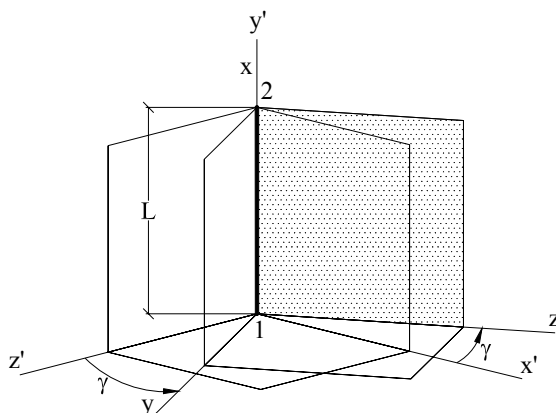
por lo tanto:

$$R_O = \begin{bmatrix} \frac{8/9}{-16\sqrt{3}+4.5} & \frac{4/9}{\sqrt{3}\sqrt{65}} & \frac{-1/9}{2\sqrt{3}+36} \\ \frac{9\sqrt{65}}{16+4.5\sqrt{3}} & \frac{18}{\sqrt{65}} & \frac{9\sqrt{65}}{-2+36\sqrt{3}} \\ \frac{9\sqrt{65}}{16+4.5\sqrt{3}} & \frac{18}{\sqrt{65}} & \frac{9\sqrt{65}}{-2+36\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$R_O = \begin{bmatrix} 0.889 & 0.445 & -0.111 \\ -0.320 & 0.775 & 0.544 \\ 0.328 & -0.449 & 0.831 \end{bmatrix}$$

3.2. Calcular los términos de la matriz de rotación R_O para el elemento de extremos 1-2 mostrado en la figura. El eje centroidal del elemento 1-2 coincide con el eje y' ; y el eje z forma un ángulo γ con el eje x' .

$$L_x = L_z = 0 \quad L_y = L$$



SOLUCION:

La construcción de la matriz R_O de la ecuación (3.3-16) genera cuatro términos indeterminados cuyo numerador y denominador son cero.

$$R_O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0/0 & 0 & 0/0 \\ 0/0 & 0 & 0/0 \end{bmatrix}$$

El orden de rotación correcto para generar la matriz de rotación R_O , de manera que el elemento tenga un movimiento de su posición inicial a su posición final a lo largo del eje x debe ser revisado. Debido a que este debe rotar 90° grados con respecto al eje y' , 90° grados con respecto al eje x' y una rotación de 90° grados con respecto al eje z' dejando al elemento en la posición final correcta pero con una orientación incorrecta. Las matrices R_α en la ecuación (3.3-10), R_β en la ecuación (3.3-12) y R_γ en la ecuación (3.3-14) pueden generar el producto $R_\gamma R_\beta R_\alpha$.

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces la matriz de rotación R_O es:

$$R_O = R_\gamma R_\beta R_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \\ \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \end{bmatrix} \quad (3.3-18)$$

La ecuación (3.3-18) muestra un caso especial importante de la matriz R_O el cual frecuentemente ocurre en el análisis de barras en el espacio.

CAPITULO 4

MÉTODO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

4.1 Introducción

En los últimos años se tuvieron disponibles solo los métodos ya discutidos, y las soluciones de ellos que analizan estructuras estáticamente indeterminadas. Para cualquier estructura de más de un grado de redundancia, el resultado fue siempre obtenido como una solución de un conjunto lineal de ecuaciones. Para este efecto a menudo se considera las longitudes, haciéndolas más pequeñas.

La ventaja del uso de computadoras ha resuelto el problema de la solución de los sistemas de ecuaciones. Pero si el computador será usado para resolver las ecuaciones, porque no usarlo para hacerlas en primer lugar. Los métodos realizados a mano no son disponibles para el análisis en este propósito, en este capítulo se discutirá un método, el cual presta por si solo una fuerte aplicación computacional, aunque el método no es nuevo el uso de este, es solo práctico ahora que las computadoras son ampliamente disponibles. Se asumió que solo ejemplos triviales comparativamente serian atendidos por los métodos realizados a mano. El objetivo será reducir la cantidad de datos de entrada al mínimo y las variaciones del método básico lo cual involucra algunas manipulaciones preliminares hechas a mano.

4.2 Método de rigidez - Ejemplo simple

Antes de discutir una forma completamente general del análisis del método de rigidez en términos matriciales; es conveniente utilizar un poco de tiempo en un ejemplo realizado a mano que no involucre la matriz algebraica. La estructura podría ser analizada más fácilmente por otros métodos, pero esta provee una ilustración muy útil de la aplicación de la aproximación de rigidez.

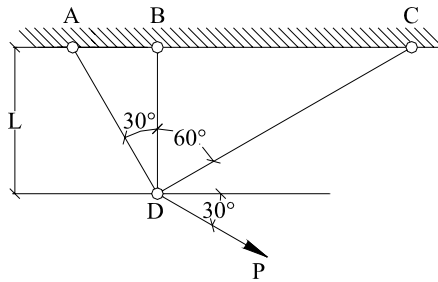


Figura 4.2-1

Estructura sometida a una carga P.

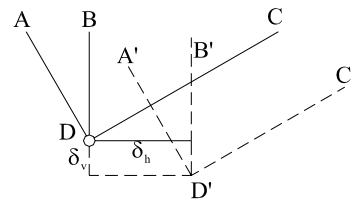


Figura 4.2-2

Desplazamiento producido por la carga P.

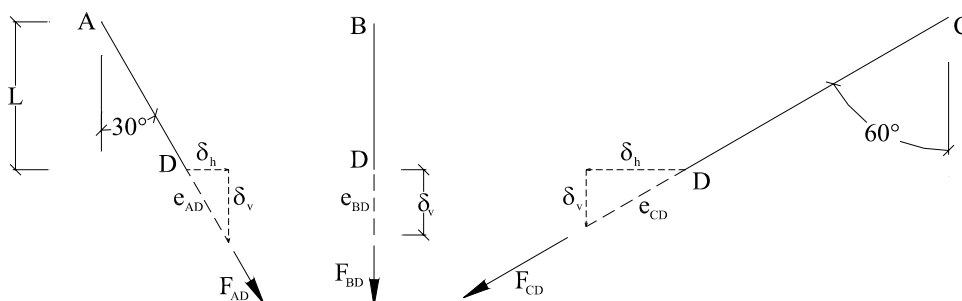
La estructura mostrada en la figura 4.2-1 tiene tres barras elásticas fijadas en los soportes A, B y C y unidas por una articulación en D. Por simplicidad las barras son del mismo material y tienen la misma sección transversal de área A , y son lo suficientemente rígidas para prevenir la inestabilidad. En el nudo D actúa una carga P inclinada 30° de la horizontal. El nudo D se desplazara una pequeña cantidad de la posición D hasta la posición D' (figura 4.2-2) y este desplazamiento puede ser resuelto en las componentes horizontal y vertical: δ_h y δ_v , respectivamente. Se desea saber los valores de las fuerzas

que actúan en las barras, pero la solución va primeramente hacia la determinación de los desplazamientos. Los pasos a seguir son:

- (1) La relación de las fuerzas y las distorsiones son establecidas para cada barra. En este caso en cada elemento solo actúa una fuerza axial F y esta sometida a una extensión axial e .

Se sabe que:

$$F = \frac{EA}{L} e$$



Entonces:

$$\begin{aligned} F_{AD} &= \frac{EA}{L_{AD}} e_{AD} = \frac{EA}{L \sec 30^\circ} e_{AD} \\ F_{BD} &= \frac{EA}{L} e_{BD} \\ F_{CD} &= \frac{EA}{L \sec 60^\circ} e_{CD} \end{aligned} \quad (4.2-1)$$

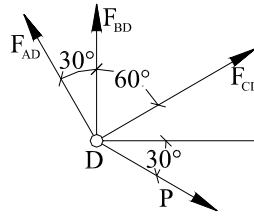
- (2) Este paso involucra un reconocimiento de la compatibilidad geométrica. Las distorsiones de los elementos deben ser compatibles con las deflexiones de la estructura.

$$\begin{aligned} e_{AD} &= (\delta_h \sin 30^\circ + \delta_v \cos 30^\circ) \\ e_{BD} &= \delta_v \\ e_{CD} &= (-\delta_h \sin 60^\circ + \delta_v \cos 60^\circ) \end{aligned} \quad (4.2-2)$$

- (3) Las ecuaciones (4.2-2) pueden ser sustituidas en las ecuaciones (4.2-1).

$$\begin{aligned} F_{AD} &= \frac{EA}{L \sec 30^\circ} (\delta_h \sin 30^\circ + \delta_v \cos 30^\circ) = \frac{EA}{L} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \delta_h + \frac{3}{4} \delta_v \right) \\ F_{BD} &= \frac{EA}{L} \delta_v \\ F_{CD} &= \frac{EA}{L} \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} \delta_h + \frac{\delta_v}{4} \right) \end{aligned} \quad (4.2-3)$$

- (4) Aplicamos ahora la condición de equilibrio del nudo D. Las fuerzas actuantes en cada barra junto con la fuerza externa aplicada P deben satisfacer el equilibrio. Entonces:



$$F_{AD} \cos 30^\circ - F_{CD} \sin 60^\circ = P \cos 30^\circ \quad (\text{fuerzas horizontales})$$

$$y \quad F_{AD} \sin 30^\circ + F_{BD} + F_{DC} \cos 60^\circ = P \sin 30^\circ \quad (\text{fuerzas verticales}) \quad (4.2-4)$$

Cada ecuación aquí corresponde a una de las componentes de la deflexión usada en el paso (2), y serán por consiguiente siempre un número de ecuaciones igual al número de desplazamientos desconocidos.

- (5) Las ecuaciones (4.2-3) puede ser sustituida en las ecuaciones (4.2-4). obteniendo de este modo:

$$\begin{aligned} 1.18 \delta_h + 0.317 \delta_v &= 1.73 PL / EA \\ 0.317 \delta_h + 7.55 \delta_v &= 1.00 PL / EA \end{aligned} \quad (4.2-5)$$

- (6) El par de ecuaciones lineales (4.2-5) puede ahora ser resuelto.

$$\delta_h = 1.42 PL / AE \quad \delta_v = 0.16 PL / AE$$

- (7) Sustituyendo esos desplazamientos en (4.2-3) obtenemos:

$$\begin{aligned} F_{AB} &= \frac{EA}{L} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} (1.42) + \frac{3}{4} (0.16) \right) \frac{PL}{AE} = 0.74 P \\ F_{BD} &= 0.16 P \quad F_{CD} = -0.58 P \end{aligned}$$

La estructura analizada aquí es estáticamente indeterminada, pero esta indeterminación no se toma en cuenta en la solución. El proceso trabajaría por cualquiera de las redundantes. Este problema tiene dos componentes de desplazamiento desconocidas, o dos grados de libertad. Exactamente la misma serie de siete pasos será usada para resolver una estructura con un número mayor de grados de libertad, y la importancia recaería en el número de ecuaciones del tipo (4.2-5) que deben ser resueltas. Aún con cinco o seis grados de libertad, solo una solución por computadora sería razonable.

4.3 Suposiciones.

La discusión del método de rigidez será basada en el plano con barras prismáticas unidas entre si en los denominados nudos rígidos y apoyos que son empotramientos perfectos. Se asumirá que los elementos son vigas y columnas rectas que tienen propiedades constantes entre nudos y puntos en los cuales se encuentran dos o más elementos. Todos los elementos se comportaran de una manera elástica lineal. Las deformaciones serán suficientemente pequeñas para que el cambio de la geometría pueda ser ignorado. Las fuerzas axiales en los elementos deben ser mucho menores a la carga de pandeo de Euler $P_E = \pi^2 (EI / L^2)$ Para cada elemento la flexión ocurre en el plano de la

estructura Todas las cargas aplicadas actúan en el plano de la estructura y consecuentemente todos los desplazamientos ocurrirán también en este plano.

Las suposiciones realizadas anteriormente no intentan sugerir que solo las estructuras que satisfacen estas condiciones pueden ser analizadas por el método de rigidez

4.4 Notación y ejes.

El sistema de ejes a ser usado y las fuerzas de los elementos y desplazamientos ya fueron discutidos en el capítulo anterior. Se asumió que el plano xy para cada elemento coincide con el plano de la estructura y los ejes y y z son ejes principales para la sección transversal. Como se están considerando estructuras en dos dimensiones, solo tres grados de libertad ocurren en cada extremo de cada elemento y en cada uno de ellos existe correspondencia entre las componentes de las fuerzas. Los vectores de las fuerzas y desplazamientos de cada elemento p_1, p_2 y d_1, d_2 respectivamente son:

$$p_1 = \begin{bmatrix} p_{x1} \\ p_{y1} \\ m_1 \end{bmatrix} \quad p_2 = \begin{bmatrix} p_{x2} \\ p_{y2} \\ m_2 \end{bmatrix} \quad (4.4-1)$$

$$d_1 = \begin{bmatrix} d_{x1} \\ d_{y1} \\ \theta_1 \end{bmatrix} \quad d_2 = \begin{bmatrix} d_{x2} \\ d_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (4.4-2)$$

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}_{6 \times 1}$$

Los vectores son ilustrados en las figuras 4.4-1 y 4.4-2. Los momentos y rotaciones deberían realmente haber sido mostrados aquí como $m_{z1}, m_{z2}, \theta_{z1}, \theta_{z2}$, pero en una estructura en el plano donde los momentos y las rotaciones pueden ocurrir solo en ese plano, z puede ser omitida.

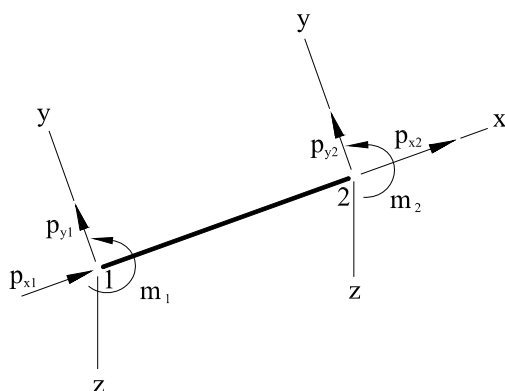


Figura 4.4-1 Vectores fuerza de un elemento en el plano

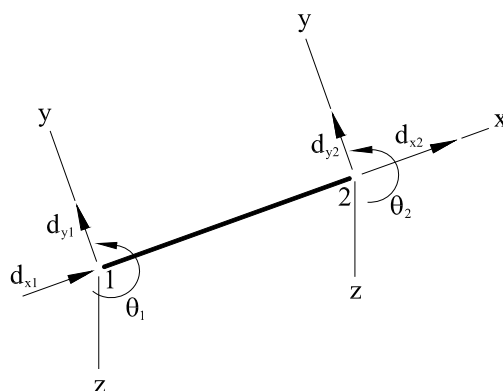


Figura 4.4-2 Vectores desplazamiento de un elemento en el plano

Es importante recordar que estas fuerzas actúan en los extremos de los elementos y producen los desplazamientos de los extremos de dichos elementos. El uso de seis términos de desplazamiento permite al elemento experimentar movimientos de cuerpo rígido (descritos al final de la sección) tanto como deformaciones elásticas.

Para permitir un método completamente general de análisis se ha establecido que es necesario enumerar los nudos de una estructura de una manera consistente. El modelo a ser usado se muestra en la figura 4.4-3.

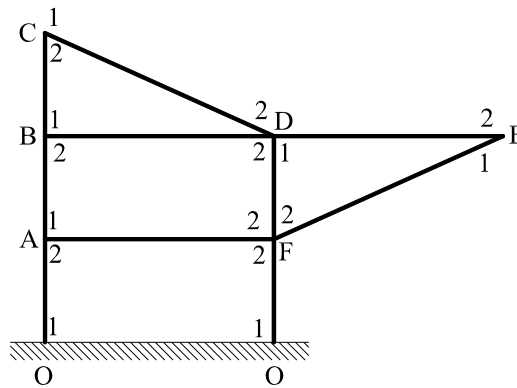


Figura 4.4-3. Denominación de los nudos de una estructura.

Todos los apoyos empotrados son denominados con O. Todos los nudos se denominarán A, B, C, etc., no necesariamente en algún orden especial, pero sin que ninguna letra sea omitida. El extremo 1 de cualquier elemento está en el nudo con la letra más cercana al comienzo del alfabeto, como se muestra en la figura 4.4-3; asumiendo siempre que O precede a A. Cada elemento es denominado por las letras de dos nudos que se conectan (OA, BD, etc.). (Las letras son usadas aquí con el fin de facilitar la tarea, pero en los programas computacionales los números son mucho más convenientes)

Además de los ejes de los elementos se introducirá un sistema de ejes de coordenadas de la estructura, denominado sistema global de coordenadas denotado como x' , y' y z' . Las cargas aplicadas a los nudos de la estructura y las deformaciones resultantes no están relacionadas a algún elemento en particular pero son concernientes con la estructura como un todo y esos por consiguiente serán expresados en términos de dicho sistema.

A continuación se describe de manera más detallada el movimiento de un cuerpo rígido. Supongamos que si al elemento del marco se le proporciona un perfil desplazado que corresponda a un movimiento de cuerpo rígido, entonces no se desarrollarán fuerzas sobre los extremos de los elementos.

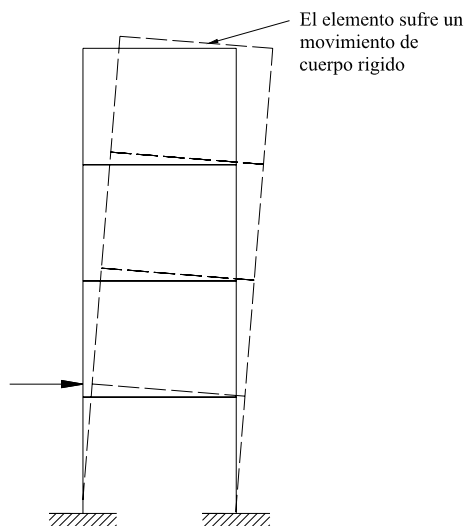


Figura 4.4-4 Movimiento de cuerpo rígido.

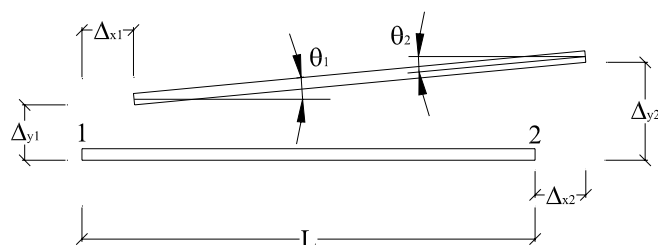


Figura 4.4-5 Elemento que experimenta un movimiento de cuerpo rígido.

Los tres movimientos independientes de un cuerpo rígido en un espacio bidimensional son la traslación x , la traslación y y la rotación θ . Considérese el elemento del marco de la figura 4.4-5. Aquí, el elemento experimenta un movimiento hacia un nuevo lugar sin ningún cambio en su longitud o cualquier rotación relativa de sus extremos; esto significa que, el elemento se mueve como un cuerpo rígido y no está deformado, manteniéndose este recto. Si no hay deformación en las fibras de la viga, entonces las fuerzas de los extremos deben ser cero.

Para que esto sea cierto, deben satisfacer las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}\Delta_{x1} &= \Delta_{x2} \\ \theta_1 &= \theta_2 \\ &= \frac{\Delta_{y2} - \Delta_{y1}}{L}\end{aligned}$$

La ultima expresión esta basada en la teoría de las pequeñas deflecciones y es consistente con el hecho de que la matriz de rigidez se desarrollo con esta suposición. En consecuencia, un conjunto valido de desplazamientos de cuerpo rígido esta dado por:

$$\begin{bmatrix} \Delta_{x1} \\ \Delta_{y1} \\ \theta_1 \\ \Delta_{x2} \\ \Delta_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{x1} \\ \Delta_{y1} \\ \frac{\Delta_{y2} - \Delta_{y1}}{L} \\ \Delta_{x1} \\ \Delta_{y2} \\ \frac{\Delta_{y2} - \Delta_{y1}}{L} \end{bmatrix}$$

Si estos valores son sustituidos en la (matriz completa 6 x 6) ecuación de rigidez de una barra en el plano, para el elemento del marco, obtenida de la reducción de la ecuación (3.2-1) (matriz de rigidez de una barra en el espacio), debe encontrarse que todas las fuerzas de los extremos del elemento son ceros.

$$\begin{bmatrix} p_{x1} \\ p_{y1} \\ m_1 \\ p_{x2} \\ p_{y2} \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hline -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{x1} \\ \Delta_{y1} \\ \frac{\Delta_{y2} - \Delta_{y1}}{L} \\ \Delta_{x1} \\ \Delta_{y2} \\ \frac{\Delta_{y2} - \Delta_{y1}}{L} \end{bmatrix}$$

Como ejemplo, considérese la fuerza p_{y1} , que esta dada por la segunda fila multiplicada por los desplazamientos de cuerpo rígido:

$$p_{y1} = \frac{12EI}{L^3} \Delta_{y1} + \frac{6EI}{L^2} \frac{\Delta_{y2} - \Delta_{y1}}{L} - \frac{12EI}{L^3} \Delta_{y2} + \frac{6EI}{L^2} \frac{\Delta_{y2} - \Delta_{y1}}{L}$$

$$p_{y1} = \left(\frac{12EI}{L^3} - \frac{6EI}{L^3} - \frac{6EI}{L^3} \right) \Delta_{y1} + \left(\frac{6EI}{L^3} - \frac{12EI}{L^3} + \frac{6EI}{L^3} \right) \Delta_{y2}$$

$$p_{y1} = 0$$

Este resultado se puede confirmar para cualquiera de las fuerzas de los extremos del elemento.

El que un desplazamiento de cuerpo rígido no induzca fuerzas en un elemento es obviamente una característica esencial de cualquier matriz de rigidez.

4.5 Elementos rígidos

Los pasos que se siguen para el análisis son muy similares a aquellos mostrados en el ejemplo de la sección 4.2. El primer paso involucra fijar la relación fuerza desplazamiento para cada elemento (como se discutió anteriormente, los términos de fuerza y desplazamiento son tomados como expresiones generales)

Las relaciones para un elemento en el espacio fueron dadas en la ecuación(3.2-1) reduciendo esta ecuación para un elemento en el plano tenemos:

$$\begin{bmatrix} p_{x1} \\ p_{y1} \\ m_1 \\ p_{x2} \\ p_{y2} \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hdashline -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x1} \\ d_{y1} \\ \theta_1 \\ d_{x2} \\ d_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (4.5-1)$$

Expresando en su forma general:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Es conveniente separar los términos conectados con los extremos 1 y 2 del elemento por particiones como se indica por las líneas punteadas.

$$\begin{aligned} p_1 &= K_{11} d_1 + K_{12} d_2 \\ p_2 &= K_{21} d_1 + K_{22} d_2 \end{aligned} \quad (4.5-2)$$

p_1 , p_2 y d_1 , d_2 son definidos en la ecuación (4.4-1) y (4.4-2) respectivamente y los términos K son las matrices de rigidez de 3x3 indicadas en la ecuación (4.5-1). Es muy útil notar que:

- (1) K_{11} y K_{22} son simétricas
- (2) $K_{12} = K_{21}^T$
- (3) K_{11} y K_{22} son análogas, con los signos de los términos $6EI/L^2$ fuera de la diagonal, contrarios.

4.6 Transformación de coordenadas

Las ecuaciones (4.5-2) han sido expresadas en términos de un sistema de coordenadas de los elementos individuales (sistema local de coordenadas). El paso 2 del ejemplo simple involucra la aplicación de la compatibilidad de las deformaciones en los extremos de los elementos, y los nudos en los cuales estos se encuentran. Esto podría ser hecho fácilmente, gracias a relaciones trigonométricas simples que existen entre la extensión de los elementos definidos y los desplazamientos de los nudos δ_h y δ_v . Las nuevas fuerzas de los extremos y los vectores desplazamientos p' y d' , similares a las ecuaciones (4.4-1) y (4.4-2) son definidas; las primas indican que estos términos son expresados en el sistema global de coordenadas; no así en sistema local de coordenadas.

Los términos no primas y primas son relacionados por la ecuación:

$$p = R_O p' \quad (4.6-1)$$

R_O es una matriz de transformación de 3x3, y sus términos ya fueron dados en la ecuación (3.3-17) del capítulo anterior. Siendo estas:

$$R_O = \begin{bmatrix} L_x/L & L_y/L & 0 \\ -L_y/L & L_x/L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6-2)$$

donde L_x y L_y son las proyecciones de la longitud L del elemento en los ejes x' y y' ; y β es el ángulo entre x' y x , medido en la dirección del vector de rotación positivo (figura 4.6-1).

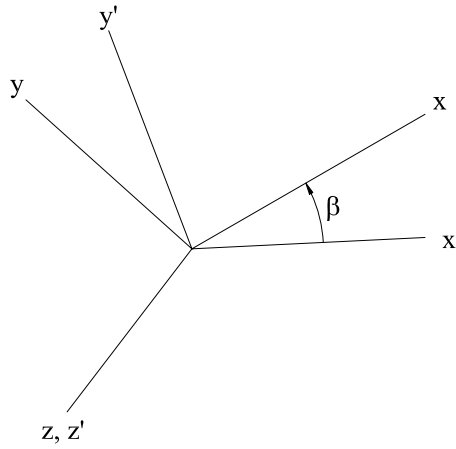


Figura 4.6-1

Como la matriz R_O es ortogonal su inversa es igual a su transpuesta y la ecuación (4.6-1) puede ser rescrita:

$$p' = R_O^T p \quad (4.6-3)$$

Existiendo una relación similar para los desplazamientos, facilitándose la demostración de esta mediante el uso de un argumento de trabajo virtual.

Un elemento al ser sometido a cargas p en un extremo, experimenta un desplazamiento virtual \bar{d} en dicho extremo. Pudiendo expresar esas mismas fuerzas y desplazamientos en una estructura con un sistema de coordenadas p' y \bar{d}' . El trabajo realizado por las fuerzas es independiente del sistema de coordenadas; usado en la expresión anterior. De donde:

$$\begin{aligned} p^T \bar{d} &= p'^T \bar{d}' \\ (R_O p')^T \bar{d} &= p'^T \bar{d}' \quad (\text{de la ecuación 4.6-1}) \\ p'^T R_O^T \bar{d} &= p'^T \bar{d}' \end{aligned}$$

Pero esta relación debe ser independiente de la magnitud de p' como su elección es arbitraria; entonces:

$$\bar{d}' = R_O^T \bar{d}$$

Si se asume ahora que los desplazamientos de la estructura son pequeños, estos pueden reemplazar los desplazamientos virtuales, entonces:

$$d' = R_o^T d$$

ó

$$d = R_o d' \quad (R_o \text{ ortogonal}) \quad (4.6-4)$$

Las ecuaciones (4.6-1) y (4.6-4) muestran la correspondencia entre fuerza y desplazamiento.

Las relaciones de los elementos rígidos en las ecuaciones (4.5-2) pueden ahora ser reescritas en términos del sistema global de coordenadas.

$$p_1 = K_{11} d_1 + K_{12} d_2$$

Así:

$$(R_o p_1') = K_{11} (R_o d_1') + K_{12} (R_o d_2')$$

Multiplicando ambos miembros por R_o^T ; entonces

$$\begin{aligned} p_1' &= (R_o^T K_{11} R_o) d_1' + (R_o^T K_{12} R_o) d_2' \\ p_1' &= K_{11}' d_1' + K_{12}' d_2' \end{aligned} \quad (4.6-5)$$

Similarmente:

$$p_2 = K_{21} d_1 + K_{22} d_2$$

Así:

$$(R_o p_2') = K_{21} (R_o d_1') + K_{22} (R_o d_2')$$

Multiplicando ambos miembros por R_o^T ; entonces

$$\begin{aligned} p_2' &= (R_o^T K_{21} R_o) d_1' + (R_o^T K_{22} R_o) d_2' \\ p_2' &= K_{21}' d_1' + K_{22}' d_2' \end{aligned} \quad (4.6-6)$$

Los términos de la matriz K_{11}' son:

$$K_{11}' = \begin{bmatrix} C^2 \frac{EA}{L} + S^2 \frac{12EI}{L^3} & SC \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) & -S \frac{6EI}{L^2} \\ SC \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) & S^2 \frac{EA}{L} + C^2 \frac{12EI}{L^3} & C \frac{6EI}{L^2} \\ -S \frac{6EI}{L^2} & C \frac{6EI}{L^2} & 4 \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \quad (4.6-7)$$

Los términos de la matriz K_{12}' son:

$$K_{12}' = \begin{bmatrix} -C^2 \frac{EA}{L} + S^2 \frac{12EI}{L^3} & -SC \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) & -S \frac{6EI}{L^2} \\ -SC \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) & - \left(S^2 \frac{EA}{L} + C^2 \frac{12EI}{L^3} \right) & C \frac{6EI}{L^2} \\ S \frac{6EI}{L^2} & -C \frac{6EI}{L^2} & 2 \frac{EI}{L} \end{bmatrix} \quad (4.6-8)$$

Donde: ($C = \cos \beta$; $S = \sin \beta$; $I = I_z$)

Las matrices K' aquí tienen las mismas propiedades que la de las matrices no prima.

(1) K'_{11} y K'_{22} son simétricas.

(2) $K'_{12} = K'^T_{21}$

(3) K'_{11} y K'_{22} son análogas, con los signos de los términos $6EI/L^2$ fuera de la diagonal, contrarios.

Es muy útil en los cálculos realizados a mano recordar estas relaciones, para que una vez que las matrices K'_{11} y K'_{12} ya han sido obtenidas; las dos restantes puedan obtenerse muy fácilmente.

4.7 Compatibilidad

La compatibilidad y los pasos posteriores serán ilustrados en la figura 4.7-1. De acuerdo a las suposiciones de la sección 4.3 las cargas pueden ser aplicadas en A ó B.

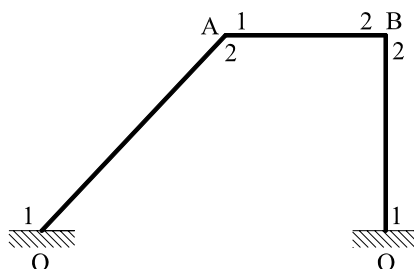


Figura 4.7-1

Los nudos fueron denominados de acuerdo a las reglas establecidas en la sección 4.4, y los extremos 1 y 2 de cada elemento han sido indicados. En el paso 2 del ejemplo simple, debe existir compatibilidad entre los desplazamientos de los extremos de cada elemento y los nudos en los cuales ellos ocurren.

$$\begin{aligned} \text{Para OA } d'_1 &= 0 & d'_2 &= \Delta_A \\ \text{Para AB } d'_1 &= \Delta_A & d'_2 &= \Delta_B \\ \text{Para OB } d'_1 &= 0 & d'_2 &= \Delta_B \end{aligned} \quad (4.7-1)$$

(Como Δ_A y Δ_B son los desplazamientos de los nudos A y B respectivamente, deben ser medidos en el sistema global de coordenadas, donde las primas fueron omitidas por ser superfluas).

Sustituyendo las ecuaciones (4.7-1) en las ecuaciones (4.6-5) y (4.6-6) para cada elemento (Paso 3 del ejemplo simple) se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Para OA } p'_1 &= K'_{12} \Delta_A \\ p'_2 &= K'_{22} \Delta_A \\ \text{Para AB } p'_1 &= K'_{11} \Delta_A + K'_{12} \Delta_B \\ p'_2 &= K'_{21} \Delta_A + K'_{22} \Delta_B \\ \text{Para OB } p'_1 &= K'_{12} \Delta_B \\ p'_2 &= K'_{22} \Delta_B \end{aligned} \quad (4.7-2)$$

4.8 Equilibrio

Cuando varios elementos de una estructura se encuentran en un nudo debe existir equilibrio entre las fuerzas de los elementos y las cargas externas (Paso 4). La figura 4.8-1 muestra las fuerzas actuantes en el nudo A de la estructura de la figura 4.7-1. Las cargas externas actuantes son mostradas a la izquierda (P_{xA} , P_{yA} y m_A), y a la derecha se muestra las cargas que actúan en los extremos de los elementos OA y AB.

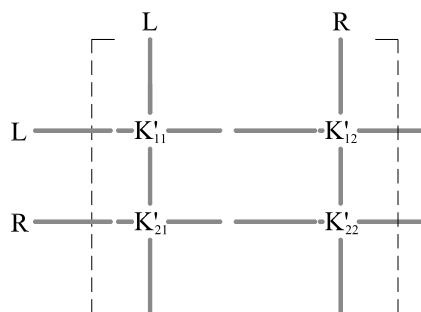


Figura 4.8-1 Fuerzas actuantes en el nudo A.

Las componentes de la carga externa P_A son iguales a la sumatoria de fuerzas de cada barra en el nudo A. Entonces

$$P_{xA} = (p'_{x1})_{AB} + (p'_{x2})_{OA}$$

$$P_{yA} = (p'_{y1})_{AB} + (p'_{y2})_{OA}$$

$$m_A = (m'_1)_{AB} + (m'_2)_{OA}$$

ó

$$P_A = (p'_1)_{AB} + (p'_2)_{OA}$$

Similarmente,

$$P_B = (p'_2)_{AB} + (p'_2)_{OB} \quad (4.8-1)$$

4.9 Matriz de rigidez de una estructura

Sustituyendo las ecuaciones (4.7-2) en las ecuaciones (4.8-1); y escribiendo matricialmente obtenemos la ecuación de rigidez de la estructura en el sistema global de coordenadas (SGC):

$$\begin{bmatrix} P_A \\ P_B \end{bmatrix} = \begin{matrix} A & B \end{matrix} \begin{bmatrix} (K'_{22})_{OA} + (K'_{11})_{AB} & (K'_{12})_{AB} \\ (K'_{21})_{AB} & (K'_{22})_{AB} + (K'_{22})_{OB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_A \\ \Delta_B \end{bmatrix} \quad (4.9-1)$$

$$P = K_S \Delta \quad (4.9-2)$$

donde: P son vectores de cargas externas aplicadas, Δ son las deformaciones de los nudos de la estructura y K_S es denominada matriz de rigidez de la estructura.

P_A y P_B ambos son denominados vectores de carga de tres términos, Δ_A y Δ_B son vectores desplazamientos de tres términos. La ecuación (4.9-2) es por consiguiente un conjunto de seis ecuaciones lineales (la estructura de la figura 4.7-1 tiene seis grados de libertad), y si la matriz K_S es no singular estas ecuaciones pueden ser resueltas para un conjunto de

cargas P dado, para las componentes de los seis desplazamientos desconocidos en Δ . Esto puede escribirse así:

$$\Delta = K_S^{-1} P \quad (4.9-3)$$

Una vez que las deformaciones de la estructura son conocidas, los términos apropiados pueden ser seleccionados, y sustituidos en las ecuaciones (4.7-2) y la ecuación (4.6-1) para dar primero las fuerzas de los elementos en el sistema global de coordenadas (SGC) y luego en el sistema local de coordenadas (SLC).

Antes de continuar es útil examinar cuidadosamente K_S . Tomando en cuenta los siguientes puntos:

(1) Es cuadrada, de un orden igual al número de grados de libertad, donde este número es igual al número total de las componentes de desplazamientos en la estructura completa. Para una barra en el plano, unida rígidamente el orden es igual a tres veces el número de nudos, y el almacenado total requerido para una estructura de j nudos es $9j^2$. Para una barra en el espacio es $36j^2$.

(2) Es simétrica. Esto puede ser visto si notamos que las submatrices que ocurren en la diagonal principal son todas las matrices K'_{11} y K'_{22} , que son simétricas por si solas (sección 4.5). Donde las submatrices fuera de la diagonal son: K'_{12} y K'_{21} , siendo la primera la transpuesta de la otra.

(3) Es no singular. Si la estructura no es un mecanismo, y es estable, debe existir una única relación entre cargas aplicadas y los desplazamientos resultantes. La ecuación (4.9-3) debe existir, y por consiguiente K_S debe ser no singular.

(4) Es definida positiva. Una matriz simétrica real como K_S es definida positiva, si la forma cuadrática $x^T K_S x$ es siempre positiva para cualquier vector real x distinto de cero. Si un conjunto de fuerzas P actúan sobre los nudos de una estructura de matriz de rigidez K_S , causando desplazamientos x , el trabajo realizado (U) está definido por

$$U = x^T P = x^T K_S x$$

U es necesariamente positivo, por consiguiente K_S es definida positiva.

(5) Puede ser construida de una manera lógica, sin seguir los pasos de las secciones 4.7 y 4.8. El bloque superior izquierdo de K_S , del bloque de la ecuación p_A que multiplica a d_A , (ecuación 4.9-1), contiene la suma de las matrices K'_{11} y K'_{22} , de todos los elementos que se encuentran en A, el término K'_{11} ocurre si el extremo 1 está unido a A, y K'_{22} ocurre si el extremo 2 está unido a A. $(K'_{12})_{AB}$ ocurre en la fila A y en la columna B. Similarmente K'_{21} ocurre en la fila B y la columna A. Debido solo a la existencia del elemento AB, en los nudos A y B no existe sumatoria.

Si el elemento LR existe en una estructura sus matrices de rigidez son localizadas en la matriz de rigidez de toda la estructura de acuerdo a lo establecido en la figura 4.9-1. El bloque LL contendrá la suma de las matrices K'_{11} o K'_{22} para todos los elementos que se encuentran unidos a L, y RR contendrá una suma similar para el nudo R. El bloque LR contendrá la matriz K'_{12} del elemento LR (extremo 1 de LR en L) y el bloque RL contendrá la matriz K'_{21} para el elemento LR (extremo 2 de LR en R). Puede verse que

K_S puede ser construida a través de las matrices relevantes K' para cada elemento de la estructura colocándola en la posición apropiada.

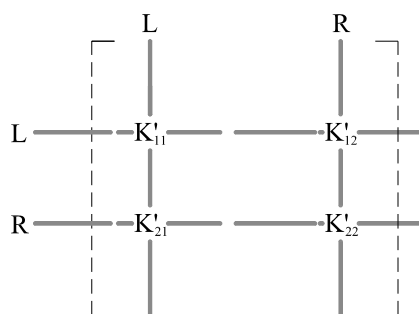


Figura 4.9-1

(6) Puede verse en las figuras 4.9-2 y 4.9-3 que toda la posición de la diagonal principal de K_S será llenada, pero las posiciones fuera de la diagonal solo serán llenadas si los nudos correspondientes a la fila y la columna están unidos por una barra. En general un nudo en una estructura esta unido por barras a otros tres o cuatro nudos.

La franja remarcada en la figura 4.9-3 es una consecuencia de la notación del sistema adoptado. Si se tiene cuidado en mantener la “diferencia” entre las letras de los extremos de cada elemento pequeño, todos los elementos fuera de la diagonal estarán próximos a la diagonal principal; esto es generalmente usado en la solución de las ecuaciones (4.9-2), si el orden de K_S es grande.

Un ejemplo de la forma de la matriz de rigidez para la estructura de la figura 4.9-2 esta dado en la figura 4.9-3. En la sección 4.12 se desarrollan ejemplos de forma mas detallada.

La forma básica del método de rigidez será discutida a continuación. El resto del capítulo se dedicará a la aplicación de estructuras que no satisfacen las suposiciones realizadas en la sección 4.3

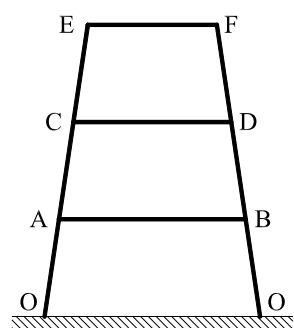


Figura 4.9-2

	A	B	C	D	E	F
A				○	○	○
B			○		○	○
C		○				○
D	○				○	
E	○	○		○		
F	○	○	○			

Figura 4.9-3

4.10 Nudos Restringidos y Simetría

Algunas veces ocurre en una estructura que en un nudo el movimiento en algunas direcciones puede ser libre, y en otras restringido. Esto ocurre en un apoyo articulado, en

el que en primera instancia las rotaciones pueden ocurrir, pero los movimientos lineales no.

Suponer que en la figura 4.7-1 el movimiento horizontal es restringido en B (figura 4.10-1).

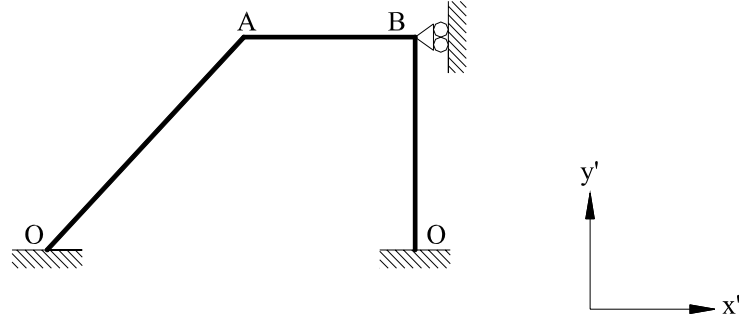


Figura 4.10-1 Estructura restringida en B.

El conjunto de ecuaciones (4.9-1) puede ser asumido exactamente como antes, pero una ecuación debe ser adicionada (ecuación 4.10-2).

$$\begin{bmatrix} P_A \\ P_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K'_{22})_{OA} + (K'_{11})_{AB} & (K'_{12})_{AB} \\ (K'_{21})_{AB} & (K'_{22})_{AB} + (K'_{22})_{OB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_A \\ \Delta_B \end{bmatrix} \quad (4.10-1)$$

$$0 = \Delta_{xB} \quad (4.10-2)$$

La sustitución de la ecuación (4.10-2) en la ecuación (4.10-1) es equivalente a la eliminación de una columna de K_S , desapareciendo una ecuación en el conjunto de seis ecuaciones donde las incógnitas desconocidas pueden ser determinadas. Cualquiera de las ecuaciones podría ser omitida, debido a que ellas forman un conjunto consistente, pero la carga correspondiente a la deformación cero no es un hecho conocido. Cualquier carga externa adicional P_{xB} actuando en la dirección de la deformación cero y por consiguiente en la dirección del apoyo, no tiene influencia en el resto de la estructura; siendo esta fuerza en el apoyo desconocida y por consiguiente esta ecuación debe ser omitida. Esto es equivalente a fijar $P_{xB} = 0$ en el vector carga y eliminar la fila correspondiente de K_S . Las cinco ecuaciones restantes pueden ahora ser resueltas.

El proceso antes mencionado es bastante útil si las ecuaciones están siendo resueltas a mano (cualquier reducción en el número de ecuaciones es ventajoso), pero no es tan conveniente para una solución por computadora. El quitar filas y columnas de K_S involucra un reordenamiento en el computador, y esto requiere tiempo. Una técnica más adecuada es:

- Fijar la matriz de rigidez suponiendo que todos los nudos fueran enteramente libres;
- Fijar filas y columnas de K_S correspondientes a la deformación cero a cero (haciendo K_S singular) y fijar los términos correspondientes en el vector carga a cero;
- Insertar un 1 a la diagonal principal de K_S en filas de cero (hacer K_S no singular nuevamente); esto es equivalente a insertar la ecuación (4.10-2) en el conjunto. Este proceso es mostrado esquemáticamente en las ecuaciones (4.10-4) y (4.10-5).

La solución anterior es válida también para apoyos articulados o móviles. Algunos programas de computadora requieren que todos los soportes sean tratados así. Si un nudo es empotrado es enumerado como el resto y sus componentes de las tres deformaciones son todas cero como se ha descrito.

Ejemplos usando esta técnica serán desarrollados en la sección 4.12.

El nudo de la figura 4.10-1 puede no estar completamente restringido, pero puede estar restringido elásticamente existiendo un desplazamiento Δ_{xB} , el efecto de esto puede causar una ecuación de carga externa ecuación (4.8-1), para el balance de equilibrio, en la dirección x de B será:

$$P_{xB} - k \Delta_{xB} = (p'_{x2})_{AB} + (p'_{x2})_{OB} \quad (4.10-3)$$

La transferencia del término k al lado derecho de la ecuación, implica la salida de k del vector carga como en la ecuación (4.9-1), cambiando solo K_S a través de la adición de k al término de la diagonal principal en la fila P_{xB} . La solución de estructuras que tienen nudos de esta clase es por consiguiente meramente el proceso de fijar un vector de carga normal y una matriz de rigidez de la estructura, y entonces modificar los términos de la diagonal principal adicionando la rigidez de los apoyos relevantes. Las ecuaciones (4.10-6) y (4.10-7) muestran esquemáticamente este proceso.

ESQUEMATICAMENTE:

NUDOS RESTRINGIDOS

Restricción absoluta: $\Delta_{xB} = 0$

Ecuación de rigidez normal (SGC x' y' z')

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & \Delta_{xA} & \cdots & \Delta_{xB} & \Delta_{yB} & \Delta_{zB} & \cdots & \cdots & \Delta_{zR} & \\
 p_{xA} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{xA} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 p_{xB} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{xB} \\
 p_{yB} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{yB} \\
 p_{zB} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{zB} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 p_{zR} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{zR}
 \end{array} \quad (4.10-4)$$

Ecuación de rigidez modificada (SGC x' y' z')

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & \Delta_{xA} & \cdots & \Delta_{xB} & \Delta_{yB} & \Delta_{zB} & \cdots & \cdots & \Delta_{zR} & \\
 p_{xA} & * & \cdots & 0 & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{xA} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \Delta_{xB} \\
 p_{yB} & * & \cdots & 0 & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{yB} \\
 p_{zB} & * & \cdots & 0 & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{zB} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 p_{zR} & * & \cdots & 0 & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{zR}
 \end{array} \quad (4.10-5)$$

NUDOS RESTRINGIDOS

Restricción elástica en Δ_{xB} con coeficiente de rigidez k_{xB}

Ecuación de rigidez normal (SGC x' y' z')

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & \Delta_{xA} & \cdots & \Delta_{xB} & \Delta_{yB} & \Delta_{zB} & \cdots & \cdots & \Delta_{zR} & \\
 p_{xA} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{xA} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 p_{xB} - k_{xB} & * & \cdots & \diamond & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{xB} \\
 p_{yB} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{yB} \\
 p_{zB} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{zB} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 p_{zR} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{zR}
 \end{array} \quad (4.10-6)$$

Ecuación de rigidez modificada (SGC x' y' z')

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & \Delta_{xA} & \cdots & \Delta_{xB} & \Delta_{yB} & \Delta_{zB} & \cdots & \cdots & \Delta_{zR} & \\
 p_{xA} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{xA} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 p_{xB} & * & \cdots & \diamond + k_{xB} & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{xB} \\
 p_{yB} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{yB} \\
 p_{zB} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{zB} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 p_{zR} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta_{zR}
 \end{array} \quad (4.10-7)$$

Este es un punto conveniente en el cual se puede discutir el tomar en cuenta la simetría en la solución. Tal consideración puede reducir el tamaño del problema considerablemente.

La estructura de la figura 4.10-2 es enteramente simétrica con respecto a su centro de gravedad, y esta cargada simétricamente; como se muestra tiene un total de cinco nudos, y la matriz de rigidez es de 15x15. Sin embargo, en el nudo A no existe deformación horizontal y tampoco existe rotación; la estructura puede verse como dos estructuras del tipo mostrado en la figura 4.10-3.

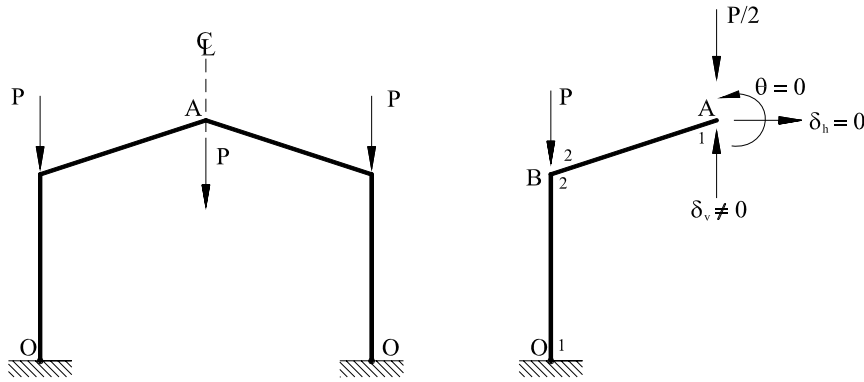


Figura 4.10-2 Estructura enteramente simétrica Figura 4.10-3 Estructura utilizada para el análisis

La estructura puede ser analizada fijando una matriz de rigidez solo para un lado (tres nudos) y suprimiendo las filas y columnas correspondientes a los desplazamientos horizontales y las rotaciones en A. Una carga vertical igual a la mitad de la carga en la estructura original, será utilizada en el punto A.

A continuación se muestra la matriz de rigidez de la barra AB de extremos 1-2

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{bmatrix} p_{x1} \\ P/2 \\ m_1 \\ p_{x2} \\ P \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ d_{y1} \\ 0 \\ d_{x2} \\ d_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Técnicas similares a estas pueden ser usadas en otros casos. El uso de la simetría en problemas pequeños carece de importancia puesto que no afecta a la solución del problema, pero esta puede ser de gran ayuda en los problemas grandes, donde el almacenamiento en la computadora requiere de mayor cuidado. Cada caso debe ser estudiado particularmente, como nudos adicionales y puede a veces ser necesario cortar los elementos por el plano de simetría. Esto podría dar ventajas y nulificar ciertas cosas.

4.11 Nudos articulados

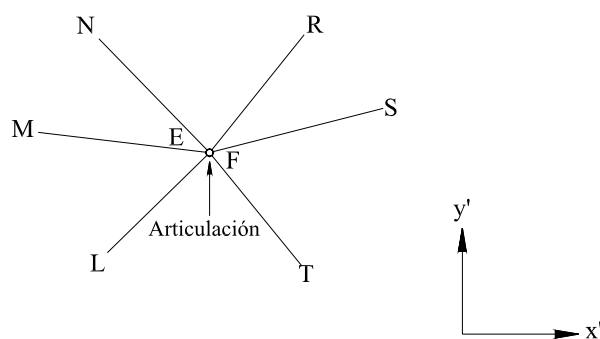


Figura 4.11-1 Nudo articulado.

La estructura que en primera instancia es unida rígidamente, puede frecuentemente contener un número de nudos que deben ser considerados como articulados, debido a que el diseño no nos permitirá transmitir momentos. Este nudo es mostrado en la figura 4.11-1. Note que los dos lados del nudo pueden ser analizados separadamente E y F (figura 4.11-2).

Los dos grupos de elementos EN, EM, EL y FR, FS, FT son uniones rígidas individualmente, pero son articulaciones en EF. Tal nudo tiene un total de cuatro grados de libertad: d_{xE} , d_{yE} , d_{xF} y d_{yF} , por consiguiente puede tomar un total de cuatro componentes de carga. Aquí se asume que las cargas directas externas son aplicadas al nudo E, aunque esta elección es bastante arbitraria y podría causar un efecto en el final de la solución. La articulación transmite una fuerza directa teniendo componentes verticales y horizontales entre E y F (figura 4.11-2).

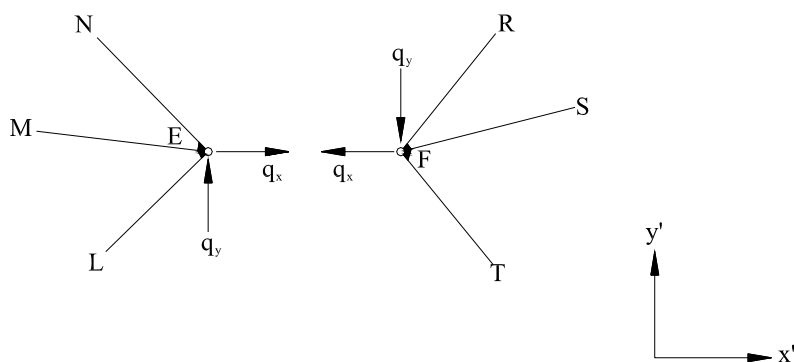


Figura 4.11-2 Equilibrio estático de un nudo.

Siendo ensamblada la matriz de rigidez de la manera usual, pero el vector carga debe tomar en cuenta q_x y q_y . Las ecuaciones de equilibrio relevantes se encuentran en la ecuación (4.11-1). Los asteriscos representan los términos asociados con otros nudos

$$\begin{array}{c} \text{Filas} \\ \text{E} \\ \text{Filas} \\ \text{F} \end{array} \begin{bmatrix} * \\ P_{xE} + q_x \\ P_{yE} + q_y \\ m_E \\ -q_x \\ -q_y \\ m_F \\ * \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \text{Columnas E} \\ \text{Columnas F} \end{array} \begin{bmatrix} * & * & * & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & * & * & * \\ * & * & * & & & & & & & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & & \Sigma K' & & & & 0 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & & & & & & & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & & & & & & & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & & 0 & & & \Sigma K' & & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & * \\ * & * & * & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ \Delta_{xE} \\ \Delta_{yE} \\ \theta_E \\ \Delta_{xF} \\ \Delta_{yF} \\ \theta_F \\ * \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

(4.11-1)

Los bloques EE y FF son en general completos, pero EF y FE son cero.

La ecuación 4 es sumada a la ecuación 1

La ecuación 5 es sumada a la ecuación 2

Esto quita los términos q_x y q_y de 1 y 2. Las ecuaciones 4 y 5 son ahora quitadas y reemplazadas por la condición de que las deformaciones lineales de E y F son iguales.

$$\Delta_{xE} = \Delta_{xF} \rightarrow 0 = -\Delta_{xE} + \Delta_{xF}$$

$$\Delta_{yE} = \Delta_{yF} \rightarrow 0 = -\Delta_{yE} + \Delta_{yF} \quad (4.11-2)$$

$$\theta_E \neq \theta_F$$

La cantidad de ceros colocados en el vector carga en las posiciones 4 y 5, +1 en las posiciones 4.4 y 5.5 de la matriz de rigidez y -1 en posiciones 4.1 y 5.2., dan la forma al conjunto final de ecuaciones:

$$\begin{array}{c} \text{Filas} \\ \text{E} \\ \text{Filas} \\ \text{F} \end{array} \begin{bmatrix} * \\ P_{xE} \\ P_{yE} \\ m_E \\ 0 \\ 0 \\ m_F \\ * \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \text{Columnas E} \\ \text{Columnas F} \end{array} \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\ \begin{bmatrix} * & * & * & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \hline \Sigma \text{ 1 y 4} & \text{original} & \Sigma \text{ original Ecuaciones 1 y 4} \\ \Sigma \text{ 2 y 5} & \Sigma K' & \Sigma \text{ original Ecuaciones 2 y 5} \\ \hline * & * & * & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & \circ & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \circ & \circ & 0 \\ 0 & \circ & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \circ & \circ & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ * & * & * & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & * \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} * \\ \Delta_{xE} \\ \Delta_{yE} \\ \theta_E \\ \Delta_{xF} \\ \Delta_{yF} \\ \theta_F \\ * \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

(4.11-3)

Este conjunto de ecuaciones puede ahora ser resuelto de la manera normal. Es un conjunto ligeramente más grande que el requerido, puesto que existen cuatro variables desconocidas solo asociadas con E y F, pero como se sugirió previamente es más práctico resolver el conjunto ligeramente mayor en computadora que manualmente para reducir la matriz de rigidez. Si se realiza la solución a mano, cualquier reducción del número de ecuaciones es muy útil, y esto puede ser realizado fácilmente adicionando la columna 4 a la columna 1 y la columna 5 a la columna 2 en la ecuación (4.11-3) (ambas se multiplican por iguales desplazamientos) y omitiendo las ecuaciones 4 y 5.

Este proceso da como resultado una matriz de rigidez no simétrica en la ecuación (4.11-3). Esto frecuentemente no importa, pero si la simetría va a ser usada en el proceso de solución esta puede ser restaurada moviendo apropiadamente las cantidades entre las columnas 1 y 4 y 2 y 5 respectivamente, como esos multiplican términos de iguales desplazamientos.

Un ejemplo extremo del tipo del problema discutido aquí, ocurre cuando todos los nudos de una estructura están articulados. Este caso obviamente requiere de un tratamiento especial que será discutido en la sección 4.13.

El proceso discutido anteriormente permite la posibilidad de que el extremo de un elemento articulado pueda soportar momentos, en caso contrario y si no se necesita calcular la rotación del elemento en el nudo una aproximación alternativa puede ser utilizada. En la formación de matrices de rigidez de una estructura y en el cálculo de fuerzas de los elementos posteriormente, las versiones modificadas de las matrices de rigidez de los elementos pueden ser utilizadas, y estas ser ensambladas directamente.

Si existe una articulación en el extremo 1 de un elemento, los elementos rígidos son modificados, eliminando la rotación θ_1 del conjunto de seis ecuaciones (ecuación (4.5-1)) con m_1 igual a cero, siguiendo el proceso que se muestra a continuación.

La presencia de una articulación produce un momento cero en el extremo 1 del elemento.

$$\begin{bmatrix} p_{x1} \\ p_{y1} \\ m_1 \\ p_{x2} \\ p_{y2} \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x1} \\ d_{y1} \\ \theta_1 \\ d_{x2} \\ d_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

En consecuencia la tercera fila de la matriz de rigidez es:

$$m_1 = 0 = \frac{6EI}{L^2} d_{y1} + \frac{4EI}{L} \theta_1 - \frac{6EI}{L^2} d_{y2} + \frac{2EI}{L} \theta_2$$

Esto indica que ninguno de los desplazamientos es independiente; esto, podría resolverse para θ_1 en términos de los desplazamientos restantes como

$$\theta_1 = -\frac{3}{2L} d_{y1} + \frac{3}{2L} d_{y2} - \frac{1}{2} \theta_2$$

Ahora es posible escribir una expresión que relacione los desplazamientos de un extremo rígido con los desplazamientos de un extremo articulado.

$$\begin{bmatrix} d_{x1} \\ d_{y1} \\ \theta_1 \\ \dots \\ d_{x2} \\ d_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2L & 0 & 0 & 3/2L & -1/2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x1} \\ d_{y1} \\ \theta_1 \\ \dots \\ d_{x2} \\ d_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$[\Delta]_{General} = [C] [\Delta]_{Articulado}$$

C es la matriz que relaciona los desplazamientos del extremo 2 que es rígido con los desplazamientos del extremo 1 que es articulado

Al sustituir esta expresión en la ecuación general de rigidez.

$$[P]_{General} = [K]_{General} [\Delta]_{General}$$

se obtiene:

$$[P]_{General} = [K]_{General} [C] [\Delta]_{Articulado}$$

$$[K]_{Articulado} = [K]_{General} [C]$$

$$[P]_{Articulado} = [K]_{Articulado} [\Delta]_{Articulado}$$

Siempre que se encuentre un elemento con un extremo articulado, se debe formar la matriz especial C y calcular el producto matricial anterior. La matriz que resulte ahora representará la matriz de rigidez para el elemento con un extremo articulado. La forma explícita de la matriz se detalla a continuación.

$$[K]_{General} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2L & 0 & 0 & 3/2L & -1/2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]_{Articulado} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 3EI/L^3 & 0 & 0 & -3EI/L^3 & 3EI/L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -3EI/L^3 & 0 & 0 & 3EI/L^3 & -3EI/L^2 \\ 0 & 3EI/L^2 & 0 & 0 & -3EI/L^2 & 3EI/L \end{bmatrix}$$

Donde las matrices de 3x3 modificadas son

$$K_{11} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad K_{22} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$K_{12} = K_{21}^T = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11-4)$$

Aunque todos los coeficientes de θ_1 son cero en las matrices modificadas el orden debe ser mantenido.

Análogamente, si la articulación ocurre en el extremo 2 de un elemento las matrices 3x3 modificadas son:

$$K_{11} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} \quad K_{22} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{12} = K_{21}^T = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11.5)$$

Dando lugar a:

$$[K]_{Articulado} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 3EI/L^3 & 3EI/L^2 & 0 & -3EI/L^3 & 0 \\ 0 & 3EI/L^2 & 3EI/L & 0 & -3EI/L^2 & 0 \\ \hline -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -3EI/L^3 & -3EI/L^2 & 0 & 3EI/L^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Un elemento con articulación en ambos extremos implica la no existencia de momentos en dichos extremos, también que el cortante es cero, y solo los términos restantes en las matrices de rigidez de los elementos son entonces aquellos en (EA/L) .

4.12 Ejemplos de estructuras de barras rígidas

Ejemplo 4.12-1. En la estructura de la figura 4.12-1; se pide hallar las fuerzas en los elementos AB y OB

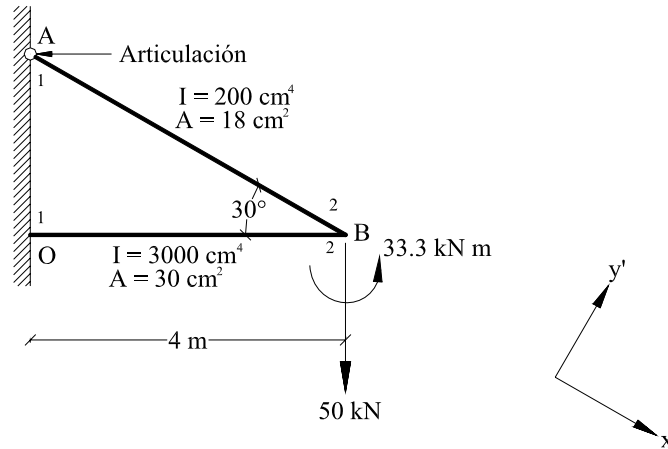


Figura 4.12-1

La matriz de rigidez de la estructura es primero fijada en términos generales, suponiendo que A es libre. Así:

$$\begin{bmatrix} P_A \\ P_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K'_{11})_{AB} & (K'_{12})_{AB} \\ (K'_{21})_{AB} & (K'_{22})_{AB} + (K'_{22})_{OB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_A \\ \Delta_B \end{bmatrix}$$

El sistema global de coordenadas elegido se indica en la figura 4.12-1. La elección del sistema de coordenadas mostrado mantiene el problema de transformación de ejes al mínimo.

Elemento AB

$$L = \frac{4}{\cos 30^\circ} = 4.619 \text{ m}$$

$$K'_{11} = K_{11} = E \begin{bmatrix} \frac{18 \times 10^{-4}}{4.619} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \times 200 \times 10^{-8}}{(4.619)^3} & \frac{6 \times 200 \times 10^{-8}}{(4.619)^2} \\ 0 & \frac{6 \times 200 \times 10^{-8}}{(4.619)^2} & \frac{4 \times 200 \times 10^{-8}}{4.619} \end{bmatrix}$$

$$K'_{11} = 10^{-8} E \begin{bmatrix} 39000 & 0 & 0 \\ 0 & 24.4 & 56.2 \\ 0 & 56.2 & 173 \end{bmatrix}$$

Las matrices restantes pueden ser obtenidas de la siguiente manera:

$$K'_{12} = K_{21}^T = K_{12} = -10^{-8} E \begin{bmatrix} -39000 & 0 & 0 \\ 0 & -24.4 & 56.2 \\ 0 & -56.2 & 86.6 \end{bmatrix}$$

y

$$K'_{22} = K_{22} = 10^{-8} E \begin{bmatrix} 39000 & 0 & 0 \\ 0 & 24.4 & -56.2 \\ 0 & -56.2 & 173 \end{bmatrix}$$

Elemento OB

$$K'_{22} = R_O^T K_{22} R_O$$

$$K_{22} R_O = E \begin{bmatrix} \frac{30 \times 10^{-4}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \times 3 \times 10^{-5}}{(4)^3} & -\frac{6 \times 3 \times 10^{-5}}{(4)^2} \\ 0 & -\frac{6 \times 3 \times 10^{-5}}{(4)^2} & \frac{4 \times 3 \times 10^{-5}}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K'_{22} = 10^{-5} E \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 65 & 37.5 & 0 \\ -0.281 & 0.487 & -1.125 \\ 0.562 & -0.974 & 3 \end{bmatrix}$$

$$K'_{22} = 10^{-5} E \begin{bmatrix} 56.4 & 32.2 & 0.563 \\ 32.2 & 19.2 & -0.974 \\ 0.563 & -0.974 & 3 \end{bmatrix}$$

$$K_S = 10^{-6} E \begin{bmatrix} 390 & 0 & 0 & -390 & 0 & 0 \\ 0 & 0.244 & 0.562 & 0 & -0.244 & 0.562 \\ 0 & 0.562 & 1.73 & 0 & -0.562 & 0.866 \\ -390 & 0 & 0 & 954 & 322 & 5.63 \\ 0 & -0.244 & -0.562 & 322 & 192 & -10.3 \\ 0 & 0.562 & 0.866 & 5.63 & -10.3 & 31.7 \end{bmatrix}$$

Debido a que existe una articulación en A, las primeras dos filas y columnas son fijadas a cero, insertando 1 en la diagonal principal (ver sección 4.10). El conjunto total de ecuaciones usando las cargas de la figura 4.12-1, resuelto en el sistema de coordenadas elegido, es:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \\ -43.3 \\ 33.3 \end{bmatrix} = 10^{-6} E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.73 & 0 & -0.562 & 0.866 \\ 0 & 0 & 0 & 954 & 322 & 5.63 \\ 0 & 0 & -0.562 & 322 & 192 & -10.3 \\ 0 & 0 & 0.866 & 5.63 & -10.3 & 31.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{xA} \\ \Delta_{yA} \\ \theta_A \\ \Delta_{xB} \\ \Delta_{yB} \\ \theta_B \end{bmatrix}$$

La solución para este conjunto de ecuaciones es:

$$\begin{bmatrix} \Delta_{xA} \\ \Delta_{yA} \\ \theta_A \\ \Delta_{xB} \\ \Delta_{yB} \\ \theta_B \end{bmatrix} = \frac{10^{-6}}{E} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.597 \\ 0.190 \\ -0.500 \\ 0.870 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ rad \\ m \\ m \\ rad \end{matrix}$$

Las fuerzas de los elementos son obtenidas a continuación:

Elemento AB

$$p'_1 = K'_{11} \Delta_A + K'_{12} \Delta_B$$

$$p'_1 = p_1 = 10^{-2} \begin{bmatrix} 39000 & 0 & 0 \\ 0 & 24.2 & 56.2 \\ 0 & 56.2 & 173 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.597 \end{bmatrix} + 10^{-2} \begin{bmatrix} -39000 & 0 & 0 \\ 0 & -24.2 & 56.2 \\ 0 & -56.2 & 86.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.190 \\ -0.500 \\ 0.870 \end{bmatrix}$$

$$p'_1 = p_1 = 10^{-2} \begin{bmatrix} 0 \\ -33.6 \\ -103 \end{bmatrix} + 10^{-2} \begin{bmatrix} -7400 \\ 61.1 \\ 103 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -74 \\ 0.275 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} KN \\ KN \\ \end{matrix}$$

Similarmente

$$p'_2 = K'_{21} \Delta_A + K'_{22} \Delta_B$$

$$p'_2 = p_2 = 10^{-2} \begin{bmatrix} 74 \\ -0.275 \\ 1.27 \end{bmatrix} \begin{matrix} KN \\ KN \\ KNm \end{matrix}$$

Elemento OB

$$p'_2 = K'_{22} \Delta_B = 10 \begin{bmatrix} 56.4 & 32.2 & 0.563 \\ 32.2 & 19.2 & -0.974 \\ 0.563 & -0.974 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.190 \\ -0.500 \\ 0.870 \end{bmatrix}$$

$$p'_2 = \begin{bmatrix} -49 \\ -43 \\ 32 \end{bmatrix} \begin{matrix} kN \\ kN \\ kNm \end{matrix}$$

$$p_2 = R_o p'_2 \text{ (por la ecuación 4.6-1)} = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.50 & 0 \\ -0.50 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -49 \\ -43 \\ 32 \end{bmatrix}$$

$$p_2 = \begin{bmatrix} -64 \\ -12.8 \\ 32 \end{bmatrix} \begin{matrix} kN \\ kN \\ kNm \end{matrix}$$

Para calcular las fuerzas en O (p_1), es necesario conocer K'_{12} para OB, obtenida de manera similar a las anteriores:

$$K'_{12} = R_o^T K_{12} R_o$$

$$K_{12} R_o = E \begin{bmatrix} -\frac{30 \times 10^{-4}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \times 3 \times 10^{-5}}{(4)^3} & \frac{6 \times 3 \times 10^{-5}}{(4)^2} \\ 0 & -\frac{6 \times 3 \times 10^{-5}}{(4)^2} & \frac{2 \times 3 \times 10^{-5}}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K'_{12} = 10^{-5} E \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -65 & -37.5 & 0 \\ 0.281 & -0.487 & 1.125 \\ 0.562 & -0.974 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$$K'_{12} = 10^{-5} E \begin{bmatrix} -56.4 & -32.2 & -0.563 \\ -32.2 & -19.2 & 0.974 \\ 0.563 & -0.974 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$$p'_1 = K'_{12} \Delta_B = \begin{bmatrix} -56.4 & -32.2 & -0.563 \\ -32.2 & -19.2 & 0.974 \\ 0.563 & -0.974 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.190 \\ -0.500 \\ 0.870 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 \\ 43 \\ 19 \end{bmatrix} \begin{matrix} kN \\ kN \\ kNm \end{matrix}$$

$$p_1 = R_o p'_1 = \begin{bmatrix} 64.0 \\ 12.8 \\ 19.0 \end{bmatrix} \begin{matrix} kN \\ kN \\ kNm \end{matrix}$$

Ejemplo 4.12-2. En la estructura de la figura 4.12-2; se pide hallar las fuerzas en los elementos OA, AB y OB; donde: E , I y A son constantes. Hacer $I/A=1000$

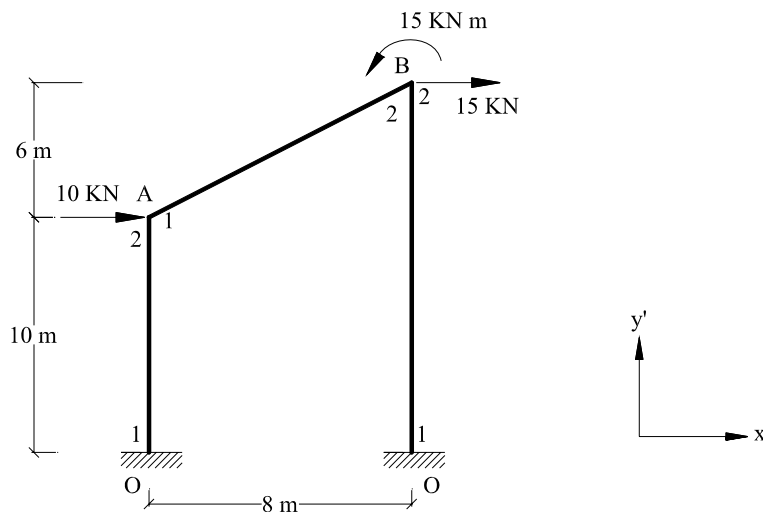


Figura 4.12-2

La matriz de rigidez de la estructura es primero fijada en términos generales, Así:

$$\begin{bmatrix} P_A \\ P_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K'_{11})_{AB} + (K'_{22})_{OA} & (K'_{12})_{AB} \\ (K'_{21})_{AB} & (K'_{22})_{AB} + (K'_{22})_{OB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_A \\ \Delta_B \end{bmatrix}$$

Elemento OA

$$K'_{12} = R_O^T K_{12} R_O$$

$$K_{12} R_O = EI \begin{bmatrix} -0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & -0.012 & 0.06 \\ 0 & -0.06 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K'_{12} = EI \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0.0001 & 0 \\ 0.012 & 0 & 0.06 \\ 0.06 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$K'_{12} = EI \begin{bmatrix} -0.012 & 0 & -0.06 \\ 0 & -0.0001 & 0 \\ 0.06 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$K'_{22} = R_O^T K_{22} R_O$$

$$K_{22} R_O = EI \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.012 & -0.06 \\ 0 & -0.06 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K'_{22} = EI \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.0001 & 0 \\ -0.012 & 0 & -0.06 \\ 0.06 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$K'_{22} = EI \begin{bmatrix} 0.012 & 0 & 0.06 \\ 0 & 0.0001 & 0 \\ 0.06 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Elemento AB

$$L = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ m}$$

$$K'_{11} = R_o^T K_{11} R_o$$

$$K_{11} R_o = EI \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.012 & 0.06 \\ 0 & 0.06 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K'_{11} = EI \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00008 & 0.00006 & 0 \\ -0.0072 & 0.0096 & 0.06 \\ -0.036 & 0.048 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$K'_{11} = EI \begin{bmatrix} 0.0044 & -0.0057 & -0.036 \\ -0.0057 & 0.0077 & 0.048 \\ -0.036 & 0.048 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$K'_{22} = R_o^T K_{22} R_o$$

$$K_{22} R_o = EI \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.012 & -0.06 \\ 0 & -0.06 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K'_{22} = EI \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.00008 & 0.00006 & 0 \\ -0.0072 & 0.0096 & -0.06 \\ 0.036 & -0.048 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$K'_{22} = EI \begin{bmatrix} 0.0044 & -0.0057 & 0.0360 \\ -0.0057 & 0.0077 & -0.0480 \\ 0.0360 & -0.0480 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$K'_{12} = R_o^T K_{12} R_o$$

$$K'_{12} = K_{21}^T$$

$$K_{12} R_o = EI \begin{bmatrix} -0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & -0.012 & 0.06 \\ 0 & -0.06 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K'_{12} = EI \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.00008 & -0.00006 & 0 \\ 0.0072 & -0.0096 & 0.06 \\ 0.036 & -0.048 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$K'_{12} = EI \begin{bmatrix} -0.0044 & 0.0057 & -0.0360 \\ 0.0057 & -0.0077 & 0.0480 \\ 0.0360 & -0.0480 & 0.2000 \end{bmatrix}$$

$$K'_{21} = EI \begin{bmatrix} -0.0044 & 0.0057 & 0.0360 \\ 0.0057 & -0.0077 & -0.0480 \\ -0.0360 & 0.0480 & 0.2000 \end{bmatrix}$$

Elemento OB

$$K'_{12} = R_O^T K_{12} R_O$$

$$K_{12} R_O = EI \begin{bmatrix} -0.0000625 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0029 & 0.0234 \\ 0 & -0.0234 & 0.125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K'_{12} = EI \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0.0000625 & 0 \\ 0.0029 & 0 & 0.0234 \\ 0.0234 & 0 & 0.125 \end{bmatrix}$$

$$K'_{12} = EI \begin{bmatrix} -0.0029 & 0 & -0.0234 \\ 0 & 0.0000625 & 0 \\ 0.0234 & 0 & 0.125 \end{bmatrix}$$

$$K'_{22} = R_O^T K_{22} R_O$$

$$K_{22} R_O = EI \begin{bmatrix} 0.0000625 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0029 & -0.0234 \\ 0 & -0.0234 & 0.2500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K'_{22} = EI \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.0000625 & 0 \\ -0.0029 & 0 & -0.0234 \\ 0.0234 & 0 & 0.2500 \end{bmatrix}$$

$$K'_{22} = EI \begin{bmatrix} 0.0029 & 0 & 0.0234 \\ 0 & 0.0000625 & 0 \\ 0.0234 & 0 & 0.2500 \end{bmatrix}$$

$$K_S = EI \begin{bmatrix} 0.0164 & -0.0057 & 0.0240 & -0.0044 & 0.0057 & -0.0360 \\ -0.0057 & 0.0078 & 0.0480 & 0.0057 & -0.0077 & 0.0480 \\ 0.0240 & 0.0480 & 0.8000 & 0.0360 & -0.0480 & 0.2000 \\ -0.0044 & 0.0057 & 0.0360 & 0.0073 & -0.0057 & 0.0590 \\ 0.0057 & -0.0077 & -0.0480 & -0.0057 & 0.0079 & -0.0480 \\ -0.0360 & 0.0480 & 0.2000 & 0.0590 & -0.0480 & 0.6500 \end{bmatrix}$$

El conjunto total de ecuaciones usando las cargas de la figura 4.12-2, resuelto en el sistema de coordenadas elegido, es:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 0.0164 & -0.0057 & 0.0240 & -0.0044 & 0.0057 & -0.0360 \\ -0.0057 & 0.0078 & 0.0480 & 0.0057 & -0.0077 & 0.0480 \\ 0.0240 & 0.0480 & 0.8000 & 0.0360 & -0.0480 & 0.2000 \\ -0.0044 & 0.0057 & 0.0360 & 0.0073 & -0.0057 & 0.0590 \\ 0.0057 & -0.0077 & -0.0480 & -0.0057 & 0.0079 & -0.0480 \\ -0.0360 & 0.0480 & 0.2000 & 0.0590 & -0.0480 & 0.6500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{xA} \\ \Delta_{yA} \\ \theta_A \\ \Delta_{xB} \\ \Delta_{yB} \\ \theta_B \end{bmatrix}$$

La solución para este conjunto de ecuaciones es:

$$\begin{bmatrix} \Delta_{xA} \\ \Delta_{yA} \\ \theta_A \\ \Delta_{xB} \\ \Delta_{yB} \\ \theta_B \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 48892 \\ 35064 \\ -803.9 \\ 136061 \\ -17532 \\ -10822 \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ m \\ rad \\ m \\ m \\ rad \end{matrix}$$

Las fuerzas de los elementos son obtenidas a continuación:

Elemento OA

$$p'_1 = K'_{12} \Delta_A$$

$$p'_1 = \begin{bmatrix} -0.012 & 0 & -0.06 \\ 0 & -0.0001 & 0 \\ 0.06 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48892 \\ 35064 \\ -803.9 \end{bmatrix}$$

$$p'_1 = \begin{bmatrix} -10.44 \\ -0.35 \\ 132.57 \end{bmatrix} \begin{matrix} KN \\ KN \\ KNm \end{matrix}$$

$$p_1 = R_o p'_1 \text{ (por la ecuación 4.6-1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10.44 \\ -0.35 \\ 132.57 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} -0.35 \\ 10.44 \\ 132.57 \end{bmatrix} \begin{matrix} kN \\ kN \\ kNm \end{matrix}$$

$$p'_2 = K'_{22} \Delta_A$$

$$p'_2 = \begin{bmatrix} 0.012 & 0 & 0.06 \\ 0 & 0.0001 & 0 \\ 0.06 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48892 \\ 35064 \\ -803.9 \end{bmatrix}$$

$$p'_2 = \begin{bmatrix} 10.44 \\ 0.35 \\ -28.21 \end{bmatrix} \begin{matrix} KN \\ KN \\ KNm \end{matrix}$$

$$p_2 = R_o p'_2 \text{ (por la ecuación 4.6-1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10.44 \\ 0.35 \\ -28.21 \end{bmatrix}$$

$$p_2 = \begin{bmatrix} 0.35 \\ -10.44 \\ -28.21 \end{bmatrix} \begin{matrix} kN \\ kN \\ kNm \end{matrix}$$

Elemento AB

$$p'_1 = K'_{11} \Delta_A + K'_{12} \Delta_B$$

$$p'_1 = \begin{bmatrix} 0.0044 & -0.0057 & -0.036 \\ -0.0057 & 0.0077 & 0.048 \\ -0.036 & 0.048 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4889.2 \\ 3506.4 \\ -803.9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0044 & 0.0057 & -0.036 \\ 0.0057 & -0.0077 & 0.048 \\ 0.036 & -0.048 & 0.2000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13606.1 \\ -1753.2 \\ -1082.2 \end{bmatrix}$$

$$p'_1 = \begin{bmatrix} -0.43 \\ -0.34 \\ 28.26 \end{bmatrix} \begin{matrix} kN \\ kN \\ kNm \end{matrix}$$

$$p_1 = R_o p'_1 \text{ (por la ecuación 4.6-1)} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.43 \\ -0.34 \\ 28.26 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} -0.548 \\ -0.014 \\ 28.260 \end{bmatrix} \begin{matrix} kN \\ kN \\ kNm \end{matrix}$$

$$p'_2 = K'_{21} \Delta_A + K'_{22} \Delta_B$$

$$p'_2 = \begin{bmatrix} -0.0044 & 0.0057 & 0.036 \\ 0.0057 & -0.0077 & -0.048 \\ -0.036 & 0.048 & 0.2000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4889.2 \\ 3506.4 \\ -803.9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0044 & -0.0057 & 0.036 \\ -0.0057 & 0.0077 & -0.048 \\ 0.036 & -0.048 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13606.1 \\ -1753.2 \\ -1082.2 \end{bmatrix}$$

$$p'_2 = \begin{bmatrix} 0.43 \\ 0.34 \\ -27.39 \end{bmatrix} \begin{matrix} kN \\ kN \\ kNm \end{matrix}$$

$$p_2 = R_o p'_2 \text{ (por la ecuación 4.6-1)} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.43 \\ 0.34 \\ -27.39 \end{bmatrix}$$

$$p_2 = \begin{bmatrix} 0.548 \\ 0.014 \\ -27.39 \end{bmatrix} \begin{matrix} kN \\ kN \\ kNm \end{matrix}$$

Elemento OB

$$p'_1 = K'_{12} \Delta_B$$

$$p'_1 = \begin{bmatrix} -0.0029 & 0 & -0.0234 \\ 0 & 0.0000625 & 0 \\ 0.0234 & 0 & 0.125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 136061 \\ -1753.2 \\ -10822 \end{bmatrix}$$

$$p'_1 = \begin{bmatrix} -14.13 \\ 0.11 \\ 183.11 \end{bmatrix} \begin{matrix} KN \\ KN \\ KNm \end{matrix}$$

$$p_1 = R_o p'_1 \text{ (por la ecuación 4.6-1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -14.13 \\ 0.11 \\ 183.11 \end{bmatrix}$$

$$p_1 = \begin{bmatrix} 0.11 \\ 14.13 \\ 183.11 \end{bmatrix} \begin{matrix} kN \\ kN \\ kNm \end{matrix}$$

$$p'_2 = K'_{22} \Delta_B$$

$$p'_2 = \begin{bmatrix} 0.0029 & 0 & 0.0234 \\ 0 & 0.0000625 & 0 \\ 0.0234 & 0 & 0.2500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 136061 \\ -1753.2 \\ -10822 \end{bmatrix}$$

$$p'_2 = \begin{bmatrix} 14.13 \\ -0.11 \\ 47.83 \end{bmatrix} \begin{matrix} KN \\ KN \\ KNm \end{matrix}$$

$$p_2 = R_o p'_2 \text{ (por la ecuación 4.6-1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14.13 \\ -0.11 \\ 47.83 \end{bmatrix}$$

$$p_2 = \begin{bmatrix} -0.11 \\ 14.13 \\ 47.83 \end{bmatrix} \begin{matrix} kN \\ kN \\ kNm \end{matrix}$$

4.13 Estructuras de nudos articulados

El análisis descrito anteriormente será usado para estructuras en dos dimensiones con solo nudos rígidos, Una aplicación de este método para estructuras con articulaciones puede ser realizada, pero esta aplicación no resultaría práctica para estructuras con todos sus nudos articulados. El análisis para estructuras con todos sus nudos articulados se describe a continuación.

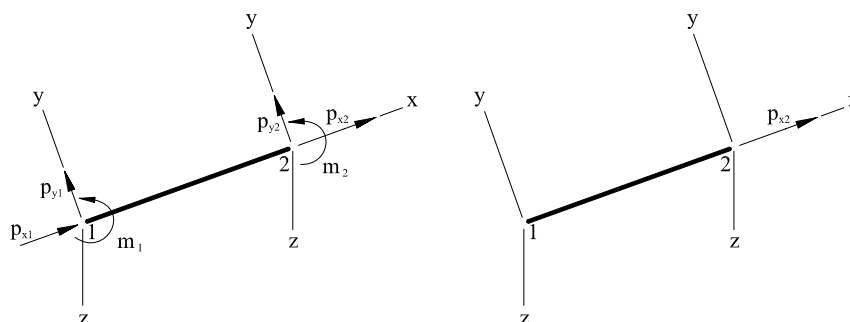
Los elementos unidos por articulaciones llevan una fuerza axial solamente, sufriendo una deformación y cambio de longitud. Las relaciones de rigidez del elemento (ecuaciones 4.5-1) ahora son reducidas a:

$$\begin{bmatrix} p_{x1} \\ p_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x1} \\ d_{x2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_{x1} \\ p_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x1} \\ d_{x2} \end{bmatrix} \quad (4.13-1)$$

donde $K = EA/L$ ($K_{11} = K_{22} = K$ y $K_{12} = K_{21} = -K$)

Según la convención de signos, un valor positivo de p_{x2} indica tensión en el elemento.



Similarmente la matriz de transformación de coordenadas (ecuación 4.6-2) es ahora reducida a:

$$R_o = \begin{bmatrix} L_x/L & L_y/L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \end{bmatrix}_{1 \times 2} \quad (4.13-2)$$

siendo β el ángulo entre los ejes de la estructura y los ejes del elemento (figura 4.6-1) resultando ahora R_o una matriz de dimensión no cuadrada, y no puede ser descrita como ortogonal.

Por la ecuación (4.6-1):

$$p = R_o p'$$

Sabiendo que:

$$p' = R_o^T p$$

También

$$d = R_o d' \quad \text{y} \quad d' = R_o^T d$$

Como ahora todos los elementos de la matriz de rigidez son escalares, el producto $R_o^T K R_o$ es simple

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \left(\frac{L_x}{L}\right)^2 & \frac{L_x L_y}{L^2} \\ \frac{L_x L_y}{L^2} & \left(\frac{L_y}{L}\right)^2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & -\cos \beta \sin \beta \\ -\cos \beta \sin \beta & \sin^2 \beta \end{bmatrix} \quad (4.13-3)$$

4.14 Ejemplos de estructuras de nudos articulados

Ejemplo 4.14-1. La estructura mostrada en la figura 4.14-1 es articulada en todos sus nudos. Todos los elementos tienen la misma rigidez EA . El nudo A es articulado en un apoyo, y B puede moverse solo verticalmente. El sistema de la estructura se muestra a continuación.

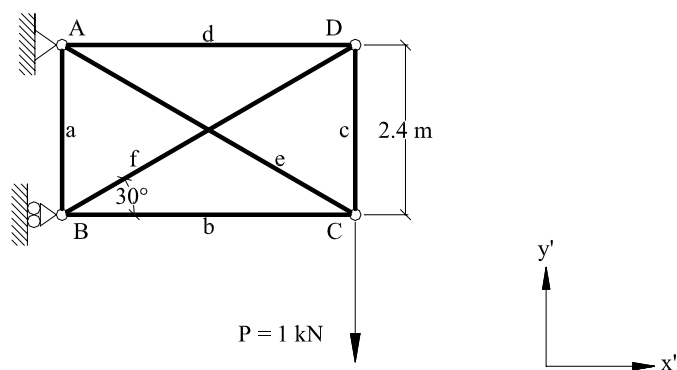


Figura 4.14-1

La matriz de rigidez de la estructura es primero fijada en términos generales, suponiendo que B es libre:

$$\begin{bmatrix} P_B \\ P_C \\ P_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_a + K'_b + K'_f & -K'_b & -K'_f \\ -K'_b & K'_b + K'_c + K'_e & -K'_c \\ -K'_f & -K'_c & K'_c + K'_d + K'_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_B \\ \Delta_C \\ \Delta_D \end{bmatrix}$$

Los elementos llevan las letras minúsculas para simplificar la notación. Los extremos 1 y 2 de cada elemento se indican en la figura 4.14-2.

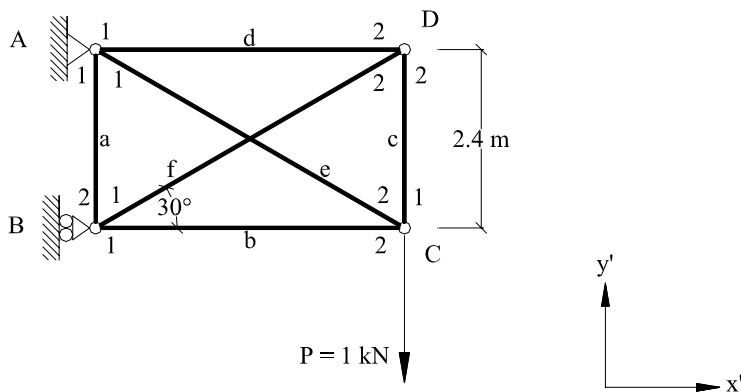


Figura 4.14-2

La matriz es simétrica como antes, y generalmente será una matriz de franja si se enumera cuidadosamente. En este caso no es una matriz de franja, debido a que en estructuras pequeñas todos los nudos están interconectados.

De la ecuación (4.13-3)

$$\text{Elemento a} \quad K' = \frac{EA}{2.4} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Elemento b} \quad K' = \frac{EA}{2.4\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Elemento c} \quad K' = \frac{EA}{2.4} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Elemento d} \quad K' = \frac{EA}{2.4\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Elemento e} \quad K' = \frac{EA}{4.8} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{-\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{Elemento f} \quad K' = \frac{EA}{4.8} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_B \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EA}{2.4} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{-\sqrt{3}}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} & 1 + \frac{1}{8} & 0 & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{8} & \frac{-\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{8} & 1 + \frac{1}{8} & 0 & -1 \\ -\frac{3}{8} & \frac{-\sqrt{3}}{8} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ \frac{-\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & -1 & \frac{\sqrt{3}}{8} & 1 + \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{xB} \\ \Delta_{yB} \\ \Delta_{xC} \\ \Delta_{yC} \\ \Delta_{xD} \\ \Delta_{yD} \end{bmatrix}$$

La primera fila y columna (correspondiente al desplazamiento horizontal en B) son eliminadas dando lugar a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EA}{2.4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.125 & 0 & 0 & -0.217 & -0.125 \\ 0 & 0 & 0.954 & -0.217 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.217 & 1.125 & 0 & -1 \\ 0 & -0.217 & 0 & 0 & 0.954 & 0.217 \\ 0 & -0.125 & 0 & -1 & 0.217 & 1.125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{xB} \\ \Delta_{yB} \\ \Delta_{xC} \\ \Delta_{yC} \\ \Delta_{xD} \\ \Delta_{yD} \end{bmatrix}$$

La solución para este conjunto de ecuaciones es:

$$\begin{bmatrix} \Delta_{xB} \\ \Delta_{yB} \\ \Delta_{xC} \\ \Delta_{yC} \\ \Delta_{xD} \\ \Delta_{yD} \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 0 \\ -1.12 \\ -3.86 \\ -17 \\ 3.35 \\ 15.9 \end{bmatrix} m$$

Las fuerzas de los elementos son obtenidas mediante las relaciones de rigidez de los elementos (sistema global de coordenadas)

Elemento a

$$p'_1 = -K'_a \Delta_B = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{EA}{2.4} \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 0 \\ -1.12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.465 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$p'_2 = K'_a \Delta_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{EA}{2.4} \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 0 \\ -1.12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.465 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Entonces

$$p_2 = R_o p'_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.465 \end{bmatrix} = 0.465 \text{ kN} \quad (= -p_1)$$

Elemento b $p_2 = -0.928 \text{ kN}$

Elemento c $p_2 = 0.465 \text{ kN}$

Elemento d $p_2 = 0.806 \text{ kN}$

Elemento e $p_2 = 1.071 \text{ kN}$

Elemento f $p_2 = -0.931 \text{ kN}$

Este análisis puede no dar las reacciones en A y B directamente, pero estas pueden ser determinadas aplicando la condición de equilibrio para A y B como se indica en la figura 4.14-3, obteniendo los siguientes resultados:

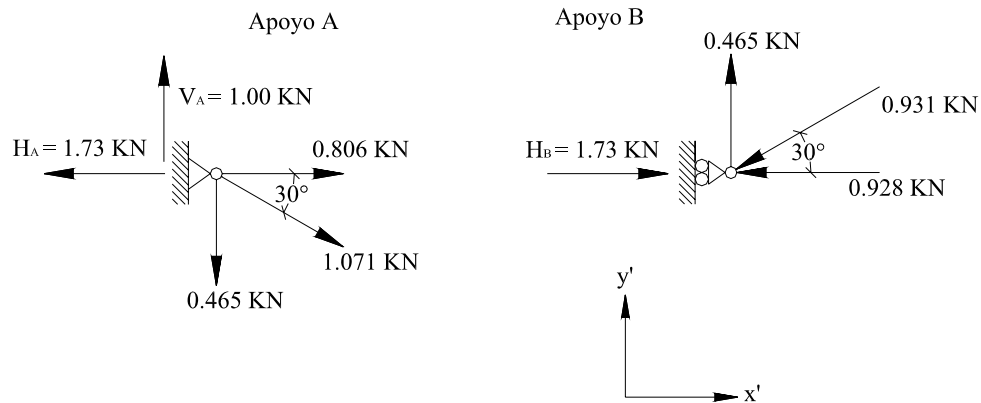


Figura 4.14-3

Apoyo A

$$\begin{aligned}\sum H = 0 &\Rightarrow 0.806 + \cos(30)(1.071) - H_A = 0 \\ H_A &= 1.73 \text{ kN} \\ \sum V = 0 &\Rightarrow V_A - 0.465 - \sin(30)(1.071) = 0 \\ V_A &= 1.00 \text{ kN}\end{aligned}$$

Apoyo B

$$\begin{aligned}\sum H = 0 &\Rightarrow H_B - 0.928 - \cos(30)(0.931) = 0 \\ H_B &= 1.73 \text{ kN} \\ \sum V = 0 &\Rightarrow 0.465 - \sin(30)(0.931) = 0\end{aligned}$$

Las fuerzas en el sistema global de coordenadas son:

	Fuerzas en la dirección x'	Fuerzas en la dirección y'
Para A	-1.73 kN	1.00 kN
Para B	1.73 kN	0.00 kN

Ejemplo 4.14-2. La estructura mostrada en la figura 4.14-4 es articulada en todos sus nudos. Todos los elementos tienen la misma rigidez EA . Los nudos A y B se encuentran articulados a sus respectivos apoyos. El sistema de la estructura se muestra a continuación.

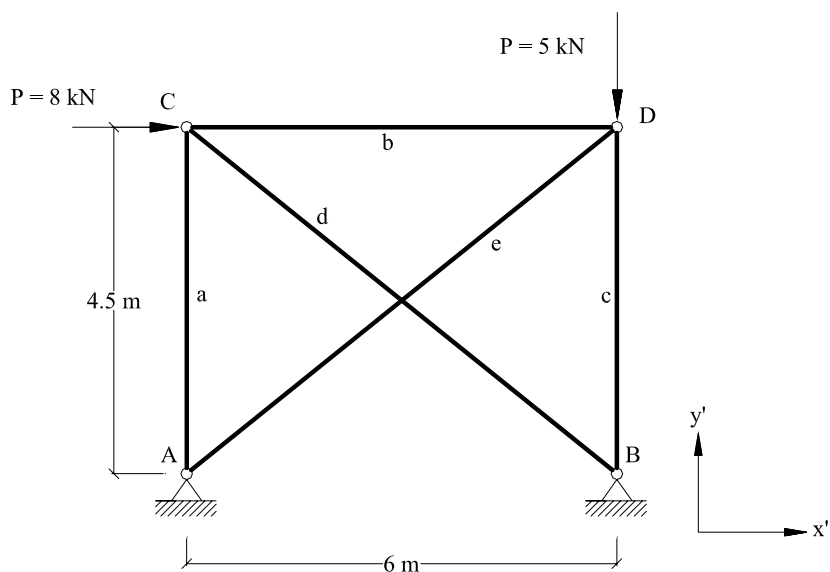


Figura 4.14-4

La matriz de rigidez de la estructura es primero fijada en términos generales.

$$\begin{matrix} & \text{C} & \text{D} \\ \begin{bmatrix} P_C \\ P_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_a + K'_b + K'_d & -K'_b \\ -K'_b & K'_b + K'_c + K'_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_C \\ \Delta_D \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Los elementos llevan las letras minúsculas para simplificar la notación. Los extremos 1 y 2 de cada elemento se indican en la figura 4.14-5

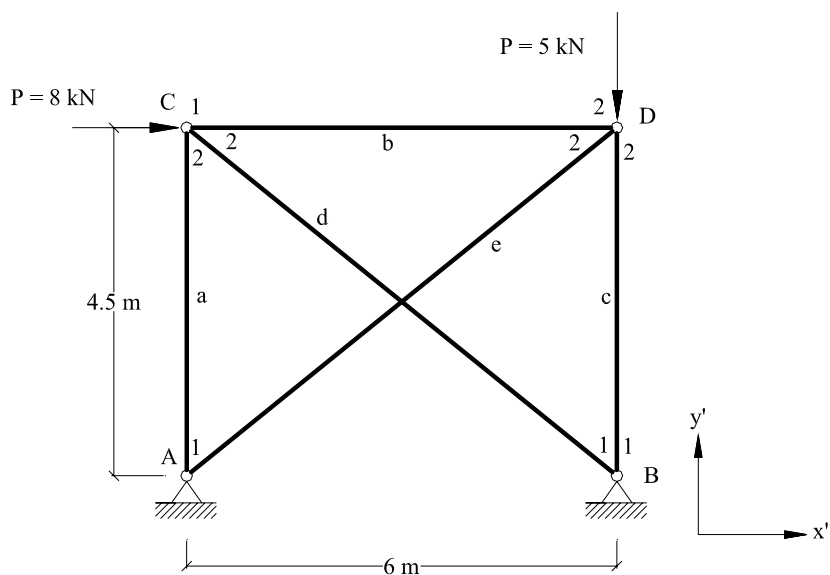


Figura 4.14-5

Las matrices de rigidez para cada elemento en el sistema global de coordenadas son obtenidas a partir de la ecuación 4.13-3:

$$\text{Elemento a} \quad K' = \frac{EA}{4.5} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Elemento b} \quad K' = \frac{EA}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Elemento c} \quad K' = \frac{EA}{4.5} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Elemento d} \quad K' = \frac{EA}{7.5} \begin{bmatrix} 0.64 & -0.48 \\ -0.48 & 0.36 \end{bmatrix}$$

$$\text{Elemento e} \quad K' = \frac{EA}{7.5} \begin{bmatrix} 0.64 & 0.48 \\ 0.48 & 0.64 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0.252 & -0.064 & -0.167 & 0 \\ -0.064 & 0.270 & 0 & 0 \\ -0.167 & 0 & 0.252 & 0.064 \\ 0 & 0 & 0.064 & 0.270 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{xC} \\ \Delta_{yC} \\ \Delta_{xD} \\ \Delta_{yD} \end{bmatrix}$$

La solución para este conjunto de ecuaciones es:

$$\begin{bmatrix} \Delta_{xC} \\ \Delta_{yC} \\ \Delta_{xD} \\ \Delta_{yD} \end{bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 74.21 \\ 17.59 \\ 57.33 \\ -32.11 \end{bmatrix} m$$

Las fuerzas de los elementos son obtenidas mediante las relaciones de rigidez de los elementos (sistema global de coordenadas)

Elemento a

$$p'_1 = -K'_a \Delta_B = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{EA}{4.5} \cdot \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 74.21 \\ 17.59 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3.909 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$p'_2 = K'_a \Delta_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{EA}{2.4} \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 74.21 \\ 17.59 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.909 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Entonces

$$p_2 = R_o p'_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -3.909 \end{bmatrix} = 3.909 \text{ kN} \quad (= -p_1)$$

$$\text{Elemento b} \quad p_2 = -2.82 \text{ kN}$$

$$\text{Elemento c} \quad p_2 = -7.12 \text{ kN}$$

$$\text{Elemento d} \quad p_2 = -6.48 \text{ kN}$$

$$\text{Elemento e} \quad p_2 = 3.52 \text{ kN}$$

Este análisis puede no dar las reacciones en apoyos directamente, pero estas pueden ser determinadas aplicando la condición de equilibrio para A y B como se muestra en la figura 4-14-6, obteniendo los siguientes resultados:

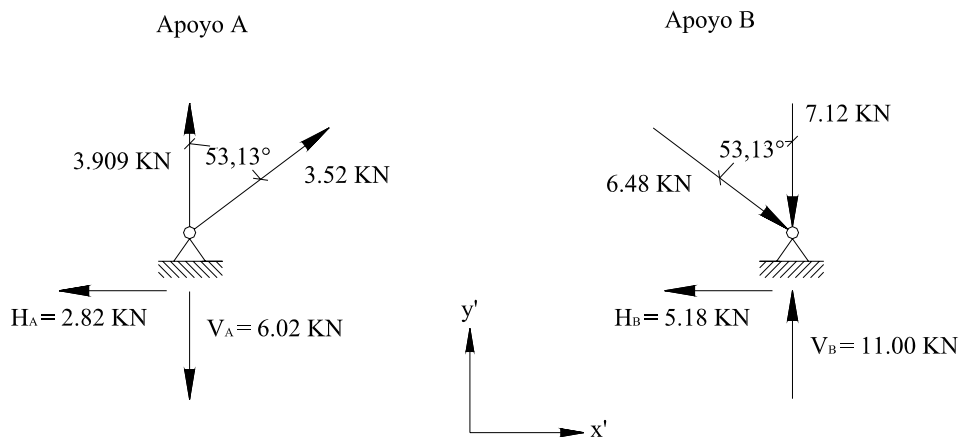


Figura 4-14-6

Apoyo A

$$\sum H = 0 \Rightarrow \text{sen}(53.13)(3.52) - H_A = 0$$

$$H_A = 2.82 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow 3.909 + \text{cos}(53.13)(3.52) - V_A = 0$$

$$V_A = 6.02 \text{ kN}$$

Apoyo B

$$\sum H = 0 \Rightarrow \text{sen}(53.13)(6.48) - H_B = 0$$

$$H_B = 5.18 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow V_B - 7.12 - \text{cos}(53.13)(6.48) = 0$$

$$V_B = 11.00 \text{ kN}$$

Las fuerzas en el sistema global de coordenadas son:

	Fuerzas en la dirección x'	Fuerzas en la dirección y'
Para A	-2.82 kN	-6.02 kN
Para B	-5.18 kN	11.00 kN

4.15 Cargas entre nudos

Hasta ahora, las estructuras fueron consideradas cargadas en los nudos, pero en estructuras unidas rígidamente este no es el caso. Al tratar con este problema el proceso de solución completo debe de ser revisado. Primero, debe ser introducido el concepto de *indeterminación cinemática*. La indeterminación estática fue discutida en los primeros capítulos; la indeterminación cinemática es una idea similar asociada con los desplazamientos de los nudos más que con las fuerzas. El grado de indeterminación cinemática de una estructura es igual al número de grados de libertad. En primera instancia el voladizo propuesto en la figura 4.15-1 es de indeterminación estática 1, pero de indeterminación cinemática 2; donde los desplazamientos rotacionales y longitudinales son posibles. Una estructura es *cinéticamente determinada* cuando no existen desplazamientos en los nudos.

El primer paso es definir la estructura cinemáticamente determinada, imaginando todos los nudos de la estructura sujetos contra el desplazamiento. Una solución particular de esta estructura totalmente restringida es entonces llevada a cabo. Esto sucede de una manera directa como el desplazamiento no ocurre en los nudos y todos los elementos se comportan separadamente en los extremos de las vigas o columnas.

El segundo paso es llevado a cabo en un análisis complementario de la estructura, usando en los nudos un conjunto de cargas iguales y opuestas a los momentos y a las fuerzas ejercidas en los extremos por los apoyos empotrados en la solución particular (Paso 1).

El tercer paso es superponer los resultados de los primeros dos análisis. Para obtener las fuerzas en los extremos de cada elemento. El proceso será ilustrado en el ejemplo que se muestra a continuación.

La estructura es la misma que se utilizó en el ejemplo 4.12-1.

(1) *Solución particular o primaria*: A y B son sujetos, asumiendo empotramientos antes de la aplicación de la carga W y por consiguiente no existen fuerzas en AB. La viga OB se asume empotrada en ambos extremos en los que se determinan las reacciones de acuerdo a la respectiva hipótesis de carga (Tabla A.4 Anexo A), como se muestra en la figura 4.15-2.

(2) *Solución complementaria* Las cargas utilizadas, son mostradas en la figura 4.15-3, las cargas en O no tienen efecto en la estructura, y pueden ser ignoradas en esta etapa. Las cargas en B son aquellas que ya fueron utilizadas en el ejemplo 4.12-1, y las fuerzas resultantes de los elementos son mostradas en la figura 4.15-4.

(3) *Solución completa* Los resultados de las dos etapas anteriores son sumados como se muestran en la figura 4.15-5.

El diagrama del momento flector para la estructura completa es mostrado en la figura 4.15-6.

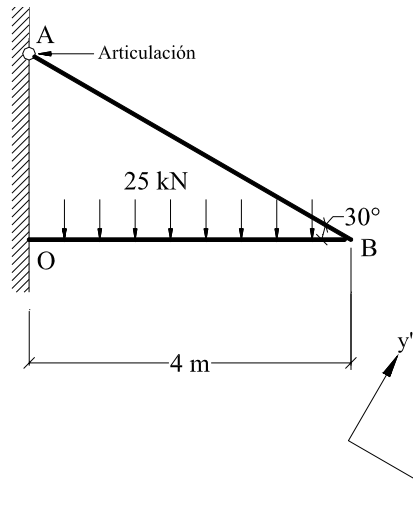


Figura 4.15-1
Unidades: kN y kN m

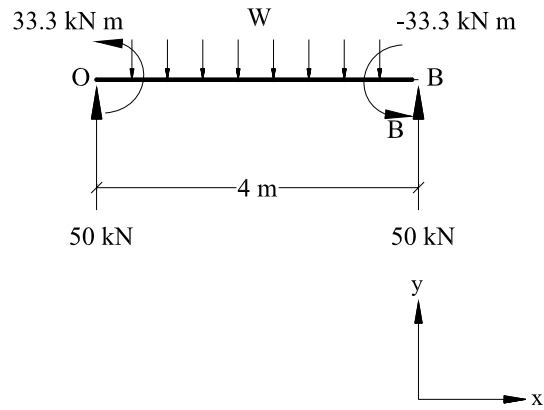


Figura 4.15-2

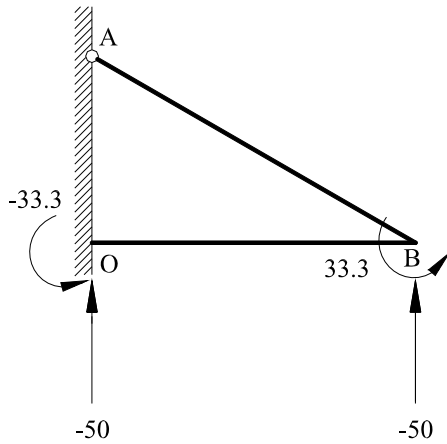


Figura 4.15-3

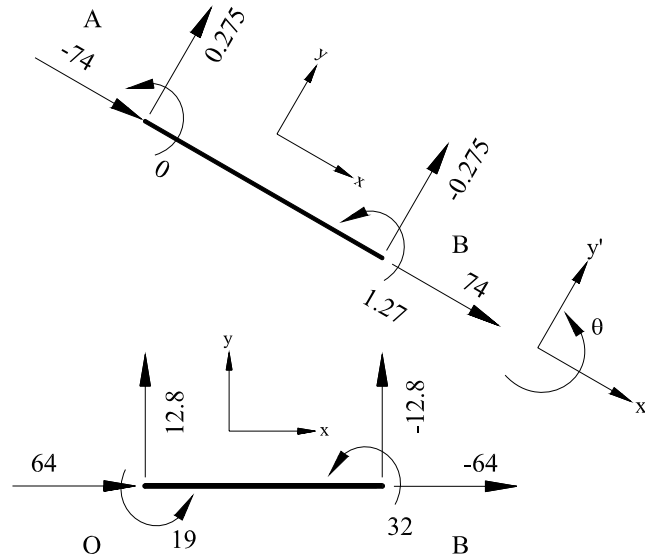


Figura 4.15-4
Unidades: kN y kN m

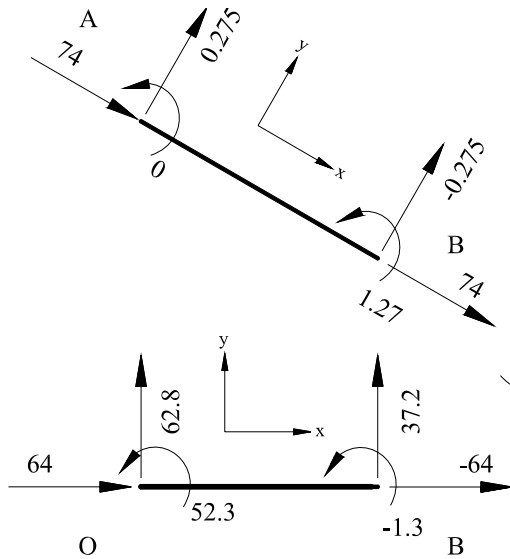


Figura 4.15-5

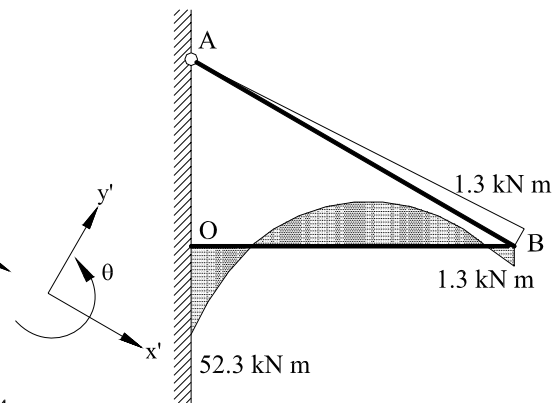


Figura 4.15-6

4.16 Variaciones de temperatura

Las estructuras están sometidas frecuentemente a variaciones de temperatura. Además de los cambios de estaciones, algunas estructuras (especialmente las industriales) están sujetas a severas variaciones de temperatura. Sus efectos sobre las estructuras dependen fundamentalmente de la configuración de la estructura así como también de la magnitud de la variación de temperatura y del material de que esta construida la estructura. Cuando cambia la temperatura de un elemento su longitud tiende a variar. Entonces, la deformación de la estructura depende de que tan libremente pueda ocurrir tal cambio de longitud. Por ejemplo, las variaciones de temperatura del elemento BC de la estructura de las figuras 4.16-1 y 4.16-2; un decrecimiento uniforme de T_0 a T_1 como en la figura 4.16-1 o un decrecimiento lineal desde T_2 (adentro) hasta T_1 (afuera) como en la figura 4.16-2, introducen deformaciones pero no causan ningún esfuerzo. En otras palabras, el cambio de longitud del elemento BC tiene lugar libremente sin ninguna resistencia por parte del resto de la estructura.

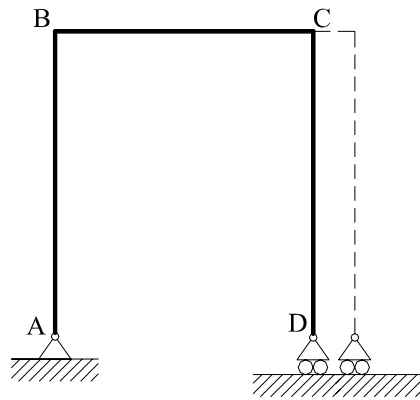


Figura 4.16-1 Decrecimiento uniforme de la temperatura.

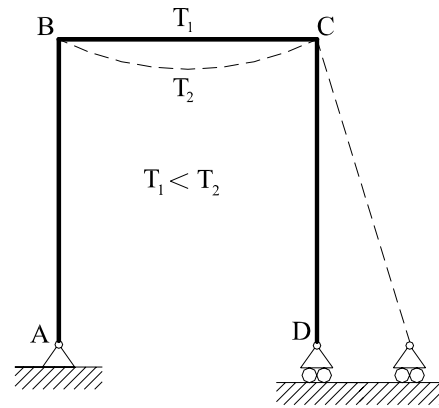


Figura 4.16-2 Decrecimiento lineal de la temperatura.

Si por otra parte, la base de la columna de esta estructura estuviese fija, las formas deformadas de esta, debidas a las mismas variaciones de temperatura, serian diferentes de las anteriores y podrán desarrollarse esfuerzos a través del sistema (comparar las figuras 4.16-1 con 4.16.3 y la figura 4.16-2 con 4.16-4)

En general las estructuras determinadas no están sometidas a esfuerzos por cambios de la temperatura, en tanto que las indeterminadas *si pueden* estarlo. Sin embargo, a pesar de ser un sistema indeterminado, no ocurrirán deformaciones en las dos columnas de la estructura de las figuras 4.16-3 y 4.16-4 que están sujetas a la misma magnitud de variación uniforme de temperatura. Independientemente de si la estructura esta o no esforzada, se requiere su análisis no necesariamente para evaluar las fuerzas sino para determinar su forma deformada.

Los pasos básicos del análisis en el caso de variación de temperatura son muy similares a los del caso donde se presenta la falta de ajuste tratada posteriormente en este capítulo. La única diferencia entre ellos es el cálculo de las fuerzas de empotramiento. El resto del análisis es también casi el mismo en todos los casos.

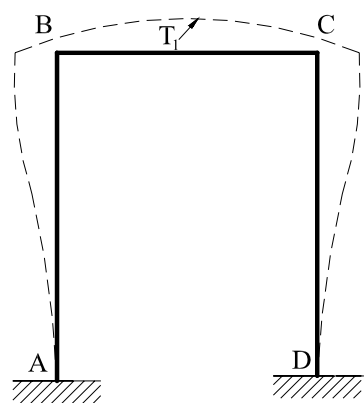


Figura 4.16-3 Forma deformada debido a un decrecimiento uniforme de la temperatura.

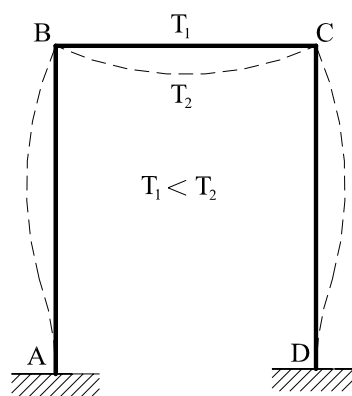


Figura 4.16-4 Forma deformada debido a un decrecimiento lineal de la temperatura.

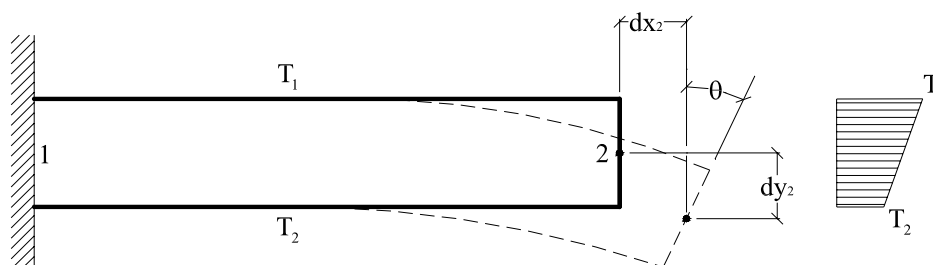


Figura 4.16-5 Forma deformada de un elemento con un extremo libre debido a la variación de temperatura.

Supóngase que el elemento de extremos 1-2 es uno de los elementos de la estructura que esta sometido a variaciones de temperatura. Supóngase además que este elemento esta temporalmente desconectado de la estructura. Manténgase fijo un extremo de este mientras el otro extremo esta libre con el fin de examinar como ocurrirán las deformaciones libremente cuando se cambia de temperatura. Si T_1 y T_2 representan las variaciones de temperatura del lado exterior e interior respectivamente, la forma deformada de un elemento libre podrá verse como se muestra en la figura 4.16-5.

Debido a la diferencia entre las temperaturas en ambos lados del elemento, se observara un cambio en la curvatura así como en la longitud. Estos cambios producirán desplazamientos en el extremo libre del elemento. Sin embargo, si por el contrario ambos extremos del elemento fueran fijos, no se observarían desplazamientos en el extremo libre. En cambio se desarrollarían ciertas fuerzas para mantener el extremo en su sitio. Estas fuerzas se designaran como las *fuerzas de empotramiento debidas a esfuerzos térmicos*. Calcular su magnitud y carácter (fuerza axial, fuerza cortante, o momento de flexión, etc.) es el primer paso del análisis.

Nuevamente por el principio de superposición, las fuerzas de empotramiento desarrolladas en cualquier extremo serán iguales a las fuerzas que se requieren aplicar en el mismo extremo para restituir sus *desplazamientos como extremo libre* (figura 4.16-6). Se debe observar que cualquier extremo del elemento podrá considerarse como *extremo libre* ya que las fuerzas de empotramiento no serán afectadas por tal selección.

Si Δ_2 representa los desplazamientos libres en el extremo 2 del elemento debido a los cambios de temperatura, entonces

$$P_2 = -K \Delta_2 \quad (4.16-1)$$

Representaran las fuerzas restauradoras (y en consecuencia las fuerzas de empotramiento) en el mismo extremo. Obsérvese que el signo negativo indica que los desplazamientos por temperatura y las fuerzas restauradoras son opuestas entre sí. El problema, por tanto, se

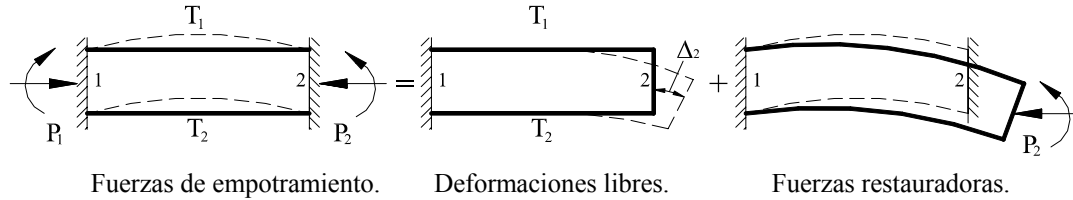


Figura 4.16-6

reduce en si a la evaluación de los desplazamientos del extremo libre causados por las variaciones de temperatura. Ya que los desplazamientos se describen como la integral de la deformación desde un punto hasta el otro, considérese un elemento diferencial que tenga una longitud original ds . Considérese que la forma deformada de este elemento debido a variaciones lineales de temperatura, que cambian desde T_1 en la parte superior hasta T_2 en la parte inferior, sea como la que se muestra en la figura 4.16-7. Si α representa el coeficiente de dilatación térmica del material y du , dv y $d\theta$ las deformaciones del elemento entonces los desplazamientos en el extremo 2 de ese elemento serán

$$d_x = \int_0^L du \, ds \quad d_y = \int_0^L dv \, ds \quad \theta = \int_0^L d\theta \, ds$$

Cuando la temperatura es constante en toda la longitud, las integrales anteriores dan

$$d_x = \frac{\alpha(T_1 + T_2)}{2} L \quad d_y = -\frac{\alpha(T_1 - T_2)}{2h} L^2 \quad \theta = -\frac{\alpha(T_1 - T_2)}{h} L$$

Donde h es la altura del elemento. Reemplazando estas expresiones en la ecuación (4.16-1) y expresando K explícitamente para marcos rígidos planos, por ejemplo, obtenemos las fuerzas de empotramiento desarrolladas en el extremo 2 del elemento

$$P_2 = -K_{22} \Delta_2$$

$$P_2 = - \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\alpha(T_1 + T_2)}{2} L \\ -\frac{\alpha(T_1 - T_2)}{2h} L^2 \\ -\frac{\alpha(T_1 - T_2)}{h} L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha(T_1 + T_2)}{2} EA \\ 0 \\ \frac{\alpha(T_1 - T_2)}{h} EI \end{bmatrix} \quad (4.16-2)$$

Se supone que el modulo de elasticidad del material permanece constante durante la variación de temperatura.

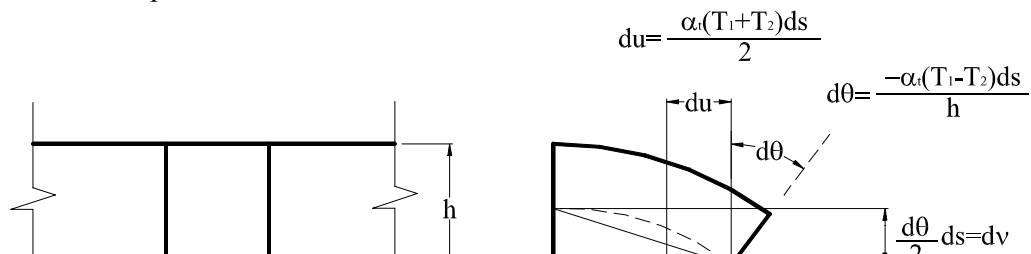


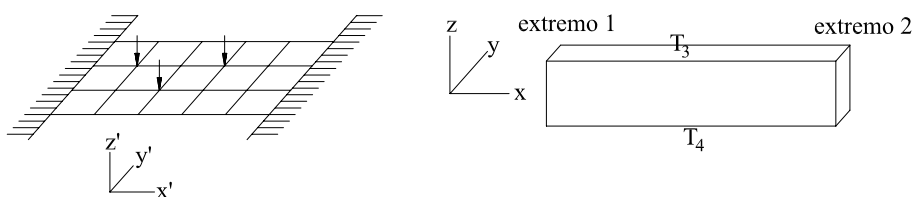
Figura 4.16-7 Forma deformada de un elemento
debido a la variación de temperatura.

Obsérvese que la convención de signos en esta ecuación es tal que T_1 representa la variación de temperatura en el lado +y del elemento.

Las fuerzas de empotramiento en el otro extremo del elemento son las mismas con los signos contrarios.

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{\alpha(T_1 + T_2)}{2} EA \\ 0 \\ -\frac{\alpha(T_1 - T_2)}{h} EI \end{bmatrix} \quad (4.16-3)$$

En retículas o entramados, solamente la variación de temperatura perpendicular al plano de la estructura tiene alguna importancia. Si T_3 y T_4 representan las temperaturas en los lados +z y -z del elemento, respectivamente, las fuerzas de empotramiento de ambos extremos serán



$$P_2 = -P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\alpha(T_3 - T_4)}{h} EI \end{bmatrix} \quad (4.16-4)$$

Obsérvese que este tipo de variación de temperatura no ocasiona fuerza cortante ni torsión en los extremos del elemento. Ocasiona el cambio de longitud y por consiguiente fuerzas en la dirección axial aunque estas son despreciables en estructuras reticulares.

En las cerchas, por supuesto, únicamente las deformaciones axiales tienen importancia y las fuerzas de empotramiento en este caso se reducen a una simple fuerza axial.

Debido a la existencia de solo esta fuerza axial el cambio de temperatura es el mismo en ambas caras del elemento; entonces la deformación en la dirección x será:

$$d_x = \frac{\alpha(T_1 + T_2)}{2} L$$

Debido a que solo existe fuerza axial, $T_1 = T_2$, entonces $d_x = \alpha T L$

$$P_2 = - \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha T L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha T EA \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = -P_1 = -\alpha T EA \quad (4.16-5)$$

donde T es el cambio de temperatura del eje centroidal del elemento.

La combinación de las ecuaciones (4.16-2) y (4.16-4) da las fuerzas de empotramiento de un elemento en marcos rígidos tridimensionales.

A partir de aquí el análisis sigue el procedimiento conocido: la transformación de las fuerzas de empotramiento al sistema global de coordenadas y su suma con signo opuesto para formar las fuerzas equivalentes en los nudos.

$$P^e = -\sum R_i^T P_i \quad (4.16-6)$$

Para elementos de extremos 1-2 cuyos extremos 1 coinciden en un mismo nudo.

Se continúa luego el análisis usando las fuerzas equivalentes en los nudos como cargas concentradas en estos. Las fuerzas de empotramiento de cada elemento deberán sumarse, como es usual, al resultado del análisis con el fin de obtener las fuerzas finales sobre el elemento.

4.17 Falta de ajuste

Errores en la fabricación y construcción de los elementos estructurales que son frecuentemente inevitables pueden ocasionar deformaciones y esfuerzos en el sistema. A causa de estos errores, el ensamblaje de la estructura debe ser hecho a la fuerza. En las cerchas, por ejemplo, la longitud de los últimos elementos deberá estimarse para posteriormente permitir que estos sean unidos a los otros elementos; en edificios, las vigas se arquean o las columnas se empujan hacia adentro o hacia fuera para hacer las respectivas uniones. Después de que la construcción esta terminada, la estructura estará sometida a esfuerzos a pesar de la no existencia de cargas. Por otra parte, tales errores pueden afectar las estructuras de distintas maneras. Algunas son esforzadas en todas partes, otras lo son parcialmente, y algunas otras pueden no sufrir ningún esfuerzo.

Supóngase por ejemplo, que el elemento BC de las estructuras mostradas en las figuras 4.17-1 4.17-2 y 4.17-3 es demasiado corto para ajustarse entre los nudos B y C. Un procedimiento normal es empujar los nudos B y C uno hacia el otro hasta que el elemento BC se conecta a ambos extremos. Después que se ha terminado la conexión, la estructura 4.17-1 estará esforzada en todas partes, la estructura 4.17-2 no estará esforzada en ninguna parte, y solamente aquellos elementos entre los nudos B, C, D y E estarán esforzados en la estructura 4.17-3.

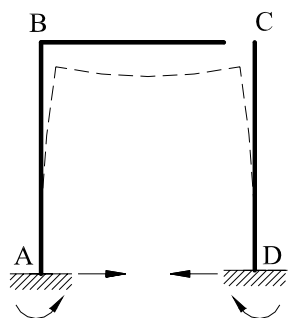


Figura 4.17-1

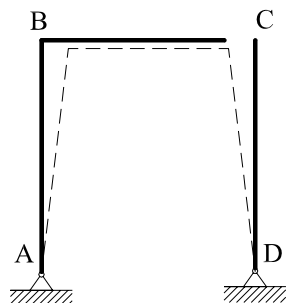


Figura 4.17-2

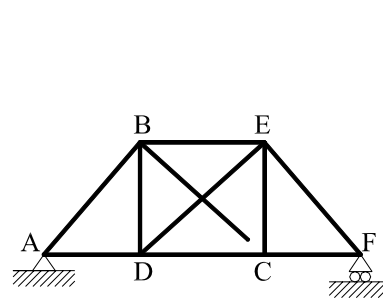


Figura 4.17-3

El que una estructura sea esforzada por una falta de ajuste de uno de sus elementos depende de la estabilidad de la estructura restante en ausencia de ese elemento. Si el elemento BC de la estructura 4.17-1, por ejemplo, se suprime, la estructura restante (dos columnas con base empotrada) es perfectamente estable y es capaz de llevar cualquier clase de carga. Sin embargo, la parte restante de la estructura 4.17-2 (dos columnas con articulación en la base), no puede soportar carga alguna. La estructura 4.17-3 es también estable sin el elemento BC. Por consiguiente, la estructura 4.17-2 será la única que no va a estar forzada por la necesidad de ajuste del elemento BC.

Puede también establecerse que las estructuras determinadas no están afectadas (esforzadas) por la falta de ajuste de sus elementos, mientras que las estructuras indeterminadas, por otra parte, se esfuerzan de acuerdo con la imperfección de sus elementos. El no ajuste del elemento AB en vez del BC en la estructura 4.17-3, por ejemplo, no deformara el sistema.

Sea Δ_1 el vector desplazamiento en coordenadas locales de un elemento de extremos 1-2 cuyas componentes representan los desplazamientos que se requieren introducir en cualquier extremo del elemento para completar la conexión. Por ejemplo, si el elemento es demasiado corto y es suficiente estirarlo una cierta cantidad para llevar su extremo al nudo apropiado, entonces $\Delta_1 = [d_x \ 0 \ 0]$ en sistemas rígidos planos; $\Delta_1 = d_x$ en cerchas, etc. Obsérvese que Δ_1 deberá ser el mismo independientemente de cual de los dos extremos del elemento se conecte primero.

El análisis comienza con el cálculo de las fuerzas de empotramiento en aquellos elementos donde se observa falta de ajuste.

$$\begin{aligned} P_1 &= K_{11}\Delta_1 \\ P_2 &= K_{21}\Delta_1 \end{aligned} \quad (4.17-1)$$

Las fuerzas equivalentes en los nudos P^e se determinan entonces a partir de las fuerzas de empotramiento transformándolas al sistema global de coordenadas y sumándolas, con signo contrario, si hay más de un elemento desajustado en un nudo particular; supongamos elementos de extremos 1-2 cuyos extremos 1 coinciden en el mismo nudo

$$P^e = -\sum R_1^T P_1 \quad (4.17-2)$$

El análisis continúa como es usual de acuerdo con los métodos presentados en este capítulo usando las fuerzas equivalentes en los nudos como fuerzas puntuales nodales; entonces los resultados finales se obtienen añadiendo las fuerzas de empotramiento (ecuación 4.17-1) a los resultados de este análisis.

4.18 Vigas continuas

En estructuras unidas rígidamente, las vigas continuas llevan solo cargas normales, una clase del proceso de solución modificado puede ser usado con gran ventaja. Un análisis normal rígido podría ser usado pero sería un proceso de solución innecesario.

Para un sistema de vigas continuas, si los nudos están en los apoyos, las deformaciones existentes son solo rotaciones. La relación de rigidez de los elementos ecuación (4.5-1) puede ser modificada:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4EI/L & 2EI/L \\ 2EI/L & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} &= \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.18-1)$$

$$K_{11} = K_{22} = \frac{4EI}{L} \quad \text{y} \quad K_{12} = K_{21} = \frac{2EI}{L}$$

No se requiere transformación de coordenadas, con una elección apropiada de ejes. El método será ilustrado en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.18-1 La viga continúa de la figura 4.18-1 esta sometida a una carga uniformemente distribuida de B a C, y es de rigidez constante EI en toda su longitud.

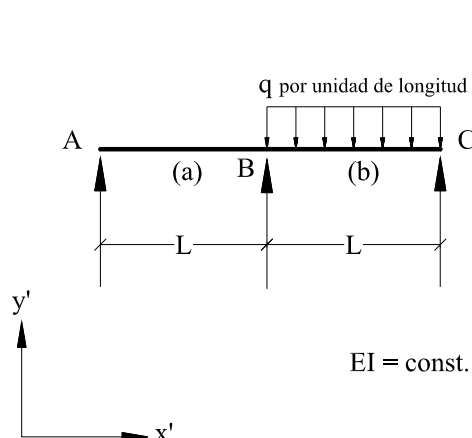


Figura 4.17-1

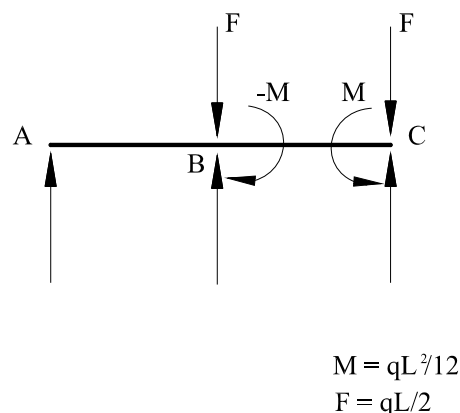


Figura 4.17-2

Los ejes de la estructura x' y y' son elegidos de forma que coincidan con los ejes de los elementos. Como resultado de una solución particular o primaria los momentos originados en los extremos $qL^2/12$ (obtenidos de la Tabla A.4 Anexo A) actúan en el elemento BC. Una solución general con las cargas que se muestran en la figura 4.18-2 es ahora llevada a cabo. La matriz de rigidez de la estructura será fijada de acuerdo a las reglas de la sección 4.9.

$$\begin{bmatrix} m_A \\ m_B \\ m_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K'_{11})_a & (K'_{12})_a & 0 \\ (K'_{21})_a & (K'_{22})_a + (K'_{11})_b & (K'_{12})_b \\ 0 & (K'_{21})_b & (K'_{22})_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix} \quad (4.18-2)$$

Para ambos elementos:

$$K'_{11} = K'_{22} = K_{11} = K_{22} = \frac{4EI}{L}$$

$$K'_{12} = K'_{21} = K_{12} = K_{21} = \frac{2EI}{L}$$

Así:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -M \\ M \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix}$$

La inversión de la matriz de rigidez da como resultado:

$$\begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix} = \frac{L}{24EI} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -M \\ M \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \end{bmatrix} = \frac{ML}{8EI} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Elemento a

$$m_1 = K_{11} \theta_A + K_{12} \theta_B$$

$$m_1 = \frac{EI}{L} \frac{ML}{8EI} (4(1) - 2(2)) = 0$$

$$m_2 = \frac{M}{8} (2(1) - 4(2))$$

$$m_2 = -\frac{3M}{4}$$

Elemento b

$$m_1 = \frac{M}{8} (-4(2) + 2(3))$$

$$m_1 = -\frac{M}{4}$$

$$m_2 = \frac{M}{8} (-2(2) + 4(3))$$

$$m_2 = M$$

Adicionando los momentos a la solución particular o primaria se produce un conjunto final o momentos flectores en la solución completa mostrada en la figura 4.18-3. También se pueden observar las reacciones del extremo que pueden ser determinadas calculando a partir del cortante de cada elemento.

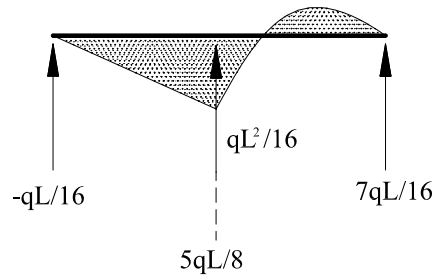


Figura 4.17-3

Elemento a

De ecuación (4.5-1), como $d_x = d_y = 0$ debido a que no existen desplazamientos horizontales ni verticales entonces:

$$\begin{bmatrix} p_{x1} \\ p_{y1} \\ m_1 \\ p_{x2} \\ p_{y2} \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hline -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_1 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$p_{y1} = \frac{6EI}{L^2} \theta_A + \frac{6EI}{L^2} \theta_B$$

$$p_{y1} = \frac{6EI}{L^2} \frac{ML}{8EI} (1-2)$$

$$p_{y1} = -\frac{3M}{4L}$$

$$p_{y2} = -p_{y1}$$

$$p_{y2} = \frac{3M}{4L}$$

Elemento b

$$p_{y1} = \frac{3M}{4L} (-2+3)$$

$$p_{y1} = \frac{3M}{4L}$$

Entonces

$$p_{y2} = -p_{y1}$$

$$p_{y2} = -\frac{3M}{4L}$$

Las cortantes finales de la solución completa son obtenidas adicionando las cortantes de cada solución particular o primaria; y las reacciones son la suma de las cortantes en cada apoyo, como se muestra en la figura 4.18-3.

4.19 Estructuras tridimensionales

El proceso de análisis ya presentado para barras rígidas en dos dimensiones se aplica usualmente a barras en tres dimensiones. Las consideraciones para tres dimensiones involucran alteraciones en los términos de las matrices de rigidez y la matriz de transformación.

En una barra en tres dimensiones, unida rígidamente, cada extremo tiene seis grados de libertad como muestra la figura 4.19-1; tres desplazamientos lineales y tres rotaciones.

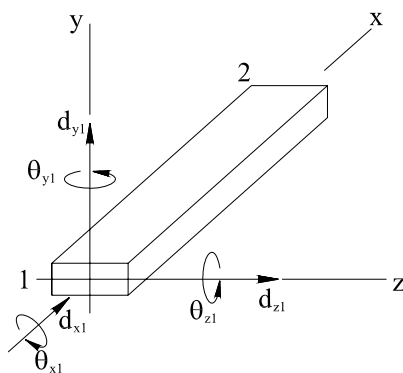


Figura 4.19-1 Grados de libertad de un extremo de un elemento en tres dimensiones.

El eje x se encuentra a lo largo de la longitud del elemento (como sucede en elementos en dos dimensiones), y los ejes y y z coinciden con los ejes principales de flexión del elemento. La rotación θ_x es a torsión, y la fuerza correspondiente m_x es por consiguiente un torque. Los términos de las submatrices de rigidez tomados de la ecuación (3.2-1) son:

$$K_{11} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

y

$$K_{12} = K_{21}^T = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (4.19-1)$$

siendo K_{11} y K_{22} análogas, con los signos de los términos $6EI_z/L^2$ y $-6EI_y/L^2$ fuera de la diagonal, contrarios. Las matrices de cargas y desplazamientos correspondientes a cada elemento tienen la siguiente forma:

$$p = [p_x \ p_y \ p_z \ m_x \ m_y \ m_z]^T \quad (4.19-2)$$

y

$$d = [d_x \ d_y \ d_z \ \theta_x \ \theta_y \ \theta_z]^T \quad (4.19-3)$$

Usando los sufijos 1 y 2 para los extremos del elemento de manera adecuada.

Las matrices de rigidez de los elementos producen una matriz de rigidez de la estructura de dimensión $6j \times 6j$, para una estructura de j nudos.

Como las submatrices de rigidez de los elementos, la matriz de transformación R_1 es de 6×6 ; como se discutió en la sección 3.3; teniendo esta la siguiente forma:

$$R_i = \begin{bmatrix} R_o \\ R_o \end{bmatrix} \quad (4.19-4)$$

La matriz de rotación R_o fue definida en la ecuación (3.3-16). Los términos de la matriz de rigidez ecuaciones (4.19-1) pueden ser ajustados y arreglados para articulaciones, como ocurre en dos dimensiones; pudiendo utilizarse este análisis para estructuras que se encuentran unidas a través de articulaciones en su totalidad. Las ecuaciones de rigidez de los elementos (como en dos dimensiones) son:

$$\begin{bmatrix} p_{x1} \\ p_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x1} \\ d_{x2} \end{bmatrix} \quad (4.19-5)$$

$K = EA/L$. La matriz de transformación es:

$$\begin{bmatrix} \frac{L_x}{L} & \frac{L_y}{L} & \frac{L_z}{L} \end{bmatrix} \quad (4.19-6)$$

Siendo esta, la primera fila de R_o en la ecuación (3.3-16).

4.20 Entramados

Son estructuras en las cuales todos sus elementos se encuentran en un mismo plano. Donde las fuerzas aplicadas son normales a este plano, por ejemplo, los pisos de un edificio (figura 4.20-1). Un análisis de una barra en el espacio puede ser utilizado para determinar fuerzas y desplazamientos, pero involucraría mucho cálculo innecesario. Si puede asumirse que en el plano las fuerzas directas y momentos son despreciables (en la practica esto es completamente justificado) entonces se procede a realizar un análisis modificado.

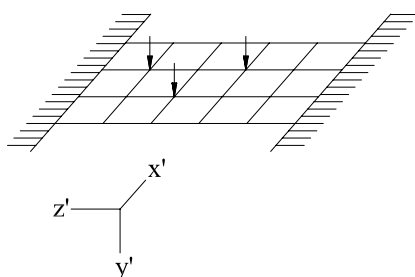


Figura 4.20-1 Entramado.

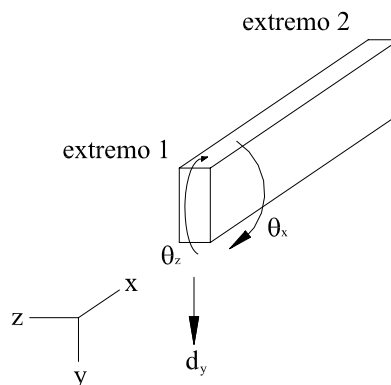


Figura 4.20-2 Elemento de un entramado.

Las fuerzas y deflexiones en el elemento son:

$$\begin{bmatrix} p_y \\ m_x \\ m_z \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} d_y \\ \theta_x \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad (\text{ver figura. 4.20-2}).$$

Los términos de la submatrices de rigidez para un elemento de un entramado, en el plano xz , son obtenidos de la ecuación (3.2-1):

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} & K_{22} &= \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ}{L} & 0 \\ \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \\
 K_{12} = K_{21}^T &= \begin{bmatrix} \frac{-12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{-GJ}{L} & 0 \\ \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} & & (4.20-1).
 \end{aligned}$$

La matriz de transformación es de 3x3 donde los términos son escogidos de la matriz completa de 6x6 para una barra en el espacio (ecuaciones (4.19-4) y (3.3-16)).

$$R_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_x}{L} & \frac{L_z}{L} \\ 0 & \frac{-L_z}{L} & \frac{L_x}{L} \end{bmatrix} \quad (4.20-2)$$

Haciendo la suposición de que las deflexiones con respecto al eje principal de flexión para cada elemento, no ocurren en el plano del entramado.

Los pasos necesarios para definir las diferentes condiciones de apoyo discutidas anteriormente para barras en dos dimensiones pueden ser aplicados también en este caso.

4.21 Rigidez, flexibilidad y matrices de equilibrio para elementos simples

En esta sección se discuten algunas ideas del método de flexibilidad, y serán usadas para desarrollar las matrices de rigidez para elementos de sección variable que podrían ser utilizadas en el análisis rígido. La discusión será basa en un concepto bidimensional pero extender este concepto a tres dimensiones no implicaría el uso de nuevos conocimientos.

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

La singularidad de la matriz de rigidez K del elemento, ya fue descrita en la sección 3.2 sección en la que se introdujo el concepto de distorsión del elemento y el vector distorsión e se definió como el desplazamiento del extremo 2 del elemento relativo al extremo 1. La matriz de flexibilidad F del elemento se definió en la ecuación (3.2-5):

$$e = Fp$$

Para un análisis en dos dimensiones F tiene la siguiente forma:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \quad (4.21-1)$$

Pudiendo esta expresarse en le sistema global de coordenadas:

$$e' = R_o^T e \quad y \quad F' = R_o^T F R_o \quad (4.21-2)$$

La relación de equilibrio que existe en los extremos del elemento fuerzas p_1 y p_2 ya fueron discutidas en la sección 3.1. Dando lugar a las siguientes ecuaciones:

$$p_{x1} + p_{x2} = 0$$

$$p_{y1} + p_{y2} = 0$$

Determinando momentos en el extremo I :

$$m_1 + m_2 + p_{y2}L = 0 \quad (4.21-3)$$

donde L es la longitud del elemento. Expresando en términos matriciales:

$$\begin{bmatrix} p_{x1} \\ p_{y1} \\ m_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & L & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x2} \\ p_{y2} \\ m_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.21-4)$$

ó

$$p_1 + H p_2 = 0 \quad (4.21-5)$$

La matriz H de 3x3 se denomina matriz de equilibrio del elemento. Su asociación con el vector p_2 en lugar del vector p_1 es arbitraria, siendo más conveniente tomar el vector p_2 como un vector de fuerza del elemento, con un valor positivo para p_{x2} correspondiente a la tensión en el elemento. Las tensiones son convenientemente consideradas positivas en ele análisis estructural.

H es no singular, para que p_1 o p_2 puedan ser calculados uno de ellos debe ser conocido. Es importante notar que H depende solamente de la longitud del elemento y es independiente de las otras propiedades.

La ecuación. (4.21-5) esta expresada en el sistema local de coordenadas, pero puede convertirse al sistema global de coordenadas, multiplicando previamente la ecuación. (4.21-5) por R_o^T ; originando:

$$R_o^T p_1 + R_o^T H p_2 = 0$$

ó

$$p'_1 + (R_o^T H R_o) p'_2 = 0$$

ó

$$p'_1 + H' p'_2 = 0 \quad (4.21-6)$$

Entonces, la matriz H' tiene la forma:

$$H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -L_y & L_x & 1 \end{bmatrix} \quad (4.21-7)$$

donde L_x y L_y son las proyecciones de L sobre los ejes x' y y' respectivamente.

La matriz H' sirve para relacionar los desplazamientos en los extremos del elemento durante un movimiento del cuerpo rígido. Estos desplazamientos de cuerpo rígido están denotados por d_1^* y d_2^* , si las fuerzas que actúan en los extremos del elemento p_1 y p_2 son constantes estos sufrirán movimientos virtuales de cuerpo rígido $\overline{d_1^*}$ y $\overline{d_2^*}$, donde el trabajo total debe ser cero. Entonces:

$$p_1^T \overline{d_1^*} + p_2^T \overline{d_2^*} = 0$$

ó

$$-(Hp_2)^T \overline{d_1^*} + p_2^T \overline{d_2^*} = 0$$

ó

$$-p_2^T H^T \overline{d_1^*} + p_2^T \overline{d_2^*} = 0$$

Esto sucede para cualquier valor arbitrario de p_2 , y si los desplazamientos son pequeños, entonces

$$H^T d_1^* = d_2^* \quad (4.21-8)$$

La deformación del elemento se relaciona con los desplazamientos en los extremos. Si un elemento tiene ambos desplazamientos (d_1^* y d_2^*); existiendo fuerzas que producen una distorsión e entonces los desplazamientos pueden escribirse como:

$$d_1 = d_1^*$$

y

$$d_2 = d_2^* + e$$

ó

$$d_2 = H^T d_1^* + e \quad (4.21-9)$$

Reemplazando d_1^* se obtiene.

$$e = d_2 - H^T d_1 \quad (4.21-10)$$

(Ver figura 3.2-2)

Si las relaciones son reemplazadas en la ecuación (4.21-10), la ecuación de rigidez del elemento será.

$$d_2 = H^T d_1 + e = H^T d_1 + F p_2$$

entonces.

$$p_2 = -(K H^T) d_1 + K d_2 \quad (4.21-11)$$

y puede verse que

$$K = K_{22}$$

y

$$K_{21} = -K_{22}H^T \quad (4.21-12)$$

también

$$p_1 = -Hp_2$$

entonces

$$p_1 = (H K H^T) d_1 - H K d_2 \quad (4.21-13)$$

y

$$K_{11} = (H K_{22} H^T) \quad y \quad K_{12} = -H K_{22} \quad (4.21-14)$$

Las matrices introducidas en esta sección pueden ser utilizadas para elaborar la matriz K de rigidez del elemento de sección transversal no uniforme. Esto puede ser mucho más simple en un análisis estructural que dividiendo un elemento largo en muchos elementos cortos de sección transversal constante, aunque podría haber dificultades al determinar las cargas efectivas en los extremos.

En la figura 4.21-1 PZ es un elemento donde las propiedades varían dentro de la estructura. La deformación en Z es el desplazamiento de Z respecto a P , y si la matriz de equilibrio H' y la matriz de rigidez K'_{22} para PZ son establecidas; K'_{11} , K'_{12} , y K'_{21} pueden ser determinadas. El análisis es realizado en el sistema global de coordenadas, pero las primas serán omitidas para una mayor claridad, considérese el extremo P empotrado.

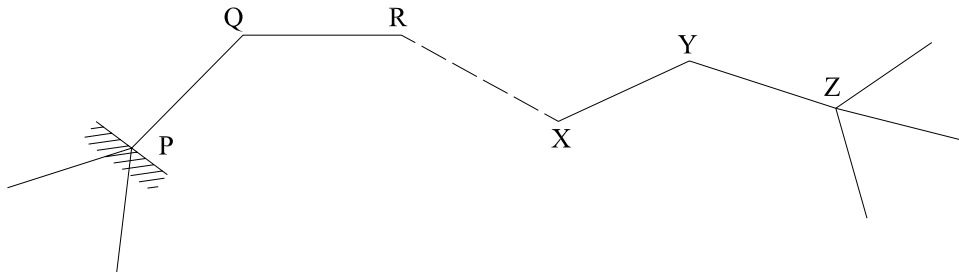


Figura 4.21-1 Elemento de sección transversal no uniforme.

Las cargas aplicadas en el punto Z por otros elementos ó cargas externas son $p_{2(YZ)}$ entonces:

$$p_{1(YZ)} = -H_{(YZ)} p_{2(YZ)}$$

Por equilibrio en Y

$$p_{2(XY)} + p_{1(YZ)} = 0$$

obteniendo.

$$p_{2(XY)} = H_{(YZ)} p_{2(YZ)}$$

y

$$p_{1(XY)} = -H_{(XY)} H_{(YZ)} p_{2(YZ)}$$

O para el elemento compuesto X - Z .

$$p_{1(XZ)} + H_{(XZ)} p_{2(XZ)} = 0 \quad (4.21-15)$$

La matriz de equilibrio para el elemento compuesto es meramente el producto de las matrices de equilibrio de las partes que lo constituyen, teniendo la forma de la ecuación (4.21-7) donde L_x y L_y son las proyecciones del elemento compuesto. Es decir:

$$\begin{aligned} H_{(XZ)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -L_{y(XZ)} & L_{x(XZ)} & 0 \end{bmatrix} \\ H_{(XZ)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -(L_{y(XY)} + L_{y(YZ)}) & (L_{x(XY)} + L_{x(YZ)}) & 1 \end{bmatrix} \\ H_{(XZ)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -L_{y(XY)} & L_{x(XY)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -L_{y(YZ)} & L_{x(YZ)} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.21-16)$$

Por lo tanto para la figura 4.21-1.

$$p_{1(PQ)} + H_{(PQ)} \dots H_{(XY)} H_{(YZ)} p_{2(YZ)} = 0 \quad (4.21-17)$$

Las distorsiones son consideradas a continuación:

Elemento PQ

$$e_{PQ} = d_{2(PQ)} - H_{(PQ)}^T d_{1(PQ)} \quad (d_{1(PQ)} = 0)$$

entonces:

$$\Delta_Q = F_{(PQ)} p_{2(PQ)}$$

$$\Delta_Q = (F_{(PQ)} H_{(QZ)}) p_{2(YZ)}$$

Elemento QR

$$e_{QR} = d_{2(QR)} - H_{(QR)}^T d_{1(QR)}$$

entonces

$$\Delta_R = H_{(QR)}^T d_{1(QR)} + F_{(QR)} p_{2(QR)}$$

desde

$$\Delta_R = H_{(QR)}^T F_{(PQ)} H_{(QZ)} p_{2(YZ)} + F_{(QR)} H_{(RZ)} p_{2(YZ)}$$

$$\Delta_R = (H_{(QR)}^T F_{(PQ)} H_{(QZ)} + F_{(QR)} H_{(RZ)}) p_{2(YZ)}$$

Repitiendo este proceso a lo largo de la longitud del elemento, se tiene:

$$d_{2(YZ)} = (H_{(QZ)}^T F_{(PQ)} H_{(QZ)} + H_{(RZ)}^T F_{(QR)} H_{(RZ)} + \dots + H_{(YZ)}^T F_{(XY)} H_{(YZ)} + F_{(YZ)}) p_{2(YZ)}$$

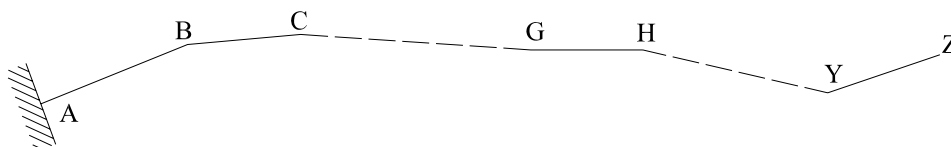


Figura 4.21-2 Elemento de sección transversal no uniforme.

La figura 4.21-2 puede ser utilizada para generalizar este resultado.

$$\Delta_Z = (\sum H_{(HZ)}^T F_{(GH)} H_{(HZ)}) p_{2(YZ)}$$

siendo la matriz de flexibilidad $F_{(AZ)}$ de $A-Z$:

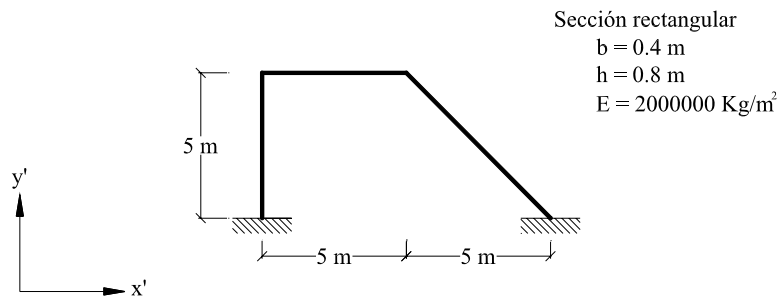
$$F_{(AZ)} = \sum H_{(HZ)}^T F_{(GH)} H_{(HZ)}$$

La sumatoria se lleva a cabo para todas las secciones como se realizó para GH entre A y Z . Esta matriz F es por supuesto K_{22}^{-1} para el elemento $A-Z$. Las matrices K_{12} , K_{21} y K_{11} pueden determinarse utilizando las ecuaciones (4.21-12) y (4.21-14).

(Se debe tener especial cuidado al seguir este proceso. Si elementos compuestos llevan una serie de cargas puntuales pueden insertarse nudos adicionales. Es probable que una carga distribuida sea mucho más difícil de manejar.)

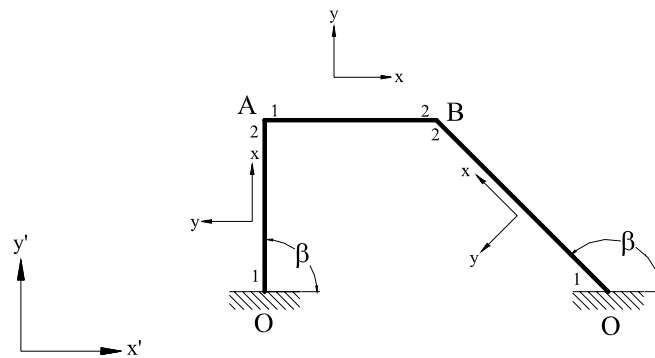
EJERCICIOS RESUELTOS

4.1. Determinar las fuerzas en las barras para la estructura sometida a un desplazamiento horizontal de 0,02 m y un hundimiento de 0,03 en el apoyo derecho; tomar en cuenta que no existe rotación. Las propiedades de la estructura se muestran a continuación.



SOLUCION.

Localización del sistema local de coordenadas (SLC) de cada elemento y numeración de elementos



Ecuación general de rigidez de una barra

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Determinación de submatrices de la matriz de rigidez de la estructura.

Barra OA

Debido a que el sistema local de coordenadas (SLC) no coincide con el sistema global de coordenadas (SGC) este debe ser rotado un ángulo $\beta = 90^\circ$

De la ecuación (4.6-7) los términos de la matriz K'_{11} son:

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} C^2 \frac{EA}{L} + S^2 \frac{12EI}{L^3} & SC \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) & -S \frac{6EI}{L^2} \\ SC \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) & S^2 \frac{EA}{L} + C^2 \frac{12EI}{L^3} & C \frac{6EI}{L^2} \\ -S \frac{6EI}{L^2} & C \frac{6EI}{L^2} & 4 \frac{EI}{L} \end{bmatrix}$$

($C = \cos \beta$; $S = \sin \beta$; $I = I_z$)

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} 3276.8 & 0 & -8192 \\ 0 & 128000 & 0 \\ -8192 & 0 & 27306.67 \end{bmatrix}$$

De la ecuación (4.6-8) los términos de la matriz K'_{12} son:

$$K'_{12} = \begin{bmatrix} -C^2 \frac{EA}{L} + S^2 \frac{12EI}{L^3} & -SC \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) & -S \frac{6EI}{L^2} \\ -SC \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) & - \left(S^2 \frac{EA}{L} + C^2 \frac{12EI}{L^3} \right) & C \frac{6EI}{L^2} \\ S \frac{6EI}{L^2} & -C \frac{6EI}{L^2} & 2 \frac{EI}{L} \end{bmatrix}$$

($C = \cos \beta$; $S = \sin \beta$; $I = I_z$)

$$K'_{12} = \begin{bmatrix} -3276.8 & 0 & -8192 \\ 0 & -128000 & 0 \\ 8192 & 0 & 13653.33 \end{bmatrix}$$

Como: $K'_{21} = K'^T_{12}$

$$K'_{21} = \begin{bmatrix} -3276.8 & 0 & 8192 \\ 0 & -128000 & 0 \\ -8192 & 0 & 13653.33 \end{bmatrix}$$

Como: $K'_{22} = K'_{11}$, con los signos de los términos $6EI/L^2$ fuera de la diagonal, inversos.

$$K'_{22} = \begin{bmatrix} 3276.8 & 0 & 8192 \\ 0 & 128000 & 0 \\ 8192 & 0 & 27306.67 \end{bmatrix}$$

Barra AB

Debido a que el sistema local de coordenadas (SLC) coincide con el sistema global de coordenadas (SGC), utilizamos la ecuación de rigidez para un elemento en el plano en su forma general ecuación (4.5-1).

$$\begin{bmatrix} p_{x1} \\ p_{y1} \\ m_1 \\ p_{x2} \\ p_{y2} \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ \hline -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x1} \\ d_{y1} \\ \theta_1 \\ d_{x2} \\ d_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Los términos de la matriz K_{11}' son:

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} 128000 & 0 & 0 \\ 0 & 3276.8 & 8192 \\ 0 & 8192 & 27306.67 \end{bmatrix}$$

Los términos de la matriz K_{12}' son:

$$K'_{12} = \begin{bmatrix} -128000 & 0 & 0 \\ 0 & -3276.8 & 8192 \\ 0 & -8192 & 13653.33 \end{bmatrix}$$

Como: $K'_{21} = K'^T_{12}$

$$K'_{21} = \begin{bmatrix} -128000 & 0 & 0 \\ 0 & -3276.8 & -8192 \\ 0 & 8192 & 13653.33 \end{bmatrix}$$

Como: $K'_{22} = K'_{11}$, con los signos de los términos $6EI/L^2$ fuera de la diagonal, inversos.

$$K'_{22} = \begin{bmatrix} 128000 & 0 & 0 \\ 0 & 3276.8 & -8192 \\ 0 & -8192 & 27306.67 \end{bmatrix}$$

Barra OB

Debido a que el sistema local de coordenadas (SLC) no coincide con el sistema global de coordenadas (SGC) este debe ser rotado un ángulo $\beta = 135^\circ$

De la ecuación (4.6-7) los términos de la matriz K_{11}' son:

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} 45834.552 & -44675.952 & -2896.380 \\ -44675.952 & 45834.552 & -2896.380 \\ -2896.380 & -2896.380 & 19308.910 \end{bmatrix}$$

De la ecuación (4.6-8) los términos de la matriz K_{12}' son:

$$K'_{12} = \begin{bmatrix} -45834.552 & 44675.952 & -2896.380 \\ 44675.952 & -45834.552 & -2896.380 \\ 2896.380 & 2896.380 & 9654.450 \end{bmatrix}$$

Como: $K'_{21} = K'^T_{12}$

$$K'_{21} = \begin{bmatrix} -45834.552 & 44675.952 & 2896.380 \\ 44675.952 & -45834.552 & 2896.380 \\ -2896.380 & -2896.380 & 9654.450 \end{bmatrix}$$

Como: $K'_{22} = K'_{11}$, con los signos de los términos $6EI/L^2$ fuera de la diagonal, inversos.

$$K'_{22} = \begin{bmatrix} 45834.552 & -44675.952 & 2896.380 \\ -44675.952 & 45834.552 & 2896.380 \\ 2896.380 & 2896.380 & 19308.910 \end{bmatrix}$$

Estructura Primaria

Determinación de fuerzas en las barras

$$P'_1 = K'_{11} \Delta_1 + K'_{12} \Delta_2$$

$$P'_2 = K'_{21} \Delta_1 + K'_{22} \Delta_2$$

Barra OA

$$(P'_1)_{OA} = (K'_{11})_{OA} \Delta_O + (K'_{12})_{OA} \Delta_A$$

$$(P'_2)_{OA} = (K'_{21})_{OA} \Delta_O + (K'_{22})_{OA} \Delta_A$$

$$\Delta_A = 0 \quad ; \quad \Delta_O = 0$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x1} \\ p'_{y1} \\ m'_1 \end{bmatrix}_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} p'_{x2} \\ p'_{y2} \\ m'_2 \end{bmatrix}_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Barra AB

$$(P'_1)_{AB} = (K'_{11})_{AB} \Delta_A + (K'_{12})_{AB} \Delta_B$$

$$(P'_2)_{AB} = (K'_{21})_{AB} \Delta_A + (K'_{22})_{AB} \Delta_B$$

$$\Delta_A = 0 \quad ; \quad \Delta_B = 0$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x1} \\ p'_{y1} \\ m'_1 \end{bmatrix}_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} p'_{x2} \\ p'_{y2} \\ m'_2 \end{bmatrix}_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Barra OB

$$(P'_1)_{OB} = (K'_{11})_{OB} \Delta_O + (K'_{12})_{OB} \Delta_B$$

$$(P'_2)_{OB} = (K'_{21})_{OB} \Delta_O + (K'_{22})_{OB} \Delta_B$$

$$\Delta_B = 0 \quad ; \quad \Delta_O = \begin{bmatrix} 0.02 \\ -0.03 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x1} \\ p'_{y1} \\ m'_1 \end{bmatrix}_{OB} = \begin{bmatrix} 45834.552 & -44675.952 & -2896.380 \\ -44675.952 & 45834.552 & -2896.380 \\ -2896.380 & -2896.380 & 19308.910 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.02 \\ -0.03 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x1} \\ p'_{y1} \\ m'_1 \end{bmatrix}_{OB} = \begin{bmatrix} 2256.9696 \\ -2268.5556 \\ 28.9638 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x2} \\ p'_{y2} \\ m'_2 \end{bmatrix}_{OB} = \begin{bmatrix} -45834.552 & 44675.952 & 2896.380 \\ 44675.952 & -45834.552 & 2896.380 \\ -2896.380 & -2896.380 & 9654.450 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.02 \\ -0.03 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x2} \\ p'_{y2} \\ m'_2 \end{bmatrix}_{OB} = \begin{bmatrix} -2256.9696 \\ 2268.5556 \\ 28.9638 \end{bmatrix}$$

Ecuación de rigidez de la estructura en el sistema global de coordenadas (SGC)

$$\begin{bmatrix} P'_A \\ P'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K'_{22})_{OA} + (K'_{11})_{AB} & (K'_{12})_{AB} \\ (K'_{21})_{AB} & (K'_{22})_{OB} + (K'_{22})_{AB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_A \\ \Delta_B \end{bmatrix}$$

$$P' = K' \Delta$$

$$\Delta = K'^{-1} P'$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2256.9696 \\ -2268.5556 \\ -28.9638 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 131276.8 & 0 & 8192 & -128000 & 0 & 0 \\ 0 & 131276.8 & 8192 & 0 & -3276.8 & 8192 \\ 8192 & 8192 & 54613.34 & 0 & -8192 & 13653.33 \\ \hline -128000 & 0 & 0 & 173834.552 & -44675.952 & 2896.38 \\ 0 & -3276.8 & -8192 & -44675.952 & 49111.352 & -5295.6198 \\ 0 & 8192 & 13653.33 & 2896.38016 & -5295.6198 & 46615.58 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.022571 \\ -6.2991E-05 \\ -0.006636 \\ \hline 0.022724 \\ -0.026970 \\ -0.003142 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta = \begin{bmatrix} 0.022571 \\ -6.2991E-05 \\ -0.006636 \\ \hline 0.022724 \\ -0.026970 \\ -0.003142 \end{bmatrix}$$

Estructura Complementaria

Determinación de fuerzas en las barras.

Barra OA

$$\begin{aligned} (P'_1)_{OA} &= (K'_{11})_{OA} \Delta_O + (K'_{12})_{OA} \Delta_A \\ (P'_2)_{OA} &= (K'_{21})_{OA} \Delta_O + (K'_{22})_{OA} \Delta_A \end{aligned} \quad \Delta_O = 0 \quad ; \quad \Delta_A = \begin{bmatrix} 0.022571 \\ -6.2991E-5 \\ -0.006636 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x1} \\ p'_{y1} \\ m'_1 \end{bmatrix}_{OA} = \begin{bmatrix} -3276.8 & 0 & -8192 \\ 0 & -128000 & 0 \\ 8192 & 0 & 13653.33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.022571 \\ -6.2991E-5 \\ -0.006636 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x1} \\ p'_{y1} \\ m'_1 \end{bmatrix}_{OA} = \begin{bmatrix} -19.5985 \\ 8.0628 \\ 94.2981 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x2} \\ p'_{y2} \\ m'_2 \end{bmatrix}_{OA} = \begin{bmatrix} 3276.8 & 0 & 8192 \\ 0 & 128000 & 0 \\ 8192 & 0 & 27306.67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.022571 \\ -6.2991E-5 \\ -0.006636 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x2} \\ p'_{y2} \\ m'_2 \end{bmatrix}_{OA} = \begin{bmatrix} 19.5985 \\ -8.0628 \\ 3.6945 \end{bmatrix}$$

Barra AB

$$\begin{aligned} (P'_1)_{AB} &= (K'_{11})_{AB} \Delta_A + (K'_{12})_{AB} \Delta_B \\ (P'_2)_{AB} &= (K'_{21})_{AB} \Delta_A + (K'_{22})_{AB} \Delta_B \end{aligned} \quad \Delta_A = \begin{bmatrix} 0.02257098 \\ -6.2991E-5 \\ -0.006636 \end{bmatrix} \quad ; \quad \Delta_B = \begin{bmatrix} 0.022724 \\ -0.026970 \\ -0.003142 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x1} \\ p'_{y1} \\ m'_1 \end{bmatrix}_{AB} = \begin{bmatrix} 128000 & 0 & 0 \\ 0 & 3276.8 & 8192 \\ 0 & 8192 & 27306.67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.022571 \\ -6.2991E-5 \\ -0.006636 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -128000 & 0 & 0 \\ 0 & -3276.8 & 8192 \\ 0 & -8192 & 13653.33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.022724 \\ -0.026970 \\ -0.003142 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x1} \\ p'_{y1} \\ m'_1 \end{bmatrix}_{AB} = \begin{bmatrix} -19.584 \\ 8.0675 \\ -3.6835 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x2} \\ p'_{y2} \\ m'_{2AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -128000 & 0 & 0 \\ 0 & -3276.8 & -8192 \\ 0 & 8192 & 13653.33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.022571 \\ -6.2991E-5 \\ -0.006636 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 128000 & 0 & 0 \\ 0 & 3276.8 & -8192 \\ 0 & -8192 & 27306.67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.022724 \\ -0.026970 \\ -0.003142 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x2} \\ p'_{y2} \\ m'_{2AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19.584 \\ -8.0675 \\ 44.0212 \end{bmatrix}$$

Barra OB

$$\begin{aligned} (P'_1)_{OB} &= (K'_{11})_{OB} \Delta_O + (K'_{12})_{OB} \Delta_B \\ (P'_2)_{OB} &= (K'_{21})_{OB} \Delta_O + (K'_{22})_{OB} \Delta_B \end{aligned} \quad \Delta_O = 0 \quad ; \quad \Delta_B = \begin{bmatrix} 0.022724 \\ -0.026970 \\ -0.003142 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x1} \\ p'_{y1} \\ m'_{1OB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -45834.552 & 44675.952 & -2896.380 \\ 44675.952 & -45834.552 & -2896.380 \\ 2896.380 & 2896.380 & 9654.450 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.022724 \\ -0.026970 \\ -0.003142 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x1} \\ p'_{y1} \\ m'_{1OB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2237.3543 \\ 2260.4746 \\ -42.6323 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x2} \\ p'_{y2} \\ m'_{2OB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45834.552 & -44675.952 & 2896.380 \\ -44675.952 & 45834.552 & 2896.380 \\ 2896.380 & 2896.380 & 19308.910 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.022724 \\ -0.026970 \\ -0.003142 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x2} \\ p'_{y2} \\ m'_{2OB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2237.3543 \\ -2260.4746 \\ -72.9666 \end{bmatrix}$$

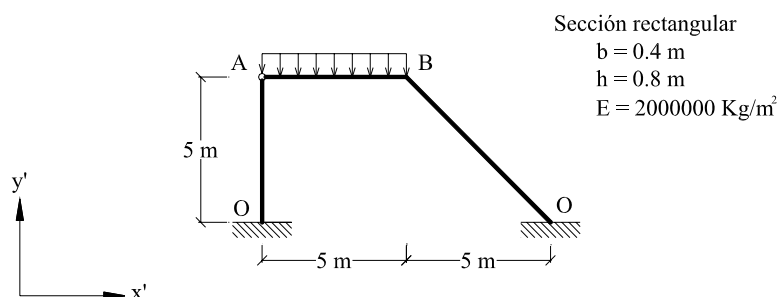
Resultados Finales

$$(P'_1)_{FINAL} = (P'_1)_{PRIMARIA} + (P'_1)_{COMPLEMENTARIA}$$

$$(P'_2)_{FINAL} = (P'_2)_{PRIMARIA} + (P'_2)_{COMPLEMENTARIA}$$

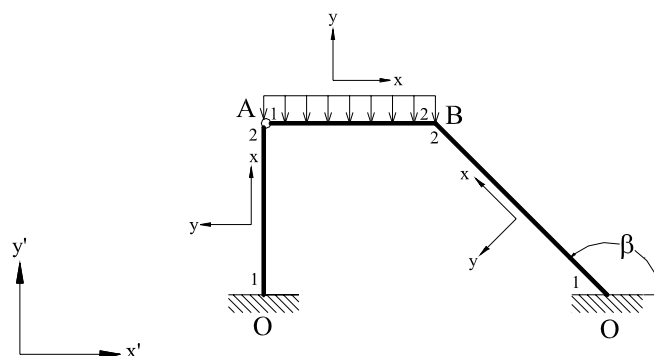
BARRA	ESTRUCTURA PRIMARIA		ESTRUCTURA COMPLEMENTARIA		ESTRUCTURA FINAL	
OA	P' ₁	0	P' ₁	-19,5985	P' ₁	-19,5985
		0		8,0628		8,0628
		0		94,2981		94,2981
	P' ₂	0	P' ₂	19,5985	P' ₂	19,5985
		0		-8,0628		-8,0628
		0		3,6945		3,6945
AB	P' ₁	0	P' ₁	-19,584	P' ₁	-19,584
		0		8,0675		8,0675
		0		-3,6835		-3,6835
	P' ₂	0	P' ₂	19,584	P' ₂	19,584
		0		-8,0675		-8,0675
		0		44,0212		44,0212
OB	P' ₁	2256,9696	P' ₁	-2237,3543	P' ₁	19,6153
		-2268,5556		2260,4746		-8,081
		28,9638		-42,6323		-13,6685
	P' ₂	-2256,9696	P' ₂	2237,3543	P' ₂	-19,6153
		2268,5556		-2260,4746		8,081
		28,9638		-72,9666		-44,0028

4.2. Determinar las fuerzas en las barras para la estructura sometida a una carga distribuida de 12 Kg/m en la barra AB y una articulación en el extremo izquierdo de la misma barra. Las propiedades de la estructura se muestran a continuación.



SOLUCION.

Localización del sistema local de coordenadas (SLC) de cada elemento y numeración de elementos



Ecuación general de rigidez de una barra

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Determinación de submatrices de la matriz de rigidez de la estructura.

Barra OA

Debido a que el sistema local de coordenadas (SLC) no coincide con el sistema global de coordenadas (SGC) este debe ser rotado un ángulo $\beta = 90^\circ$

De la ecuación (4.6-7) los términos de la matriz K_{11}' son:

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} C^2 \frac{EA}{L} + S^2 \frac{12EI}{L^3} & SC \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) & -S \frac{6EI}{L^2} \\ SC \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) & S^2 \frac{EA}{L} + C^2 \frac{12EI}{L^3} & C \frac{6EI}{L^2} \\ -S \frac{6EI}{L^2} & C \frac{6EI}{L^2} & 4 \frac{EI}{L} \end{bmatrix}$$

($C = \cos \beta$; $S = \sin \beta$; $I = I_z$)

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} 3276.8 & 0 & -8192 \\ 0 & 128000 & 0 \\ -8192 & 0 & 27306.67 \end{bmatrix}$$

De la ecuación (4.6-8) los términos de la matriz K'_{12} son:

$$K'_{12} = \begin{bmatrix} -C^2 \frac{EA}{L} + S^2 \frac{12EI}{L^3} & -SC \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) & -S \frac{6EI}{L^2} \\ -SC \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) & - \left(S^2 \frac{EA}{L} + C^2 \frac{12EI}{L^3} \right) & C \frac{6EI}{L^2} \\ S \frac{6EI}{L^2} & -C \frac{6EI}{L^2} & 2 \frac{EI}{L} \end{bmatrix}$$

($C = \cos \beta$; $S = \sin \beta$; $I = I_z$)

$$K'_{12} = \begin{bmatrix} -3276.8 & 0 & -8192 \\ 0 & -128000 & 0 \\ 8192 & 0 & 13653.33 \end{bmatrix}$$

Como: $K'_{21} = K'^T_{12}$

$$K'_{21} = \begin{bmatrix} -3276.8 & 0 & 8192 \\ 0 & -128000 & 0 \\ -8192 & 0 & 13653.33 \end{bmatrix}$$

Como: $K'_{22} = K'_{11}$, con los signos de los términos $6EI/L^2$ fuera de la diagonal, inversos.

$$K'_{22} = \begin{bmatrix} 3276.8 & 0 & 8192 \\ 0 & 128000 & 0 \\ 8192 & 0 & 27306.67 \end{bmatrix}$$

Barra AB

El sistema local de coordenadas (SLC) coincide con el sistema global de coordenadas (SGC), por tratarse de una barra con una articulación en un extremo, utilizamos las ecuaciones (4.11-4) para una barra articulada en el extremo 1.

Los términos de la matriz K'_{11} son:

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} 128000 & 0 & 0 \\ 0 & 819.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los términos de la matriz K'_{12} y K'^T_{21} son:

$$K_{12} = K^T_{21} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K'_{12} = K'^T_{21} = \begin{bmatrix} -128000 & 0 & 0 \\ 0 & -819.2 & 4096 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los términos de la matriz K'_{22} son:

$$K'_{22} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$K'_{22} = \begin{bmatrix} 128000 & 0 & 0 \\ 0 & 819.2 & -4096 \\ 0 & -4096 & 20480 \end{bmatrix}$$

Barra OB

Debido a que el sistema local de coordenadas (SLC) no coincide con el sistema global de coordenadas (SGC) este debe ser rotado un ángulo $\beta = 135^\circ$

De la ecuación 4.6-7 los términos de la matriz K'_{11} y son:

$$K'_{11} = \begin{bmatrix} 45834.552 & -44675.952 & -2896.380 \\ -44675.952 & 45834.552 & -2896.380 \\ -2896.380 & -2896.380 & 19308.910 \end{bmatrix}$$

De la ecuación (4.6-8) los términos de la matriz K'_{12} son:

$$K'_{12} = \begin{bmatrix} -45834.552 & 44675.952 & -2896.380 \\ 44675.952 & -45834.552 & -2896.380 \\ 2896.380 & 2896.380 & 9654.450 \end{bmatrix}$$

Como: $K'_{21} = K'^T_{12}$

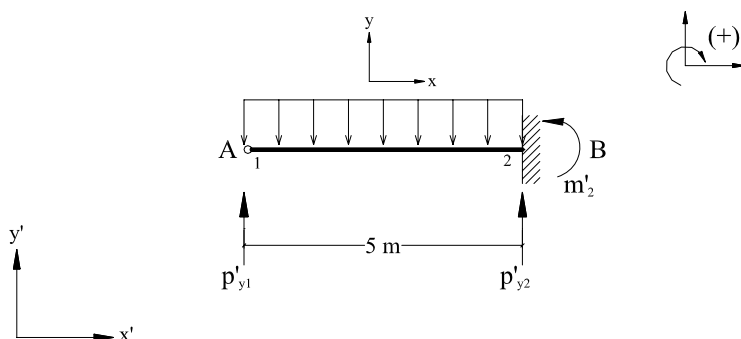
$$K'_{21} = \begin{bmatrix} -45834.552 & 44675.952 & 2896.380 \\ 44675.952 & -45834.552 & 2896.380 \\ -2896.380 & -2896.380 & 9654.450 \end{bmatrix}$$

Como: $K'_{22} = K'_{11}$, con los signos de los términos $6EI/L^2$ fuera de la diagonal, inversos.

$$K'_{22} = \begin{bmatrix} 45834.552 & -44675.952 & 2896.380 \\ -44675.952 & 45834.552 & 2896.380 \\ 2896.380 & 2896.380 & 19308.910 \end{bmatrix}$$

Estructura Primaria

Determinación de fuerzas en las barras.



Por distribución de momentos (Anexo A Tabla A.6):

$P'_{x1} = 0$	$P'_{y1} = \frac{3}{8}qL$	$m'_1 = 0$
	$P'_{y1} = 22.5$	
$P'_{x2} = 0$	$P'_{y2} = \frac{5}{8}qL$	$m'_2 = \frac{1}{8}qL^2$
	$P'_{y2} = 37.5$	$m'_2 = -37.5$

Barra OA

$$\begin{bmatrix} p'_{x1} \\ p'_{y1} \\ m'_1 \end{bmatrix}_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} p'_{x2} \\ p'_{y2} \\ m'_2 \end{bmatrix}_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Barra AB

$$\begin{bmatrix} p'_{x1} \\ p'_{y1} \\ m'_1 \end{bmatrix}_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 22.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} p'_{x2} \\ p'_{y2} \\ m'_2 \end{bmatrix}_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 37.5 \\ -37.5 \end{bmatrix}$$

Barra OB

$$\begin{bmatrix} p'_{x1} \\ p'_{y1} \\ m'_1 \end{bmatrix}_{OB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} p'_{x2} \\ p'_{y2} \\ m'_2 \end{bmatrix}_{OB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ecuación de rigidez de la estructura sistema global de coordenadas (SGC)

$$\begin{bmatrix} P'_A \\ P'_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K'_{22})_{OA} + (K'_{11})_{AB} & (K'_{12})_{AB} \\ (K'_{21})_{AB} & (K'_{22})_{OB} + (K'_{22})_{AB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_A \\ \Delta_B \end{bmatrix}$$

$$P' = K' \Delta$$

$$\Delta = K'^{-1} P'$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -22.5 \\ 0 \\ 0 \\ -37.5 \\ 37.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 131276.8 & 0 & 8192 & -128000 & 0 & 0 \\ 0 & 128819.2 & 0 & 0 & -819.2 & 4096 \\ 8192 & 0 & 27306.67 & 0 & 0 & 0 \\ -128000 & 0 & 0 & 173834.552 & -44675.952 & 2896.380 \\ 0 & -819.2 & 0 & -44675.952 & 46653.752 & -1199.619 \\ 0 & 4096 & 0 & 2896.380 & -1199.619 & 39788.910 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0099083 \\ -0.0002843 \\ 0.0029725 \\ -0.0099718 \\ -0.0103222 \\ 0.0013864 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} -0.0099083 \\ -0.0002843 \\ 0.0029725 \\ -0.0099718 \\ -0.0103222 \\ 0.0013864 \end{bmatrix}$$

Estructura Complementaria

Determinación de fuerzas en las barras.

Barra OA

$$\begin{aligned} (P'_1)_{OA} &= (K'_{11})_{OA} \Delta_O + (K'_{12})_{OA} \Delta_A \\ (P'_2)_{OA} &= (K'_{21})_{OA} \Delta_O + (K'_{22})_{OA} \Delta_A \end{aligned} \quad \Delta_O = 0 \quad ; \quad \Delta_A = \begin{bmatrix} -0.0099083 \\ -0.0002843 \\ 0.0029725 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x1} \\ p'_{y1} \\ m'_1 \end{bmatrix}_{OA} = \begin{bmatrix} -3276.8 & 0 & -8192 \\ 0 & -128000 & 0 \\ 8192 & 0 & 13653.33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0099083 \\ -0.0002843 \\ 0.0029725 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x1} \\ p'_{y1} \\ m'_1 \end{bmatrix}_{OA} = \begin{bmatrix} 8.1168 \\ 36.3904 \\ -40.5843 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x2} \\ p'_{y2} \\ m'_2 \end{bmatrix}_{OA} = \begin{bmatrix} 3276.8 & 0 & 8192 \\ 0 & 128000 & 0 \\ 8192 & 0 & 27306.67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0099083 \\ -0.0002843 \\ 0.0029725 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x2} \\ p'_{y2} \\ m'_2 \end{bmatrix}_{OA} = \begin{bmatrix} -8.1168 \\ -36.3904 \\ 0.0002 \end{bmatrix}$$

Barra AB

$$\begin{aligned} (P'_1)_{AB} &= (K'_{11})_{AB} \Delta_A + (K'_{12})_{AB} \Delta_B \\ (P'_2)_{AB} &= (K'_{21})_{AB} \Delta_A + (K'_{22})_{AB} \Delta_B \end{aligned}$$

$$\Delta_A = \begin{bmatrix} -0.0099083 \\ -0.0002843 \\ 0.0029725 \end{bmatrix} \quad ; \quad \Delta_B = \begin{bmatrix} -0.0099718 \\ -0.0103222 \\ 0.0013864 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x1} \\ p'_{y1} \\ m'_1 \end{bmatrix}_{AB} = \begin{bmatrix} 128000 & 0 & 0 \\ 0 & 819.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0099083 \\ -0.0002843 \\ 0.0029725 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -128000 & 0 & 0 \\ 0 & -819.2 & 4096 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0099718 \\ -0.0103222 \\ 0.0013864 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x1} \\ p'_{y1} \\ m'_1 \end{bmatrix}_{AB} = \begin{bmatrix} 8.1280 \\ 13.9017 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x2} \\ p'_{y2} \\ m'_{2} \end{bmatrix}_{AB} = \begin{bmatrix} -128000 & 0 & 0 \\ 0 & -819.2 & 4096 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0099083 \\ -0.0002843 \\ 0.0029725 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 128000 & 0 & 0 \\ 0 & 819.2 & -4096 \\ 0 & -4096 & 20480 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0099718 \\ -0.0103222 \\ 0.0013864 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x2} \\ p'_{y2} \\ m'_{2} \end{bmatrix}_{AB} = \begin{bmatrix} -8.1280 \\ -13.9017 \\ 69.5087 \end{bmatrix}$$

Barra OB

$$\begin{aligned} (P'_1)_{OB} &= (K'_{11})_{OB} \Delta_O + (K'_{12})_{OB} \Delta_B \\ (P'_2)_{OB} &= (K'_{21})_{OB} \Delta_O + (K'_{22})_{OB} \Delta_B \end{aligned} \quad \Delta_O = 0 \quad ; \quad \Delta_B = \begin{bmatrix} -0.0099718 \\ -0.0103222 \\ 0.0013864 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x1} \\ p'_{y1} \\ m'_{1} \end{bmatrix}_{OB} = \begin{bmatrix} -45834.552 & 44675.952 & -2896.380 \\ 44675.952 & -45834.552 & -2896.380 \\ 2896.380 & 2896.380 & 9654.450 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0099718 \\ -0.0103222 \\ 0.0013864 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x1} \\ p'_{y1} \\ m'_{1} \end{bmatrix}_{OB} = \begin{bmatrix} -8.1166 \\ 23.5982 \\ -45.3942 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x2} \\ p'_{y2} \\ m'_{2} \end{bmatrix}_{OB} = \begin{bmatrix} 45834.552 & -44675.952 & 2896.380 \\ -44675.952 & 45834.552 & 2896.380 \\ 2896.380 & 2896.380 & 19308.910 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.0099718 \\ -0.0103222 \\ 0.0013864 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{x2} \\ p'_{y2} \\ m'_{2} \end{bmatrix}_{OB} = \begin{bmatrix} 8.1166 \\ -23.5982 \\ -32.0092 \end{bmatrix}$$

Resultados Finales

$$(P'_1)_{FINAL} = (P'_1)_{PRIMARIA} + (P'_1)_{COMPLEMENTARIA}$$

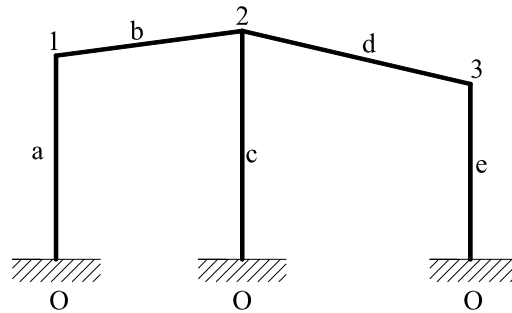
$$(P'_2)_{FINAL} = (P'_2)_{PRIMARIA} + (P'_2)_{COMPLEMENTARIA}$$

BARRA	ESTRUCTURA PRIMARIA		ESTRUCTURA COMPLEMENTARIA		ESTRUCTURA FINAL	
OA	P'₁	0	P'₁	8,1168	P'₁	8,1168
		0		36,3904		36,3904
		0		-40,5843		-40,5843
	P'₂	0	P'₂	-8,1168	P'₂	-8,1168
		0		-36,3904		-36,3904
		0		0,0002		0,0002
AB	P'₁	0	P'₁	8,128	P'₁	8,128
		22,5		13,9017		36,4017
		0		0		0
	P'₂	0	P'₂	-8,128	P'₂	-8,128
		37,5		-13,9017		23,5983
		-37,5		69,5087		32,0087
OB	P'₁	0	P'₁	-8,1166	P'₁	-8,1166
		0		23,5982		23,5982
		0		-45,3942		-45,3942
	P'₂	0	P'₂	8,1166	P'₂	8,1166
		0		-23,5982		-23,5982
		0		-32,0092		-32,0092

la estructura para el pórtico plano que se muestra en la siguiente figura.

[illegible]

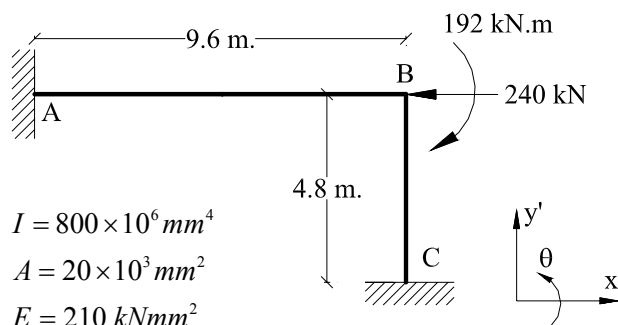
en la siguiente figura.
 en la siguiente figura.
 n la siguiente figura.
 la siguiente figura.
 la siguiente figura.
 a siguiente figura.
 siguiente figura.
 siguiente figura.
 igura.
 gura.
 ura.
 ra.
 a.
 .



Respuesta.

$$K_s = \begin{bmatrix} (K'_{22})_a + (K'_{11})_b & (K'_{12})_b & 0 \\ (K'_{21})_b & (K'_{22})_b + (K'_{22})_c + (K'_{11})_d & (K'_{12})_b \\ 0 & (K'_{21})_d & (K'_{22})_d + (K'_{22})_c \end{bmatrix}$$

4.2.- El pórtico mostrado en la figura esta empotrado en A y C y unido rígidamente en B. La sección transversal es constante con las propiedades que se muestran. Hallar los desplazamientos en B.



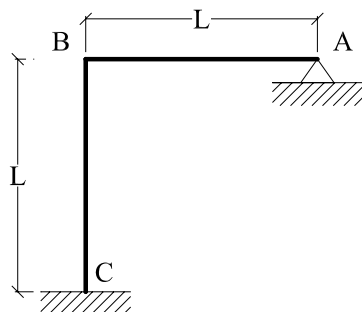
Respuesta.

$$\Delta_x = -448 \times 10^{-3} \text{ mm.}$$

$$\Delta_y = -10.2 \times 10^{-3} \text{ mm.}$$

$$\theta = -0.822 \times 10^{-3} \text{ rad.}$$

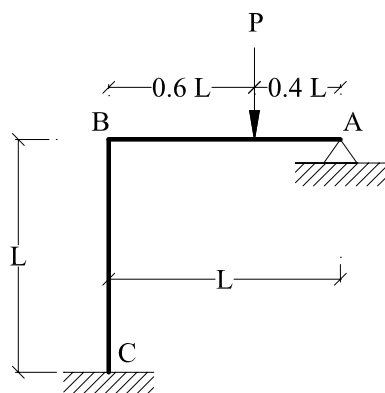
4.3.- El pórtico mostrado en la figura esta empotrado en C y articulado en A. Colocar los ejes de la estructura convenientemente y determinar la matriz de rigidez para la estructura de sección constante.



Respuesta. El cálculo requerido es menor si se toma el eje x' positivo de derecha a izquierda, y el eje y' positivo verticalmente hacia abajo.

$$K_s = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{L} & 2 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{L} \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{A}{I} + \frac{12}{L^2} & 0 & -\frac{6}{L} \\ 0 & \frac{A}{I} + \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & -\frac{6}{L} & 8 \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$$

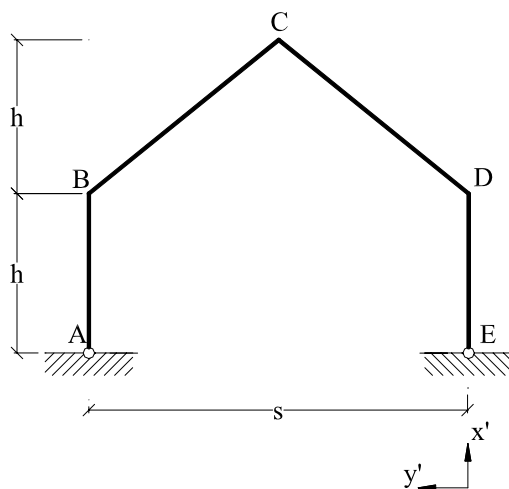
4.4.- Si la estructura del problema 4.3 lleva la carga mostrada en la siguiente figura, calcular la rotación en A y B. Asuma que los desplazamientos en los ejes x' y y' para B son muy pequeños y pueden ser despreciados.



Respuesta.

$$\begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.048 \\ -0.024 \end{bmatrix} \frac{PL^2}{EI}$$

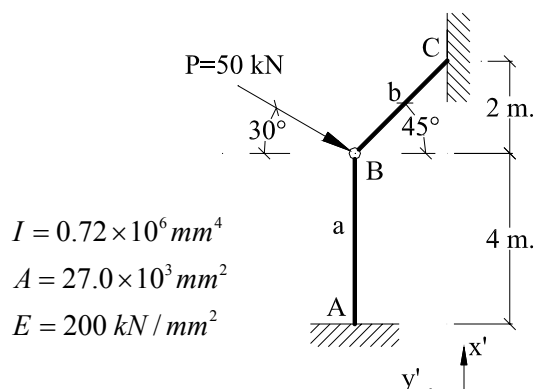
4.5.- El marco que se muestra en la figura es de sección constante y se encuentra simétricamente cargado. Determina la matriz de rigidez en términos de A , E , I para los elementos. Asuma que $h = s\sqrt{5}/8$.



Respuesta.

$$K_s = \frac{EI}{s} \begin{bmatrix} \begin{matrix} A & & \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{32}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} B & & \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{384}{5s} & \frac{16}{\sqrt{5}} & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} C & & \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} & B & \\ \frac{8.8}{\sqrt{5}}\left(\frac{A}{I}\right) & -\frac{16}{\sqrt{5}}\left(\frac{A}{I}\right) & \frac{192}{5s\sqrt{5}} \\ & \frac{32}{\sqrt{5}}\left(\frac{A}{I}\right) & \frac{96}{5s}\left(4 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ & & \frac{48}{\sqrt{5}} \end{matrix} & \begin{matrix} & C & \\ -\frac{4}{5\sqrt{5}}\left(\frac{A}{I}\right) & 0 & 0 \\ \frac{16}{\sqrt{5}}\left(\frac{A}{I}\right) & 0 & 0 \\ \frac{-192}{5s\sqrt{5}} & 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} & & C \\ & & \frac{4}{5\sqrt{5}}\left(\frac{A}{I}\right) \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

4.6.- La estructura mostrada en la figura esta empotrada en A y C y existe una articulación en B, las propiedades y secciones transversales son constantes. Determinar la matriz de rigidez (4x4)

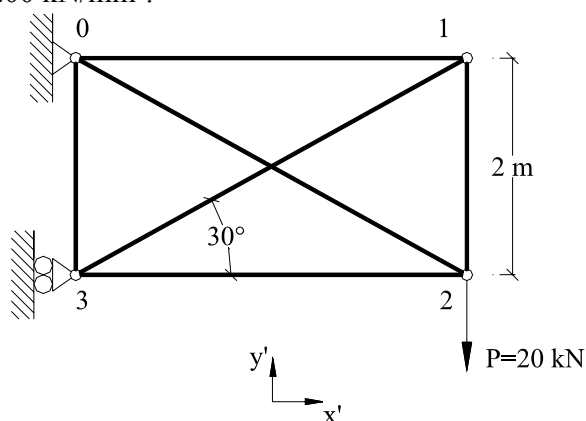


Respuesta

$$K_s = 10^2 \begin{bmatrix} \Delta_{xB} & \Delta_{yB} & \theta_a & \theta_b \\ 23050 & -9550 & 0 & 0.764 \\ -9550 & 9550 & -0540 & 0.764 \\ 0 & -0540 & 1.44 & 0 \\ 0.764 & 0.764 & 0 & 2.036 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{xB} \\ \Delta_{yB} \\ \theta_a \\ \theta_b \end{bmatrix}$$

4.7.- Determinar la matriz de rigidez para la estructura de la figura utilizando: la numeración de nudos y los ejes que se muestran. Todos los elementos tienen las siguientes propiedades:

$A=10^3 \text{ mm}^2$ y $E=200 \text{ kN/mm}^2$.



Respuesta

$$K_s = 10^4 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9.53 & 2.17 & 0 & 0 & 0 & -2.17 \\ 2.17 & 11.25 & 0 & -10.0 & 0 & -1.25 \\ 0 & 0 & 9.25 & -2.17 & 0 & 0 \\ 0 & -10.0 & -2.17 & 11.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2.17 & -1.25 & 0 & 0 & 0 & 11.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

CAPITULO 5**MÉTODO DE CROSS**

Frecuentemente se presenta al ingeniero constructor el problema del cálculo de vigas continuas, pórticos y otras estructuras sustentantes similares, construidas por barras sucesivas resistentes a flexión. En numerosos casos pueden utilizarse tablas, como por ejemplo, en el de vigas continuas (Tablas de Griot, Anger, etc.), o bien formularios. Cuando no es posible utilizar las unas ni los otros, se precisa realizar detalladamente el cálculo, cuyo desarrollo siguiendo las teorías clásicas, presupone conocimientos básicos, en el calculo integral, el principio de los desplazamientos virtuales, la ecuación de los trabajos, etc. Por otra parte, la realización de cálculos por métodos clásicos requiere un esfuerzo y una atención intelectual relativamente grandes.

Por este motivo hace mucho tiempo se buscaron procedimientos de cálculo más sencillos, de resultados más o menos exactos, encontrándose tales métodos. Para el caso de que los nudos o puntos de enlace entre las distintas partes de la estructura puedan girar, pero no desplazarse, lo cual ocurre, por ejemplo, en el caso de los edificios de entramado cuyos dinteles no pueden desplazarse en sentido horizontal por estar unidos a las fachadas del edificio por medio de forjados rígidos, pueden obtenerse soluciones aproximadas aprovechando la circunstancia de que en cada una de las barras cambia poco la posición de los puntos de inflexión de la línea elástica, al variar el grado de empotramiento de sus extremos. Por esto pueden determinarse estos puntos de inflexión, que en cierto modo representan articulaciones, de acuerdo con razonamientos sencillos, y considerarlos como puntos fijos. Con ello queda en principio resuelto el problema fundamental del cálculo del pórtico, pudiéndose ahora determinar con sencillez los momentos en los apoyos y nudos, y, con ello, también los esfuerzos longitudinales y transversales. Es cierto que un procedimiento de cálculo como el expuesto es frecuentemente poco exacto.

El problema se complica cuando los apoyos, vértices y nudos pueden desplazarse horizontalmente, puesto que en tal caso ya no es tan sencillo determinar la posición de los puntos de inflexión, si no que es preciso localizarlos con mayor exactitud. Los cálculos correspondientes resultan bastante complejos, requiriendo estos de mucho trabajo.

En el año 1930 en Estados Unidos, el ingeniero Cross desarrollo un procedimiento que, usando medios teóricos extremadamente simples, permite determinar de una manera muy clara los momentos flectores en los nudos de vigas continuas, pórticos, etc.

Se trata de un procedimiento de los llamados “procedimientos de iteración”, es decir, se trata de un tipo de calculo progresivo, paso a paso, en el cual en cada fase del cálculo se corrige el resultado de la operación anterior, convergiendo el error a cero. Por esto puede considerarse el procedimiento de Cross como un procedimiento riguroso, puesto que es posible obtener con él la exactitud que se quiera. Desde el punto de vista

práctico, el cálculo suele converger, en general, con gran rapidez. No hay inconveniente en interrumpir el cálculo al cabo de relativamente pocas operaciones, puesto que, por varios motivos, no es oportuno un cálculo extremadamente exacto en los sistemas de alto grado de indeterminación estática, del tipo en cuestión. Uno de dichos motivos es el de que se empieza por no poder determinar con exactitud la longitud de las distintas barras, en las estructuras porticadas, por la influencia que tienen en ello las dimensiones de las uniones.

Además del método de Cross propiamente dicho, en el cual, como mas adelante se mostrara detalladamente, se determinan directamente los momentos flectores en los nudos, es decir, los efectos de las fuerzas, mediante una serie de distribuciones progresivas, Grinter ha desarrollado un procedimiento en cierto modo paralelo, en el que las deformaciones, y concretamente los ángulos de giro de los nudos, se reparten igualmente en forma progresiva. Un procedimiento de este tipo a veces presenta determinadas ventajas, puesto que hay muchos casos en que es más rápido operar con los ángulos, para luego determinar los momentos flectores en los nudos, los cuales al fin y al cabo son los que se necesitan para el dimensionado de las barras. Esto hace que hasta cierto punto, la aparente ventaja del procedimiento vuelva a perderse.

En general, al ingeniero, le suele ser más cómoda la determinación directa de los momentos en los nudos, es decir, la de las magnitudes de las fuerzas, que la determinación de los ángulos de rotación en los nudos, cosa que siempre representa un cierto rodeo. Por este motivo se trata en el presente texto el procedimiento de determinación de las magnitudes de las fuerzas, es decir, el método de Cross de distribución de momentos propiamente dicho. Al final del capítulo se expone brevemente el procedimiento de Grinter.

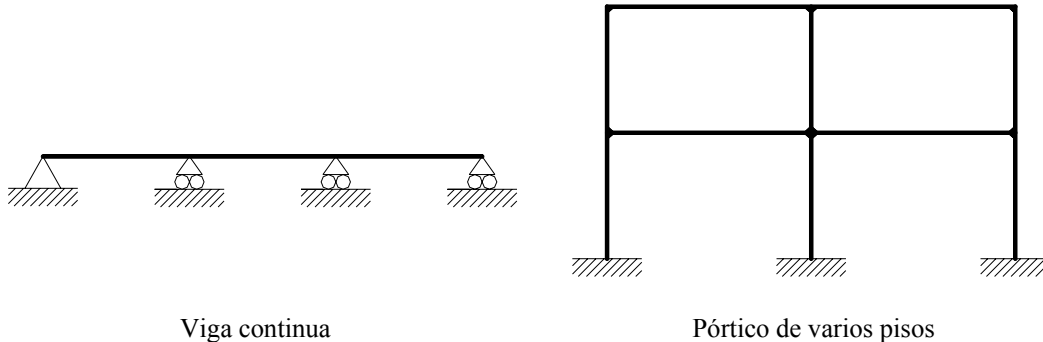
El campo de aplicación del método de Cross puede subdividirse, en principio, en dos grandes dominios:

1. Estructuras sustentantes porticadas con nudos que si bien giran, no pueden desplazarse. Para ellos resulta particularmente sencillo el cálculo.
2. Estructuras sustentantes con nudos que pueden tanto girar como desplazarse. En este caso es preciso efectuar unos cálculos adicionales (estados de carga auxiliares), pero las consideraciones en que se fundan no son mucho más complicadas.

Puesto que actualmente el método de Cross a pesar de ser un método manual, ya ha quedado desplazado por la utilización del ordenador y de diversos paquetes informáticos que facilitan la labor del ingeniero. Como ya se menciono anteriormente, el cálculo se desarrolla con medios extremadamente sencillos, en forma sinóptica y clara.

ESTRUCTURAS CONTINUAS CON BARRAS DE MOMENTO DE INERCIA CONSTANTE

Las figuras presentadas a continuación, muestran estructuras para cuyo cálculo resulta sumamente adecuado el método de Cross.



Viga continua

Pórtico de varios pisos

5.1 Generalidades y primer problema fundamental

El método de Cross permite calcular los momentos flectores en los apoyos de las vigas continuas o bien en los nudos de las estructuras porticadas, sobre todo en los pórticos de varios pisos, por un procedimiento de iteración, cuya exactitud crece progresivamente hasta el límite que se desee. La idea fundamental de este procedimiento la publicó Cross en la revista *Transactions of the American Society of Civil Engineers* (1932)

Este método puede aplicarse sin dificultad especial incluso a estructuras con alto grado de indeterminación estática, es de extraordinaria sencillez y claridad, y exige pocos conocimientos matemáticos, por lo cual puede justamente considerarse como un método elemental.

Una vez que se han determinado los momentos en los nudos por el citado método de Cross, es relativamente fácil calcular las fuerzas longitudinales y transversales que se producen en la estructura, puesto que esta última ha quedado en cierto modo estáticamente determinada. Mas esto no ha de ser objeto del presente capítulo, puesto que los conocimientos para ello ya se consideran del dominio del estudiante.

En principio se distinguen dos casos fundamentales:

Primer caso: Los nudos pueden girar, pero no desplazarse.

Esto ocurre, por ejemplo, en las estructuras porticadas de varios pisos cuyos dinteles se apoyan horizontalmente, mediante forjados o arriostramientos rígidos, en fachadas igualmente rígidas.

Segundo caso: Los nudos, además de girar, pueden también desplazarse.

Este caso comparado con el primero, no aumenta en lo esencial la dificultad del cálculo, sino que únicamente resulta más largo, por tenerse que estudiar estados de carga auxiliares, lo que se hace en forma análoga a la del primer caso.

Queda todavía por mencionar que se desprecia la influencia que, en el cálculo de los momentos en los nudos, tienen las fuerzas normales que actúan en los pilares y dinteles. Esto se hace también en otros procedimientos.

Tienen importancia fundamental para el desarrollo del método:

a) Signo de los momentos.

Aumenta notablemente la claridad del procedimiento de cálculo cuando se introducen, como magnitudes estáticamente indeterminadas de las estructuras continuas, no los momentos flectores en los extremos de las barras, como es corriente, sino los momentos que actúan sobre los nudos, como se muestra en la figura 5.1-1.

Todo momento aplicado a un nudo, cuyo sentido de giro sea el de las agujas del reloj, (de izquierda a derecha) se considera como positivo, dando signo negativo al momento que provoca un giro en sentido opuesto al de dichas agujas (derecha a izquierda). En el curso de este capítulo siempre nos basaremos en esta definición del sentido positivo, excepto cuando expresamente se indique lo contrario.

Por este motivo se observa en la figura 5.1-1 que el momento M_B^i , a la izquierda del apoyo central, se considera negativo, como es costumbre, mientras que el momento a la derecha, M_B^d , se considera positivo.

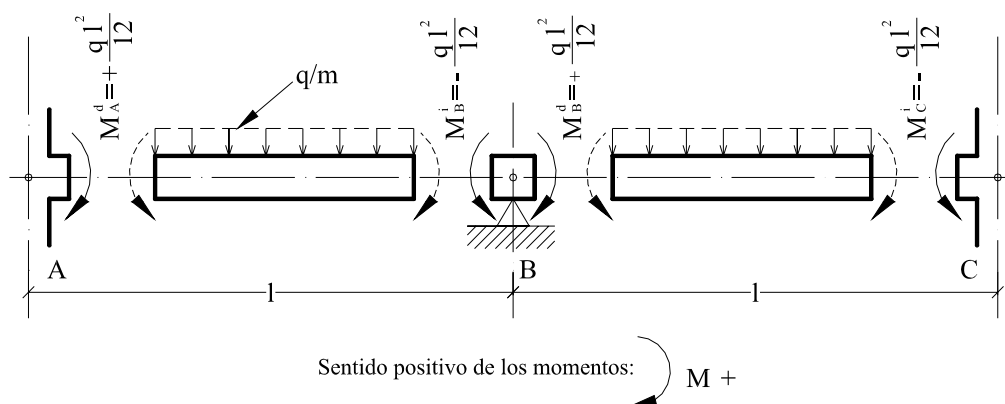


Figura 5.1-1 Momentos que actúan en los nudos.

El nudo B se hallara en equilibrio cuando sea nula la suma de los momentos que a él se aplican, es decir, cuando se cumpla que: $\sum M = M^i + M^d = (-) + (+) = 0$. Así, por ejemplo, se obtiene para el caso de carga representado en la figura 5.1-1:

$$M_B^i = -\frac{ql^2}{12} ; \quad M_B^d = +\frac{ql^2}{12} \quad \text{y}$$

$$\sum M = -\frac{ql^2}{12} + \frac{ql^2}{12} = 0$$

Aplicando estos conceptos que acabamos de definir, resulta positivo el momento que se aplica en el punto de empotramiento A, puesto que tiende a efectuar un giro a la derecha, siendo negativo el momento en C.

Esta forma de considerar los signos de los momentos se ha introducido de una manera general para el procedimiento de Cross, y resulta ventajosa por tener que considerar nada mas que una sola regla para su aplicación. Ciertamente es opuesto este sentido al que estamos acostumbrados a emplear. En la mecánica clásica se consideran los momentos dibujados en la figura 5.1-1 con trazo interrumpido en los extremos de las barras, como negativos. Al momento $M_b^d = +\frac{ql^2}{12}$ que según Cross se aplica al nudo B, por la derecha, corresponde, según la forma corriente de considerar los signos el momento $-\frac{ql^2}{12}$ que se aplica, en la misma sección al extremo de la barra.

Puesto que en el cálculo de las dimensiones de la barras se emplean, para los momentos, los signos hasta ahora corrientemente empleados, debe prestarse especial atención a esta diferencia. Cuando se han determinado los momentos en los nudos por medio del método de Cross, para proceder al cálculo de los elementos de la estructura, los resultados deben “transponerse” y representarse con los signos normalmente considerados.

b) Primer problema fundamental.

En una estructura como la de la figura 5.1-2, con nudos indesplazables, perteneciente al primer caso de los antes mencionados, se aplica en el nudo A un momento exterior M.

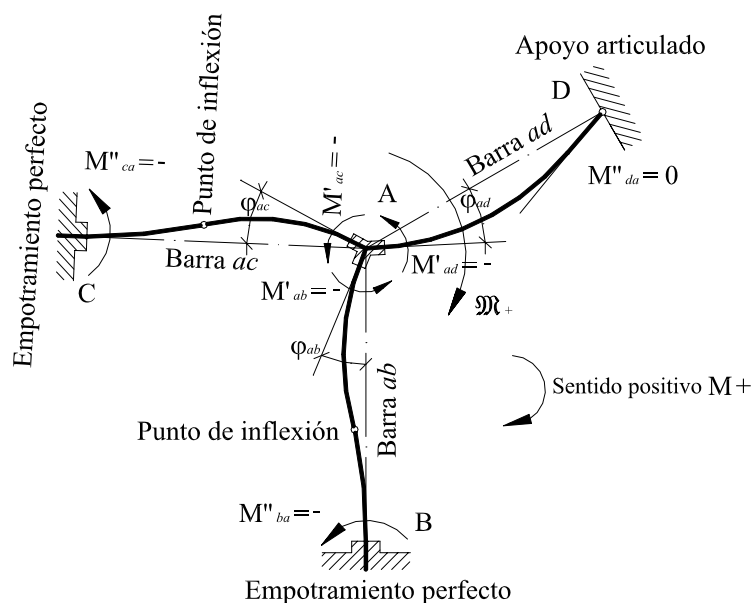


Figura 5.1-2 Estructura con nudos indesplazables.

Parte de las barras que parten del nudo A pueden considerarse como fijamente empotradas por sus otros extremos, y parte como articuladas. Se desea saber, como se distribuye el momento M entre las distintas barras y puntos de empotramiento.

Nomenclatura general

Los nudos se designarán por letras mayúsculas, y las barras, o sus longitudes, por dos letras minúsculas. Así, por ejemplo, ac significa la barra que se halla entre los nudos A y C, pudiéndose perfectamente permutar estas letras, obteniéndose en el caso del ejemplo, ca . Los momentos en los nudos igualmente se caracterizan por dos índices de los cuales el primero representa el nudo y el segundo la barra seccionada. Así, por ejemplo, M'_{ac} es el momento en el nudo A en la sección de enlace con la barra ac , y M''_{ca} es el momento en el nudo C en la sección de enlace con la barra ca .

El primer índice indica el nudo y el segundo la dirección de la barra.

Como muestran las líneas elásticas dibujadas en la figura 5.1-2, se producen, en virtud del momento M +, supuesto actuando en sentido positivo en el nudo A, unos momentos negativos M' -, en las distintas secciones adyacentes al nudo, los cuales han de estar en equilibrio con M ; el valor de este momento M se distribuye, por lo tanto, entre las distintas barras concurrentes al nudo A y por esto a los momentos M' que lo equilibran momentos a los cuales llamaremos “momentos de distribución”.

Estos momentos de distribución M' pueden calcularse partiendo de las dos condiciones siguientes:

1º Los ángulos de giro φ_{ab} , φ_{ac} y φ_{ad} , de los extremos de las barras deben ser iguales.

2º La suma de los momentos de distribución M' debe ser igual al momento de giro externo M .

En lo que sigue supondremos que las barras tienen momentos de inercia constante en toda su longitud.

Por lo tanto el ángulo de giro común a todas las barras en el nudo considerado, es:

$\varphi = c M \frac{l}{EI}$, siendo c una constante que depende de la forma en que se apoya la barra, es decir, de si ésta está empotrada en su otro extremo, o se halla articulada en el mismo.

Se deduce entonces que:

$$\frac{M l}{I} = \frac{E \varphi}{c}$$

Supongamos por lo pronto que todas las barras tienen empotramiento perfecto en su otro extremo, con lo que los valores de $\frac{E \varphi}{c}$ serán todos iguales. Por lo tanto también habrán

de serlo las magnitudes $\frac{M l}{I}$, es decir,

$$1) \frac{M'_{ab} l_{ab}}{I_{ab}} = \frac{M'_{ac} l_{ac}}{I_{ac}} = \frac{M'_{ad} l_{ad}}{I_{ad}} = \dots$$

Además habrá que cumplirse que $\sum M' + M = 0$, o sea

$$2) M'_{ab} + M'_{ac} + M'_{ad} + \dots + M = 0$$

De la resolución del sistema de ecuaciones resulta:

$$M'_{ab} = - \frac{\frac{I_{ab}}{l_{ab}}}{\frac{I_{ab}}{l_{ab}} + \frac{I_{ac}}{l_{ac}} + \frac{I_{ad}}{l_{ad}} + \dots}$$

M

Los valores de $\frac{I}{l}$ representan las rigideces de las distintas barras, puesto que una barra resulta tanto menos flexible cuanto mayor sea su momento de inercia, y tanto más flexible cuanto mayor sea su longitud. Estos valores se designarán por:

$$\frac{I}{l} = K \quad (5.1-1)$$

Entonces se tiene, en general:

$$M' = -M \frac{K}{\sum K} \quad (5.1-2)$$

El valor de $\frac{K}{\sum K}$ se puede denominar “coeficiente de distribución”:

$$\frac{K}{\sum K} = V \quad (5.1-3)$$

Así, por ejemplo, representa

$$\frac{K_{ab}}{\sum K} = V_{ab} = \frac{\frac{I_{ab}}{l_{ab}}}{\frac{I_{ab}}{l_{ab}} + \frac{I_{ac}}{l_{ac}} + \frac{I_{ad}}{l_{ad}} + \dots}$$

La fracción del momento M que corresponde a la sección *a* de la barra *ab*.

Puesto que los valores numéricos de los cocientes *K* son frecuentemente incómodos para el cálculo, se dividen por un valor arbitrario *K_m*, que puede ser un valor promedio de las *K*, o, todavía mejor, el valor de *K* de alguna de las barras, que tomaremos como barra de referencia. Entonces se deduce de la ecuación (5.1-2):

$$M' = -M \frac{K}{\sum K} = -M \frac{\frac{K}{K_m}}{\sum \frac{K}{K_m}}$$

representando ahora $\frac{K}{K_m}$ las rigideces relativas, que designaremos por

$$\frac{K}{K_m} = K' \quad (5.1-4)$$

Dando lugar a la ecuación definitiva:

$$M' = -M \frac{K'}{\sum K'} \quad (5.1-5)$$

siendo

$$\frac{K'}{\sum K'} = V \quad (5.1-6)$$

el coeficiente de distribución, que en cada caso ha de resultar de valor igual al que se deduce de la ecuación (5.1-3), puesto que se ha deducido de aquella por división del numerador y denominador por K_m .

Con todo esto quedan determinados los “momentos de distribución” M' .

Es preciso tener en cuenta que al deducir estas formulas se ha supuesto la existencia de un empotramiento perfecto en los extremos de todas las barras opuestos al nudo considerado.

Cuando una barra esta articulada en su extremo opuesto al nudo considerado, como ocurre con la barra *ad* en D, su rigidez K es solamente de

$$K = \frac{3}{4} \frac{I}{l} \quad (5.1-7)$$

es decir las tres cuartas partes de la que tendría la barra si estuviese empotrada perfectamente en dicho extremo, como es fácil de demostrar. Se comprende que esta barra es más flexible, de modo que el coeficiente de rigidez ha de disminuir.

Transformándose la ecuación (5.1-7) en la ecuación $K = \frac{I}{\frac{4}{3}l}$, resulta la siguiente regla:

En las barras articuladas en el extremo opuesto al nudo considerado, se calcula el valor de K con la misma formula

$$K = \frac{I}{l_i}$$

que rige para la barra empotrada, pero introduciendo, en lugar de la longitud real de la barra, una longitud ideal.

$$l_i = \frac{4}{3} l \quad (5.1-8)$$

Como muestran las líneas elásticas en la figura 5.1-2, surgen, debido a los momentos de distribución M' , en los nudos extremos de las barras aquí empotradas, otros momentos de empotramiento M'' . Como es fácil de demostrar su valor es de:

$$M'' = \frac{1}{2} M' \quad (5.1-9)$$

teniendo, siempre el mismo signo que los momentos de distribución M' que los originaron.

Para el caso de la barra articulada en el extremo opuesto al nudo considerado, como ocurre en la figura 5.1-2 con la barra *ad*, no puede haber momento en la articulación, resultando así:

$$M'' = 0 \quad (5.1-10)$$

Los momentos M'' se designaran en lo sucesivo con la denominación de “momentos transmitidos”.

Se observa que tanto los momentos de distribución M' como también los momentos transmitidos M'' tienen siempre signo opuesto al momento exterior M .

Después de explicar este primer problema fundamental, vamos a determinar los momentos en los nudos, por el procedimiento de Cross, en dos ejemplos pertenecientes al primer caso, o sea al de los nudos indesplazables: una viga continua y una estructura porticada.

5.2 Estudio del primer caso: nudos indesplazables

Ejemplo 5.2-1. Viga continua de cuatro tramos, figura 5.2-1

Este caso será presentado con especial detalle, a fin de aclarar todo lo posible la esencia del método de Cross.

La viga es continua y se halla sostenida en los apoyos intermedios B, C y D, estando articulada en el extremo A y empotrada en el extremo E. Las rigideces K y K' en los sentidos indicados por las expresiones (5.1-1) y (5.1-4) se calculan en la forma que a continuación se indica.

Sean los momentos de inercia, supuestos o calculados por estimación, los siguientes:

$$I_{ab} = 32\,000\text{ cm}^4, \quad I_{bc} = 50\,000\text{ cm}^4, \quad I_{cd} = 16\,000\text{ cm}^4 \quad \text{y} \quad I_{de} = 10\,000\text{ cm}^4$$

Resultando entonces las siguientes rigideces K :

$$K_{ab} = \frac{32000}{\frac{4}{3} \cdot 800} = 30\text{ cm}^3 \quad \left(\text{Por ser articulado el apoyo se toma como longitud de esta barra, según la ecuación (5.1-8), } l_{abi} = \frac{4}{3} l_{ab} \right)$$

$$K_{bc} = \frac{50000}{1000} = 50\text{ cm}^3$$

$$K_{cd} = \frac{16000}{400} = 40\text{ cm}^3$$

$$K_{de} = \frac{10000}{400} = 25\text{ cm}^3$$

Tomando $K_{bc} = K_m$ como valor de referencia, resultando según la ecuación (5.1-4) las rigideces relativas, K' , siguientes:

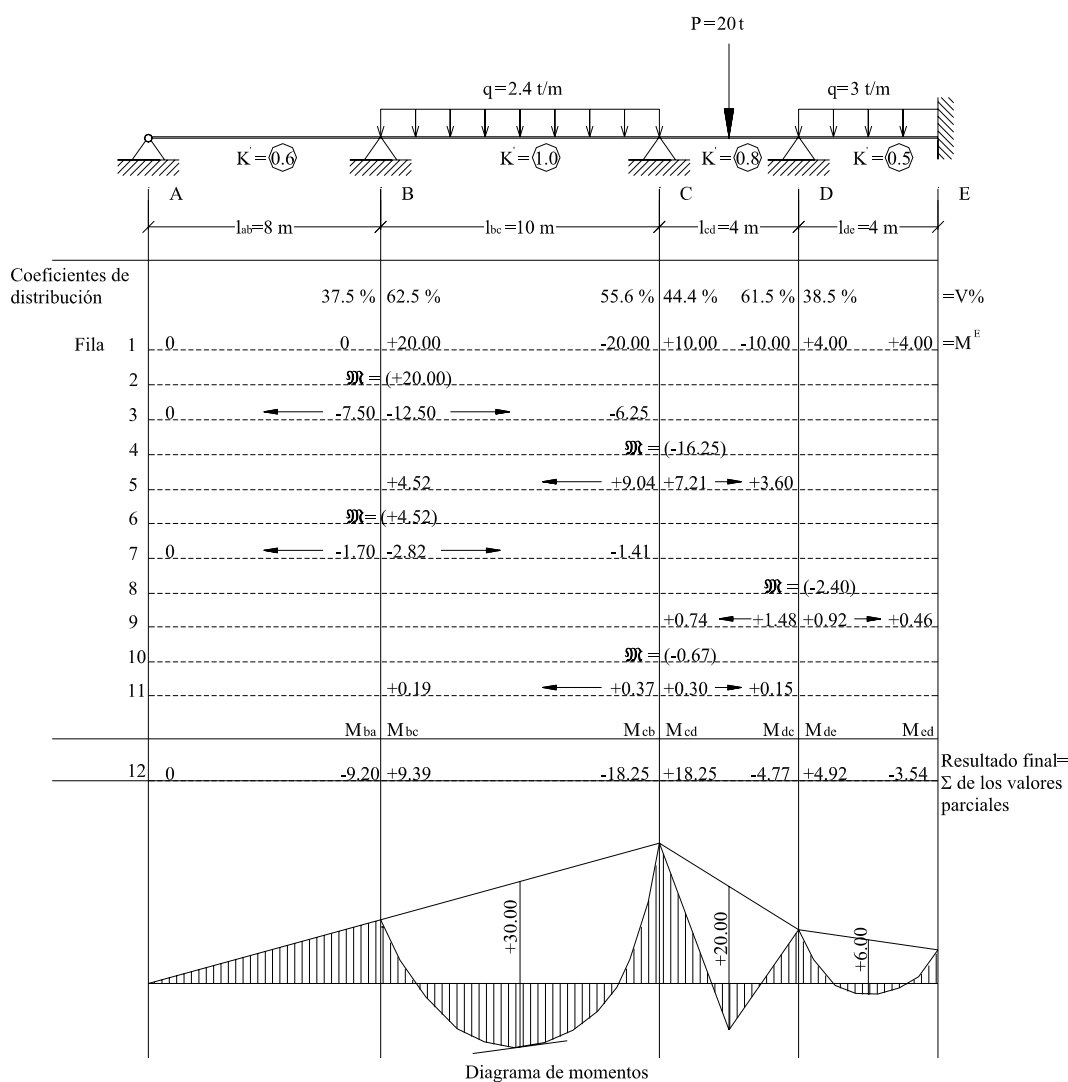
$$K'_{ab} = \frac{30}{50} = 0.6$$

$$K'_{bc} = \frac{50}{50} = 1.0$$

$$K'_{cd} = \frac{40}{50} = 0.8$$

$$K'_{de} = \frac{25}{50} = 0.5$$

Estos valores se han anotado en la figura 5.2-1, encerrados en circulitos, debajo de cada una de las barras.



Orden seguido en la distribución Nudos: B-C-B-D-C

Figura 5.2-1

Imaginemos ahora sujetos los nudos en que actúan momentos de flexión, o sea, incluyendo el nudo E, pero no el nudo articulado A, en el plano de la viga, antes de aplicar las cargas, de modo que estos nudos no puedan girar. Al actuar las cargas se producen en estos nudos, a modo de fuerzas externas, unos momentos iguales a los llamados momentos de empotramiento perfecto en las vigas de un solo tramo y que se designaran por M^E . Estos momentos pueden encontrarse en los manuales para todos los casos de carga que se presentan en la practica, Anexo A. Y en el presente caso, teniendo en cuenta el sentido tomado anteriormente como positivo, tienen los valores siguientes:

$$M_{ab}^E = 0$$

$$M_{ba}^E = 0$$

$$M_{bc}^E = + \frac{2.4(10^2)}{12} = +20 \text{ tm}$$

$$M_{cb}^E = - \frac{2.4(10^2)}{12} = -20 \text{ tm}$$

$$M_{cd}^E = + \frac{20(4)}{8} = +10 \text{ tm}$$

$$M_{dc}^E = - \frac{20(4)}{8} = -10 \text{ tm}$$

$$M_{de}^E = +\frac{3(4^2)}{12} = +4 \text{ tm}$$

$$M_{de}^E = -\frac{3(4^2)}{12} = -4 \text{ tm}$$

Estos momentos de empotramiento perfecto, M^E , se han anotado en la figura 5.2-1 en la primera fila debajo de la viga, de acuerdo con la posición que ocupan.

A continuación se considera aquel nudo en que sea máxima la diferencia de los momentos de empotramiento M^E a la derecha y a la izquierda; en este caso es el nudo B, y se sustituyen ambos momentos por un momento resultante

$$M = \sum M^E$$

que a continuación se designara siempre por “momento desequilibrado en el nudo”; en efecto, cuando en un nudo se tiene que $\sum M^E$ no es igual a cero, se opone la diferencia de los momentos M^E que obran sobre él, al equilibrio de dicho nudo.

Para

$$M_{ba}^E = 0 \text{ tm}$$

$$M_{bc}^E = +20 \text{ tm}$$

resulta ser el

Momento desequilibrado $M = +20 \text{ tm}$, que hace girar el nudo de izquierda a derecha.

Este valor se ha anotado en la figura 5.2-1, fila 2, entre paréntesis, debajo del nudo B.

Si ahora se suelta solamente el nudo B que antes habíamos supuesto sujeto, y no así los nudos restantes, prescindiendo del nudo A, que por ser articulado no se supone sujeto, esto equivale a liberar el momento desequilibrado previamente calculado $M = +20 \text{ tm}$, que hace girar el nudo hacia la derecha, hasta producirse el equilibrio. Este momento produce en las dos secciones del nudo B unos momentos de distribución adicionales M'_{ba} y M'_{bc} , que se suman a los momentos de empotramiento perfecto supuestos, $M_{ba}^E = 0 \text{ tm}$ y $M_{bc}^E = +20 \text{ tm}$, así como transmite al nudo C un momento adicional M''_{bc} , cuyo valor puede calcularse mediante las indicaciones dadas en el estudio del problema fundamental, expuesto en la figura 5.1-2. El momento desequilibrado liberado, $M = +20 \text{ tm}$, ocupa el lugar del momento externo M en la figura 5.1-2.

Los coeficientes de distribución correspondientes a la determinación de los momentos M' en el nudo B resultan ser, según la ecuación (5.1-6), los siguientes:

$$V_{ba} = \frac{K'_{ab}}{K'_{ab} + K'_{bc}} = \frac{0.6}{0.6 + 1.0} 100 = 37.5\%$$

$$V_{bc} = \frac{K'_{bc}}{K'_{ab} + K'_{bc}} = \frac{1.0}{0.6 + 1.0} 100 = 62.5\%$$

$$\sum = 100\%$$

Con ello, los momentos de distribución M' resultan ser, según la ecuación (5.1-5), los siguientes:

$$M'_{ba} = -20(0.375) = -7.5 \text{ tm};$$

$$M'_{bc} = -20(0.625) = -12.5 \text{ tm},$$

resultados que se han registrado en la fila 3 de la figura 5.2-1. Estos momentos se sumaran mas tarde con los momentos M^E de la fila 1. Como señal de que el nudo ha quedado equilibrado, por lo menos provisionalmente, se traza debajo de los valores M' una raya horizontal, para no equilibrar erróneamente estos mismos valores por segunda vez.

Se observa que al suponer rígido el nudo C existe ahora equilibrio en el nudo B. En efecto, hacia la izquierda gira un momento cuyo valor es -7.50 , y hacia la derecha otro cuyo valor es de $+20.00 - 12.50 = +7.50$ tm. de modo que $\sum M = -7.50 + 7.50 = 0$.

El problema fundamental representado en la figura 5.1-2, muestra que los momentos de distribución se transmiten a los nudos vecinos supuestos fijos. En estos nudos se producen según las ecuaciones (5.1-10) y (5.1-9), respectivamente, los siguientes momentos:

$$M_{ab}'' = 0 \text{ (por ser A un nudo articulado)}$$

$$M_{cb}'' = \frac{1}{2} M_{bc}' = -\frac{12.50}{2} = -6.25 \text{ tm,}$$

valores que igualmente se registran en la fila 3 de la figura 5.2-1.

Como señal de haberse procedido a registrar el momento transmitido, se colocan pequeñas flechas en dicha fila.

Con esto ha quedado concluido de momento el proceso de la distribución de los momentos según Cross en el nudo B, habiendo quedado ya explicado todo el procedimiento, por lo menos para el caso de los nudos indesplazables, en lo que se refiere a las operaciones que hay que hacer en cada nudo. En realidad ya no hay necesidad de establecer consideraciones de carácter fundamental nuevo para lo que concierne a la aplicación de este procedimiento al presente caso.

A continuación se repite el mismo proceso en otro nudo, siendo conveniente comenzar por aquel que ofrezca el máximo momento desequilibrado, M. En nuestro caso es el nudo C, sobre el cual obran dos momentos de empotramiento M^E y un momento transmitido M'' que entretanto se ha acumulado en dicho nudo. Se obtiene:

$$M = M_{cb}^E + M_{cd}^E + M_{cb}'' = -20.00 + 10.00 - 6.25 = -16.25 \text{ tm}$$

(Véase figura 5.2-1, fila4).

Ahora se suelta el nudo C inmovilizando los nudos vecinos B y D. Al soltarlo, el nudo gira hacia la izquierda, hasta quedar en equilibrio. En la misma forma que antes resultan sucesivamente los valores siguientes:

$$V_{cb} = \frac{1.0}{1.0 + 0.8} 100 = 55.6\% \quad ;$$

$$V_{cd} = \frac{0.8}{1.0 + 0.8} 100 = 44.4\%$$

$$M_{cb}' = +16.25(0.556) = +9.04 \text{ tm} \quad ;$$

$$M_{cd}' = +16.25(0.444) = +7.21 \text{ tm}$$

de donde:

$$M_{bc}'' = \frac{1}{2}(9.04) = +4.52 \text{ tm} \quad ;$$

$$M_{dc}'' = \frac{1}{2}(7.21) = +3.60 \text{ tm}$$

Estos valores se anotan en la fila 5, sin olvidar la raya horizontal de compensación debajo de los valores de M' y las flechas de transmisión después de anotar los valores de M'' .

A continuación se realiza otra distribución en el nudo B, que se suelta, fijando el C:

$$M = +4.52 \text{ tm} \quad (\text{fila 6})$$

$$M_{ba}' = -4.52(0.375) = -1.70 \text{ tm} \quad ; \quad M_{bc}' = -4.52(0.625) = -2.82 \text{ tm}$$

$$M_{ab}'' = 0 \text{ tm} \quad ; \quad M_{cb}'' = \frac{1}{2}(-2.82) = -1.41 \text{ tm}$$

estos valores se anotan en la fila 7, con su correspondiente subrayado y las flechas indicando que dichos momentos se han transmitido.

Finalmente se realiza la distribución en el nudo D:

$$M = -10.00 + 4.00 + 3.60 = -2.40 \text{ tm} \quad (\text{fila 8})$$

$$V_{dc} = \frac{0.8}{0.8 + 0.5} 100 = 61.5\% \quad ; \quad V_{de} = \frac{0.5}{0.8 + 0.5} 100 = 38.5\%$$

$$M_{dc}' = +2.40(0.615) = +1.48 \text{ tm} \quad ; \quad M_{de}' = +2.40(0.385) = +0.92 \text{ tm}$$

$$M_{cd}'' = \frac{1}{2}(1.48) = +0.74 \text{ tm} \quad ; \quad M_{ed}'' = \frac{1}{2}(0.92) = +0.46 \text{ tm}$$

habiéndose anotado estos valores en la fila 9 con sus correspondientes subrayados y flechas.

Finalmente se distribuyen los momentos en el nudo C, que se deja en libertad fijando los nudos B y D:

$$M = -1.41 + 0.74 = -0.67 \text{ tm} \quad (\text{fila 10})$$

Con los valores V ya conocidos se obtienen los siguientes valores:

$$M_{cb}' = +0.67(0.556) = +0.37 \text{ tm} \quad ; \quad M_{cd}' = +0.67(0.444) = +0.30 \text{ tm}$$

$$M_{bc}'' = \frac{1}{2}(0.37) = +0.19 \text{ tm} \quad ; \quad M_{dc}'' = \frac{1}{2}(0.30) = +0.15 \text{ tm}$$

que se han anotado en la fila 11 con su subrayado y flechas.

Llegando aquí puede ya darse por concluida la distribución, por ser prácticamente de poca importancia los cálculos que resultarían de la continuación del cálculo. La diferencia entre los momentos vecinos M_{dc} y M_{de} , referida al primer valor, resulta ser solamente de:

$$M = \frac{4.92 - 4.77}{4.77} 100 = \text{aproximadamente } 3\%$$

Momentos definitivos en los nudos

Los momentos que efectivamente obran sobre los nudos se designan por:

$$M_{ab}, M_{ba}, M_{bc}, M_{cb}, \text{ etc.}$$

Estos momentos se componen de los “momentos de empotramiento perfecto” M^E y de las sucesivas correcciones, es decir de los momentos de distribución, M' , y de los momentos

transmitidos, M'' , que se superponen al momento M^E . Por lo tanto, estos momentos resultan ser los siguientes, si nos referimos a lo escrito en las filas 1, 3, 5, 7, 9 y 11 de la figura 5.2-1:

A		Barras
	$\left\{ \begin{array}{l} M_{ab} = \\ M_{ba} = -7.50 - 1.70 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} = 0.00 \text{ tm} \\ = -9.20 \text{ tm} \end{array} \right\} l_{ab}$
B		
	$\left\{ \begin{array}{l} M_{bc} = +20.00 - 12.50 + 4.52 - 2.82 + 0.19 \\ M_{cb} = -20.00 - 6.25 + 9.04 - 1.41 + 0.37 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} = + 9.39 \text{ tm} \\ = -18.25 \text{ tm} \end{array} \right\} l_{bc}$
C		
	$\left\{ \begin{array}{l} M_{cd} = +10.00 + 7.21 + 0.74 + .030 \\ M_{dc} = -20.00 - 6.25 + 9.04 - 1.41 + 0.37 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} = +18.25 \text{ tm} \\ = - 4.77 \text{ tm} \end{array} \right\} l_{cd}$
D		
	$\left\{ \begin{array}{l} M_{de} = +4.00 + 0.92 \\ M_{ba} = -4.00 + 0.46 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} = +4.92 \text{ tm} \\ = -3.54 \text{ tm} \end{array} \right\} l_{de}$
E		

Estos valores se han anotado en la fila 12 de la figura 5.2-1. Se observa que en los distintos nudos se tiene $\Sigma M = 0$, de una manera exacta o aproximada, es decir que hay equilibrio.

Con esto ha quedado concluida la aplicación del procedimiento de distribución de momentos, según Cross, para el presente caso de carga. Al final de la figura 5.2-1 se ha incluido el diagrama de momentos, formando por superposición de los diagramas correspondientes a los momentos en los nudos y de los diagramas correspondientes a los momentos en las vigas simplemente apoyadas en dos puntos.

El estudio de los términos de las sumas del resumen precedente muestra que estas sumas, cada una de las cuales constituye una serie, convergen rápidamente en forma de serie geométrica, cuyo resto tiende a cero.

En la practica, el proceso de distribución no se realizará en la misma forma que se ha expuesto anteriormente, sino que se dispondrá todo el calculo en forma esquemática gráficamente representada en la figura 5.2-1, realizándose los distintos cálculos de porcentaje tácitamente, resultando así el calculo entero ser mucho mas corto. Para poder comprobar mas tarde el cálculo dispuesto en esta forma esquemática, es conveniente indicar al pie de la figura el orden seguido para las distintas distribuciones, que en el caso presente es el B-C-B-D-C. Esta indicación del orden seguido, es de especial utilidad en el ejemplo que estudiaremos a continuación, y que se refiere a una estructura porticada de varios pisos.

Considerando nuevamente en conjunto el procedimiento de distribución, se ve que se le puede comparar en cierto modo con el cálculo de distribución de beneficios entre varios participantes de un negocio

El beneficio equivale al momento desequilibrado $M = \Sigma M^E$. Este momento se distribuye entre los socios a prorrata de los capitales aportados por los mismos. Estos últimos vienen representados por los valores de $K = \frac{I}{l}$ correspondientes a cada elemento.

Cuanto mayor es I , tanto más “fuerte” es el socio, y tanto más el beneficio, o sea del momento M , le corresponde. Cuanto más larga sea la barra, tanto más flexible es, tanto más “débil” es el socio y tanto menor será la proporción del beneficio que podrá cobrar.

Es conveniente advertir que los valores de M' y M'' tienen signos iguales entre si y opuestos al momento desequilibrado M , siendo además indispensable recordar que, en principio, siempre se consideran los momentos que obran sobre los nudos, contándose como positivos los momentos que provocan un giro hacia la derecha.

Ejemplo 5.2-2. Pórtico de varios pisos con nudos indesplazables y cargas verticales

Supongámonos en presencia de un pórtico de dos tramos, empotrado por su parte inferior, sometido únicamente a cargas verticales, y constando de 2 pisos, como la figura 5.2-2 indica. Los números inscritos en el centro de las barras en pequeños circulitos vuelven a representar las rigideces relativas, $K' = \frac{K}{K_m}$, referidas al valor K_m correspondiente al pilar central.

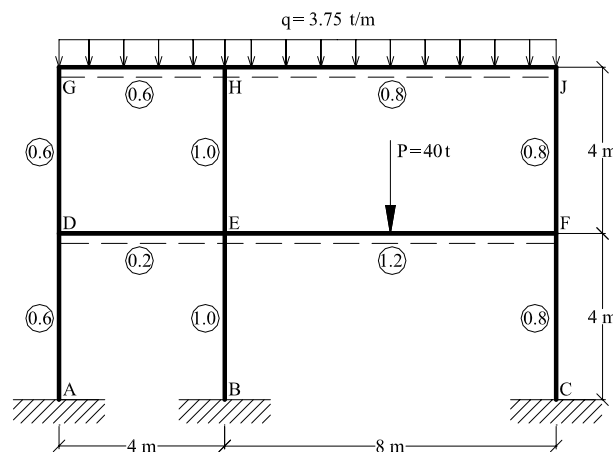


Figura 5.2-2 Pórtico de dos pisos de nudos indesplazables.

Se supondrá que los nudos no pueden desplazarse horizontalmente debido a la rigidez de los forjados o en virtud de arriostramientos transversales situados a la altura de los dinteles de los pórticos, entre los muros de las fachadas, cosa que se indica mediante una línea de trazo interrumpido.

La distribución de los momentos y la determinación de los mismos en los nudos se realiza de acuerdo con lo antes dicho, en la forma abreviada que muestra la figura 5.2-3, la cual no hace falta que este a escala, sino que únicamente ha de reflejar fielmente el esquema de la estructura. Para cada nudo se han indicado en el extremo de

las barras los coeficientes de distribución V , los cuales se han indicado en forma de un tanto por ciento de los momentos desequilibrados M . El cálculo de los momentos en los nudos se realiza en unas pequeñas tablas dispuestas en los extremos de las barras, ocupando el primer lugar de estas tablitas los momentos de empotramiento perfecto M^E . El conjunto del cálculo solo se distingue del correspondiente al ejemplo anterior, o sea del de la viga continua representada en la figura 5.2-1, por distribuirse en este último caso los momentos desequilibrados M de cada nudo en más de dos direcciones.

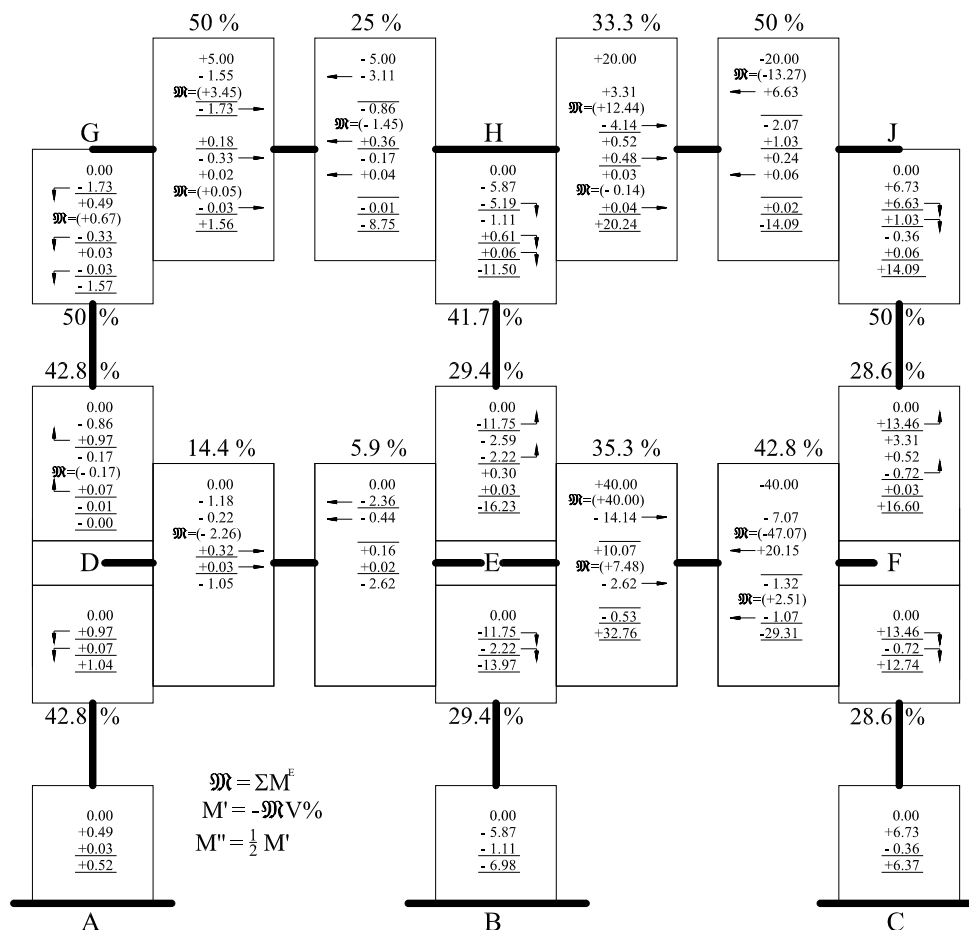


Figura 5.2-3 Esquema del cálculo de la estructura.

En la figura 5.2-3 se ha efectuado todo el cálculo numérico, en forma definitiva. La comprobación consiste en que en cada nudo debe verificarse, una vez concluidas todas las operaciones de cálculo, que $\Sigma M = 0$; por ejemplo, en el nudo E deberá cumplirse:

$$M_{eb} + M_{ed} + M_{eh} + M_{ef} = 0, \text{ por lo tanto}$$

$$-13.97 - 2.62 - 16.23 + 32.76 = -0.06 = \text{practicamente } 0$$

Para facilitar la comprobación del cálculo se hallaran a continuación para el nudo E los valores siguientes:

1° Los momentos de empotramiento perfecto M^E 2° Los coeficientes de distribución V 3° El momento desequilibrado M 4° Los primeros momentos de distribución M' 5° Los primeros momentos transmitidos M''

$$M_{eb}^E = 0; \quad M_{ed}^E = 0; \quad M_{eh}^E = 0; \quad M_{ef}^E = + \frac{40(8.00)}{8} = +40 \text{ tm}$$

$$\sum K' = 1.0 + 0.2 + 1.0 + 1.2 = 3.4$$

$$V_{eb} = \frac{1.0}{3.4} 100 = 29.4\%$$

$$V_{ed} = \frac{0.2}{3.4} 100 = 5.9\%$$

$$V_{eh} = \frac{1.0}{3.4} 100 = 29.4\%$$

$$V_{ef} = \frac{1.2}{3.4} 100 = 35.3\%$$

Comprobación $\Sigma = 100\%$

$M = \Sigma M^E = +40 \text{ tm}$; este valor se ha encerrado entre paréntesis en la figura 5.2-3.

$$M_{eb}' = -40(0.294) = -11.75 \text{ tm} ; \quad M_{be}'' = 0.5(-11.75) = -5.87 \text{ tm}$$

$$M_{ed}' = -40(0.059) = -2.36 \text{ tm} ; \quad M_{de}'' = 0.5(-2.36) = -1.18 \text{ tm}$$

$$M_{eh}' = -40(0.294) = -11.75 \text{ tm} ; \quad M_{he}'' = 0.5(-11.75) = -5.88 \text{ tm}$$

$$M_{ef}' = -40(0.353) = -14.14 \text{ tm} ; \quad M_{fe}'' = 0.5(-14.14) = -7.07 \text{ tm}$$

$$\text{Comprobación: } \Sigma = -40.00 \text{ tm} \quad \text{Comprobación: } \Sigma = -20.00 \text{ tm}$$

Estos valores también se han anotado en la figura 5.2-3, y para facilitar la comprobación también se han trazado líneas horizontales debajo de los momentos de distribución M' , y se han puesto flechas que se dirigen hacia los valores M'' e indican la transmisión de momentos.

Distribución en el nudo F:

$$M_{fe}^E = - \frac{40(8.00)}{8} = -40 \text{ tm}; \quad M_{ff}^E = 0; \quad M_{fc}^E = 0;$$

$$\sum K' = 1.2 + 0.8 + 0.8 = 2.8$$

$$V_{fe} = \frac{1.2}{2.8} 100 = 42.8\%$$

$$V_{ff} = \frac{0.8}{2.8} 100 = 28.6\%$$

$$V_{fc} = \frac{0.8}{2.8} 100 = 28.6\%$$

Comprobación $\Sigma = 100\%$

$$M = \Sigma M^E = -40.00 - 7.07 = -47.07 \text{ tm}$$

$$M_{fe}' = -47.07(0.428) = +20.15 \text{ tm} ; \quad M_{ef}'' = 0.5(20.15) = +10.07 \text{ tm}$$

$$M_{ff}' = -47.07(0.286) = +13.46 \text{ tm} ; \quad M_{ff}'' = 0.5(13.46) = +6.73 \text{ tm}$$

$$M_{jc}' = -47.07 (0.286) = +13.46 \text{ tm} ; \quad M_{cf}'' = 0.5 (13.46) = + 6.73 \text{ tm}$$

$$\text{Comprobación: } \Sigma = +47.07 \text{ tm} \quad \text{Comprobación: } \Sigma = +23.53 \text{ tm}$$

Distribución en el nudo J:

$$M_{jh}^E = -\frac{3.75 (8^2)}{12} = -20 \text{ tm} ; \quad M_{jf}^E = 0$$

$$\Sigma K' = 0.8 + 0.8 = 1.6$$

$$V_{jh} = \frac{0.8}{1.6} 100 = 50\%$$

$$V_{jf} = \frac{0.8}{1.6} 100 = 50\%$$

$$\text{Comprobación } \Sigma = 100 \%$$

$$M = \Sigma M^E = -20.00 + 6.73 = -13.27 \text{ tm}$$

$$M_{jh}' = +13.27 (0.5) = + 6.63 \text{ tm} ; \quad M_{hj}'' = 0.5 (6.63) = + 3.31 \text{ tm}$$

$$M_{jf}' = +13.27 (0.5) = + 6.63 \text{ tm} ; \quad M_{ff}'' = 0.5 (6.63) = + 3.31 \text{ tm}$$

$$\text{Comprobación: } \Sigma = +13.27 \text{ tm} \quad \text{Comprobación: } \Sigma = + 6.62 \text{ tm}$$

El resto del cálculo no lo presentaremos aquí; debido a que se lo realiza en la forma antes indicada, en los nudos H-E-G-J-F-D-H-G-J-D-H-G-E, y no representa nada nuevo con referencia a lo que ya se ha expuesto. La figura 5.2-3 muestra el resultado, habiéndose sumado en las distintas tablas los momentos iniciales M^E y los sucesivos momentos adicionales, resultando por casualidad el momento final $M_{dg} = 0$. Como comprobación debe cumplirse en cada uno de los nudos la condición de ser $\Sigma M = 0$.

Para mayor facilidad de lectura se han anotado los momentos en los nudos, una vez concluido el cálculo, en la figura 5.2-4.

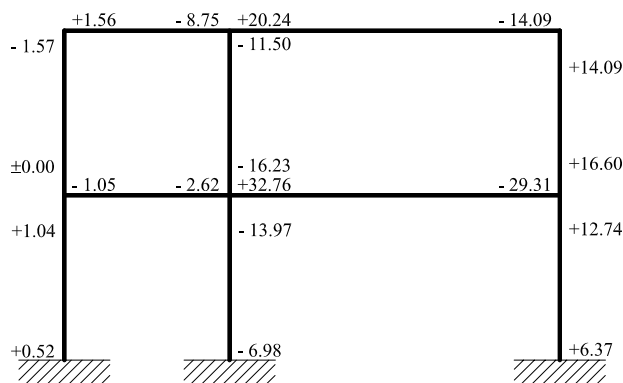


Figura 5.2-4 Momentos resultantes en los nudos al finalizar el cálculo.

5.3 Estudio del segundo caso: nudos desplazables

Cuando no exista nada que impida que los nudos de una estructura porticada se desplacen, estos nudos lo harán siempre que no exista simetría, tanto de la estructura como de la carga. Como consecuencia de este desplazamiento se producen momentos adicionales en los nudos. Así por ejemplo, cuando no se hayan dispuesto forjados rígidos o arriostramientos transversales apoyados en las paredes rígidas, los nudos de la estructura porticada que acabamos de tratar, se desplazarán horizontalmente, en caso de no haber simetría. Por este motivo aparecen unos momentos adicionales a los anteriormente calculados para los nudos del pórtico considerado como de nudos indesplazables, representados en la figura 5.2-4. Estos momentos, en el caso de ser cargas horizontales, como ocurre, por ejemplo, con las producidas por la fuerza del viento, pueden adquirir valores importantes.

En los pórticos de varios pisos, los momentos adicionales producidos por las cargas verticales, compuestas por el peso propio y la sobrecarga y debido a los desplazamientos horizontales de los nudos por asimetría, en general son pequeños, tal como se vera mas adelante. Por este motivo, en general, es suficiente calcular los pórticos de varios pisos con cargas verticales según el primer caso (nudos indesplazables), aunque esto no sea rigurosamente cierto, es decir, aunque no existan arriostramientos horizontales. Para los casos en que se supone que se producirán momentos adicionales de alguna importancia, se sigue el camino indicado a continuación.

Segundo problema fundamental: Determinación de los esfuerzos de sujeción H.

En la figura 5.3-1 se presenta un pórtico de dos pisos, de nudos desplazables y, además, asimétrico. Apoyando este pórtico a la altura de los dinteles, en la forma señalada, con dos apoyos móviles dispuestos perpendicularmente a dichos dinteles, produciéndose en estos apoyos unas reacciones horizontales H_1 y H_2 , que llamaremos “esfuerzos de sujeción”. Asignaremos signo positivo a las fuerzas H cuando sean fuerzas de tracción.

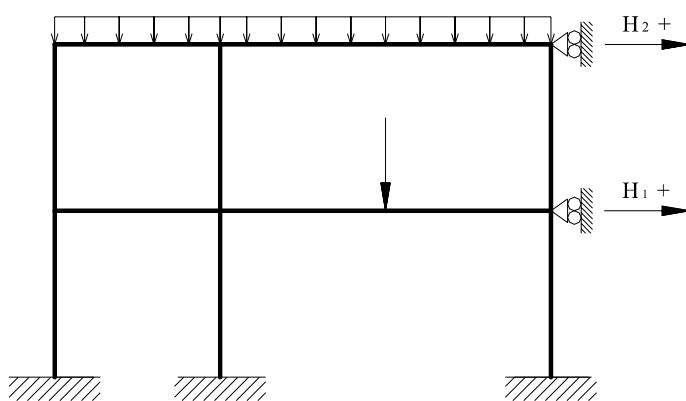


Figura 5.3-1 Pórtico simétrico de nudos desplazables

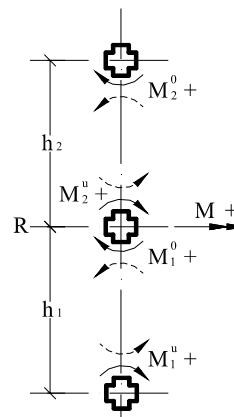


Figura 5.3-2

En la figura 5.3-2 se ha reproducido con mayor detalle uno de los pilares del pórtico, en cuyos nudos hemos supuesto que actúan momentos positivos, es decir, momentos que provocan giro hacia la derecha. Los momentos que actúan sobre los nudos se han dibujado en trazo continuo, y los que obran sobre las secciones extremas de las barras se han dibujado en trazo interrumpido.

Para el dintel R , el esfuerzo de sujeción H correspondiente al lado derecho será:

$$H = + \frac{M_1'' + M_1^o}{h_1} - \frac{M_2'' + M_2^o}{h_2} \quad (5.3-1)$$

formula en la cual hay que sustituir los valores de M con los signos que realmente corresponden. Cuando el valor de H resulta positivo, de acuerdo con lo fijado, se trata de un esfuerzo de tracción, es decir, siguiendo lo indicado en las figuras 5.3-1 y 5.3-2, se representará este tipo de esfuerzos por una flecha señalando la derecha.

Para el pórtico de dos pisos calculado en el ejemplo 5.2-2 resultarán, por la ecuación (5.3-1) y basándose en los momentos en los nudos consignados en la figura 5.2-4, los siguientes esfuerzos de sujeción:

$$H_1 = + \frac{+0.52 - 6.98 + 6.37 + 1.04 - 13.97 + 12.74}{4} - \frac{0 - 16.23 + 16.60 - 1.57 - 11.50 + 14.09}{4}$$

$$H_1 = -0.418 \text{ t (compresión)}$$

$$H_2 = + \frac{+0 - 16.23 + 16.60 - 1.57 - 11.50 + 14.09}{4}$$

$$H_2 = -0.348 \text{ t (tracción)}$$

Estos valores se han anotado en la figura 5.3-3. Todavía cabe advertir que en el caso de simetría completa, tanto del pórtico como de la carga, se anulan los esfuerzos de sujeción, por estar la estructura ya por si misma en equilibrio.

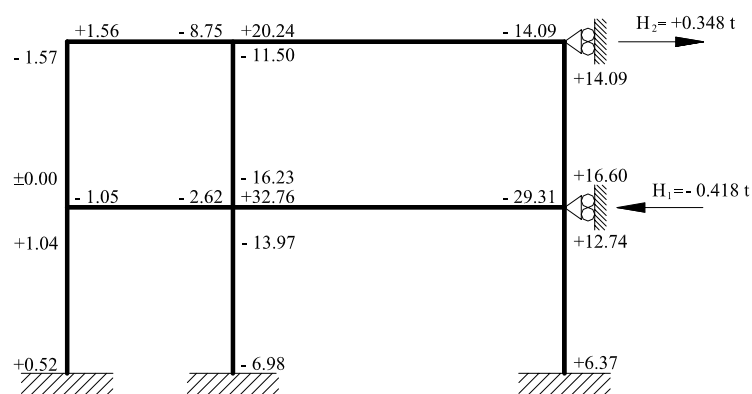
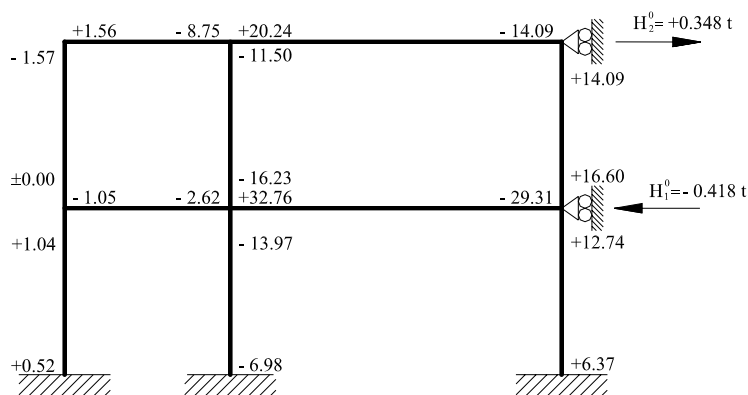


Figura 5.3-3


 Figura 5.3-5 Estado inicial 0: $M^0 H_1^0 H_2^0$

Estado 1: carga auxiliar $C_1 +$

De acuerdo con la figura 5.3-6 supongamos desplazado el pórtico lateralmente en virtud de una fuerza C_1 , dirigida hacia la derecha, cuya magnitud no tiene importancia para la marcha del cálculo, suponiéndose que no se deforma la serie de dinteles $D-E-F$. Es fácil imaginarse la realización de esta hipótesis, suponiendo que unos “carriles” rígidos (de $I = \infty$), colocados por ambas caras de esta serie de dinteles, impiden que estos se deformen. Entonces, la deformación que se producirá en las líneas que representan el sistema porticado será necesariamente la señalada en el dibujo. Como consecuencia de ello se producirán en los nudos los momentos de empotramiento perfecto

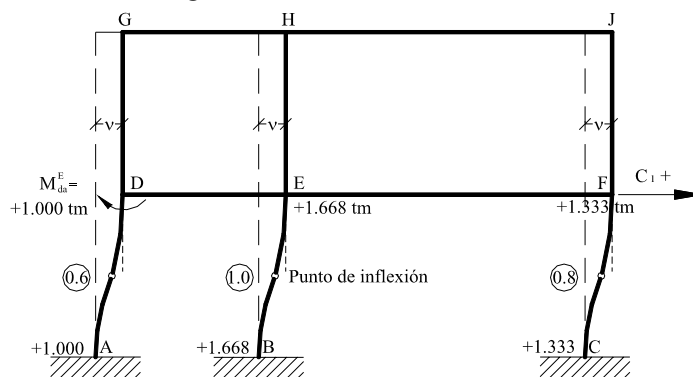
$$M_{da}^E = M_{ad}^E \quad M_{eb}^E = M_{be}^E \quad M_{fc}^E = M_{cf}^E$$

Si conociéramos uno de estos momentos, por ejemplo el M_{da}^E , quedaría automáticamente fijada la magnitud de los restantes. En efecto, los momentos producidos en los distintos pilares habrán de guardar entre sí la misma relación que los momentos de inercia respectivos, o que las rigideces relativas, K' , debido a ser los mismos los desplazamientos horizontales v y las longitudes de los pilares.

En el siguiente caso supongamos que se va incrementando progresivamente la fuerza C_1 hasta el punto de cumplirse que:

$$\text{Momento en el nudo } M_{da}^E = +1 \text{ tm}$$

Como se ha señalado en la figura 5.3-6.


 Figura 5.3-6 Estado de carga 1: Carga auxiliar $C_1 +$

Entonces podemos calcular los restantes momentos en los nudos, sirviéndonos para ello de los valores de K' , y obteniendo los resultados siguientes:

$$M_{da}^E = \dots\dots\dots = +1.000 \text{ tm} = M_{ad}^E$$

$$M_{eb}^E = +1.00 \frac{1.0}{0.6} = +1.668 \text{ tm} = M_{be}^E$$

$$M_{fc}^E = +1.00 \frac{0.8}{0.6} = +1.333 \text{ tm} = M_{cf}^E$$

Estos resultados se han anotado en la figura 5.3-6.

Los momentos en los restantes nudos son nulos.

Imaginemos ahora apoyados horizontalmente los nudos F y J mediante apoyos auxiliares laterales, como muestra la figura 5.3-7, quitada la fuerza C_1 y devuelta la flexibilidad a las vigas previamente supuestas rígidas, es decir supongamos ahora retirados los “carriles” con que antes evitábamos la flexión de las vigas. Como consecuencia de ello se produce una rotación de todos los nudos, hasta haberse compensado los momentos de empotramiento M^E señalados en la figura 5.3-6. La distribución de momentos se realiza por el método de Cross razonado previamente en el ejemplo 5.2-2, por lo cual no representa nada nuevo. En cuanto se refiere a los esfuerzos de sujeción, rige igual que antes la ecuación (5.3-1).

La figura 5.3-7 muestra el resultado, habiéndose designado los momentos en los nudos por M^I , los esfuerzos de sujeción por H_1^I y H_2^I , refiriéndose el índice superior al estado de carga 1.

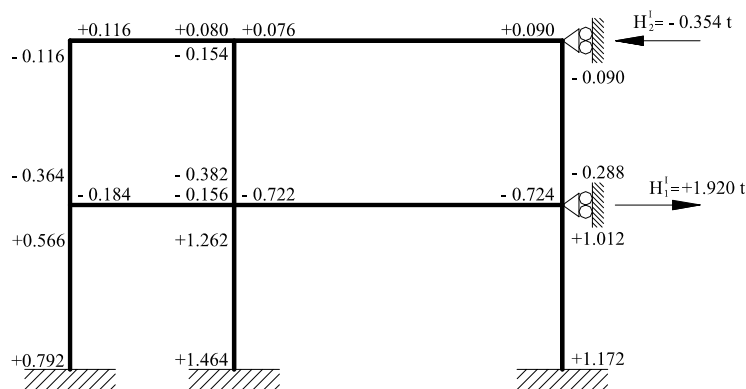
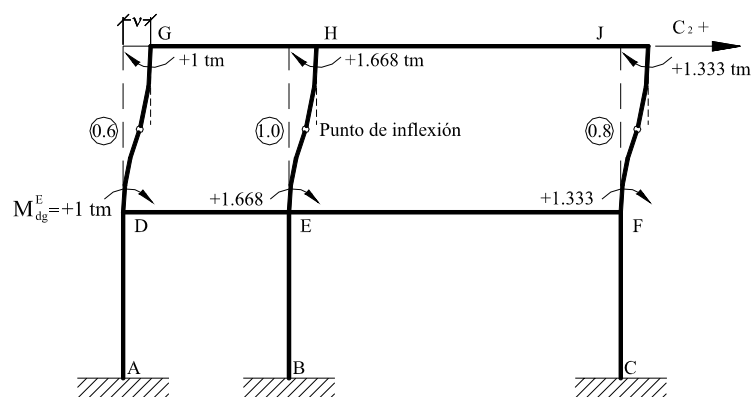


Figura 5.3-7 Estado auxiliar 1: M^I H_1^I H_2^I

Estado 2: carga auxiliar C_2 +

Este estado de carga se asemeja al estado 1 por consistir en una tracción lateral efectuada sobre el dintel superior por medio de una fuerza C_2 , como muestra la figura 5.3-8, suponiéndose rígidos los dinteles $D-E-F$ y $G-H-J$. Para ello se elegirá la magnitud de la fuerza C_2 de modo de que el

$$\text{Momento en el nudo } M_{dg}^E = +1 \text{ tm}$$


 Figura 5.3-8 Estado de carga 2: Carga auxiliar $C_2 +$

Puesto que los valores de K' son los mismos que antes utilizábamos en el estado 1, resultan ahora en correspondencia los mismos valores que antes:

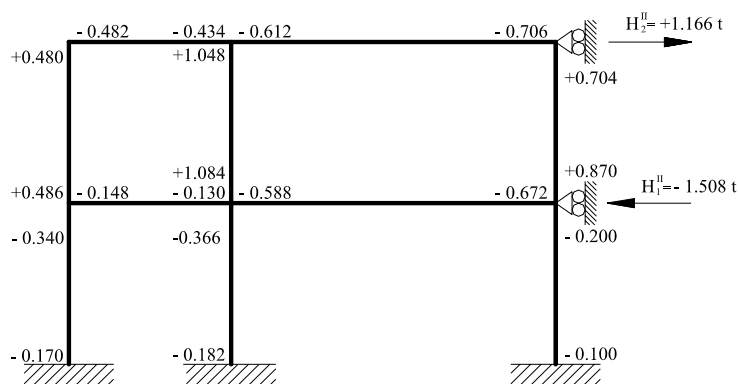
$$M_{dg}^E = +1.000 \text{ tm} = M_{gd}^E$$

$$M_{eh}^E = +1.668 \text{ tm} = M_{he}^E$$

$$M_{fj}^E = +1.333 \text{ tm} = M_{jf}^E$$

Siendo los momentos en los restantes nudos, nulos.

A continuación se apoyan horizontalmente los nudos F y J en la forma en que los muestra la figura 5.3-9, se retira la fuerza C_2 , y nos imaginamos los dinteles en estado flexible,


 Figura 5.3-9 Estado auxiliar 2: M'' H_1'' H_2''

girando entonces los nudos hasta verse compensados los momentos que obraban en ellos, compensación que se razona en la misma forma en que se ha hecho para el ejemplo 5.2-2, por lo cual no se expondrá aquí por no significar nada nuevo. La ecuación (5.3-1) determina nuevamente la magnitud de los esfuerzos de sujeción que se producen en esta fase. La figura 5.3-9 muestra el resultado. Los momentos en los nudos se designan por M'' , y las fuerzas de sujeción por H_1'' y H_2'' , señalando el índice superior que nos encontramos en el estado de carga 2.

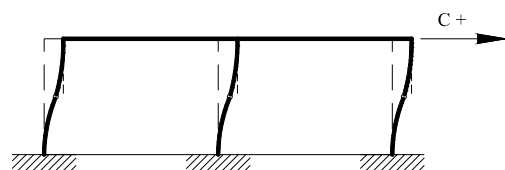


Figura 5.3-10 Pórtico de un solo piso

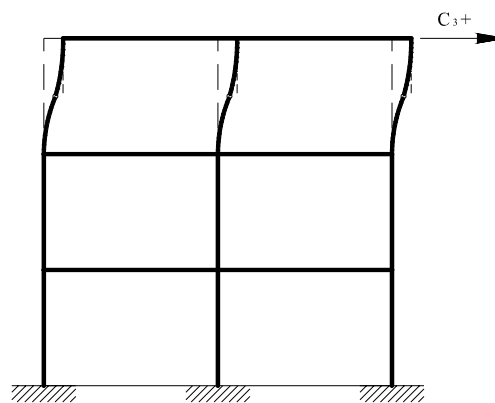


Figura 5.3-11 Pórtico de tres pisos

Es importante recordar que, cuando el pórtico es de solo un piso no se presenta el estado de carga 2, según muestra la figura 5.3-10. Si en cambio el entramado fuera de tres pisos, habría que estudiar un nuevo estado de carga auxiliar 3, según muestra la figura 5.3-11, que se razonaría en forma análoga a la expuesta.

Estado 3: estado de carga real

Este estado se caracteriza por que en él se anulan los esfuerzos horizontales de sujeción:

$$H_1 = 0 \quad \text{y} \quad H_2 = 0$$

puesto que los supuestos apoyos laterales auxiliares en realidad no existen.

Afectando al estado de carga 1 un coeficiente x_1 y al estado de carga 2 un coeficiente x_2 , siendo x_1 y x_2 , de momento, valores incógnitos, y superponiendo los 3 casos de carga ya estudiados:

$$\text{Estado 0} + x_1 \text{ Estado 1} + x_2 \text{ Estado 2}$$

resultan en virtud de la ley de la superposición de los esfuerzos, los esfuerzos de sujeción reales H_1 y H_2 , que deben satisfacer las siguientes ecuaciones de condición:

$$H_1 = H_1^0 + x_1 H_1^I + x_2 H_1^{II} = 0 \quad (5.3-2)$$

$$H_2 = H_2^0 + x_1 H_2^I + x_2 H_2^{II} = 0 \quad (5.3-3)$$

Con ello queda resuelto el problema del cálculo del pórtico incluso para el caso de los nudos desplazables. Cuando en las ecuaciones (5.3-2) y (5.3-3) se han despejado y hallado los coeficientes x_1 y x_2 , podrán calcularse todos los momentos definitivos en los nudos por superposición de los estados de carga 0, 1 y 2, de acuerdo con la ecuación general siguiente:

$$M = M^0 + x_1 M^I + x_2 M^{II} \quad (5.3-4)$$

Cabe advertir que siempre podrán establecerse tantas ecuaciones de condición de la forma de las (5.3-2) y (5.3-3), como pisos tenga el pórtico.

En el presente ejemplo han resultado:

$$\left. \begin{array}{l} H_1^0 = -0.418 \text{ t} \\ H_2^0 = +0.348 \text{ t} \end{array} \right\} \text{Figura 5.3 - 5}$$

$$\left. \begin{array}{l} H_1^I = +1.920 \text{ t} \\ H_2^I = -0.354 \text{ t} \end{array} \right\} \text{Figura 5.3 - 7}$$

$$\left. \begin{array}{l} H_1^{II} = -1.508 \text{ t} \\ H_2^{II} = +1.166 \text{ t} \end{array} \right\} \text{Figura 5.3 - 9}$$

de modo que las ecuaciones (5.3-2) y (5.3-3) serán las siguientes:

$$H_1 = -0.418 + 1.920x_1 - 1.508x_2 = 0$$

$$H_2 = +0.348 - 0.354x_1 + 1.166x_2 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$x_1 = -0.022; \quad x_2 = -0.306,$$

de modo que la ecuación (5.3-4), mediante la cual se calculan los momentos en los nudos, se transformará en la expresión:

$$M = M^0 - 0.022 M^I - 0.306 M^{II}$$

mediante la cual se llega al conocimiento de todos los momentos reales producidos en los nudos.

Así, por ejemplo, resultan:

$$M_{he} = -11.50 - 0.022(-0.154) - 0.306(+1.048) = -11.82 \text{ tm}$$

(Fig. 5.3 - 5) (Fig. 5.3 - 7) (Fig. 5.3 - 9)

$$M_{ef} = +32.76 - 0.022(-0.722) - 0.306(-0.588) = +32.96 \text{ tm}$$

Cuando, en el presente caso de cargas exclusivamente verticales, para simplificar el cálculo se suponen indesplazables los nudos en lugar de suponerlos desplazables, los momentos definitivos en los nudos resultan iguales a los valores de M^0 , es decir, se obtiene:

$$M_{he} = -11.50 \text{ en lugar de } -11.82 \text{ tm y}$$

$$M_{ef} = +32.76 \text{ en lugar de } +32.96 \text{ tm}$$

Estas diferencias absolutas, referidas a los momentos efectivos M representan:

$$\text{para } M_{eh} : \frac{11.82 - 11.50}{11.82} 100 = 2.7\%$$

$$\text{para } M_{ef} : \frac{32.96 - 32.76}{32.96} 100 = 0.6\%$$

y por lo tanto son pequeñas.

Por este motivo podrá admitirse en general el cálculo simplificado de los pórticos de varios pisos de la forma mencionada, con nudos desplazables, cuando las cargas son verticales, y podrá efectuarse dicho cálculo como si los nudos fuesen indesplazables. Sería inútil querer obtener una extraordinaria precisión en el cálculo de tales estructuras estáticamente muy indeterminadas, como son los pórticos de varios pisos.

B. Cargas horizontales

Ejemplo 5.3-2. Pórtico de varios pisos, con nudos desplazables, sometido a la carga producida por el viento

Supongamos ahora el pórtico de dos pisos previamente calculado en el ejemplo 5.3-1, con nudos desplazables, esté sometido a dos fuerzas horizontales W_1 y W_2 , debidas al viento, tal y como se presenta en la figura 5.3-12.

Las incógnitas son, como siempre, los momentos en los nudos.

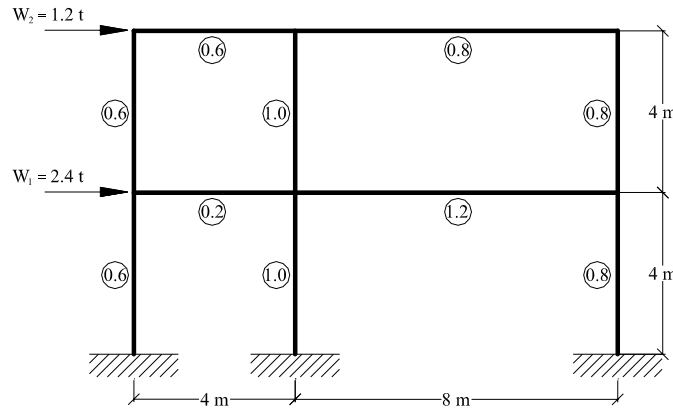


Figura 5.3-10 Pórtico sometido a fuerzas horizontales

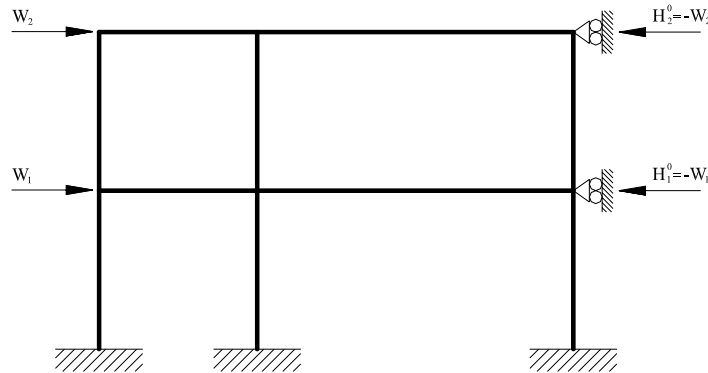


Figura 5.3-13 Estado de carga 0

Estado de carga 0: Nudos indesplazables, figura 5.3-13

Directamente se obtiene: todos los $M^0 = 0$

$$H_1^0 = -W_1 \quad (5.3-5)$$

$$H_2^0 = -W_2 \quad (5.3-6)$$

Estados de carga 1 y 2

Son los mismos que en el ejemplo 5.3-1, figuras 5.3-7 y 5.3-9, respectivamente, obteniéndose los valores ya conocidos para las magnitudes

$$M^I \quad H_1^I \quad H_2^I$$

$$M^{II} \quad H_1^{II} \quad H_2^{II}$$

Las ecuaciones de condición (5.3-2) y (5.3-3) para la obtención de los coeficientes x_1 y x_2 se simplifican por ser $M^0 = 0$, quedando en la forma siguiente:

$$H_1 = W_1 + x_1 H_1^I - x_2 H_1^{II} = 0 \quad (5.3-7)$$

$$H_2 = W_2 + x_1 H_2^I - x_2 H_2^{II} = 0 \quad (5.3-8)$$

quedando la ecuación (5.3-4) en la forma siguiente:

$$M = x_1 M^I - x_2 M^{II} \quad (5.3-9)$$

Resultando para el presente ejemplo:

$$W_1 = 2.4 \text{ t} ; \quad W_2 = 1.2 \text{ t}$$

los esfuerzos de sujeción:

$$H_1^0 = -W_1 = -2.4 \text{ t} ; \quad H_2^0 = -W_2 = -1.2 \text{ t}$$

Según la figura 5.3-7 se tiene que:

$$H_1^I = +1.920 \text{ t} ; \quad H_2^I = -0.354 \text{ t}$$

y según la figura 5.3-9:

$$H_1^{II} = -1.508 \text{ t} ; \quad H_2^{II} = +1.166 \text{ t}$$

Con estos valores las ecuaciones de condición (5.3-7) y (5.3-8), para la obtención de x_1 y x_2 , resultan ser las siguientes:

$$H_1 = -2.400 + 1.920 x_1 - 1.508 x_2 = 0$$

$$H_2 = -1.200 - 0.354 x_1 + 1.166 x_2 = 0$$

cuyas soluciones son: $x_1 = +2.71$; $x_2 = +1.85$

Después de introducir estos valores en la ecuación (5.3-9) los momentos producidos en los nudos por la fuerza del viento se deducen de la ecuación:

$$M = 2.71 M^I + 1.85 M^{II}$$

Así, por ejemplo con los valores de M^I y M^{II} indicados respectivamente en las figuras 5.3-7 y 5.3-9, se calcularán los momentos siguientes:

$$M_{he} = 2.71(-0.154) + 1.85(+1.048) = +1.52 \text{ tm}$$

$$M_{ef} = 2.71(-0.722) + 1.85(-0.588) = -3.04 \text{ tm}$$

Con ello se ha llevado a término la resolución de este ejemplo, mas como conclusión señalaremos lo siguiente:

A veces se recomienda simplificar el cálculo de la acción del viento sobre un pórtico en el sentido de suponer, como se indica en la figura 5.3-14, intercaladas en el centro de las distintas barras unas articulaciones, a modo de puntos de inflexión de las líneas elásticas de estas barras.

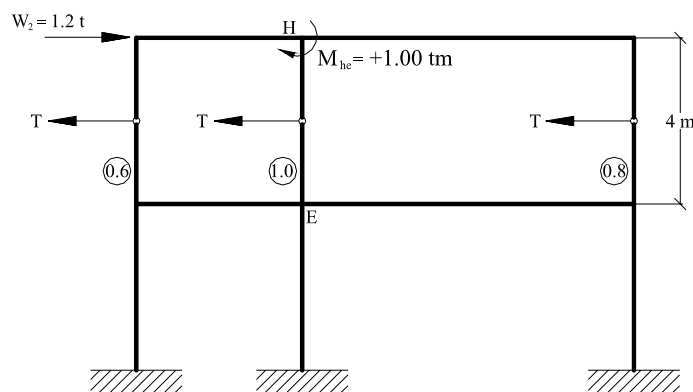


Figura 5.3-14

Este procedimiento puede resultar muy inexacto, como se mostrara calculando a continuación el momento en el nudo M_{he} y comparándolo con el valor determinado con precisión por el método de Cross.

De acuerdo con las rigideces relativas K' , corresponde a la articulación en el centro de la barra $H-E$ un esfuerzo cortante T de:

$$T = 1.2 \frac{1.0}{0.6 + 1.0 + 0.8} = 0.5 \text{ t}$$

Con este valor se obtiene el momento en el nudo

$$M_{he} = +0.5 \frac{4.0}{2} = +1.00 \text{ tm}$$

En lugar del valor +1.52 tm determinado anteriormente por el procedimiento exacto de Cross. Por este motivo resulta este último valor, en cifras redondas, un 50% mayor que el valor obtenido por aproximación.

Ahora bien, existen ocasiones en las que las circunstancias son tales, que las fuerzas ejercidas por el viento son relativamente pequeñas cuando se comparan con las cargas verticales, tanto más cuanto para el dimensionado de las barras es preciso tener en cuenta la fuerza normal. En tales casos puede consentirse la aplicación de un cálculo aproximado simplificado en la forma expuesta, por no ofrecer inconveniente peligroso.

5.4 Método de Grinter (Distribución de los ángulos de flexión que se producen en los extremos de las barras)

En lugar de distribuir los momentos en los nudos como se hace en el método de Cross, pueden también distribuirse los ángulos de giro de los extremos de las barras, como ha demostrado Grinter. Este procedimiento emplea las deformaciones en lugar de los momentos, y en ciertos casos su convergencia es más rápida que la del método de Cross. Claro es que después hay que determinar los momentos en los nudos partiendo de dichos ángulos de giro, puesto que son los momentos los que interesan para el dimensionado de la estructura, circunstancia que pone en duda la ventaja del método de Grinter.

A continuación indicaremos brevemente la idea fundamental del método de Grinter:

Las distintas barras no se consideran como perfectamente empotradas, como se hace en el método de Cross, sino que se consideran individualmente como vigas simplemente apoyadas en dos puntos, determinándose, como se indica en la figura 5.4-1 los ángulos de giro libre φ_{12} , φ_{21} , φ_{23} , φ_{32} , etc., de los extremos de las barras

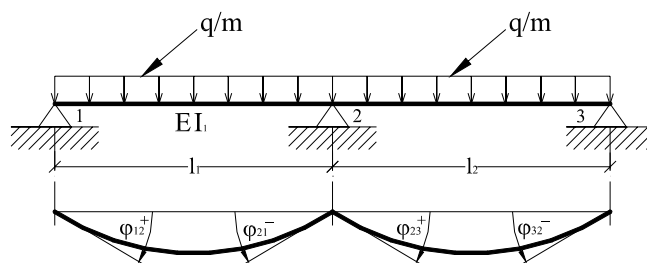


Figura 5.4-1 Viga simplemente apoyada

Estos ángulos de giro libre pueden deducirse en la mayoría de los casos de la tablas que contienen los manuales o formularios (ver Tabla A.2; Anexo A), siendo positivos los giros efectuados hacia la derecha, en la figura 5.4-1, por ejemplo, se tiene:

$$\varphi_{12} = +\frac{ql_1^3}{24EI_1} \quad \varphi_{21} = -\frac{ql_1^3}{24EI_1} \quad (5.4-1)$$

La figura 5.4-2 muestra con detalle tres barras que parten de un nudo, como si su apoyo fuera articulado. Estas barras se consideran cargadas y por lo tanto sufren flexión. Las tangentes en los extremos girados de las barras adoptan en el nudo central la posición *I-I*

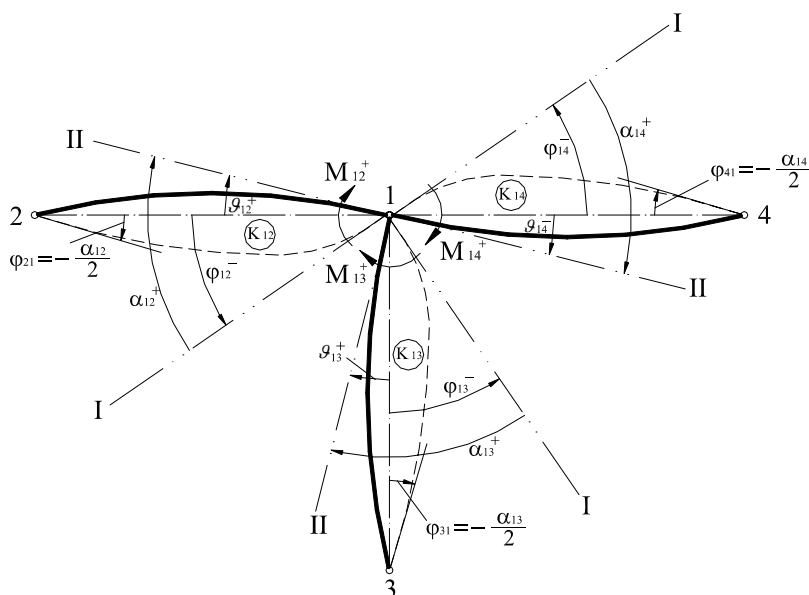


Figura 5.4-2 Barras que parten de un nudo asumiendo sus apoyos articulados

En realidad, y debido a que los empalmes en los nudos son resistentes a la flexión, es preciso que estas tangentes ocupen una posición *II-II-II* tal, que resulten iguales los ángulos ϑ_{12} , ϑ_{13} y ϑ_{14} , a cuyo valor común, ϑ , llamaremos ángulo de giro del nudo rígido. La primera operación consistirá en determinar este ángulo ϑ .

Para que las tangentes pasen de la posición *I* a la posición *II*, deben girar los ángulos α_{12} , α_{13} y α_{14} , para lo cual deben actuar en el nudo *I* los momentos siguientes:

$$M_{12} = \frac{3EI_{12}}{l_{12}} \cdot \alpha_{12} = 3EK_{12}\alpha_{12}$$

$$M_{13} = \frac{3EI_{13}}{l_{13}} \cdot \alpha_{13} = 3EK_{13}\alpha_{13}$$

$$M_{14} = \frac{3EI_{14}}{l_{14}} \cdot \alpha_{14} = 3EK_{14}\alpha_{14}$$

Sustituyendo en estas expresiones los valores de los ángulos α que hay que sumar a los ángulos de giro libre para obtener el ángulo de giro del nudo rígido,

$$\alpha_{12} = \vartheta - \varphi_{12} ; \quad \alpha_{13} = \vartheta - \varphi_{13} ; \quad \alpha_{14} = \vartheta - \varphi_{14}$$

tendremos:

$$M_{12} = 3EK_{12}(\vartheta - \varphi_{12}) \quad (5.4-2)$$

$$M_{13} = 3EK_{13}(\vartheta - \varphi_{13}) \quad (5.4-3)$$

$$M_{14} = 3EK_{14}(\vartheta - \varphi_{14}) \quad (5.4-4)$$

Además debe existir equilibrio en el nudo *I*, lo cual nos da la condición:

$$M_{12} + M_{13} + M_{14} = 0 \quad (5.4-5)$$

Sumando las expresiones (5.4-2) + (5.4-3) + (5.4-4) = (5.4-5), debe cumplirse finalmente que

$$3E[K_{12}(\vartheta - \alpha_{12}) + K_{13}(\vartheta - \alpha_{13}) + K_{14}(\vartheta - \alpha_{14})] = 0$$

y puesto que

$$3E \neq 0$$

$$\vartheta(K_{12} + K_{13} + K_{14}) = K_{12}\varphi_{12} + K_{13}\varphi_{13} + K_{14}\varphi_{14}$$

de modo que el ángulo de giro del nudo rígido, ϑ , resulta ser el siguiente:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{K_{12}\varphi_{12} + K_{13}\varphi_{13} + K_{14}\varphi_{14}}{K_{12} + K_{13} + K_{14}} \\ \vartheta &= \frac{\sum(K\varphi)}{\sum K} \quad \text{ó} \quad \frac{\sum K'\varphi}{\sum K'} \end{aligned} \quad (5.4-6)$$

siendo $K' = \frac{K}{K_m}$, igual que para el método de Cross.

Los ángulos α para el paso de la posición *I* de las tangentes a la posición *II* se deduce por lo tanto de las expresiones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{12} &= \vartheta - \varphi_{12} = \frac{\sum(K\varphi)}{\sum K} - \varphi_{12} \\ \alpha_{13} &= \vartheta - \varphi_{13} = \frac{\sum(K\varphi)}{\sum K} - \varphi_{13} \\ \alpha_{14} &= \vartheta - \varphi_{14} = \frac{\sum(K\varphi)}{\sum K} - \varphi_{14} \end{aligned} \right\} \quad (5.4-7)$$

Con esta operación queda efectuada la distribución de los ángulos en el nudo considerado. Ahora bien, a semejanza de lo que ocurre en el método de Cross con los momentos M' , los ángulos ϑ , de giro de cada nudo, se transmiten a los nudos vecinos con los valores

$$\varphi_{21} = -\frac{\alpha_{12}}{2} ; \quad \varphi_{31} = -\frac{\alpha_{13}}{2} ; \quad \varphi_{41} = -\frac{\alpha_{14}}{2} \quad (5.4-8)$$

los cuales es preciso tener en cuenta en la distribución de ángulos que se efectuara mas tarde en los nudos vecinos, al fijar los ángulos de giro libre allí existentes.

Los valores definitivos de los ángulos α se componen, para cada extremo de la barra, de la suma de los ángulos α acumulados escalonadamente en el transcurso del cálculo. Una vez determinados los valores definitivos de los ángulos α que hay que sumar a los de giro libre para obtener los de giro verdadero, se deducen los dos momentos en los extremos de una barra cualquiera, según la figura 5.4-3, de las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} M^i &= -\frac{3EI}{l} \alpha^i \\ M^d &= -\frac{3EI}{l} \alpha^d \end{aligned} \quad (5.4-9)$$

Igual que en el procedimiento de Cross, se consideran los momentos que actúan en los nudos y no los que se pueden considerar aplicados en los extremos de la barra.

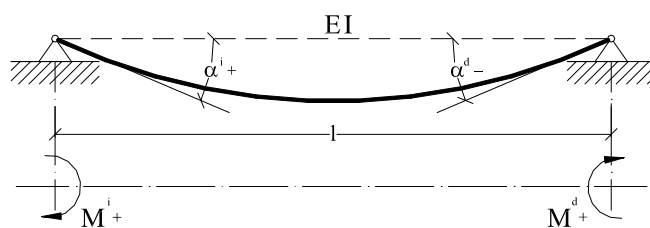


Figura 5.4-3

Observación referente a la figura 5.4-3. Los ángulos α^i y α^d no deben confundirse con los ángulos de flexión reales. Son únicamente los ángulos que las barras giran (figura 5.4-2) para pasar de la posición *I* a la posición *II*. Los ángulos verdaderos son los valores de ϑ , que carecen de importancia, puesto que a fin de cuentas lo que se necesita para dimensionar la estructura son los momentos en los nudos, que no dependen de las ϑ si no únicamente de las α .

Lo que se acaba de exponer no puede constituir una exposición completa del método de Grinter, sino que únicamente tiene por finalidad indicar la idea fundamental de este procedimiento dentro de los límites impuestos al presente texto. Para ampliación de detalles es preciso recurrir a literatura especializada, lo expuesto bastara para poner de manifiesto la estrecha relación existente entre los métodos de Cross y de Grinter, pudiéndose considerar los dos, en cierto modo, como procedimientos paralelos.

Ejemplo 5.4-1. Para la aplicación del método de Grinter, figura 5.4-4

Viga continúa de tres tramos:

$$l_1 = 6.0 \text{ m}; \quad l_2 = 12.0 \text{ m}; \quad l_3 = 6.0 \text{ m}$$

$$I_1 = I_2 = I_3 = I = \text{constante}$$

Carga uniformemente distribuida $q=1 \text{ t/m}$:

$$K_1 = \frac{I_1}{l_1} = \frac{I}{6.0}; \quad K_2 = \frac{I_2}{l_2} = \frac{I}{12.0}; \quad K_3 = \frac{I_3}{l_3} = \frac{I}{6.0}$$

tomando $K_2 = K_m$ como valor de referencia, tendremos:

$$K_1' = \frac{I}{6.0} \cdot \frac{12.0}{I} = 2; \quad K_2' = \frac{I}{12.0} \cdot \frac{12.0}{I} = 1; \quad K_3' = \frac{I}{6.0} \cdot \frac{12.0}{I} = 2$$

valores que se han anotado en la línea 1 de la figura 5.4-4.

En la práctica, el cálculo se realiza distribuyendo los ángulos multiplicados por el producto EI .

Con este recurso los ángulos de giro libre, según la ecuación (5.4-1), resultan ser los siguientes:

$$\varphi_{12} = 0$$

$$\varphi_{21} = 0$$

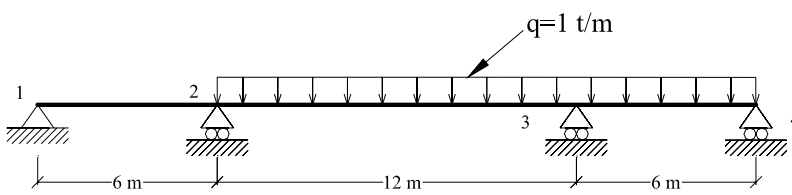
$$\varphi_{23} = + \frac{1(12)^3}{24} = +72$$

$$\varphi_{32} = - \frac{1(12)^3}{24} = -72$$

$$\varphi_{34} = + \frac{1(6)^3}{24} = +9$$

$$\varphi_{43} \text{ no se necesita}$$

Estos valores se han anotado en la segunda línea de la tabla.



1	K'	②	①	②
2	φ	0	+72.00	-72.00
3			-18.00	-18.00
4	α	-27.00	+54.00	-27.00
5		+15.00	+15.00	
6	α	+15.00	-30.00	+15.00
7			+5.00	+5.00
8	α	+5.00	-10.00	+5.00
9		+1.67	+1.67	
10	α	+1.67	-3.33	+1.67
11			+0.56	+0.56
12		+0.55	-1.11	+0.56
13		+0.18	+0.18	
14		+0.18	-0.37	+0.18
15			+0.06	+0.06
16		+0.06	-0.12	+0.06
17		+0.02	+0.02	
18		+0.02	-0.04	+0.02
19			+0.01	+0.01
20		+0.00	-0.01	+0.01
21	$\Sigma\alpha$	0	+16.87	-21.37

Figura 5.4-4

Distribución en el nudo 3:

$$\varphi_{32} = -72; \quad \varphi_{34} = +9$$

según la ecuación (5.4-6) se tiene:

$$g = \frac{-1(72) + 2(9)}{1 + 2} = -18 \quad (\text{tercera línea})$$

Los ángulos α serán, según la ecuación (5.4-7), los siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{32} &= -18.00 + 72.00 = +54 \\ \alpha_{34} &= -18.00 - 9.00 = -27 \\ \text{Ángulo transmitido } \alpha_{23} &= -\frac{54}{2} = -27 \end{aligned} \right\} \quad (\text{cuarta línea})$$

donde se subrayan los valores de α .

Distribución en el nudo 2:

$$\varphi_{21} = 0; \quad \varphi_{23} = +72 - 27 = +45$$

$$\vartheta = \frac{2(0) + 1(45)}{2 + 1} = +15 \quad (\text{quinta línea})$$

$$\begin{array}{l} \alpha_{21} = +15 - 0 = +15 \\ \alpha_{23} = +15 - 45 = -30 \\ \text{Ángulo transmitido } \alpha_{32} = -\left(-\frac{30}{2}\right) = +15 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \alpha_{21} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{32} \end{array}} \right\} \quad (\text{sexta línea})$$

donde se subrayan los valores de α .

Distribución en el nudo 3:

$$\varphi_{32} = +15; \quad \varphi_{34} = 0$$

$$\vartheta = \frac{1(15) + 2(0)}{1 + 2} = +5 \quad (\text{séptima línea})$$

$$\begin{array}{l} \alpha_{32} = +5 - 15 = -10 \\ \alpha_{34} = +5 - 0 = +5 \\ \text{Ángulo transmitido } \alpha_{23} = -\left(-\frac{10}{2}\right) = +5 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \alpha_{32} \\ \alpha_{34} \\ \alpha_{23} \end{array}} \right\} \quad (\text{octava línea})$$

subrayando también aquí los valores de α .

Distribución en el nudo 2:

$$\varphi_{21} = 0; \quad \varphi_{23} = +5$$

$$\vartheta = \frac{2(0) + 1(5)}{2 + 1} = +1.67 \quad (\text{novena línea})$$

$$\begin{array}{l} \alpha_{21} = +1.67 - 0 = +1.67 \\ \alpha_{23} = +1.67 - 5 = -3.33 \\ \text{Ángulo transmitido } \alpha_{32} = -\left(-\frac{3.33}{2}\right) = +1.67 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \alpha_{21} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{32} \end{array}} \right\} \quad (\text{décima línea})$$

donde los valores de α se han subrayado.

Prosiguiendo el cálculo de esta forma, resulta la tabla representada en la figura 5.4-4. Los ángulos α definitivos se componen de los valores parciales de α subrayados y acumulados progresivamente, siendo por lo tanto sus valores los que expresan las sumas siguientes:

$$\alpha_{21} = +15.00 + 1.67 + 0.18 + 0.02 \dots = +16.87$$

$$\alpha_{23} = -30.00 - 3.33 - 0.37 - 0.04 \dots = -33.74$$

$$\alpha_{32} = +54.00 - 10.00 - 1.11 - 0.12 - 0.01 = +42.76$$

$$\alpha_{34} = -27.00 + 5.00 + 0.56 + 0.06 + 0.01 = -21.37$$

habiéndose anotado estos valores en la línea 21 de dicha tabla. Con estos valores pueden calcularse los momentos en los nudos, que son los que realmente se necesitan.

Según la ecuación (5.4-9), resulta de una manera general:

$$M = -\frac{3EI\alpha}{l}; \text{ y por lo tanto:}$$

$$M_{21} = -3 \frac{(+16.87)}{6.00} = -8.43 \text{ tm}$$

$$M_{23} = -3 \frac{(-33.74)}{12.00} = +8.43 \text{ tm}$$

$$M_{32} = -3 \frac{(+42.76)}{12.00} = -10.68 \text{ tm}$$

$$M_{34} = -3 \frac{(-21.37)}{6.00} = +10.68 \text{ tm}$$

Los momentos resultan iguales dos a dos, como es preciso que suceda en el presente caso.

En el ejemplo expuesto, se muestra que el cálculo según el método de Grinter no presenta ninguna ventaja en comparación con el cálculo según el método de Cross, de distribución directa de los momentos.

CAPITULO 6**SAP2000****MODELACIÓN Y TÉCNICAS DE ANÁLISIS****6.1 Etiquetas**

Las etiquetas son usadas para nombrar a varias entidades tales como nudos, elementos, materiales y cargas que definen un modelo estructural y su respectivo análisis. Algunas entidades, como por ejemplo los modos, son nombradas automáticamente por el programa.

Las etiquetas son alfanuméricas y deben respetar las siguientes reglas:

- Pueden contener desde uno a siete letras y/o números
- No están permitidos espacios u otro tipo de caracteres
- Mayúsculas y minúsculas son tratadas por igual
- Una etiqueta no puede contener ceros en su totalidad
- Los ceros al inicio son ignorados, por ejemplo “0a3” es igual que “a3”

Algunos ejemplos de etiquetas validas:

1
8A
P69
101xT
MASA1

Algunos ejemplos de etiquetas no validas:

0
000
A-03
1%
233+564
-125
OPQ 999

Etiquetas iguales pueden ser usadas para diferentes tipos de entidades sin ningún conflicto. Por ejemplo, se puede tener un nudo, un elemento Frame, un material y un caso de carga, cada uno con la etiqueta “20”.

6.2 Sistemas de coordenadas

Los sistemas de coordenadas son usados para localizar a las diferentes partes del modelo estructural y definir las direcciones de las cargas, desplazamientos, fuerzas internas y esfuerzos.

Todo sistema de coordenadas en el modelo esta definido con respecto a un solo sistema global X-Y-Z. Cada parte del modelo (nudo, elemento o *constraint*) tiene su propio sistema de coordenadas local 1-2-3. Adicionalmente se pueden crear nuevos sistemas definiendo su ubicación y dirección con respecto al sistema global.

Sistema de Coordenadas global

Consta de tres ejes coordenados denotados por X-Y-Z los cuales son mutuamente perpendiculares y satisfacen la regla de la mano derecha. Las ubicaciones en el Sistema de Coordenadas Global pueden ser especificadas usando las variables **x,y,z**.

Direcciones vertical y horizontal

El SAP2000 asume por defecto que el eje Z es vertical. Por ello, las cargas de peso propio siempre actúan en la dirección $-Z$. El plano XY es horizontal. La principal dirección horizontal es $+X$, los ángulos en el plano horizontal son medidos con respecto a este eje.

Sistema de Coordenadas locales

Cada elemento del modelo estructural tiene un sistema de coordenadas local a través del cual se definen sus propiedades, cargas, etc. y son denotados por 1-2-3. En general, los sistemas locales pueden variar de nudo en nudo, de elemento en elemento, de *constraint* en *constraint*, etc. (los sistemas locales de los nudos por defecto son los mismos que el sistema global XYZ).

Para elementos Frame y Shell, uno de los ejes locales es determinado por la geometría del elemento. Pudiendo definirse la orientación de los ejes restantes especificando un ángulo de rotación.

Sistema de Coordenadas alterno

Se puede usar un sistema de coordenadas alterno para localizar nudos, para definir el sistema de coordenadas local de nudos, elementos y *constraints*, también como referencia para definir otras propiedades y cargas.

El sistema de coordenadas global y todos los sistemas de coordenadas alternos son denominados sistemas de coordenadas fijos, estos son la referencia de todo el modelo estructural, no solo de partes como lo hace el sistema de coordenadas local. Para definir sistemas de coordenadas fijos, se debe seleccionar la opción **Set Coordinate System...** del menú **Options**.

6.3 Joint Pattern

Un Joint Pattern consiste en un grupo de valores numéricos escalares, un valor para cada nudo de la estructura; puede ser usado para definir cargas o propiedades que varían en la estructura de acuerdo a la ubicación del nudo en el sistema de coordenadas global. Por ejemplo se tienen:

- Propiedades de masa y de resorte en nudos.
- Desplazamientos o cargas sobre nudos.
- Cargas de presión (Shell)
- Cargas por temperatura.

Los Patterns son más efectivos para describir distribuciones espaciales complicadas. Su uso es opcional y no es requerido para problemas simples.

Los valores Patterns son asignados a nudos previamente definidos, un solo valor **v** es asignado a un nudo en un Pattern considerando que son tres las coordenadas (x,y,z)

que definen a un nudo. Se pueden definir tantos Patterns como se necesite, cada uno tendrá un solo valor para cada nudo.

Uso en Presiones Hidrostáticas.

Los Patterns pueden ser usados para asignar valores, a un grupo de nudos, que varíen linealmente de acuerdo a una gradiente. Estos valores son referenciados desde un valor cero asignado a un nudo base o nudo de comparación. Se tiene la opción de permitir solo valores positivos, negativos o ambos en la generación de los valores.

Parámetros necesarios para la especificación de la gradiente:

- Un sistema de coordenadas fijo **csys** (por defecto **csys** = 0 indicando el sistema de coordenadas global).
- Las componentes de la gradiente **vx**, **vy**, **vz** en el sistema de coordenadas **csys**.
- Las coordenadas del nudo base **x**, **y**, **z** en el sistema **csys**.
- El parámetro **setzero**:
 - POS indica que los valores positivos tomaran el valor cero.
 - NEG indica que los valores negativos tomaran el valor cero.
 - NO valores positivos y negativos son tomados en cuenta.

Por ejemplo la componente **vx** indica como el valor Pattern varia por unidad de distancia paralela al eje x en el sistema de coordenadas csys.

El valor Pattern v_j definido para un nudo **j** que tiene las coordenadas (**xj**, **yj**, **zj**) es:

$$v_j = vx(x_j - x) + vy(y_j - y) + vz(z_j - z)$$

Si $v_j < 0$ y **setzero** = **NEG** entonces $v_j = 0$.

En el caso de presión hidrostática la gradiente será paralela a un solo eje y solo un término de la ecuación anterior será necesario.

En el cuadro de dialogo de la opción **Joint Patterns** del menú **Assign**, los valores a ingresar son:

Constant A = vx

Constant B = vy

Constant C = vz

Constant D = $vx \cdot x + vy \cdot y + vz \cdot z$

Para activar el parámetro **setzero**.

POS = Zero positive values

NEG = Zero negative values

NO = Use all values

Ejemplo: Considerando una distribución de presión hidrostática sobre una presa como se muestra en la figura 6.3.1, la dirección z se dirige hacia arriba en el sistema de coordenadas global. La gradiente de presión es el peso específico del agua que se puede tomar como 9810 N/m^3 o 1000 Kg-f/m^3 según las unidades de trabajo. El punto base de presión cero puede ser cualquier punto de la superficie del agua, el valor z es la profundidad del agua y el parámetro setzero = NEG indica que los valores en los nudos sobre la superficie del agua son considerados cero.

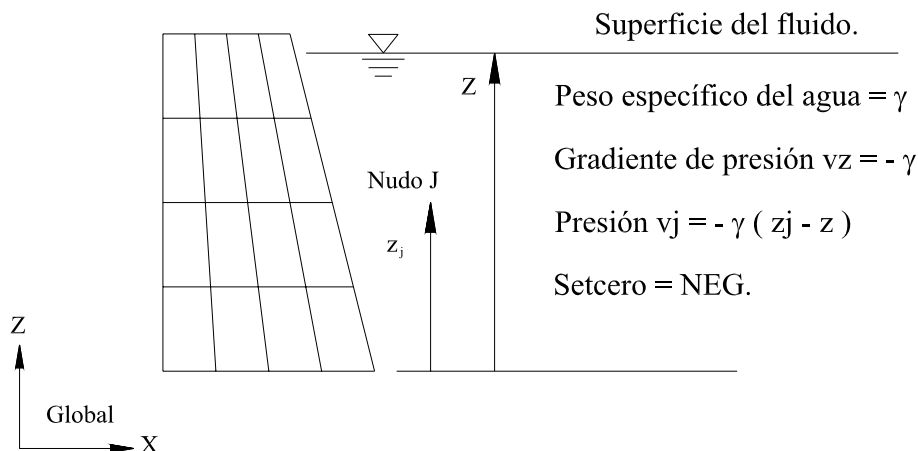


Figura 6.3.1 Ejemplo de Joints Patterns para asignar presiones hidrostáticas.

Nota: En el ejemplo anterior los valores a ingresar en la ventana de dialogo **Pattern Data** son los siguientes:

- Constant A = 0
- Constant B = 0
- Constant C = $-\gamma$
- Constant D = $z * \gamma$
- Activar la opción **Zero Negative values**

6.4 Nudos y Grados de libertad

6.4.1 Nudos

Se denominan nudos a los puntos de conexión entre los elementos, juegan un rol fundamental en el análisis de cualquier estructura.

Los nudos cumplen una variedad de funciones:

- Como ya se menciona, sirven de conexión entre los elementos de la estructura.
- La estructura se apoya en los nudos mediante el empleo de restricciones y/o resortes.
- Comportamiento de cuerpos rígidos y condiciones de simetría pueden ser especificados mediante el uso de *constraints* aplicados a los nudos.
- Se pueden aplicar cargas concentradas en los nudos.
- Masas concentradas e inercias rotacionales pueden ser colocadas en los nudos.

- Todas las masas y cargas aplicadas a los elementos son transferidas a los nudos.
- Los nudos son los puntos principales en los cuales los desplazamientos son conocidos ó calculados.

Usando la interfase gráfica del SAP2000, los nudos son creados automáticamente en los extremos de los elementos Frame y en las esquinas de los elementos Shell.

Los nudos también pueden ser definidos independientemente de cualquier elemento.

Los nudos actúan independientemente entre si, a menos que estén conectados por elementos.

Hay seis grados de libertad por cada nudo ó punto, tres traslacionales y tres rotacionales. Todos ellos definidos con respecto al sistema de coordenadas local correspondiente.

Los nudos pueden estar cargados directamente mediante cargas concentradas o indirectamente a través de desplazamientos de apoyos con restricciones o con resortes.

Los desplazamientos (traslacionales y rotacionales), las fuerzas y momentos internos y externos son determinados en cada nudo.

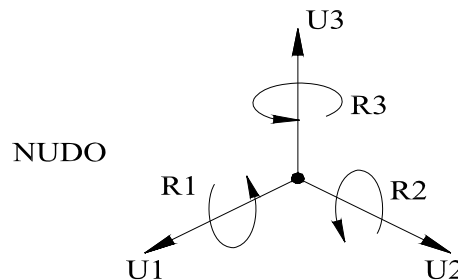
Sistema de Coordenadas Local Cada nudo tiene un sistema propio, el cual es usado para definir sus grados de libertad, restricciones, propiedades y cargas, como también para interpretar sus resultados.

Por defecto, los ejes locales 1-2-3 son iguales a los ejes globales X-Y-Z respectivamente, cumpliendo también la regla de la mano derecha. Sin embargo, para algunos modelos, puede ser conveniente el uso de un sistema local diferente.

6.4.2 Grados de Libertad

Se denominan grados de libertad a las componentes de desplazamiento en los nudos (rotaciones y traslaciones). Las deflexiones en el modelo estructural son gobernadas por los desplazamientos en los nudos. Cada nudo en el sistema estructural puede tener seis componentes de desplazamiento:

- Los nudos pueden trasladarse a lo largo de los tres ejes locales, estas traslaciones se denotan U1, U2 y U3.
- Los nudos pueden rotar alrededor de los tres ejes locales, estas rotaciones se denotan R1, R2 y R3.



Adicionalmente a los nudos regulares definidos como parte del modelo estructural, el programa crea automáticamente nudos maestros que gobiernan el comportamiento de

cualquier *constraint* que se pueda haber definido. Cada nudo maestro también tiene seis grados de libertad.

Los tipos de grados de libertad en el modelo estructural son los siguientes:

- *Activo (active)*.- El desplazamiento es calculado durante el análisis.
- *Restringido (restrained)*.- El desplazamiento es especificado y la reacción correspondiente es calculada durante el análisis
- *Forzado (constrained)*.- El desplazamiento es calculado a partir de los desplazamientos de otros grados de libertad.
- *Nulo (null)*.- El desplazamiento no afecta a la estructura y es ignorado durante el análisis.
- *No disponible (unavailable)*.- El desplazamiento ha sido explícitamente excluido del análisis.

Estos diferentes tipos de grados de libertad son descritos a continuación:

Grados de Libertad Disponibles y No disponibles Se pueden especificar los grados de libertad que están disponibles en cada nudo del modelo estructural. Por defecto, los seis grados de libertad están disponibles en cada nudo. Esta condición debería ser considerada en todas las estructuras tridimensionales.

Sin embargo, para determinadas estructuras planas, se pueden aplicar ciertas restricciones a los grados de libertad disponibles. Por ejemplo, en el plano XZ, un pórtico necesita solamente U_x , U_z y R_y .

Los grados de libertad que no son clasificados como disponibles tienen como característica que cualquier rigidez, cargas, masas, restricciones o *constraints* que les son aplicadas son ignoradas durante el análisis.

Los grados de libertad disponibles pueden ser: restringidos, forzados, activados o anulados.

Grados de Libertad Restringidos Si los desplazamientos en un nudo a lo largo de cualquiera de sus grados de libertad son conocidos, por ejemplo en un apoyo, entonces el grado de libertad es restringido. El valor del desplazamiento puede o no ser nulo, y puede ser diferente para distintos casos de carga. La fuerza a lo largo del grado de libertad restringido se denomina reacción y es determinada por el análisis.

Grados de Libertad Forzados Cualquier nudo que es parte de un *constraint* puede tener uno o más de sus grados de libertad disponibles forzados. El programa automáticamente crea un nudo maestro que gobierna el comportamiento de cada *constraint*. El desplazamiento de un grado de libertad forzado es calculado después como una combinación lineal de los desplazamientos a lo largo de los grados de libertad correspondientes del nudo maestro.

Un grado de libertad no puede ser Forzado y Restringido a la vez.

Grados de Libertad Activos Todo grado de libertad que no sea Forzado ni Restringido debe ser Activo o Nulo. El programa determinará automáticamente los grados de libertad activados como sigue:

- Si cualquier carga o rigidez es aplicada a lo largo de cualquier grado de libertad traslacional de un nudo, entonces todos los grados de libertad traslacionales en los nudos son activados a menos que sean Forzados o Restringidos.
- Si cualquier carga o rigidez es aplicada a lo largo de algún grado de libertad rotacional en un nudo, entonces todos los grados de libertad rotacionales disponibles en los nudos son activados a menos que sean Forzados o Restringidos.

Un nudo que es conectado a cualquier elemento Frame o Shell tendrá todos sus grados de libertad activados. Una excepción es un elemento Frame con solamente rigidez tipo armadura, el cual no activará sus grados de libertad rotacionales.

Cada grado de libertad activo tiene una ecuación asociada a ser resuelta. Si hay N grados de libertad activos en la estructura, hay N ecuaciones en el sistema y la matriz de rigidez es de orden N .

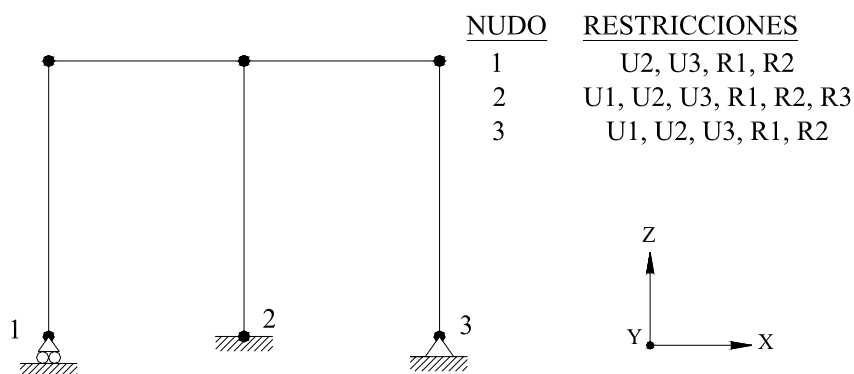
Si hay grados de libertad activos en el sistema en el cual la rigidez es conocida o cero, tal como la traslación en el eje que sale del plano de una estructura plana, éstos deben ser restringidos o hechos no disponibles. De otro modo, la estructura es inestable y la solución de las ecuaciones estáticas fracasará.

Grados de Libertad Nulos Los grados de libertad disponibles que no son Forzados, Restringidos o Activos son denominados nulos, porque ellos no tienen carga o rigidez, sus desplazamientos y reacciones son cero y no tienen efecto en el resto de la estructura. El programa automáticamente los excluye del análisis.

6.4.3 Restricciones y Reacciones

Si el desplazamiento de un nudo a lo largo de cualquiera de sus grados de libertad tiene un valor conocido o cero (por ejemplo un apoyo) una Restricción debe ser aplicada a ese grado de libertad. El valor conocido del desplazamiento puede diferir de un caso de carga a otra, pero el grado de libertad está restringido para todos los casos de carga.

Las restricciones también deberían aplicarse a los grados de libertad disponibles en el sistema en los que la rigidez es conocida o cero. Tal como la traslación hacia fuera en un pórtico plano o la rotación en el mismo. De otro modo, la estructura es inestable y la solución de las ecuaciones estáticas fracasará.



6.4.4 Resortes

Cualquiera de los seis grados de libertad en los nudos de la estructura puede tener resortes traslacionales o rotacionales como condiciones de apoyo. Estos resortes conectan elásticamente los nudos al apoyo. Apoyos de resortes a lo largo de grados de libertad restringidos no contribuyen a la rigidez de la estructura.

Las fuerzas de resorte que actúan en un nudo están relacionadas con los desplazamientos de los nudos mediante una matriz simétrica 6x6 de coeficientes de rigidez del resorte. Estas fuerzas son opuestas a los desplazamientos. Los coeficientes de rigidez del resorte son especificados en el sistema de coordenadas local del nudo.

Las fuerzas y momentos del resorte F_1 , F_2 , F_3 , M_1 , M_2 y M_3 en el nudo se obtienen mediante:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} u_1 & u_1u_2 & u_1u_3 & u_1r_1 & u_1r_2 & u_1r_3 \\ & u_2 & u_2u_3 & u_2r_1 & u_2r_2 & u_2r_3 \\ & & u_3 & u_3r_1 & u_3r_2 & u_3r_3 \\ & & & r_1 & r_1r_2 & r_1r_3 \\ & \text{sim.} & & & r_2 & r_2r_3 \\ & & & & & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \quad (6.4.3-1)$$

donde: u_1 , u_2 , u_3 y r_1 , r_2 , r_3 son los desplazamientos y rotaciones del nudo respectivamente y u_1 , u_2 , u_3 , r_1 , r_2 y r_3 son los coeficientes de rigidez del resorte.

El desplazamiento del apoyo, en el extremo del resorte, puede ser especificado como cero o diferente de cero (por ejemplo, debido al asentamiento del apoyo). Este desplazamiento puede variar de un caso de carga a otra.

6.4.5 Masas

En un análisis dinámico, las masas de la estructura son usadas para el cálculo de las fuerzas de inercia. Normalmente, las masas se obtienen de los elementos usando la densidad de masa y el volumen del elemento. Esto produce automáticamente un acumulamiento de masas en los nudos. El valor de la masa del elemento es igual en cada uno de los tres grados de libertad traslacionales.

A menudo es necesario ubicar unas masas concentradas adicionales y/o momentos de inercia rotacional de masa en los nudos. Estos pueden ser aplicados en cualquiera de los seis grados de libertad de los nudos de la estructura.

Las fuerzas de inercia que actúan en los nudos están relacionadas con las aceleraciones en los nudos mediante una matriz 6x6 de valores de masas. Estas fuerzas se oponen a las aceleraciones.

En el sistema local del nudo, las fuerzas de inercia y momentos F_1 , F_2 , F_3 , M_1 , M_2 y M_3 en un nudo se obtienen mediante:

$$\begin{bmatrix} F1 \\ F2 \\ F3 \\ M1 \\ M2 \\ M3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} ug1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & ug2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & ug3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & rg1 & 0 & 0 \\ & sim... & & & rg2 & 0 \\ & & & & & rg3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ r1 \\ r2 \\ r3 \end{bmatrix} \quad (6.4.3-2)$$

donde: $ug1$, $ug2$, $ug3$ y $rg1$, $rg2$, $rg3$ son las aceleraciones traslacionales y rotacionales en el nudo respectivamente y los términos $u1$, $u2$, $u3$, $r1$, $r2$ y $r3$ son los valores de masas específicas.

Los valores de masas deben estar en unidades de masa consistentes (w/g) y los momentos de inercia rotacional de masa deben estar en unidades wL^2/g . Donde w esta en unidad de peso, L en unidad de longitud y g en unidades de aceleración. El valor neto de masa en cada nudo en la estructura debería ser mayor o igual que cero.

6.4.6 Cargas

Cargas debido a Fuerzas

Son usadas para aplicar fuerzas concentradas y momentos a los nudos. Los valores son especificados en el sistema de coordenadas fijo (global o alterno). Las cargas *Force Load* pueden variar de un caso de carga a otra. Fuerzas y Momentos aplicados a lo largo de grados de libertad restringidos aumentan las reacciones correspondientes.

Cargas debido a Desplazamientos

Son usadas para aplicar desplazamientos específicos (traslaciones y rotaciones) en nudos restringidos y apoyos de resortes. Las restricciones pueden ser consideradas como conexiones rígidas entre los grados de libertad del nudo y el apoyo. Los resortes pueden ser considerados como conexiones flexibles entre los grados de libertad del nudo y el apoyo.

Cargas debido a desplazamientos de las restricciones. Si un grado de libertad particular de un nudo es restringido, el desplazamiento del nudo es igual al desplazamiento del apoyo a lo largo del grado de libertad local. Esto se aplica sin hacer caso de la presencia o no de resortes.

El desplazamiento del apoyo y por lo tanto el desplazamiento del nudo, puede variar de un caso de carga a otro. Si la carga por desplazamiento del apoyo no es especificada para un grado de libertad restringido, el desplazamiento del nudo es cero para este caso de carga.

Cargas debido a desplazamientos de los resortes Los desplazamientos del apoyo en un nudo son multiplicados por los coeficientes de rigidez del resorte para obtener las fuerzas y los momentos efectivos que son aplicados al nudo. Desplazamientos del resorte aplicados en la dirección en la cual el nudo no presenta rigidez no producen cargas. El desplazamiento del apoyo y por lo tanto las fuerzas y momentos aplicados, pueden variar de un caso de carga a otro.

En el sistema de coordenadas local de un nudo, las fuerzas y momentos aplicados $F1$, $F2$, $F3$, $M1$, $M2$ y $M3$ en un nudo debido a desplazamientos de apoyo se obtienen de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} F1 \\ F2 \\ F3 \\ M1 \\ M2 \\ M3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u1 & u1u2 & u1u3 & u1r1 & u1r2 & u1r3 \\ & u2 & u2u3 & u2r1 & u2r2 & u2r3 \\ & & u3 & u3r1 & u3r2 & u3r3 \\ & & & r1 & r1r2 & r1r3 \\ & \text{sim.} & & & r2 & r2r3 \\ & & & & & r3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ug1 \\ ug2 \\ ug3 \\ rg1 \\ rg2 \\ rg3 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 6.4.3-3})$$

donde $ug1$, $ug2$, $ug3$, y $rg1$, $rg2$, $rg3$ son los desplazamientos y rotaciones del apoyo respectivamente, y los términos $u1$, $u2$, $u3$, $r1$, $r2$ y $r3$ son los coeficientes de rigidez del resorte.

Las fuerzas y momentos netos actuantes en el nudo son sumados a las fuerzas y momentos obtenidos en las ecuaciones (6.4.3-1) y (6.4.3-3); nótese que estas son de signo opuesto.

En un grado de libertad restringido, el desplazamiento del nudo es igual al desplazamiento del apoyo y por lo tanto, la fuerza neta en el resorte es cero.

6.5 Constraints y Welds

Los Constraints son usados para imponer ciertos tipos de comportamiento de cuerpo rígido, conectar al mismo tiempo diferentes partes del modelo e imponer condiciones de simetría.

Los Welds son usados para generar un grupo de Constraints que conectan diferentes partes del modelo

Un Constraint consiste de un grupo de dos o más nudos cuyos desplazamientos son relacionados mediante ecuaciones. Los tipos de comportamientos que pueden ser modelados son los siguientes:

- **Comportamiento de Cuerpo Rígido**, en los cuales los nudos restringidos mediante Constraints son trasladados y rotados juntos como si estuviesen conectados por un enlace rígido. Los tipos de comportamiento rígido que pueden ser modelados son:
 - Cuerpo Rígido (Rigid Body): Completamente rígido para todo desplazamiento
 - Diafragma Rígido (Rigid Diaphragm): Rígido para el comportamiento de membrana en un plano.
 - Lámina Rígida (Rigid Plate): Rígido para curvatura de lámina en un plano.
 - Barra Rígida (Rigid Rod): Rígido para deformaciones a lo largo de un eje.
 - Viga Rígida (Rigid Beam): Rígido para flexión de vigas sobre su eje.
- **Comportamiento de Igual Desplazamiento** (Equal-displacement), en el cual las traslaciones y rotaciones son iguales en los nudos que forman parte de un Constraint.

- **Condiciones de simetría y anti-simetría.**

El uso de Constraints reduce el número de ecuaciones en el sistema a ser resuelto lo cual incrementa la eficiencia computacional.

La mayoría de los tipos de Constraints deben ser definidos con respecto a algún sistema de coordenadas fijo (global o alterno). El sistema de coordenadas puede ser el global u otro alterno o puede ser determinado automáticamente a partir de la ubicación de los nudos que lo conforman.

Los Welds son usados para conectar diferentes partes del modelo que fueron definidas separadamente. Cada Weld consiste de un grupo de nudos que pueden ser enlazados. El programa encuentra nudos en cada Weld que comparten la misma ubicación en el espacio y los fuerza a actuar como un solo nudo.

6.5.1 Constraint Body

Causa que todos los nudos que forman parte de este Constraint se muevan juntos como un cuerpo rígido tridimensional. Estos nudos son conectados unos a otros mediante un enlace rígido y no puede haber desplazamientos relativos entre ellos.

Este tipo de Constraint puede ser usado en modelos de conexiones rígidas, tales como uniones de vigas y columnas y para acoplar diferentes partes del modelo estructural que fueron definidas usando mallas separadas. Los Welds pueden ser usados para generar automáticamente este tipo de Constraint con el propósito de conectar nudos coincidentes.

Cada Constraint Body conecta a un grupo de dos o más nudos a la vez. Los nudos pueden tener cualquier ubicación arbitraria en el espacio.

Sistema de Coordenadas Local Cada Constraint Body tiene su propio sistema de coordenadas local, sus ejes se denotan por 1, 2 y 3. Estos corresponden a los ejes X, Y, Z del sistema global, respectivamente. La orientación de los ejes locales no es importante debido a que las ecuaciones constraint son independientes del sistema de coordenadas.

Ecuaciones Body Estas ecuaciones relacionan los desplazamientos en cualquier par de nudos (i, j) que forman parte del Constraint Body. Estas ecuaciones son expresadas en términos de las traslaciones (u1, u2 y u3), las rotaciones (r1, r2 y r3) y las coordenadas (x1, x2 y x3), todos definidos con respecto al sistema de coordenadas local.

$$u1j = u1i + r2i * \Delta x3 - r3i * \Delta x2$$

$$u2j = u2i + r3i * \Delta x1 - r1i * \Delta x3$$

$$u3j = u3i + r1i * \Delta x2 - r2i * \Delta x1$$

$$r1i = r1j$$

$$r2i = r2j$$

$$r3i = r3j$$

donde: $\Delta x1 = x1j - x1i$, $\Delta x2 = x2j - x2i$, $\Delta x3 = x3j - x3i$,

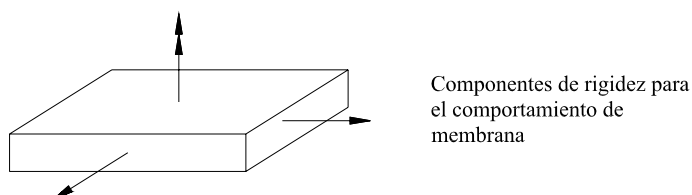
6.5.2 Definición de Plano

Las ecuaciones para cada Constraint tipo Diafragma o Lámina (Diaphragm o Plate) son escritas con respecto a un plano en particular. La ubicación del plano no es importante, solo importa su orientación.

Por defecto, el plano es determinado automáticamente por el programa a partir de la distribución espacial de los nudos que forman parte del Constraint.

6.5.3 Constraint Tipo Diafragma (Diaphragm)

Causa que todos los nudos que forman parte de este Constraint se muevan juntos como un diafragma plano que es rígido ante una deformación de membrana. El comportamiento de membrana incluye componentes de rigidez traslacional en el plano y rigidez rotacional en la dirección normal al plano del elemento. Así, todos los nudos son conectados unos a otros por enlaces que son rígidos en el plano, pero que no afectan la deformación hacia fuera del plano.

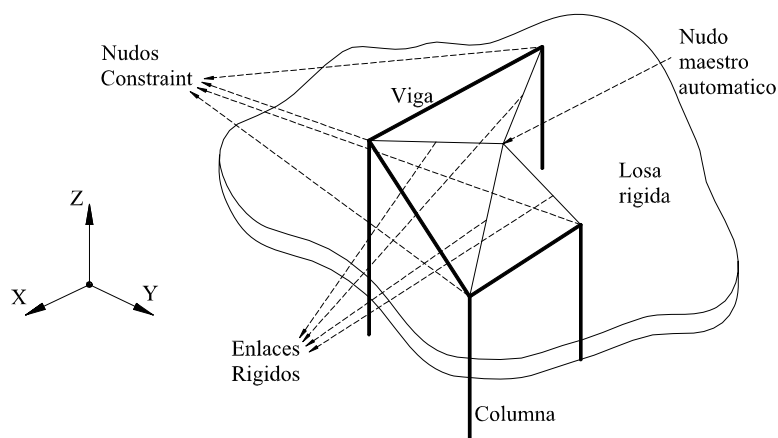


Este Constraint puede ser usado para modelar losas de concreto en estructuras de edificios, los cuales tienen generalmente muy alta rigidez en el plano y para modelar diafragmas en superestructuras de puentes.

El uso del Constraint Diaphragm para estructuras de edificios elimina los problemas de precisión numérica ocasionada por la gran rigidez en el plano de una losa tipo diafragma.

También es muy usado en el análisis dinámico lateral de edificios, resultando en una significativa reducción del tamaño de los eigenvalores (valores propios) del problema a resolver.

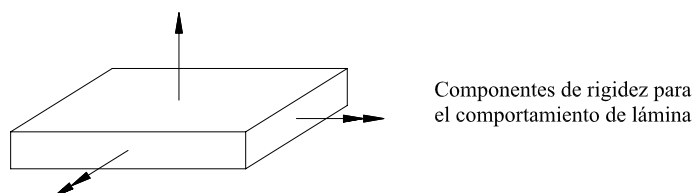
Sistema de coordenadas local Cada Constraint Diafragma tiene su propio sistema de coordenadas local, sus ejes son denotados por 1-2-3. El eje 3 es siempre normal al plano del Constraint. El programa escoge arbitrariamente la orientación de los ejes 1 y 2 en el plano. Dicha orientación no es importante porque solo la dirección normal afecta a las ecuaciones Constraint.



Uso del Constraint Diafragma para modelar una losa rígida

6.5.4 Constraint tipo Lámina (Plate)

Causa que todos los nudos que forman parte de este tipo de Constraint se muevan juntos como una lamina plana la cual es rígida frente a deformaciones de flexión. El comportamiento de lámina plana incluye componentes de rigidez rotacional sobre su plano y rigidez traslacional en la dirección normal al plano del elemento. Así, todos los nudos son conectados unos a otros mediante enlaces que son rígidos para curvaturas en el plano, pero que no afectan las deformaciones de membrana.



Sistema de Coordenadas local Cada Constraint tipo Lámina tiene su propio sistema de coordenadas local, sus ejes son denotados por 1-2-3. El eje 3 es siempre normal al plano del Constraint. El programa escoge arbitrariamente la orientación de los ejes 1 y 2 en el plano. Dicha orientación no es importante, ya que solamente la dirección normal afecta a las ecuaciones Constraint.

6.5.5 Definición de Ejes

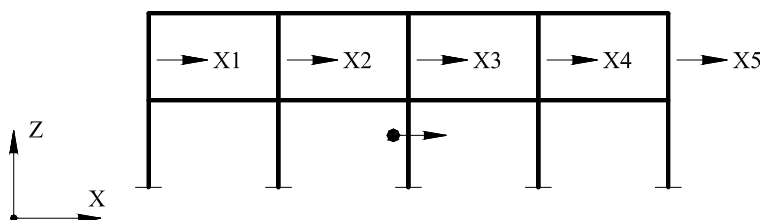
Las ecuaciones correspondientes a cada Constraint tipo Barra o Viga son escritas con respecto a un eje particular. La ubicación del eje no es importante, solo su orientación.

Por defecto, el eje es determinado automáticamente por el programa a partir de la distribución espacial de los nudos que lo conforman.

6.5.6 Constraint tipo Barra (Rod)

Causa que todos los nudos que forman parte de este Constraint se muevan juntos como una varilla recta que es rígida frente a deformaciones axiales. Así, todos los nudos mantienen una distancia fija uno de otro en la dirección paralela al eje de la varilla.

Un ejemplo del uso de Constraint tipo Barra en el siguiente análisis bidimensional del pórtico mostrado:



Si las deformaciones axiales en las vigas son despreciables, un solo Constraint tipo Barra puede ser definido conteniendo los cinco nudos. En lugar de cinco ecuaciones, el programa usa una sola ecuación al definir los desplazamientos en X de todo el piso. Sin embargo, esto implica que la fuerza axial en la viga sea nula, mientras el Constraint cause que los extremos de las vigas se trasladen juntos en dirección X.

Sistema de coordenadas local Cada Constraint tipo Barra tiene su propio sistema de coordenadas local, sus ejes son denotados como 1-2-3. El eje local 1 es siempre el eje del Constraint. El programa cambia arbitrariamente la orientación de los ejes 2 y 3. La orientación de estos ejes no importa, ya que solamente la dirección axial afecta las ecuaciones del Constraint.

6.5.7 Constraint Tipo Viga (Beam)

Causa que todos los nudos que forman parte de este Constraint se muevan juntos como una viga recta que es rígida frente a deformaciones de flexión. Así, todos los nudos son conectados unos a otros mediante enlaces que son rígidos para curvaturas fuera del eje, pero no afectan traslaciones a lo largo del eje o rotaciones alrededor de él. Este Constraint puede ser usado para evitar deformaciones por flexión en elementos Frame.

Sistema de coordenadas local Cada Constraint tipo Viga tiene su propio sistema de coordenadas local, sus ejes son denotados por 1-2-3. El eje local 1 es siempre el eje del Constraint. El programa escoge arbitrariamente la orientación de los ejes 2 y 3. La orientación de estos ejes no es importante ya que solo la dirección axial afecta las ecuaciones Constraint.

6.5.8 Constraint Equal

Causa que todos los nudos que forman parte de este Constraint se muevan juntos con igual (u opuesto) desplazamiento para cada grado de libertad seleccionado considerando el sistema de coordenadas local del Constraint. Los otros grados de libertad no son afectados.

Estos Constraint pueden ser usados para modelar condiciones de simetría y antisimetría con respecto a un plano

Sistema de coordenadas local Cada Constraint Equal usa un sistema de coordenadas fijo, especificado mediante el parámetro **csys**. Por defecto, **csys** es cero, indicando el sistema de coordenadas global. Los ejes del sistema de coordenadas se denotan por X-Y-Z.

Selección de grados de libertad Para cada Constraint Equal se puede especificar una lista de hasta seis grados de libertad. Estos son indicados como Ux, Uy, Uz, Rx, Ry y Rz. Un signo negativo implica grados de libertad opuestos, por ejemplo -Ux.

Ecuaciones Equal Estas ecuaciones relacionan traslaciones (ux, uy y uz) y rotaciones (rx, ry y rz) en cualquier par de nudos (i y j) que forman parte de este Constraint. Dependen de los grados de libertad seleccionados y sus signos. A continuación se describen unos casos importantes.

Simetría con respecto a un plano Para una estructura que es simétrica con respecto a un plano, cargas simétricas ocasionan desplazamientos simétricos tal como se describe a continuación:

- Fuerzas y desplazamientos paralelos al plano de simetría son iguales.
- Fuerzas y desplazamientos normales al plano de simetría son opuestos.
- Momentos y rotaciones paralelos al plano de simetría son opuestos.
- Momentos y rotaciones normales al plano de simetría son iguales.

Por ejemplo, considerando una estructura que es simétrica con respecto a un plano normal al eje X y que esta sujeta a cargas simétricas. Un Constraint tipo Equal debe ser definido para cada par de puntos que estén simétricamente ubicados con respecto a dicho plano. Los grados de libertad especificados para estos Constraints serán: -Ux, Uy, Uz, Rx, -Ry y -Rz, y las ecuaciones Equal correspondientes serán:

$$\begin{aligned} u_{xj} &= -u_{xi} \\ u_{yj} &= u_{yi} \\ u_{zj} &= u_{zi} \\ r_{xi} &= r_{xj} \\ r_{yi} &= -r_{yj} \\ r_{zi} &= -r_{zj} \end{aligned}$$

Antisimetría con respecto a un plano Para una estructura que es simétrica con respecto a un plano, cargas antisimétricas ocasionan desplazamientos antisimétricos. Los grados de libertad especificados para el caso de antisimetría son opuestos en signos a los correspondientes del caso simétrico. Así, para el ejemplo anterior, los grados de libertad especificados para los Constraints serán: Ux, -Uy, -Uz, -Rx, Ry y Rz.

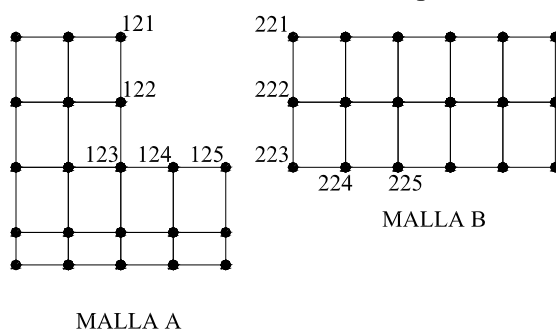
6.5.9 Acoplamiento entre partes de un modelo (Welds)

Los Welds son usados para conectar diferentes partes del modelo estructural que han sido definidas usando mallas separadas. Un Weld no es un solo Constraint, es un

grupo de nudos desde los cuales el programa genera automáticamente múltiples Constraints tipo Body para conectar nudos coincidentes.

Los nudos son considerados coincidentes si la distancia entre ellos es menor o igual que una tolerancia *tol* especificada. Se permite una tolerancia de cero pero no es recomendable.

Uno o más Welds pueden ser definidos, cada uno con su propia tolerancia. Generalmente, un solo Weld es definido para que contenga a todos los nudos del modelo; todos los grupos coincidentes de nudos formaran parte del Weld.



En la figura anterior se muestra un modelo desarrollado como dos mallas separadas A y B. Los nudos 121 hasta 125 son asociados con la malla A, y los nudos 221 hasta 225 son asociados con la malla B. Los nudos 121 hasta 125 comparten la misma ubicación en el espacio con los nudos 221 hasta 225 respectivamente. Estos son los nudos de interface entre las dos mallas. Para conectar estas dos mallas, un solo Weld puede ser definido conteniendo todos los nudos, o solo los nudos 121 hasta 125 y 221 hasta 225. El programa genera cinco Constraints tipo Body, cada uno conteniendo dos nudos, resultando un modelo integrado.

6.5.10 Nudos Maestros Automáticos (Master Joint)

El programa crea automáticamente un Nudo Maestro interno para cada Constraint explícito, y un Nudo Maestro para cada Constraint Body interno que es generado por un Weld. Cada Nudo Maestro gobierna el comportamiento de los correspondientes nudos que forman parte del Constraint. El desplazamiento en un grado de libertad del Constraint es calculado como una combinación lineal de los desplazamientos del Nudo Maestro.

6.5.11 Salida de constraints

Para cada Constraint tipo Body, Diafragma, Lámina, Barra y Viga que tienen más de dos nudos, la siguiente información del Constraint y su Nudo Maestro es impreso en el archivo de resultados (filename.out).

- El sistema de coordenadas local traslacional y rotacional para el Nudo Maestro.
- La masa total y momentos de inercia de masa para el Constraint que han sido aplicados al Nudo Maestro.
- El centro de masa para cada una de las tres masas traslacionales.

Los grados de libertad son indicados como U1, U2, U3, R1, R2 y R3. La salida típica de los constraints es mostrada a continuación:

```

C O N S T R A I N T   C O O R D I N A T E S   A N D   M A S S E S

CONS  DIAPH1 ===== TYPE = DIAPH, NORMAL DIRECTION = U3

                                LOCAL COORDINATE SYSTEM FOR CONSTRAINT MASTER
GLOBAL      U1      U2      U3      R1      R2      R3
X            1.000000  .000000  .000000  1.000000  .000000  .000000
Y            .000000  1.000000  .000000  .000000  1.000000  .000000
Z            .000000  .000000  1.000000  .000000  .000000  1.000000

                                TRASLATIONAL MASS AND MASS MOMENTS OF ANERTIA
                                U1      U2      U3      R1      R2      R3
                                .000000  .000000  .000000  .000000  .000000  .000000

                                CENTER OF MASS
GLOBAL      U1      U2      U3
X            .000000  .000000  .000000
Y            .000000  .000000  .000000
Z            3.000000  3.000000  3.000000

CONS  DIAPH2 ===== TYPE = DIAPH, NORMAL DIRECTION = U3

                                LOCAL COORDINATE SYSTEM FOR CONSTRAINT MASTER
GLOBAL      U1      U2      U3      R1      R2      R3
X            1.000000  .000000  .000000  1.000000  .000000  .000000
Y            .000000  1.000000  .000000  .000000  1.000000  .000000
Z            .000000  .000000  1.000000  .000000  .000000  1.000000

                                TRASLATIONAL MASS AND MASS MOMENTS OF ANERTIA
                                U1      U2      U3      R1      R2      R3
                                .000000  .000000  .000000  .000000  .000000  .000000

                                CENTER OF MASS
GLOBAL      U1      U2      U3
X            .000000  .000000  .000000
Y            .000000  .000000  .000000
Z            6.000000  6.000000  6.000000

```

Salida de los Constraints en el archivo de respuesta

6.6 Propiedades de los materiales

Son usadas para definir las propiedades mecánicas, térmicas y de densidad utilizadas para los elementos Frame y Shell.

Los materiales son considerados como elásticos lineales y sus propiedades pueden ser definidas como isotrópicas, ortotrópicas y anisotrópicas.

Sistema de coordenadas local Cada material tiene su propio sistema de coordenadas local usado para definir las propiedades térmicas y elásticas. Este sistema es significativo solo para materiales ortotrópicos y anisotrópicos. Materiales isotrópicos son independientes de cualquier sistema de coordenadas particular.

Los ejes del sistema de coordenadas del material son denotados por 1, 2 y 3; por defecto el sistema de coordenadas del material esta alineado con el sistema de coordenadas local para cada elemento. Sin embargo se puede especificar un conjunto de uno o mas **ángulos de material** que rote el sistema coordenado del material con respecto al sistema del elemento para aquellos elementos que permiten propiedades ortotrópicas y anisotrópicas.

6.6.1 Esfuerzos y deformaciones

Las propiedades mecánicas elásticas relacionan el comportamiento de los esfuerzos y deformaciones con el material. Los esfuerzos son definidos como fuerzas por unidad de área actuando en un elemento cúbico alineado con el eje del material como muestra la figura 6.6.1-1. Los esfuerzos σ_{11} , σ_{22} y σ_{33} son llamados esfuerzos directos y tienden a causar el cambio de longitud, mientras σ_{12} , σ_{13} y σ_{23} son llamados esfuerzos de corte y tienden a causar cambio de ángulo.

No todas las componentes de esfuerzos existen en cada tipo de elemento. Por ejemplo los esfuerzos σ_{22} , σ_{33} y σ_{23} son asumidos ceros en elementos Frame y el esfuerzo σ_{33} es asumido cero en elementos Shell.

Las deformaciones ϵ_{11} , ϵ_{22} y ϵ_{33} miden el cambio de longitud del material a lo largo de los ejes 1, 2 y 3 respectivamente. Así como las deformaciones γ_{12} , γ_{13} y γ_{23} miden el cambio del ángulo en los planos locales del material 1-2, 1-3 y 2-3 respectivamente.

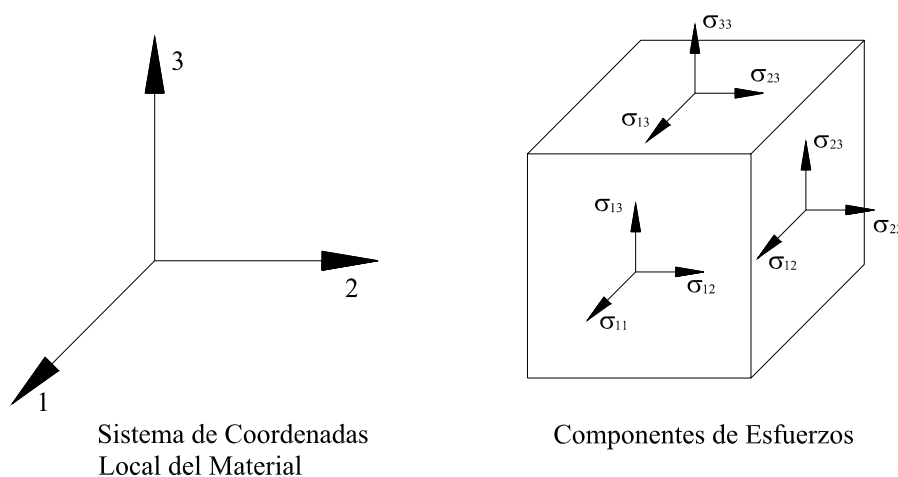


Figura 6.6.1-1. Definición de las Componentes de Esfuerzos en el Sistema de Coordenadas Local del Material

6.6.2 Materiales isotrópicos

El comportamiento de un material isotrópico es independiente de la carga u orientación del material. Los esfuerzos cortantes no tienen efecto directo sobre las deformaciones normales y no están afectados por el cambio de temperatura. El comportamiento isotrópico está usualmente asumido para concreto y acero.

Las propiedades térmicas y mecánicas isotrópicas relacionan deformaciones a esfuerzos y cambios de temperatura como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{e1} & \frac{-u12}{e1} & \frac{u12}{e1} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{e1} & \frac{-u12}{e1} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{e1} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{g12} & 0 & 0 \\ & \text{Sim} & & & \frac{1}{g12} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{g12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a1 \\ a1 \\ a1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta T$$

Donde: **e1** es el modulo de elasticidad de Young, **u12** es la relación de Poisson, **g12** es el modulo de corte, y **a1** es el coeficiente de expansión térmica. Esta relación se mantiene prescindiendo de la orientación de los ejes del material. Como se sabe la relación entre **g12** y **e1** es:

$$g12 = e1 / (2 \times (1 + u12)) \quad \text{donde} \quad -1 < u12 < 1/2$$

Temas relacionados con la temperatura no se verán en esta sección.

6.6.3 Materiales ortotrópicos y anisotrópicos

El SAP2000 permite trabajar con materiales cuyo comportamiento puede ser diferente en cada una de las tres direcciones locales. Aunque no se verán en esta sección vale la pena mencionarlo.

6.6.4 Densidad de masa

Para cada material se puede especificar una densidad de masa **m** que es usada para calcular la masa del elemento. La masa total del elemento es el producto de la densidad de masa y el volumen del elemento. Esta masa esta proporcionada en cada nudo del elemento.

La masa es aplicada en los tres grados de libertad traslacionales y los momentos de inercia rotacional de masa no son calculados.

Unidades de masa consistentes deben ser usadas. La densidad de masa es igual a la densidad de peso dividido por la aceleración debido a la gravedad.

6.6.5 Densidad de peso

Para cada material se puede especificar una densidad de peso **w** que es usada para calcular el peso propio del elemento. El peso total del elemento es el producto de la densidad de peso y el volumen del elemento. El peso propio es activado usando *Self-Weight Load* y *Gravity Load*.

6.7 Elementos Frame

6.7.1 Generalidades

Los elementos Frame son usados para modelar:

- Pórticos planos y tridimensionales.
- Armaduras planas y tridimensionales.
- Parrillas planas.

Un elemento Frame es modelado como una línea recta conectando dos nudos y considera efectos de curvatura biaxial, torsión, deformación axial y deformación por corte biaxial.

Cada elemento tiene su propio sistema de coordenadas local para definir propiedades de sección, cargas y para poder interpretar los resultados.

El elemento puede ser prismático y no prismático, La formulación no prismática permite dividir la longitud del elemento en cualquier número de segmentos en los cuales las propiedades pueden variar.

Los brazos rígidos (end offsets) sirven para modelar el efecto de endurecimiento que ocurre en las intersecciones de vigas y columnas, pueden hacerse parcial o totalmente rígidos. La liberación de extremos (end releases) también esta disponible para modelar las diferentes condiciones fijas en los extremos del elemento.

Cada elemento Frame puede ser cargado con cargas concentradas, con cargas distribuidas, cargas debidas a cables pre-esforzados, a cambios de temperatura y cargas por gravedad.

Las fuerzas internas de los elementos son mostradas en los extremos de cada elemento y a un número de espaciamientos iguales especificados por el usuario a lo largo de la longitud del elemento.

6.7.2 Grados de libertad

Un elemento Frame normalmente activa los seis grados de libertad en ambos nudos conectados. Sin embargo los tres grados de libertad rotacionales no serán activados en un nudo si el elemento no esta provisto de cualquier rigidez de momento o carga de momento en aquel nudo. Esto puede ocurrir en uno de los siguientes casos:

- El end offset en ese extremo es cero, y las propiedades geométricas de la sección **j**, **i33**, e **i22** son todas cero (**a** no es cero; **as2** y **as3** son arbitrarios), ó
- El end offset en ese extremo es cero; se sueltan las rotaciones a la flexión, **R2** y **R3**, en ese extremo; y la rotación torsional, **R1**, se suelta en cualquier extremo.

Cuando estas condiciones son aplicadas a ambos extremos, los elementos se comportan como miembros de armadura.

Para más información ver:

- “Propiedades de la sección” en esta sección.
- “Brazos rígidos” en esta sección.
- “Liberación de extremos” en esta sección.

6.7.3 Sistema de coordenadas local

Cada elemento Frame tiene su propio sistema de coordenadas local usado para definir secciones, propiedades, cargas y salida de resultados. Los ejes de este sistema local son denotados por 1, 2 y 3. El primer eje esta dirigido a lo largo de la longitud del elemento, los otros dos ejes se encuentran en el plano perpendicular al elemento con una orientación especificada por el usuario.

Lo importante es entender claramente la definición del sistema de coordenadas local 1, 2 y 3, y su relación con el sistema de coordenadas global X, Y y Z. Ambos sistemas siguen la regla de la mano derecha; queda a criterio del usuario definir el sistema local de tal manera que simplifique el ingreso de datos y la interpretación de resultados.

En muchas estructuras la definición del sistema de coordenadas local es simple. Los métodos provistos sin embargo dan suficiente poder y flexibilidad al describir la orientación de elementos Frame en muchas situaciones complicadas.

El método más simple, usando la orientación por defecto y el ángulo coordenado del elemento Frame es descrito a continuación.

Eje longitudinal 1 El eje local 1 es siempre el eje longitudinal del elemento, la dirección positiva es dirigida del extremo **i** al extremo **j**.

Orientación por defecto La orientación por defecto de los ejes locales 2 y 3 esta determinada por la relación entre el eje local 1 y el eje global Z.

- El plano local 1-2 es vertical (paralelo al eje Z)
- El sentido del eje local 2 es hacia arriba (+Z), pero si el elemento es vertical al eje local 2 es horizontal y toma el sentido y la dirección del eje global (+X).
- El eje local 3 es horizontal (paralelo al plano X-Y).

El eje local 2 apunta verticalmente hacia arriba para elementos horizontales.

Angulo del sistema de coordenadas local El ángulo del sistema de coordenadas local del elemento Frame, **ang**, es usado para definir las orientaciones de los elementos que son diferentes de las orientaciones por defecto. Es el ángulo a través del cual los ejes locales 2 y 3 son rotados alrededor del eje local positivo 1 desde la orientación por defecto.

La rotación para un valor positivo de **ang** será antihoraria cuando el eje local positivo +1 esta apuntando hacia el usuario.

Para elementos verticales **ang** es el ángulo entre el eje local 2 y el eje horizontal X positivo. De otro modo **ang** es el ángulo entre el eje local 2 y el plano vertical conteniendo el eje local 1. Ver figura 6.7.3-1.

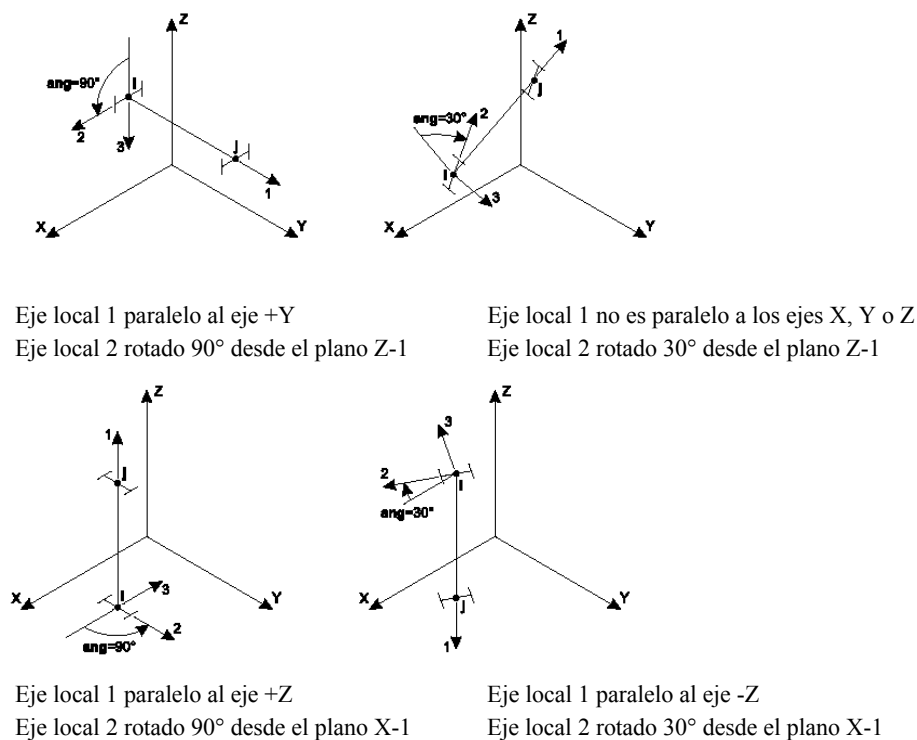


Figura 6.7.3-1. Orientación por defecto con respecto al ángulo coordenado del elemento Frame

6.7.4 Propiedades de sección

Una sección Frame es un grupo de propiedades geométricas (por ejemplo inercia alrededor de un eje) y propiedades del material (por ejemplo módulo de elasticidad) que describe la sección de uno o más elementos Frame. Las secciones son definidas independientemente de los elementos Frame y son asignadas a los elementos.

Las secciones son de dos tipos básicos:

- Prismáticas.- Todas las propiedades son constantes a lo largo de la longitud del elemento.
- No prismáticas.- Las propiedades pueden variar a lo largo de la longitud del elemento.

Las secciones no prismáticas son definidas por referencia a dos o más secciones prismáticas previamente definidas.

Sistema de coordenadas local Las propiedades de sección son definidas con respecto al sistema de coordenadas local del elemento Frame como sigue:

- La dirección 1 se encuentra a lo largo del eje del elemento, es normal al eje de la sección y corre a través de la intersección de los ejes neutros de la sección.

- La dirección de los ejes 2 y 3 son paralelos a los ejes neutros de la sección. Usualmente la dirección 2 toma la mayor dimensión de la sección (peralte) y la dirección 3 la menor dimensión (ancho).

Propiedades del material Las propiedades del material para la sección son especificadas por referencia a un material previamente definido. Las propiedades del material usadas por la sección son:

- El modulo de elasticidad, **e1**, para la rigidez axial y rigidez a la flexión.
- El modulo de corte, **g12**, para la rigidez torsional y la rigidez al corte transversal.
- El coeficiente de expansión térmica, **a1**, para la expansión axial y la tensión por flexión térmica.
- La densidad de masa, **m**, para calcular la masa del elemento.
- La densidad de peso, **w**, para calcular el peso propio y cargas de gravedad.

Propiedades geométricas y rigideces de la sección Seis propiedades geométricas básicas son usadas junto con las propiedades del material, para generar las rigideces de sección y estas son:

- El área de sección transversal **a**, la rigidez axial de la sección es: **a x e1**.
- El momento de inercia **i33**, alrededor del eje 3 para la flexión en el plano 1-2, y el momento de inercia **i22** alrededor del eje 2 para la flexión en el plano 1-3. Las correspondientes rigideces a la flexión de la sección son **i33 x e1** y **i22 x e1**.
- La constante torsional **j**. La rigidez torsional de la sección es: **j x g12**. Recordar que la constante torsional no es igual al momento polar de inercia, excepto para formas circulares.
- Las áreas de corte **as2** y **as3**, para corte transversal en los planos 1-2 y 1-3 respectivamente. Las correspondientes rigideces de corte transversal de la sección son **as2 x g12** y **as3 x g12**. Formulas para calcular las áreas de corte de secciones típicas están dadas en la figura 6.7.4-1.

Un miembro de armadura puede ser modelado por $j = i33 = i22 = 0$ y un miembro de pórtico plano (plano 1-2) puede ser modelado por $j = i22 = 0$.

Si **as2** o **as3** son cero las correspondientes deformaciones de corte transversal son cero, un área de corte igual a cero es interpretada como infinita. La rigidez de corte transversal es ignorada si la correspondiente rigidez a la flexión es cero.

Tipo de secciones Para cada sección las seis propiedades geométricas (**a**, **j**, **i33**, **i22**, **as2**, **as3**) pueden ser calculadas directamente, o pueden leerse de un archivo de datos de propiedades especificado.

Cálculo automático de las propiedades de sección Las seis propiedades geométricas de sección pueden ser automáticamente calculadas especificando las dimensiones para cada forma simple mostrada en la figura 6.7.4-2.

Notar que la dimensión **t3** es el peralte de la sección y contribuye a **i33**.

Se presenta las siguientes formas para el cálculo automático de propiedades geométricas:

- Sección rectangular.
- Sección tubular o sección sólida circular si $tw=0$ (o no es especificado).
- Sección cajón.
- Sección I.
- Sección canal.
- Sección T.
- Sección ángulo.
- Sección doble ángulo.

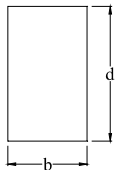
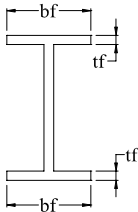
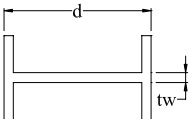
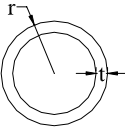
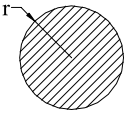
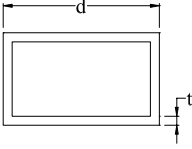
SECCION	DESCRIPCIÓN	ÁREA EFECTIVA DE CORTE
	Sección Rectangular Fuerzas de corte paralelas a las direcciones b o d	$\frac{5}{6}bd$
	Sección de ala ancha Fuerza de corte paralela al ala	$\frac{5}{3}tfbf$
	Sección de ala ancha Fuerza de corte paralela al alma	$t_w d$
	Sección de pared delgada Sección circular. Fuerza de corte en cualquier dirección	$\pi r t$
	Sección circular sólida Fuerza de corte en Cualquier dirección	$0.9\pi r^2$
	Pared delgada Sección Rectangular Fuerza de corte paralela a La dirección d	$2td$

Figura 6.7.4-1 Formulas para el cálculo del área de corte

Si es necesario otro tipo de sección (por ejemplo, W27x94 o 2L4x3x1/4), las seis propiedades geométricas se obtienen de un archivo de datos de propiedades especificado. Ver “Archivos de datos de propiedades de sección” a continuación.

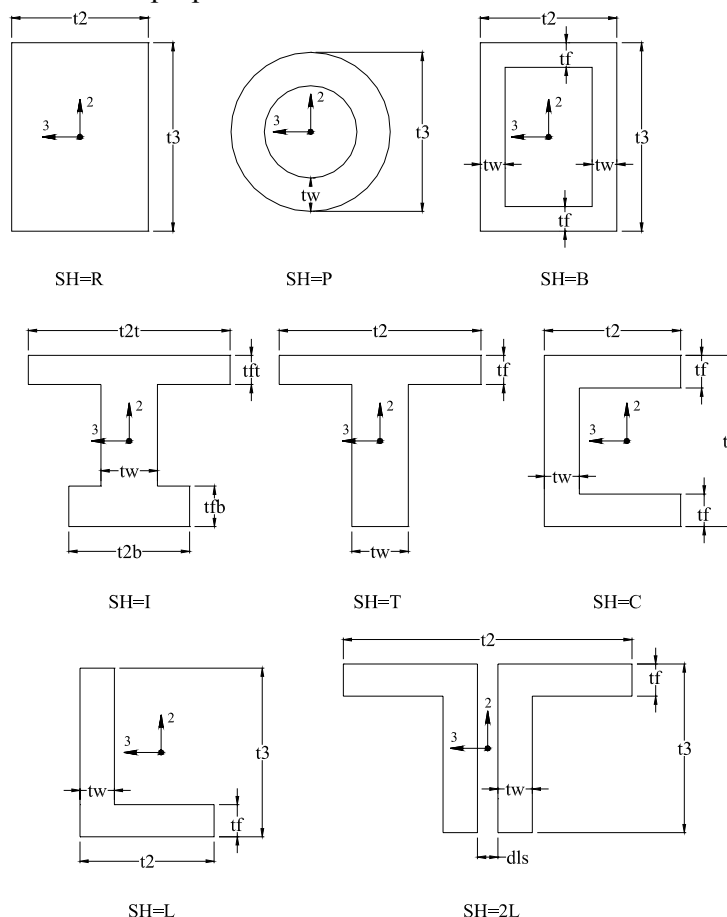


Figura 6.7.4-2. Parámetros para el cálculo automático de las propiedades de sección

Archivos de datos de propiedades de sección Tres tipos de archivos de datos son proporcionados con el SAP2000.

- AISC.PRO: Secciones del instituto Americano de acero de construcción.
- CISC.PRO: Secciones del instituto Canadiense de acero de construcción.
- SECTIONS.PRO: Este es simplemente una copia de AISC.PRO.

Las propiedades geométricas se guardan en las unidades de longitud especificadas cuando el archivo de datos fue creado. Estos son convertidos automáticamente por el SAP2000 a las unidades de longitud en las que se esta definiendo la estructura.

6.7.5 Brazos rígidos (end offsets)

Los elementos Frame son modelados como líneas conectadas a puntos (nudos). Los end offsets modelan la intersección de las secciones transversales de los elementos estructurales cuando se conectan a un nudo (por ejemplo viga-columna). En muchas estructuras las dimensiones de las secciones son grandes y la longitud de la intersección

puede ser una fracción significativa del total de la longitud de un elemento conectado (por ejemplo viga-placa).

Se puede especificar dos end offsets para cada elemento usando parámetros **End-I** y **End-J** correspondientes a los extremos i y j respectivamente. End-I es la distancia desde el nudo a la cara de la conexión del elemento dado; la misma definición se aplica a End-J. Ver la figura 6.7.5-1.

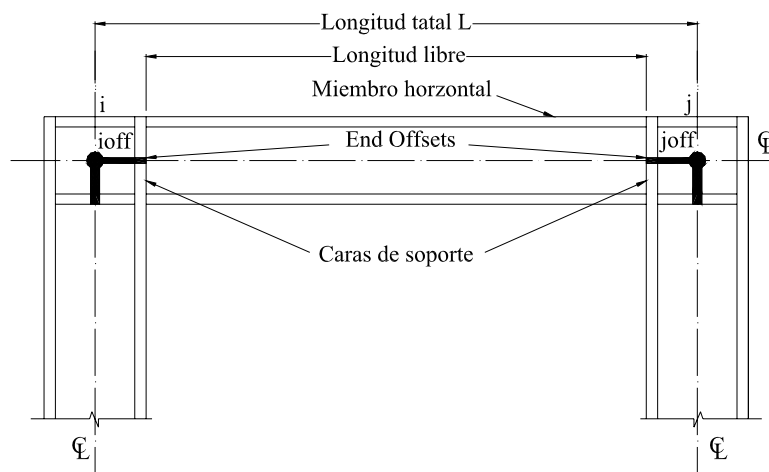


Figura 6.7.5-1. End Offsets del elemento Frame

Los end offsets son calculados automáticamente por el SAP2000 para cada elemento basado en la máxima dimensión de sección de todos los otros elementos que conectan a aquel elemento en un nudo común. Ver la figura 6.7.5-2.

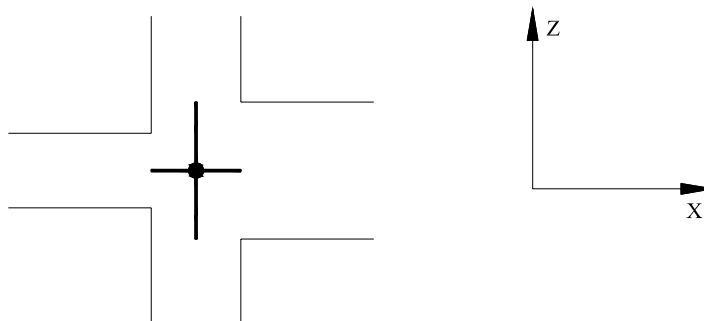


Figura 6.7.5-2. Cálculo automático de los End Offsets

Factor de zona rígida Se puede especificar un factor para cada elemento usando el parámetro *Rigid-Zone* el cual da la fracción de cada end offset que es asumida rígida para deformaciones por flexión y corte.

La longitud **Rigid-Zone** x **End-I** que inicia desde el nudo i es asumida rígida (similarmente para el nudo j). La longitud flexible **Lf** del elemento es:

$$L_f = L - \text{Rigid-Zone} \times (\text{End I} + \text{End J})$$

La zona rígida nunca afecta la deformación axial y la deformación torsional, la longitud total del elemento es asumida flexible para estas deformaciones.

El valor por defecto de *Rigid-Zone* es cero, un máximo valor de (1) indicara que los end offsets son totalmente rígidos. Se debe usar el juicio ingenieril al seleccionar el

valor apropiado para este parámetro, esto dependerá de la geometría de la conexión para diferentes elementos Frame.

Longitud libre La longitud libre denotada por L_c es la longitud entre los End Offsets (caras de soporte). $L_c = L - (\text{End I} + \text{End J})$ donde L es la longitud total del elemento.

Efectos del brazo rígido en la salida de resultados de fuerzas internas Las fuerzas y momentos internos son calculados en las caras de los apoyos y a otros puntos igualmente espaciados dentro de la longitud libre del elemento. Ninguna salida se produce dentro del End Offset, el cual incluye el nudo.

Efecto del brazo rígido en los End Releases Los End Releases siempre se ubican en las caras de apoyo, es decir, en los extremos de la longitud libre del elemento. Si una liberación de momento o corte se especifica en cualquier plano de curvatura en cualquier extremo del elemento, se asume que el End Offset es rígido para la curvatura y el corte en ese plano a ese extremo (es decir, actúa como si $\text{Rigid-Zone} = 1$). Esto no afecta los valores del factor Rigid-Zone al otro extremo o en el otro plano de curvatura.

6.7.6 Liberación de extremos (End Releases)

Normalmente los tres grados de libertad traslacionales y los tres grados de libertad rotacionales en cada extremo del elemento Frame son continuos con los del nudo, y por lo tanto continuos con los grados de libertad de todos los otros elementos conectados a aquel nudo. Sin embargo esto no es posible si se libera uno o más grados de libertad del nudo cuando se sabe que la correspondiente fuerza o momento es cero. End Releases hace posible esta liberación y siempre se especifica en el sistema de coordenadas local y no afecta cualquier otro elemento conectado al nudo.

En el ejemplo mostrado en la figura 6.7.6-1, el elemento diagonal tiene una conexión de momento al extremo **i** y una conexión con “pin” al extremo **j**. Los otros dos elementos conectados al nudo en el extremo **j** son continuos. Por consiguiente, siguiendo el modelo de “pin” la rotación R_3 en el extremo **j** en el elemento diagonal será liberada. Esto asegura que el momento es cero en el “pin” del elemento diagonal.

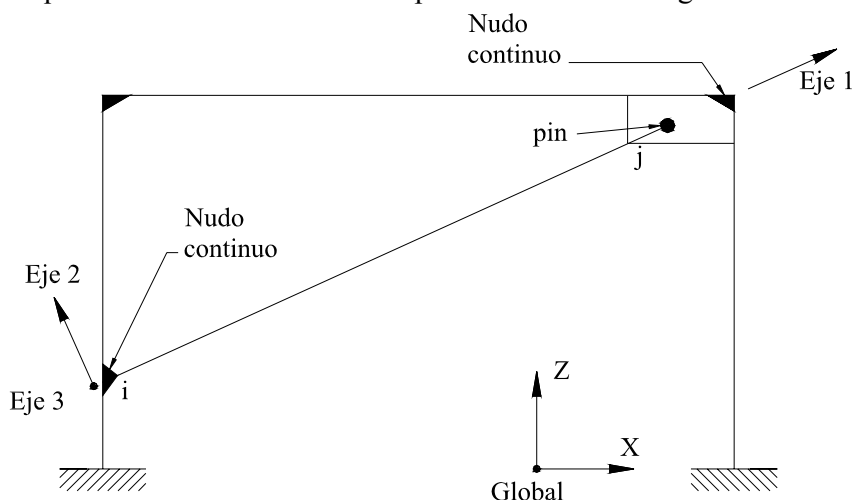


Figura 6.7.6-1. Para el elemento diagonal: R_3 está liberado en el nudo.

End Releases inestables Cualquier combinación de End Releases puede ser especificada para un elemento Frame a condición de que el elemento permanezca estable, esto asegura que toda la carga aplicada al elemento es transferida al resto de las estructuras. Los siguientes conjuntos de End Releases son inestables, cada uno o en combinación no son permitidos.

- Liberar U1 a ambos extremos.
- Liberar U2 a ambos extremos.
- Liberar U3 a ambos extremos.
- Liberar R1 a ambos extremos.
- Liberar R2 a ambos extremos y U3 en cualquier extremo.
- Liberar R3 a ambos extremos y U2 en cualquier extremo.

6.7.7 Masa

En un análisis dinámico, la masa de la estructura se usa para calcular las fuerzas inerciales. La masa contribuida por el elemento Frame se reparte en los nudos **i** y **j**. Ningún efecto inercial es considerado dentro del propio elemento.

La masa total se distribuye a los dos nudos de la misma manera como una carga transversal igualmente distribuida causaría las reacciones a los extremos de una viga simplemente apoyada. La definición de End Releases no afecta la distribución de la masa. El total de la masa se aplica en cada uno de los tres grados de libertad traslacionales: UX, UY y UZ. No se calcula ningún momento de inercia rotacional de masa para los grados de libertad rotacionales.

6.7.8 Carga de peso propio

La carga del peso propio activa el peso propio de todos los elementos en el modelo. Para un elemento Frame, el peso propio es una fuerza que es distribuida a lo largo de la longitud del elemento. La magnitud del peso propio es igual a la densidad de peso **w** multiplicada por el área transversal **a**.

La carga del peso propio siempre actúa hacia abajo, en la dirección **-Z**. Se puede escalar el peso propio por un solo factor de escala que se aplica igualmente a todos los elementos en la estructura.

6.7.9 Carga de gravedad

Puede aplicarse la carga de gravedad a cualquier elemento Frame para activar el peso propio del elemento. Usando la carga de gravedad, el peso propio puede escalarse y puede aplicarse en cualquier dirección. Puede aplicarse diferentes direcciones y factores de escala a cada elemento. Si todos los elementos son cargados igualmente y en la dirección **-Z**, es más conveniente usar la carga del peso propio.

6.7.10 Carga concentrada sobre paños

La carga concentrada sobre paños es usada para aplicar fuerzas y momentos concentrados en ubicaciones arbitrarias sobre el elemento Frame. La dirección de la carga puede ser especificada en un sistema de coordenadas fijo (alterno o global) o en el sistema de coordenadas local del elemento.

La ubicación de la carga puede ser especificada por una de las siguientes maneras:

- Especificando la distancia relativa, **rd**, medida desde el nudo **i**. Esta debe satisfacer $0 \leq \mathbf{rd} \leq 1$. La distancia relativa es la fracción de la longitud del elemento.
- Especificando una distancia absoluta, **d** medida desde el nudo **i**. Esta debe satisfacer $0 \leq \mathbf{d} \leq L$, donde **L** es la longitud del elemento.

Cualquier número de cargas concentradas puede ser aplicado a cada elemento. Las cargas múltiples que son aplicadas en la misma ubicación son añadidas juntamente. Ver figura 6.7.10-1.

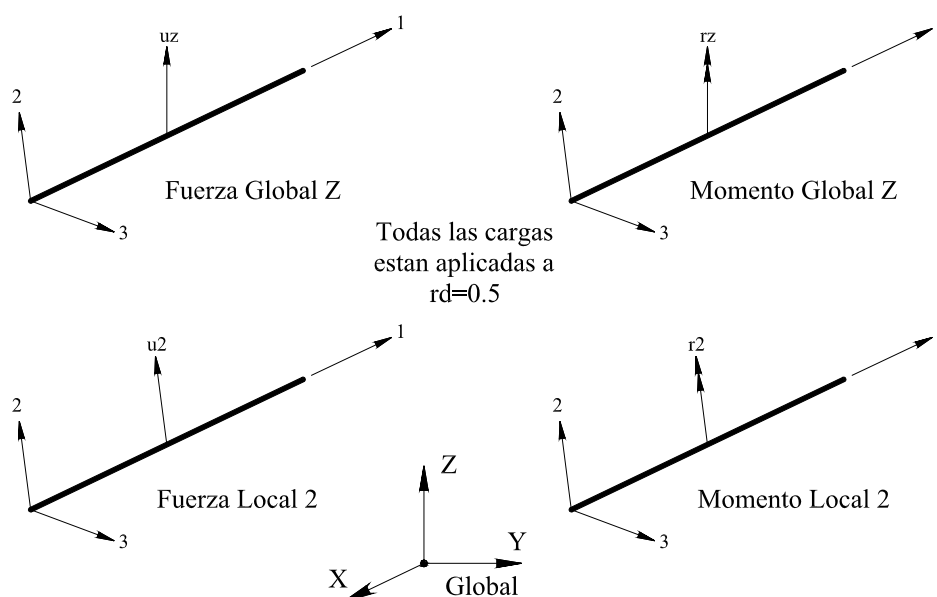


Figura 6.7.10-1. Ejemplos de carga concentradas sobre paño.

6.7.11 Carga distribuida sobre paño

La carga distribuida sobre paño es usada para aplicar fuerzas o momentos distribuidos sobre elementos Frame. La intensidad de la carga puede ser uniforme o trapezoidal. La dirección de la carga puede ser especificada en un sistema de coordenadas fijo (global o alterno) o en el sistema de coordenadas local del elemento.

Tramo cargado Las cargas pueden aplicarse en parte o a toda la longitud del elemento. Múltiples cargas pueden aplicarse a un elemento particular. Las longitudes cargadas pueden traslaparse, en este caso las cargas aplicadas son adicionadas.

Se puede cargar un tramo por una de las siguientes maneras:

- Especificando dos distancias relativas **rda** y **rdb**, medidas desde el nudo **i**. Ellos deben satisfacer $0 \leq \mathbf{rda} < \mathbf{rdb} \leq 1$. La distancia relativa es la fracción de la longitud del elemento.
- Especificando dos distancias absolutas **da** y **db**, medidas desde el nudo **i**, deben satisfacer $0 \leq \mathbf{da} < \mathbf{db} \leq L$, donde L es la longitud del elemento.
- No especificar la distancia, lo cual indica el total de la longitud del elemento.

Intensidad de la carga La intensidad de la carga es una fuerza o momento por unidad de longitud. Excepto para el caso de cargas proyectadas, la intensidad esta medida por unidad de longitud del elemento.

Para cada componente de fuerza o momento a ser aplicado, un valor de carga particular puede ser dado si la carga es distribuida uniformemente. Dos valores de carga son necesarios si la intensidad de la carga varía linealmente sobre su rango de aplicación. Ver figura 6.7.11-1.

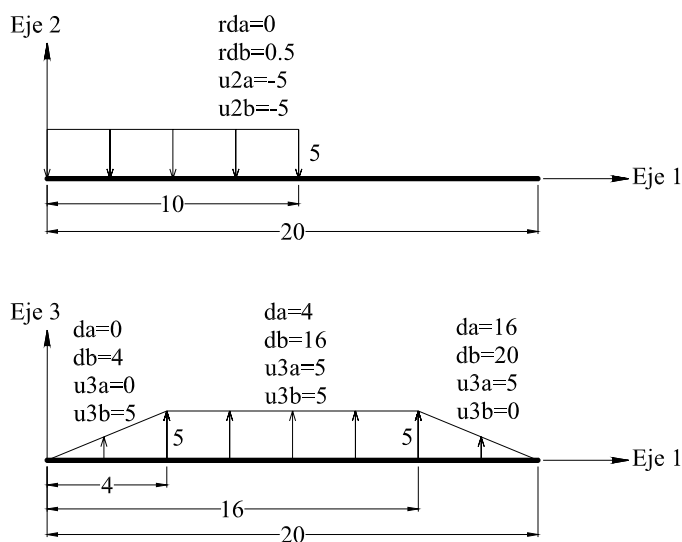


Figura 6.7.11-1. Ejemplo de cargas distribuidas sobre paño.

6.7.12 Salida de resultados de las fuerzas internas

En un elemento Frame las fuerzas internas son las fuerzas y momentos producto de la integración de los esfuerzos en la sección transversal del elemento. Estas fuerzas internas son:

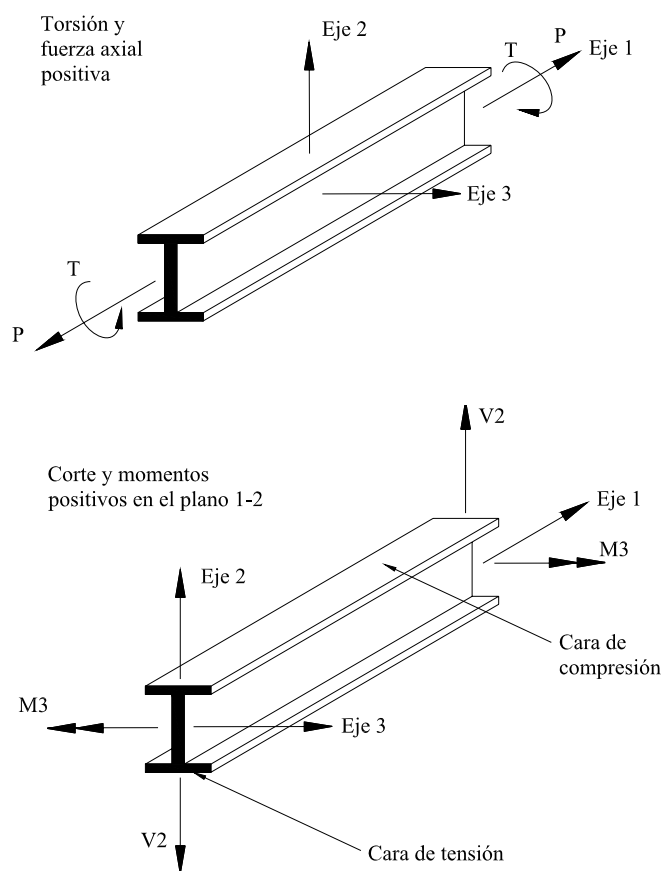
- P, fuerza axial.
- V2, fuerza de corte en el plano 1-2.
- V3, Fuerza de corte en el plano 1-3.
- T, torsión axial.
- M2, momento de flexión en el plano 1-3 (sobre el eje 2).
- M3, momento de flexión en el plano 1-2 (sobre el eje 3).

Estas fuerzas y momentos internos están presentes en cada sección transversal a lo largo de la longitud del elemento. El signo de convención se ilustra en la figura 6.7.12-1.

Por definición, una carga positiva 1 tiene la normal exterior (apuntando hacia afuera del elemento) en la dirección local 1 positiva.

Las fuerzas y momentos internos son calculados en puntos igualmente espaciados a lo largo de la longitud del elemento. El parámetro **nseg** especifica el número de segmentos iguales a lo largo de la longitud del elemento. Para el valor predefinido de 2, la salida se produce a los dos extremos y al punto medio del elemento. Ver “efecto de los End Offsets sobre la salida de las fuerzas internas” más adelante.

Para especificar el parámetro **nseg** seleccionar **Output Segments...** en el menú **Assign**.



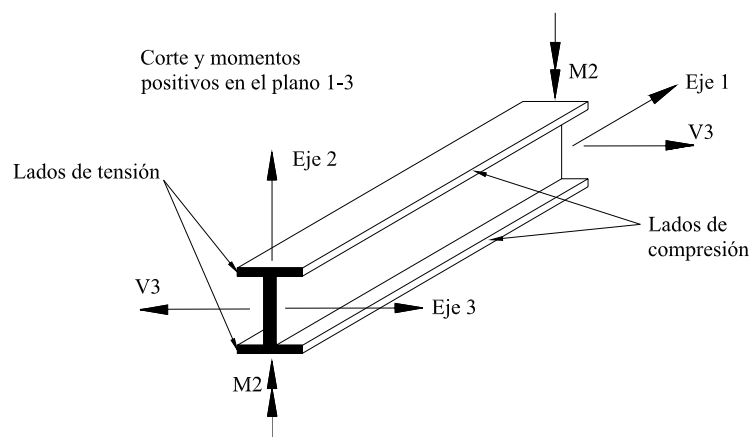


Figura 6.7.12-1 Momentos y Fuerzas internas en el elemento Frame.

Las fuerzas internas del elemento Frame son calculadas para todos los casos de análisis: Cargas, Modos, Espectros, Historias y Combinaciones. Los resultados de un análisis Tiempo-Historia son los valores máximos y mínimos que se lograron durante el análisis. Estos pueden imprimirse en el archivo de resultados y pueden visualizarse usando la interfase grafica del SAP2000. Es importante notar que los resultados de un análisis de respuesta espectral siempre son positivos.

El archivo de resultados tiene la extensión OUT. Ver “Interfase grafica de Post-procesamiento”.

Efecto del Brazo rígido en la salida de resultados de Fuerzas Internas Cuando los End Offsets están presentes, las fuerzas y momentos internos son calculados en las caras de los apoyos y en **nseg - 1** puntos, igualmente espaciados dentro de la longitud libre del elemento. La salida no se produce dentro de la longitud del End Offset (la longitud incluye el nudo). La salida solo se produce en las conexiones **i** o **j** cuando el End Offset correspondiente es cero.

Fuerzas internas en el Archivo de resultados En el elemento Frame las fuerzas y momentos internos están impresos en el archivo de resultados debajo del encabezado: FRAME ELEMENT INTERNAL FORCES.

Todas las fuerzas internas para un solo elemento están impresas juntas. Se presentan los elementos en el orden alfanumérico. Para cada Caso de Análisis las fuerzas internas están impresas para todos los puntos de salida. Las ubicaciones de los puntos de salida son identificadas por la distancia relativa de los puntos a la conexión **i**. La distancia relativa es una fracción de la longitud del elemento (entre cero y uno). La salida típica del elemento Frame se muestra en la figura 6.7.12-2.

Por defecto, ninguna fuerza interna esta impresa. Se puede especificar los Casos de Análisis que serán impresos. Las fuerzas internas siempre pueden mostrarse usando la interfase grafica del SAP2000 aún cuando ningún resultado se ha seleccionado por imprimir. Ver “Interfase Grafica de Post-procesamiento”.

Fuerzas en las conexiones Las fuerzas en las conexiones de los elementos Frame son fuerzas y momentos concentrados que actúan en dichas conexiones y representan el

efecto del resto de la estructura en el elemento. No deben confundirse las fuerzas en las conexiones de elementos con las fuerzas y momentos internos que, como las tensiones, actúan a lo largo del elemento, no solo en las conexiones. Estas fuerzas internas están impresas en el archivo de resultados debajo del encabezado: FRAME ELEMENT JOINT FORCES.

```

F R A M E   E L E M E N T   I N T E R N A L   F O R C E S

ELEM      1  ===== LENGTH =      3.000000

LOAD      LL  -----

REAL DIST      P          V2          V3          T          M2          M3
0.00000  -2.549630  -0.001104  -0.260473  -2.61E-18  -0.253804  -0.000926
0.50000  -2.549630  -0.001104  -0.260473  -2.61E-18   0.136901   0.000731
1.00000  -2.549630  -0.001104  -0.260473  -2.61E-18   0.527611   0.002387

LOAD      LD  -----

REAL DIST      P          V2          V3          T          M2          M3
0.00000  -14.018328  -0.236686  -0.720988  -1.01E-17  -0.702531  -0.300997
0.50000  -13.442328  -0.236686  -0.720988  -1.01E-17   0.378953   0.054032
1.00000  -12.866328  -0.236686  -0.720988  -1.01E-17   1.460434   0.409060

LOAD      EQX  -----

REAL DIST      P          V2          V3          T          M2          M3
0.00000   4.754378   0.056591  -2.16E-18   1.22E-18  -3.47E-18   0.114055
0.50000   4.754378   0.056591  -2.16E-18   1.22E-18  -2.20E-19   0.029168
1.00000   4.754378   0.056591  -2.16E-18   1.22E-18   3.03E-18  -0.055718

COMB      COMB1  ----- MAX

REAL DIST      P          V2          V3          T          M2          M3
0.00000  -29.057434  -0.427690  -1.688488  -2.20E-17  -1.645261  -0.543192
0.50000  -28.020634  -0.427690  -1.688488  -2.20E-17   0.887468   0.098353
1.00000  -26.983834  -0.427690  -1.688488  -2.20E-17   3.420202   0.739589

COMB      COMB1  ----- MIN

.....

```

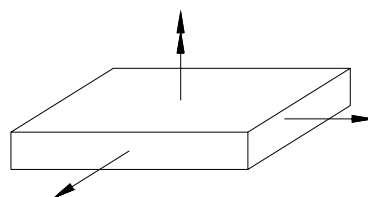
Figura 6.7.12-2. Fuerzas internas en el elemento Frame en el archivo de respuestas (extensión OUT)

6.8. Elementos Shell

6.8.1 Generalidades

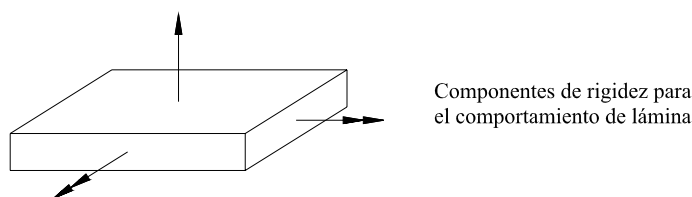
Un elemento Shell es una formulación de tres o cuatro nudos que combina el comportamiento de membrana y de lámina. El elemento de cuatro nudos no tiene que ser necesariamente plano.

El comportamiento de membrana incluye componentes de rigidez traslacional en el plano y componente de rigidez rotacional en la dirección normal al plano del elemento.



Componentes de rigidez para el comportamiento de membrana

El comportamiento de lámina incluye componentes de rigidez rotacional de la lámina sobre su plano y componente de rigidez traslacional en la dirección normal al plano del elemento. Por defecto, es usada una formulación de lámina gruesa que incluye los efectos de deformación transversal por corte.



A continuación se mencionan estructuras que pueden ser modeladas con este elemento:

- Cáscaras tridimensionales, tales como tanques y cúpulas.
- Estructuras laminares tales como losas.
- Estructuras de membrana tales como muros de corte.

Para cada elemento Shell en la estructura, se puede escoger entre un modelo de membrana pura, lámina pura o un comportamiento completo de cáscara.

Cada elemento Shell tiene su propio sistema de coordenadas para definir sus propiedades de material y cargas, y para interpretar sus resultados. Son permitidas propiedades ortotrópicas del material y dependencia de temperaturas. Cada elemento puede ser cargado con cargas gravitatorias y uniformes en cualquier dirección; superficies de presión en las caras exterior, interior y en las caras laterales; y cargas debido a variaciones de temperatura.

6.8.2 Nudos de conexión

Cada elemento Shell puede tener cualquiera de las siguientes formas:

- **Cuadrilátero**, definido mediante cuatro nudos.
- **Triangular**, definido mediante tres nudos.

La forma cuadrangular es la más precisa de las dos, el elemento triangular es recomendado solamente para transiciones.

Las ubicaciones de los nudos deberían ser escogidas considerando las siguientes condiciones geométricas:

- Se obtiene mejores resultados para un cuadrilátero cuando sus ángulos internos son cercanos a 90° o se encuentran dentro del rango de 45° a 135° .
- La relación de aspecto de un elemento no debería ser demasiado grande. Para un cuadrilátero, esta es la relación entre la mayor y la menor distancia de los puntos medios de los lados opuestos.

Mejores resultados son obtenidos para relaciones de aspecto cercanos a la unidad, o al menos inferiores a cuatro. Además, no deberían exceder de diez.

- Para un cuadrilátero, los cuatro nudos no necesitan ser coplanares. La normal en una esquina es perpendicular a los dos lados que se encuentran en ella. Mejores resultados son obtenidos si el mayor ángulo entre las normales en las esquinas es menor que 30° . Este ángulo no debería exceder a 45° .

6.8.3 Grados de libertad

El elemento Shell siempre activa todos sus seis grados de libertad en cada uno de sus nudos de conexión. Cuando el elemento es usado como una membrana pura, se debe establecer que restricciones u otros soportes serán provistos a los grados de libertad para traslaciones en el plano y rotación alrededor de la normal al mismo. El uso de comportamiento completo de cáscara (membrana más lámina) es el recomendado para toda estructura tridimensional.

6.8.4 Angulo del material

El sistema de coordenadas local del material y el correspondiente al elemento no necesariamente son iguales. La dirección local 3 siempre coincide para los dos sistemas pero el eje 1 del material y el del elemento pueden diferir por un ángulo α .

Este ángulo no tiene efectos sobre las propiedades de un material isotrópico ya que estos son independientes de la orientación.

Espesor

Cada sección tiene un espesor de membrana y de curvatura constante. El espesor de la membrana, **th**, es usado para calcular:

- La rigidez de membrana para secciones de **Shell** y **Membrane**.
- El volumen del elemento para el cálculo del peso propio y las masas.

El espesor de curvatura, **thb**, es usado para calcular:

- Las rigideces de lámina y de corte transversal para secciones de **Shell** y **Plate**.

Normalmente estos dos espesores son iguales y solo se necesita especificar **th**. Sin embargo, para algunas aplicaciones, tales como modelos de superficies acanaladas, el comportamiento de membrana y lámina curva no pueden ser adecuadamente representados por un material homogéneo o un solo espesor. Para este propósito, se puede especificar un valor de **thb** diferente de **th**.

6.8.5 Masa

En un análisis dinámico, la masa de la estructura es usada para calcular las fuerzas de inercia. En un elemento Shell, la masa es agrupada en los nudos. La masa total del elemento es igual a la integral sobre su plano de la densidad de masa, **m**, multiplicada por el espesor, **th**.

La masa total es aplicada en cada uno de los tres grados de libertad traslacionales UX, UY y UZ. Momentos de inercia de masas no son calculados para los grados de libertad rotacionales.

6.8.6 Carga del peso propio

La carga de peso propio es una fuerza uniformemente distribuida que siempre actúa hacia abajo, en la dirección global -Z. Se puede graduar el peso propio por un solo factor de escala que se aplica por igual a todos los elementos de la estructura. La magnitud del peso propio es igual a la densidad del peso, w , multiplicada por el espesor t_h .

6.8.7 Carga de gravedad

Puede ser aplicada a cada elemento Shell para activar el peso propio del elemento. Usando cargas de gravedad, el peso propio puede ser graduado y aplicado en cualquier dirección. Diferentes factores de escala y dirección pueden ser aplicados a cada elemento. Si todos los elementos han sido igualmente cargados hacia abajo (-Z), es más conveniente usar cargas de peso propio.

6.8.8 Carga uniforme

Es usada para aplicar fuerzas uniformemente distribuidas en la superficie neutra del elemento Shell. La dirección de carga puede ser especificada en un sistema de coordenadas fijo (sistema de coordenadas global o alterno) o en el sistema de coordenadas local del elemento.

Intensidades de carga son dadas como fuerzas por unidad de área. Si estas son especificadas en diferentes sistemas de coordenadas el programa internamente las llevara al sistema de coordenadas local del elemento. La fuerza total actuante en el elemento en cada dirección local esta dada por la intensidad de carga total en esa dirección, multiplicada por el área de la superficie media. Esta fuerza es repartida proporcionalmente en los nudos del elemento.

6.8.9 Cargas de presión superficial

Son usadas para aplicar cargas de presión externa sobre cualquiera de las seis caras del elemento Shell. Las presiones superficiales siempre actúan en dirección normal a la cara. Presiones positivas se dirigen sobre el interior del elemento.

Las presiones pueden ser constantes sobre la cara o interpoladas a partir de valores dados en los nudos, los cuales son obtenidos de los nudos **patterns**, y no son necesariamente iguales para las diferentes caras.

Las caras interior y exterior son denominadas 5 y 6 respectivamente. Los lados del elemento son denotados caras 1, 2, 3 y 4 (1 al 3 si es triangular). La presión actuante en el lado es multiplicada por el espesor t_h , integrado a lo largo de la longitud del lado y repartido proporcionalmente en ambos nudos del lado.

6.8.10 Salida de resultados de Fuerzas y Esfuerzos internos

Las fuerzas internas del elemento Shell son las fuerzas y momentos que resultan a partir de la integración de esfuerzos sobre el espesor del elemento. Estas fuerzas internas son:

- Fuerzas directas de membrana F11 y F22.

$$F_{11} = \int_{-th/2}^{+th/2} \sigma_{11} dx_3$$

$$F_{22} = \int_{-th/2}^{+th/2} \sigma_{22} dx_3$$

- Fuerza constante de membrana F12.

$$F_{12} = \int_{-th/2}^{+th/2} \sigma_{12} dx_3$$

- Momento de curvatura en laminas M11 y M22.

$$M_{11} = - \int_{-thb/2}^{+thb/2} t \sigma_{11} dx_3$$

$$M_{22} = - \int_{-thb/2}^{+thb/2} t \sigma_{22} dx_3$$

- Momento de torsión en laminas M12.

$$M_{12} = - \int_{-thb/2}^{+thb/2} t \sigma_{12} dx_3$$

- Fuerzas de corte transversal en laminas V13 y V23.

$$V_{13} = \int_{-thb/2}^{+thb/2} \sigma_{13} dx_3$$

$$V_{23} = \int_{-thb/2}^{+thb/2} \sigma_{23} dx_3$$

donde x_3 es la variable a lo largo del espesor medido desde la superficie neutra del elemento.

Es importante resaltar que estos esfuerzos resultantes son fuerzas y momentos por unidad de longitud en el plano. Ellos están presentes en cada punto de la superficie neutra del elemento. Las convenciones de signos para los esfuerzos y fuerzas internas son ilustradas en la figura 6.8.10-1.

Los esfuerzos actuantes en la cara positiva están orientados en la dirección positiva de los ejes de coordenadas local. Una cara positiva es aquella cuya normal sigue la dirección positiva local 1 o 2.

Las fuerzas internas positivas corresponden a un estado de esfuerzos positivos que son constantes a través del espesor. Momentos internos positivos corresponden a un estado de esfuerzos que varían linealmente a través del espesor y son positivos en la parte interior:

$$\sigma_{11} = \frac{F_{11}}{th} - \frac{12M_{11}}{thd^3} x_3 \quad \sigma_{12} = \frac{F_{12}}{th} - \frac{12M_{12}}{thd^3} x_3 \quad \sigma_{23} = \frac{V_{23}}{thb}$$

$$\sigma_{22} = \frac{F_{22}}{th} - \frac{12M_{22}}{thd^3} x_3 \quad \sigma_{13} = \frac{V_{13}}{thb} \quad \sigma_{33} = 0$$

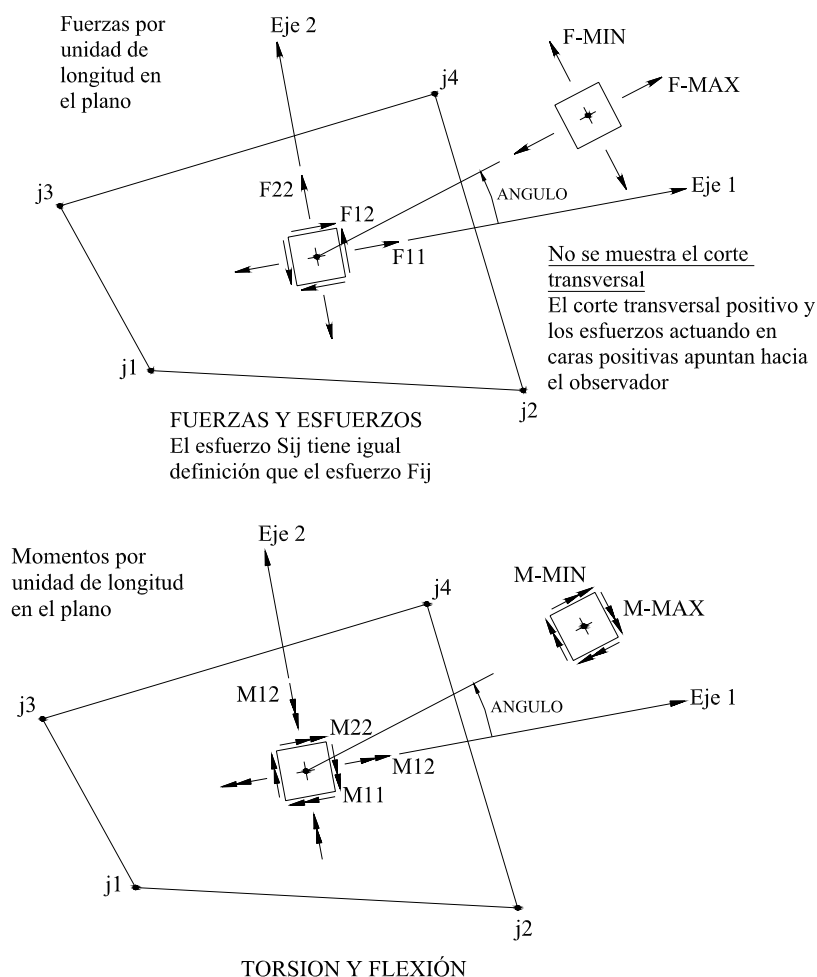


Figura 6.8.10-1. Fuerzas internas y esfuerzos en elementos Shell

Los esfuerzos de corte transversal dados aquí son valores promedios. La real distribución de esfuerzos de corte es parabólica, siendo cero en la superficie exterior e interior y tomando un máximo o mínimo valor en la superficie neutra del elemento.

Las fuerzas y esfuerzos internos en los elementos Shell son calculados para los siguientes tipos de análisis: Cargas, Modos, Espectros, Historias y Combinaciones.

Los esfuerzos y las fuerzas internas en elementos Shell son impresos en el archivo de resultados bajo el título SHELL ELEMENT INTERNAL FORCES Y STRESSES.

Todos los resultados para un solo elemento son impresos juntos. Los elementos son presentados en orden alfanumérico. Para cada Caso de Análisis, las fuerzas internas son impresas en los nudos del elemento, seguido por los esfuerzos.

Las fuerzas internas y esfuerzos pueden ser interpolados sobre todo el elemento a partir de los valores impresos en los nudos.

Las fuerzas internas son etiquetadas **F11**, **F22**, **F12**, **M11**, **M22**, **M12**, **V13** y **V23**. Los esfuerzos son etiquetados **S11**, **S22**, **S12**, **S13** y **S23**. Valores de esfuerzos en la parte exterior e interior también son indicados. La salida típica de las fuerzas y los esfuerzos internos se muestran en la figura 6.8.10-2.

Las fuerzas internas y esfuerzos también se pueden mostrar usando la interfase gráfica del SAP2000 aún si los resultados no han sido seleccionados para la impresión en el archivo de respuestas *filemane.OUT*.

6.8.11 Fuerzas en nudos

Son fuerzas concentradas y momentos actuantes en los nudos del elemento que representan el efecto del resto de la estructura sobre el elemento. No deben ser confundidos con fuerzas y momentos internos, los cuales, al igual que los esfuerzos, actúan por todo el elemento, no solo en nudos. Además, las fuerzas internas son definidas por unidad de longitud. Fuerzas en los nudos del elemento son valores concentrados de fuerza y momento.

```

S H E L L   E L E M   I N T E R N A L   &   S T R E S S E S

ELEM          1  ===== LTYPE = SHELL

LOAD   LOAD1  -----

JOINT          F11          F22          F12          F-MAX          F-MIN          ANGLE
1    89.322316   446.611582    79.66769   471.566760    64.367139    75.666956
2    80.395646   151.978232    81.129000   192.564925   -10.191046    63.422412
4   -50.674338   418.612251   136.883147   455.585186   -87.646763    74.877419
3  -109.601008   123.978901   120.274686   174.837071  -160.459178    97.078921

JOINT          M11          M22          M12          M-MAX          M-MIN          ANGLE
1   173.157945   890.789723    57.410636   895.385171   173.562496    85.423502
2   224.399949   1122.000      12.036226   1122.161    224.238580    89.231885
4   -37.925684   802.265894    80.756982   809.256186   -45.625984    84.556924
3   125.552106   724.985627    35.405628   727.073015   123.456895    86.631158

JOINT          V13          V23          V-MAX          ANGLE
1   -69.614570   134.099569    151.092166    117.435051
2   -69.614570   442.385194    447.829043    98.942853
4  -186.829546   134.099169    229.998014    144.334989
3  -186.859571   442.385194    480.230323    112.898763

JOINT      S11-TOP      S22-TOP      S12-TOP      S-TOP-MAX      S-TOP-MIN      ANGLE
1   -26277.080  -131385.400  -8123.257  -2565.2983  -132009.498  -4.393315
2   -33508.014  -167540.071  -1399.789  -33493.397  -167554.688  -0.598292
4    5437.134  -118216.668  -11433.413   6486.416  -119264.950  -5.238565
3  -19380.553  -108128.449  -4709.945  -19131.289  -108377.711  -3.029547

JOINT      S11-BOT      S22-BOT      S12-BOT      S-BOT-MAX      S-BOT-MIN      ANGLE
1    27170.303   135851.516   9099.934   136608.190   26419.629    82.564700
2    33811.971   169059.853   2211.097   169095.991   33757.833    89.063646
4   -5943.877   122402.791  12801.547   123667.186   -7208.273    84.359252
3   18284.540   109368.238   5912.692   109750.456   17902.322    86.301337

JOINT      S13-AVG      S23-AVG          S-AVG-MAX          ANGLE
1   -348.072852   670.496347    755.460166    117.435051
2   -348.072852   2211.926      2239.145      98.942837
4   -934.297862   670.496347    1149.990    144.334989
3   -934.297862   2211.926      2401.152    112.898763

ELEM          2  ===== LTYPE = SHELL

LOAD   LOAD1  -----

JOINT          F11          F22          F12          F-MAX          F-MIN          ANGLE
.....

```

Figura 6.8.10-2. Fuerzas y esfuerzos internos en el elemento Shell en el archivo de respuestas (extensión OUT)

6.9 INTERFASE GRAFICA DE PRE PROCESAMIENTO

6.9.1 Modelo estructural

El SAP2000 analiza y diseña la estructura definida mediante la Interfase Gráfica del Usuario (GUI). La estructura queda modelada mediante las siguientes definiciones:

- Propiedades del material.
- Elemento tipo barra o Frame: vigas, columnas, armaduras.
- Elementos tipo cáscara o Shell: muros, losas.
- Nudos, que representan las conexiones de los elementos.
- Restricciones y resortes que soportan los nudos.
- Cargas; peso propio, sismo y otros
- Luego del análisis, el modelo incluirá desplazamientos, esfuerzos y reacciones.

6.9.2 La pantalla del SAP2000

La pantalla del SAP2000 esta compuesta de:

Ventana Principal.-Muestra en su totalidad el GUI.

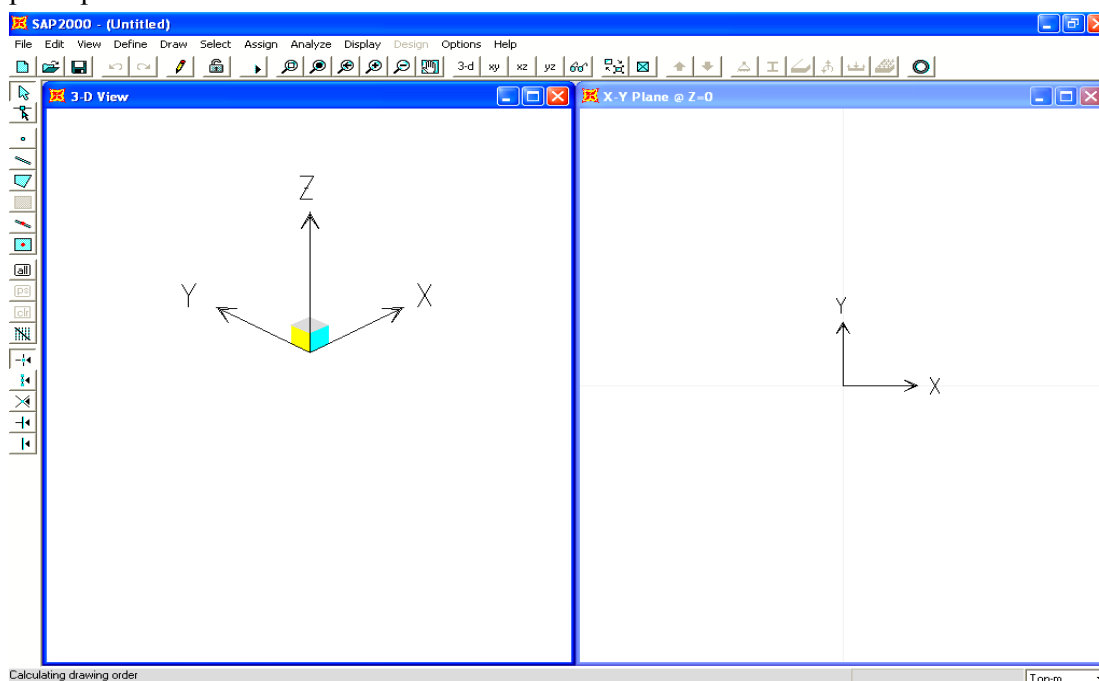
Barra de menú.- Contiene todas las operaciones que se puedan realizar con el programa.

Barra de Herramientas Principal.-Mediante esta barra se puede tener acceso rápido a las operaciones comúnmente más usadas.

Barra de Herramientas Lateral.- Mediante esta barra se puede tener acceso rápido a las operaciones que son empleadas para hacer modificaciones en la geometría del modelo.

Ventanas.- Muestra la geometría del modelo, también puede mostrar propiedades de los elementos, cargas, resultados de un análisis y diseño. Se puede tener hasta cuatro ventanas al mismo tiempo (Options en el Menú → Windows→ Four), pero solo una podrá estar activada.

Cada ventana puede tener su propia orientación y tipo de imagen. Las operaciones realizadas solo afectan a la ventana activa. La siguiente figura muestra la ventana principal del SAP2000.



6.9.3 Opciones de vistas

Vistas en 2-D y 3-D

La **Vista en 2-D** muestra un solo plano paralelo a uno de los planos XY, XZ o YZ solo los objetos en dicho plano son visibles.

La **Vista en 3-D** muestra todo el modelo desde un punto determinado. La dirección de la vista es definida por un ángulo en el plano horizontal y otro ángulo sobre dicho plano.












Pan, Zoom Limits

Zoom: Esta opción se emplea para ampliar y reducir una vista y así obtener mayor detalle.

Pan: Mueve dinámicamente la estructura alrededor de la ventana exhibida.


Limits: Mediante esta opción se puede aumentar ó disminuir los límites de coordenadas XYZ que restringe la porción de la estructura visible en la ventana exhibida.

Descripción de las herramientas de las opciones de vista

	Zoom	Amplia la estructura definiendo un área con el mouse
	Restore Full View	Restituye la vista completa del modelo
	Restore Previous View	Restituye la vista previa del modelo
	Zoom in	Amplia el modelo
	Zoom out	Reduce el modelo
	Pan	Mueve dinámicamente la estructura en cualquier dirección
	Show 3-d View	Muestra la vista 3-d del modelo
	Show 2-d View of X-Y/r-θ	Muestra la vista 2-d del modelo paralelo al plano X-Y/r-θ
	Show 2-d View of X-Z/r-Z	Muestra la vista 2-d del modelo paralelo al plano X-Z/r-Z
	Show 2-d View of Y-Z/r-Z	Muestra la vista 2-d del modelo paralelo al plano Y-Z o una vista desarrollada del plano r-Z
	Perspective Toggle	Muestra una vista en perspectiva

Opciones de vistas de los elementos

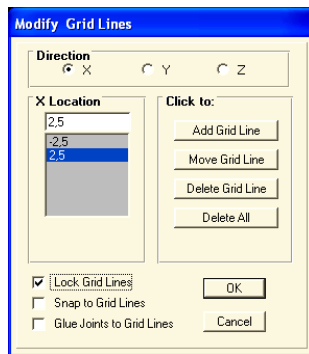
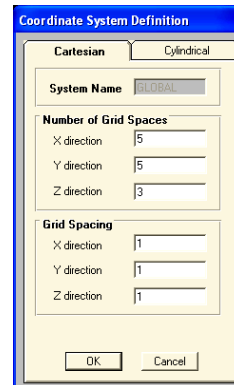
Para todos los tipos de elementos que componen el modelo, existen diversas opciones que permiten la exhibición de sus propiedades tales como etiquetas, dimensiones de secciones, ejes locales, etc.

Usar las herramientas **Set Elements**  en la Barra de Herramientas Principal para acceder a esta opción.

6.9.4 Líneas Guia (gridlines)

Son “líneas de construcción” paralelas a los ejes coordenados, que facilitan el dibujo del modelo.

Se puede obtener un número determinado de **Gridlines** en cada dirección con un espaciamiento arbitrario definido al iniciar el modelo. Para esto seleccionar **New Model...** en el menú **File**.



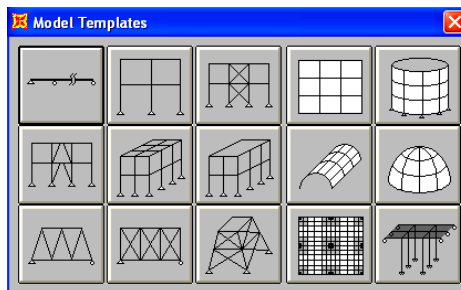
También se puede añadir, borrar y mover las **Gridlines**, para este ultimo procedimiento, se podrá especificar si los nudos se moverán con ellas o no. Elegir **Edit Grid...** en el menú **Draw**

6.9.5 Operaciones Básicas

Operaciones de archivos

Son las operaciones usadas al empezar un modelo nuevo, encontrar uno existente o realizar modificaciones en el mismo. Las operaciones son seleccionadas desde el menú **File** y las opciones correspondientes en la Barra de Herramientas Principal.

Un modelo nuevo puede ser ingresado mediante el uso de planillas predefinidas, para esto seleccionar **New Mode from Template...** en el menú **File**, o a través de la construcción de los Gridlines.



El modelo puede ser guardado en un archivo de datos estándar (extensión SDB) o también, puede ser guardado en un archivo de extensión DXF para usarlo con AUTOCAD u otros programas de dibujo.

Los resultados finales incluyen tablas de ingreso de datos, análisis y datos de diseño.

Definiciones

Son nombres asignados a entidades que no son parte de la geometría del modelo, entre ellas tenemos:

- Propiedades del material.
- Secciones de elementos Frame y Shell.
- Cargas estáticas.
- Nudos Patterns por temperatura y cargas de presión.
- Grupos.
- Funciones y análisis de respuesta espectral.
- Funciones y análisis tiempo-historia.
- Combinaciones de carga.

Estas entidades se definen desde el menú **Define** y no requieren una selección previa del objeto. Las primeras cinco entidades pueden ser definidas mediante la operación de asignación desde el menú **Assign**, seleccionando previamente al objeto. Las entidades restantes son aplicadas al modelo en su conjunto.

Dibujo

En las ventanas de dibujo del SAP2000 se trabaja en dos modos distintos, el modo **Select**, que es el modo por defecto, y el modo **Draw**. El modo **Select** se usa para hacer múltiples selecciones y luego ejecutar una tarea a las entidades seleccionadas. El modo **Draw** se usa para agregar y/o modificar objetos en el modelo. Para dibujar, se debe activar el modo **Draw** haciendo clic en uno de los seis botones de la Barra de Herramientas Lateral:



Alternativamente, los mismos botones pueden ser seleccionados desde el menú **Draw**. Ver el siguiente cuadro.

Descripción de las herramientas de dibujo






Para editar o dibujar	Hacer	Icono	Y Hacer:
Editar/formar/mover elementos	Clic en		Clic en un nudo o elemento
Un nudo extra o especial	Clic en		Clic en cualquier punto para añadir un nudo
Un elemento FRAME (nudo a nudo)	Clic en		Clic entre dos nudos
Dibujo rápido de elementos FRAME	Clic en		Clic sobre un gridline
Un elemento Shell cuadrangular	Clic en		Clic en cuatro nudos
Un elemento Shell rectangular	Clic en		Clic en una malla rectangular
Dibujo rápido elementos Shell	Clic en		Clic en una malla cualquiera

Los nudos son automáticamente creados en los extremos de los elementos Frame y en las esquinas de los elementos Shell. Nudos y elementos duplicados son eliminados automáticamente por el programa.


En el modo **Draw**, el botón izquierdo del mouse es utilizado para dibujar y editar objetos, mientras que el botón derecho es usado para mostrar las propiedades del objeto.

Herramientas Snap

Sirven para controlar el movimiento del cursor, colocándolo cerca de la ubicación del punto sobre el modelo que se quiere dibujar. Puede ser encendido ó apagado durante el dibujo. Más de una herramienta **Snap** puede ser activada a la vez. Existen cinco opciones:






- **Snap de nudos y puntos grid** .- Encuentra y captura los nudos o intersecciones de Gridlines.
- **Snap de puntos medios y finales** .- Encuentra y captura los puntos medios y finales de elementos Frame y Shell.
- **Snap de intersección de elementos** .- Encuentra y captura la intersección de dos elementos Frame, o de un elemento Frame con un elemento Shell.
- **Snap de perpendicularidad** .- encuentra y captura los puntos de intersección de una línea perpendicular a elementos Frame y Shell.
- **Snap de líneas y bordes** .- Encuentra y captura cualquier línea de elemento o línea guía.

Renovación de ventana

Después de realizar operaciones, la ventana de dibujo puede necesitar ser redibujada. Para lo cual se deberá hacer clic en el botón **Refresh Window**  en la Barra de Herramienta Principal.

Selección

Es usado para seleccionar a los objetos que en la siguiente operación serán afectados. Para poder seleccionar, el programa deberá estar en el modo **Select** lo cual se logrará haciendo clic en cualquiera de los botones correspondientes en la Barra de Herramienta Lateral o sino mediante el menú **Select**, escogiendo a continuación el tipo de selección más apropiada. Las diversas formas de selección son las siguientes:

- Activar el modo **Select**.- Usar el botón **Pointer** .
- Seleccionar los objetos individualmente.- Hacer clic izquierdo sobre el objeto.
- Dibujar una ventana alrededor del objeto.- Arrastrar el mouse presionando el botón izquierdo.
- Dibujar una línea que intercepte al objeto.- Usar el botón **Set Intersecting Line Select Mode** .
- Seleccionar todos los objetos.- Usar el botón **Select All** .
- Restablecer selección previa.- Usar el botón **Restore Previous Selection** .
- Quitar la selección.- Hacer clic sobre el objeto seleccionado o usar el botón **Clear Select** .

- Identificar un plano en particular.- Existen dos opciones:
 - ✓ Seleccionar el submenú **Set 2d View...** en el menú **View**. Esto mostrara el cuadro de dialogo **Set 2d View**. En este cuadro elegir el plano que se quiere ver.
 - ✓ En el menú **Select** elegir el submenú **Select** y luego seleccionar una de las siguientes opciones XZ, YZ o XY. Después hacer clic sobre cualquier nudo del plano que se quiere elegir.
- Seleccionar objetos que tienen los mismos tipos de propiedades.
- Seleccionar objetos que pertenezcan al mismo grupo.

Estas dos últimas formas son posibles ingresando al submenú **Select** del menú **Select**.

Cuando el programa se encuentra en el modo **Select**, cualquier otra operación (excepto operaciones **Draw**) pueden realizarse.

Edición

Es usada para hacer cambios al modelo. Se deben haber seleccionado previamente los objetos a editar. Se puede acceder a las operaciones de edición, haciendo clic en el menú **Edit**, estas operaciones son las siguientes:

- Cortar y/o copiar la geometría del objeto seleccionado.- Usar **Cut** o **Copy** en el menú **Edit**.
- Pegar la geometría de un objeto seleccionado.- Una vez copiado ó cortado el elemento elegir **Paste...** en el menú **Edit**. Esto mostrara el cuadro de dialogo **Paste Coordinates**, en este cuadro ingresar el vector de traslación.
- Añadir un nuevo elemento desde la plantilla.- Sobre un modelo ya creado se puede añadir otro modelo. Elegir el submenú **Add to Model From Template...** en el menú **Edit**.
- Borrar objetos,. Seleccionar los objetos y pulsar la tecla Delete.
- Mover nudos.- Seleccionar los nudos y elegir **Move** en el menú **Edit**. Esto mostrara el cuadro de dialogo **Move Selected Points**, en este cuadro ingresar el vector de traslación.
- Reproducir objetos en un arreglo lineal o radial.- Seleccionar los objetos y elegir el submenú **Replicate** en el menú **Edit**.
- Dividir elementos Frame y Shell en pequeños elementos.- Seleccionar los elementos Frame o Shell que se quieren seccionar, elegir **Divide Frames** o **Mesh Shells**, luego completar el cuadro de dialogo respectivo.







Asignación

Es usado para asignar propiedades y cargas a uno o más objetos previamente seleccionados. Las operaciones de asignación se encuentran en el menú **Assign** e incluyen:

- Asignar restricciones, resortes, masas, sistemas de coordenadas locales, cargas y constraints a nudos. Usar los submenús **Joints** y **Joint Static Loads...** .

- Asignar secciones, sistemas de coordenadas locales, liberación de extremos (end releases), brazos rígidos (end offsets), segmentación para la salida y cargas a elementos Frame. Usar los submenús **Frame** y **Frame Static Loads...**
- Asignar secciones, sistemas de coordenadas locales y cargas a elementos Shell. Usar los submenús **Shell** y **Shell Static Loads...**
- Asignar valores de Patterns a nudos para definir cargas de presión y temperatura. Usar el submenú **Joint Patterns...**
- Asignar elementos a grupos ya definidos para facilitar una posterior operación de selección. Usar el submenú **Group Name**.

Se puede acceder a las operaciones más comunes de asignación mediante el empleo de iconos:

Asignar	Icono
Apoyos y restricciones a nudos	
Secciones a elementos Frame	
Espesores a elementos Shell	
Cargas a nudos	
Tramos y puntos cargados en elementos Frame	
Carga uniforme en elementos Shell	

Análisis

Después de crear un modelo estructural completo, se puede analizar dicho modelo y determinar desplazamientos, fuerzas, esfuerzos y reacciones en él.

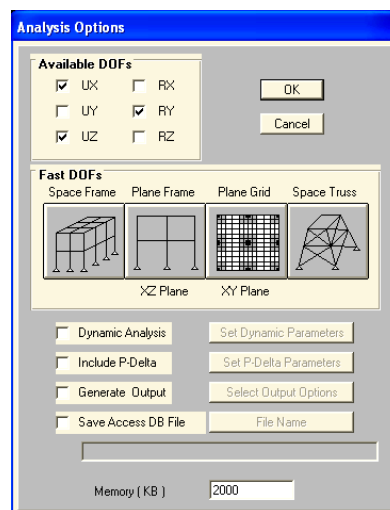
Antes de analizar, se puede escoger el tipo de análisis requerido desde el submenú **Set Options** en el menú **Analyze**.

Las opciones disponibles son:

- Grados de libertad considerados en el análisis.
- Parámetros de análisis modal.
- Parámetros de análisis P-delta.
- Cantidad de memoria RAM a ser usada.


Los resultados del análisis serán impresos en el archivo de resultados (archivo con extensión OUT). Al seleccionar la opción **Generate Option** y hacer clic sobre el botón **Select Output Options** aparecerá el cuadro de dialogo **Select Output Results** en el que se pueden elegir:

- Desplazamientos.



- Fuerzas de reacción en los nudos de apoyo.
- Fuerzas internas en los elementos Frame.
- Fuerzas en las conexiones de los elementos Frame que representan el efecto del resto de la estructura.
- Fuerzas internas en los elementos Shell.
- Esfuerzos internos en los elementos Shell.
- Fuerzas en las conexiones de los elementos Shell que representan el efecto del resto de la estructura.


Para cada opción también se pueden seleccionar el caso de carga aplicada. Al hacer clic sobre el botón **Select/Show Loads** aparecerá el cuadro de dialogo **Select Output**. En este cuadro, para seleccionar más de un caso de carga pulsar la tecla **Control** cuando se haga clic izquierdo con el mouse.

Para correr el programa, seleccionar **Run** en el menú **Analyze**, o hacer clic en el botón **Run Analysis**  en la Barra de Herramienta Principal.

El programa guarda el modelo en un archivo de datos con la extensión SDB, después analiza el modelo. Durante la fase de análisis, aparecen algunos mensajes en pantalla. Cuando el análisis haya concluido, hacer clic en el botón **OK** para cerrar la ventana de análisis. Ninguna operación puede ser realizada mientras el análisis no haya concluido. Si se esta analizando un modelo muy grande, y se puede realizar otra actividad mientras tanto, usar **Run Minimized** en el menú **Analyze**.

Bloqueo y Desbloqueo

Después de realizado el análisis, el modelo es automáticamente cerrado para prevenir cualquier cambio que invalidaría los resultados del análisis.

Sin embargo, se puede reabrir el modelo para realizar cambios mediante el uso del botón **Lock/Unlock Model**  en la Barra de Herramienta Principal.

Cuando se reabra el modelo luego del análisis, los resultados de dicho análisis serán borrados. Si se desea que esto no suceda, se deberá guardar el modelo con un nombre diferente antes de reabrirlo, cualquier cambio siguiente será hecho en el nuevo modelo.

6.10 INTERFACE GRAFICA DE POST PROCESAMIENTO

6.10.1 Exhibición de datos y resultados en pantalla (no en archivos de texto)

La exhibición de los datos del modelo y los resultados del análisis están disponibles mediante tres formas. Estas son: **Graphical Displays (exhibición grafica)**, **Tabular Displays (exhibición tabulada)** y **Functions Plots (dibujo de funciones)**. Todos estos tipos de exhibición se pueden encontrar en el menú **Display**.

Exhibición Grafica

El SAP2000 permite seleccionar un tipo de exhibición diferente para cada ventana. Para mostrar los datos del modelo se pueden seleccionar los siguientes submenús en el menú **Display**:

- Show Loads
- Show Patterns
- Show Lanes

Y para mostrar los resultados del análisis se pueden seleccionar los siguientes submenús en el menú **Display**:

- Show Deformed Shape.
- Show Mode Shape.
- Show Element Forces/Stresses.
- Show Energy Diagram.
- Show Group Joint Force Sums.
- Show Influence Lines.

Las deformadas y los modos de vibración pueden ser animados. Los detalles de los resultados mostrados pueden obtenerse haciendo clic en el botón derecho del mouse sobre un nudo o elemento.

Exhibición Tabulada

Los datos del modelo pueden ser mostrados en una ventana de texto mediante la selección del submenú **Show Input Tables** en el menú **Display**.

Los resultados del análisis pueden ser mostrados en detalle en una ventana de texto especial, solo para un nudo o elemento a la vez, seleccionando el submenú **Set Output Table Mode** en el menú **Display**, los resultados son mostrados al hacer clic con el botón derecho del mouse sobre un nudo o elemento.

Dibujo de funciones

Son gráficos de una variable con respecto a otra. Estas incluyen: curvas del espectro de respuesta, curvas de tiempo-historia y curvas pushover (análisis estático elastoplástico).









Submenús disponibles en el menú **Display**:

- Show Response Spectrum Curves.
- Show Time History Traces.
- Show Static Pushover Curve.

El programa permite generar curvas de respuesta espectral provenientes de los análisis tiempo-historia.

A continuación se muestran los iconos con los cuales se puede acceder a la exhibición de datos y resultados.

Descripción de los iconos en la barra de herramientas principal que permiten la exhibición de datos y resultados.

DESCRIPCIÓN	ICONO	USO OPCIONAL DESDE MENÚ
Geometría no deformada		
Forma deformada		Menú Display y Show Deformed Shape.
Reacciones/fuerzas en los nudos		Menú Display y Show Element Forces/Stresses... Joints. (Clic derecho sobre el nudo para mostrar más detalles).
Diagrama de fuerzas:FRAME		Menú Display y Show Element Forces/Stresses... FRAMES. (Clic derecho sobre el elemento para mostrar más detalles).
Fuerzas/presiones en el contorno:SHELL		Menú Display y Show Element Forces/Stresses... SHELLS. (Clic derecho sobre el elemento para mostrar más detalles).
Cargas en nudos: FRAME y SHELL		Menú Display y Show Loads.
Patterns		Menú Display y Show Patterns
TABULAR INPUT Exhibición de los datos del modelo en forma tabulada.		Menú Display y Show Input Tables.
Modo SHAPES		Menú Display y Show Mode Shapes.
TABULAR OUTPUT Exhibición de los resultados en forma tabulada.		Menú Display y Show Output Tables.
Respuesta espectral		Menú Display y Show Response Spectrum Curves.
Tiempo-historia		Menú Display y Show Time History Traces.
Exhibición de la forma de los elementos y/o de sus propiedades.		Menú View y Set Elements.

6.10.2 Salida de datos y resultados en archivos de texto

Archivos producidos durante el análisis

El SAP2000 produce tres archivos de texto durante el análisis. Estos son: El archivo de datos, el archivo de registro y el archivo de resultados.

Durante el análisis se ejecutan dos fases, la fase de revisión y la fase de análisis.

El archivo de datos (archivo con extensión EKO) Es creado durante la fase de revisión de datos del programa. Contiene los datos tales como los interpreta el SAP2000 y además contiene los detalles de los errores y advertencias detectados durante esta fase.

Si se presentan errores en la fase de análisis el programa no será ejecutado. El modelo deberá ser corregido y el programa ejecutado otra vez.

Si solo se presentan advertencias la fase de análisis del programa puede ejecutarse, pero se debería revisar estas advertencias cuidadosamente antes de revisar los resultados.

El archivo de registro (archivo con extensión LOG) Es creado durante la fase de análisis. Contiene el sumario de los análisis realizados y los resultados producidos. También contiene el detalle de los errores y advertencias detectados durante esta fase.

Es recomendable revisar cuidadosamente el contenido de este archivo.

Si se presenta errores la fase de análisis del programa quedara incompleta. Si solo se presenta advertencias la fase de análisis puede quedar completa. En cada caso se debería revisar los errores y advertencias cuidadosamente antes de revisar los resultados del análisis.

El archivo de resultados (Archivo con extensión OUT) Este es creado durante la fase de análisis del programa. El tipo de resultado (como desplazamientos o momentos) para todos los nudos y elementos de la estructura están sujetos al control del usuario. Es recomendable revisar cuidadosamente el archivo de datos y el archivo de registro por las advertencias errores o correcciones que puedan aparecer en el modelo antes de revisar los resultados. El archivo de resultados no contiene mensajes de advertencia o error.

Los resultados en este archivo están divididos en varias secciones, cada una con un encabezado que describe el tipo de resultados que contiene la sección.

Para obtener estos tres archivos desde la pantalla del SAP2000 seleccionar el sub-menu **Display Input/Output Text Files...** en el menú **File**.

Archivos producidos después del análisis

Estos archivos son generados para obtener resultados de nudos o elementos previamente seleccionados. Esta opción es una ventaja sobre el archivo de resultados con extensión OUT (que muestra los resultados de todos los nudos y elementos de la estructura) cuando se quiere revisar resultados solo de algunos miembros de un modelo bastante grande.

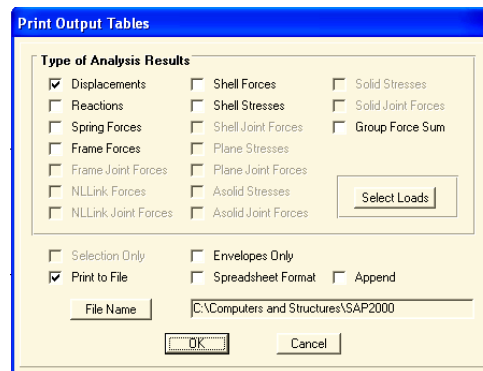
Los resultados pueden imprimirse primero en un archivo de texto o enviarse directamente a la impresora.

Como cargar estos archivos

1. Después de correr el programa seleccionar los miembros para los cuales se quiere la salida (si no se seleccionan se cargaran los resultados de todos los elementos).
2. En el menú **File** escoger el submenú **Print Output Tables...** Con esto se mostrara el cuadro de dialogo **Print Output to Printer or File**.

En este cuadro:

- Seleccionar el tipo de resultados que se quiere (Fuerzas internas, desplazamientos, etc).
- Si en el pre-proceso se definió un grupo, con la opción **Group Force Sum** se puede seleccionar los resultados para los elementos de aquel grupo.
- Seleccionar el caso de carga con la opción **Select Loads**. Se pueden seleccionar uno o mas casos (usar la tecla **Control** o **Shift** al hacer clic izquierdo con el mouse).
- Con la opción **Print to File** se imprimirán los resultados en el archivo de texto que se especifica con el botón **File name**. Si no se considera esta opción los archivos serán enviados directamente a la impresora.
- Si solo se desean Envolventes o Combinaciones de carga, usar la opción **Envelopes Only**.
- Para elementos Frame si se quieren los valores a lo largo del eje longitudinal seleccionar la opción **Spreadsheet**.
- Para elementos Shell si se quieren los valores en todos los nudos que forman el elemento seleccionar la opción **Spreadsheet**.
- La opción **Append** sirve para adicionar la información a un archivo ya cargado.



Ejemplos de Aplicación

Ejemplo 1. Análisis Estático de un edificio

A. Descripción del modelo

El edificio es una estructura aporticada de concreto con un paño por lado y dos pisos de alto. Los pórticos del eje X tienen tabiques de albañilería que rellenan los paños.

Después de armar el modelo, se hará un análisis sísmico estático empleando combinaciones de carga para obtener la envolvente de cargas de la viga del segundo nivel del pórtico 2.

PLANTA DE LOS PISOS 1 Y 2.

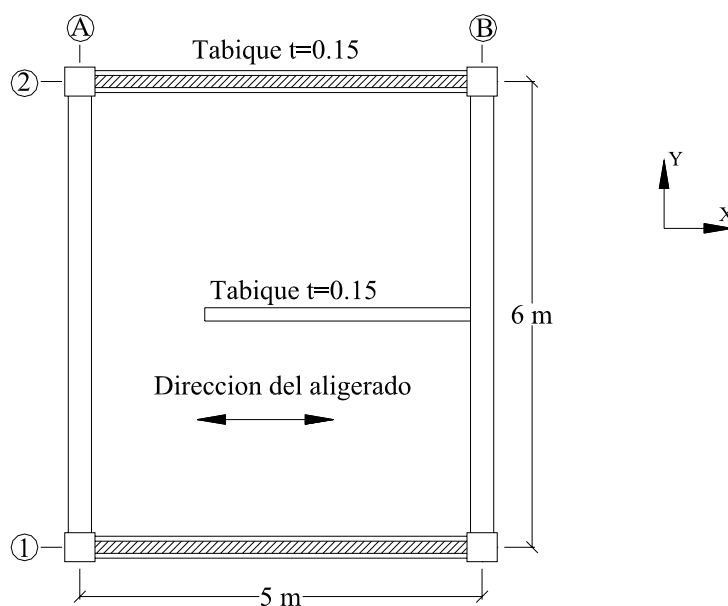


Figura 1.1.

Secciones:

- Vigas de 0,3 x 0,5
- Columnas de 0,4 x 0,4

Materiales:

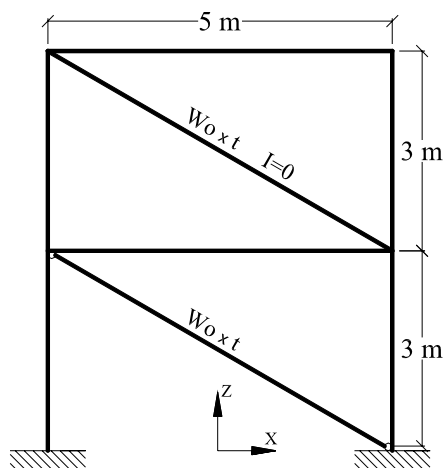
- Concreto $E=2E6 \text{ Ton/m}^2$
 $\nu=0,25$
- Albañilería $E=5E6 \text{ Ton/m}^2$
 $\nu=0,25$

MODELO:

- Los tabiques de albañilería del primer nivel se modelan como puntales diagonales de albañilería con los extremos rotulados.
 $W_o = \text{Diagonal}/4 = 1,46\text{m}.$
 $t=0,15\text{m}.$

- Los tabiques de albañilería del segundo nivel se modelan como puntales diagonales de albañilería con inercia cero.

Los modelos de los tabiques en cada piso se hacen diferentes solo para mostrar como aplicar diferentes herramientas del SAP2000.



Pórticos 1 y 2

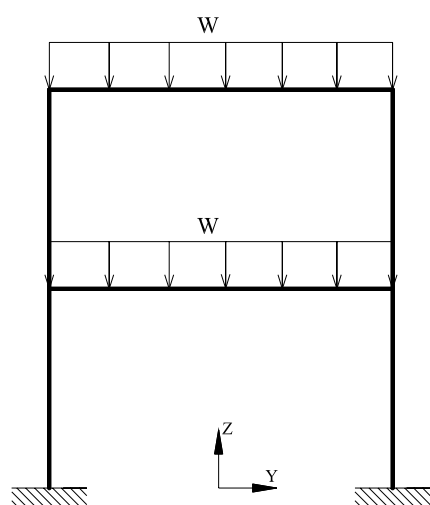
Cargas verticales asumidas

Primer nivel: Carga distribuida
 $CM=0,75$ Ton/m.
 $CV=0,625$ Ton/m.

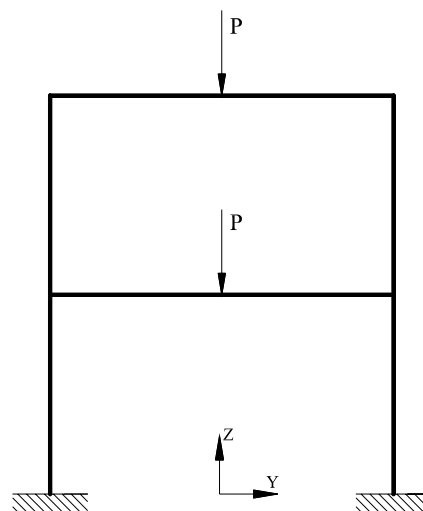
Carga concentrada
 $CM=5$ Ton.

Segundo nivel :
 $CM=0,75$ Ton/m.
 $CV=0,625$ Ton/m.

$CM=5$ Ton.



Porticos A y B



Porticos A y B

- La carga muerta distribuida se calculó sin incluir el peso propio de las vigas, esta carga en las vigas se debe al peso de la losa.

- Las cargas concentradas en las vigas se deben a las vigas chatas diseñadas para soportar los tabiques de separación que ocurren en la misma dirección de las viguetas.

Cargas laterales asumidas

Para este modelo las cargas laterales por sismo se suponen aplicadas en el centroide del área en planta para cada nivel y se dirigen en la dirección positiva X.


Primer nivel $E1=4$ Ton.

Segundo nivel $E2=6$ Ton.

No se considera la excentricidad ya que este ejemplo está desarrollado principalmente para mostrar las herramientas básicas del programa. Es por eso que la estructura es pequeña y sencilla.


B. Creación y análisis del modelo del edificio

Paso 1a. Elaboración de la geometría del modelo desde el Template (plantilla).

1. Para definir las unidades a Ton-m. Hacer clic en: 
2. En el menú **File** seleccionar **New Model from Template....** Esto mostrará el cuadro de diálogo **Model Templates**
3. En este cuadro:
 - Hacer clic en el botón **Space Frame**.



Esto mostrará el cuadro de diálogo **Space Frame**. Ver figura 1.2.

- En este cuadro:
 - ✓ Dejar **2** en **Number of Stories** (número de pisos).
 - ✓ Tipear **1** en **Number of Bays along X** (número de paños en el eje X).
 - ✓ Tipear **1** en **Number of Bays along Y** (número de paños en el eje Y).
 - ✓ Dejar **3** en **Story Height** (altura de entrepiso).
 - ✓ Tipear **5** en **Bay width along X** (ancho del paño en X).
 - ✓ Tipear **6** en **Bay width along Y** (ancho del paño en Y).
 - ✓ Comprobar que las casillas de verificación **Restraints** y **Gridlines** estén seleccionadas.
 - ✓ Hacer clic en **OK**.
- 4. La pantalla mostrará la estructura en dos ventanas, en 3D en la ventana izquierda y en 2D en la ventana derecha (el título de esta última dice: **X-Y Plane @ Z=6**). Ver figura 1.3.
- 5. Notar que los nudos de los apoyos están restringidos en los tres grados de libertad por traslación.
- 6. Hacer clic en la ventana **X-Y Plane @ Z=6** para activarla, hacer clic dos veces en el botón **Down One Gridline**  en la barra de herramientas principal para ubicar el nivel de los apoyos.

7. Seleccionar los cuatro apoyos haciendo clic sobre cada uno de ellos o seleccionarlos dibujando una ventana que los incluya, para esto arrastrar el mouse presionando el botón izquierdo.

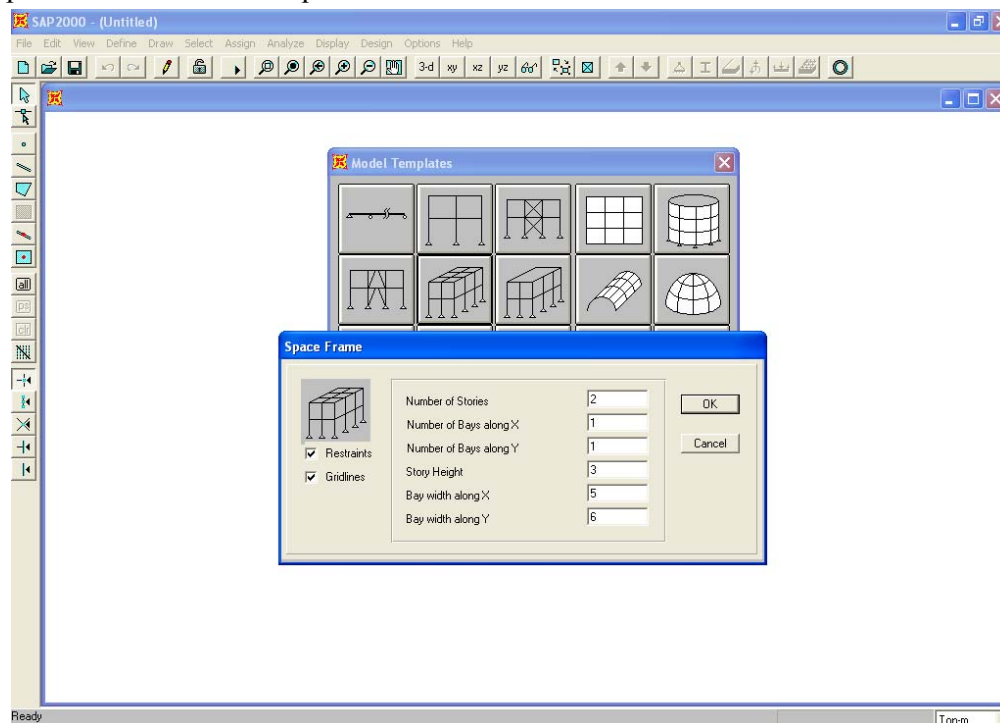


Figura 1.2: Cuadro de diálogo **Space Frame**

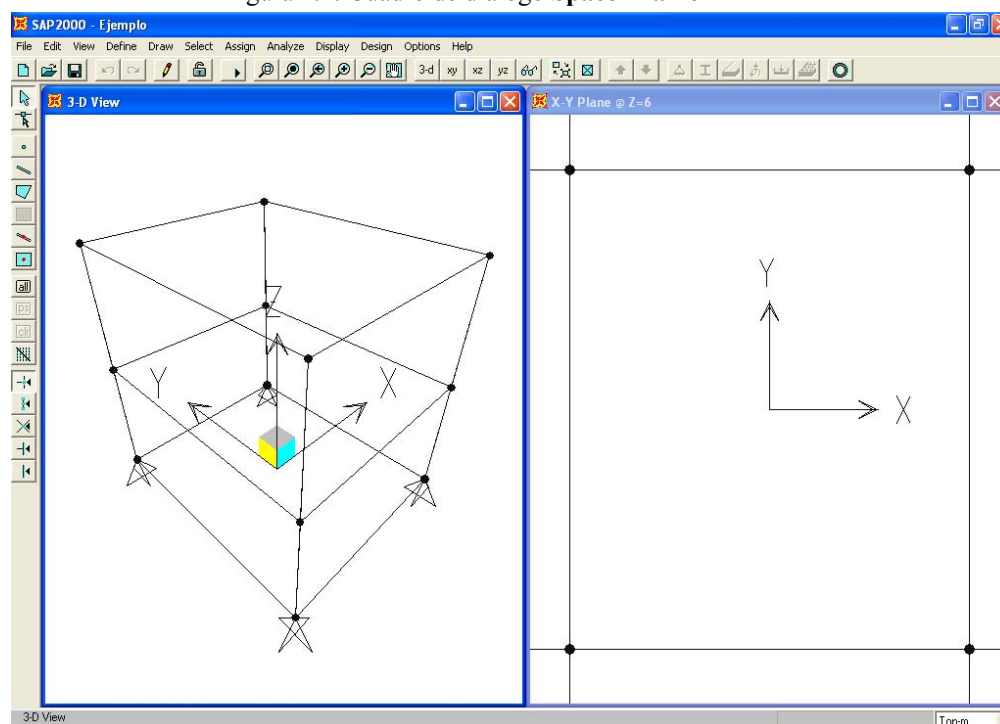








Figura 1.3: Pantalla inicial desde el **Space Frame Template**

8. Hacer clic en el botón **Assign Joint Restraints**  o en el menú **Assign** escoger **Joint** y luego **Restraints...** en el submenú, esto mostrará el cuadro de diálogo Joint Restraints.
9. En este cuadro en la sección **Fast Restraints** hacer clic en el botón  y después hacer clic en **OK**.
10. Hacer clic en la ventana izquierda y presionar el botón **Refresh Window** .
11. Hacer clic en el botón **Set Elements**  en la barra de herramientas principal ó seleccionar **Set Elements...** en el menú **View**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Set Elements**.
12. En este cuadro:
 - En la sección **Joints** seleccionar la casilla **Labels**.
 - Hacer clic en el botón **OK**.
 Nota: Se esta mostrando las etiquetas de todos los nudos de la estructura.
13. Hacer clic sobre el botón **Draw Frame Element**  en la barra de herramientas lateral, o seleccionar **Draw Frame Element** en el menú **Draw**. El programa esta ahora en el modo **Draw**.
14. Asegurarse de que el botón **Snap to Joints and Grid Points**  está presionado.
15. Mover el puntero del mouse sobre el nudo etiquetado **2** en la figura 1.4 y hacer clic en el botón izquierdo. Notar que cuando el puntero del mouse esta cerca del nudo “se atrapa al nudo” y aparece un cuadro que dice **Grid Intersection**. Esto es el efecto de la propiedad **Snap to Joints and Grid Points**.

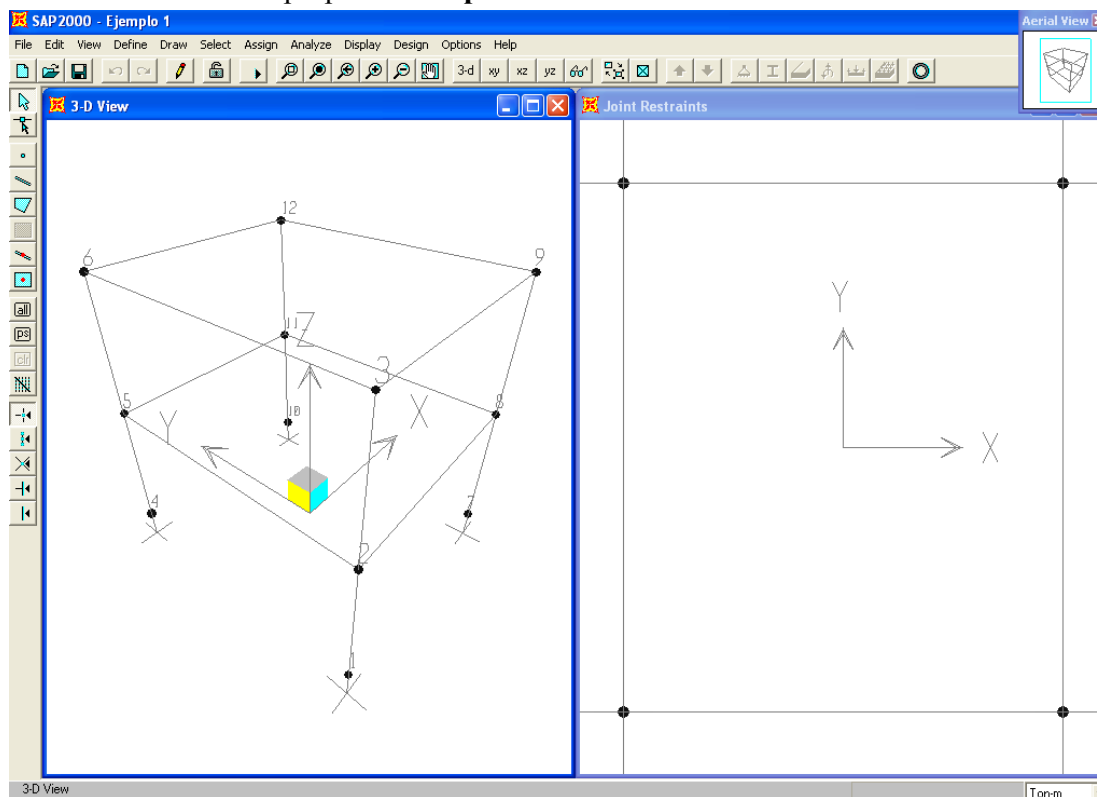


Figura 1.4. Etiquetación de nudos para dibujar los brazos diagonales

Mover el puntero del mouse cerca del nudo etiquetado 7 en la figura 1.4 y hacer clic en el botón izquierdo para dibujar el brazo diagonal en un tramo.

16. Pulsar la tecla **Esc**.

Nota: Otras opciones snap incluidas en el SAP2000 incluyen **Snap to Midpoints and Ends**, **Snap to element Intersections**, **Snap to Perpendicular**, y **Snap Lines and Edges**. Los botones de estas propiedades están localizados en la barra de herramientas lateral justo debajo del botón **Snap to Joints and Grid Points**. Notar que todas las propiedades snap pueden también seleccionarse a través del submenú **Snap to...** del menú **Draw**.





Para más información referirse al tópico titulado **Snap Tools** en el **Help On Line SAP2000** (Ayuda en línea del SAP2000). Hacer clic en el menú **Help** y seleccionar **Search for Help on....** para acceder a la opción Help on line.

17. De la misma forma dibujar los brazos diagonales entre los nudos etiquetados 3 y 8, 5 y 10 y 6 y 11 en la figura 1.4.

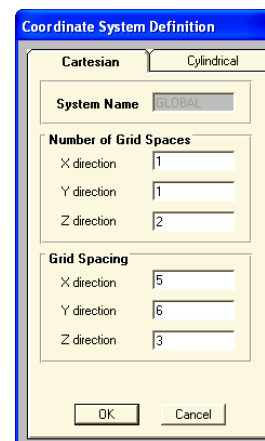
Esto completa la elaboración de la geometría desde el Template (plantilla).


Paso 1b. Elaboración de la geometría del modelo desde el Scratch (dibujo de mallas).

La geometría del modelo no solo se puede construir desde el Template (plantilla), sino también mediante el Scratch (dibujo de mallas). No es necesario hacer ambos pasos en orden para completar este tutorial, uno de los dos es suficiente. Sin embargo cada uno de los pasos tiene algunas informaciones diferentes.






1. Para definir las unidades a Ton-m hacer clic en .
2. En el menú **File** seleccionar **New Model...** Esto mostrará el cuadro de diálogo **Coordinate System Definition**.
3. En este cuadro:
 - Seleccionar la ficha **Cartesian**
 - En la sección **Number of Grid Spaces**:
 - ✓ Tipear **1** en el cuadro de edición **X direction** (esto define el número de espaciamiento entre líneas).
 - ✓ Tipear **1** en el cuadro de edición **Y direction**.
 - ✓ Tipear **2** en el cuadro de edición **Z direction**.
 - En la sección **Grid Spacing**:
 - ✓ Tipear **5** en el cuadro edición **X direction** (esto define la longitud del espaciamiento entre líneas).
 - ✓ Tipear **6** en el cuadro de edición **Y direction**.
 - ✓ Tipear **3** en el cuadro de edición **Z direction**.
 - Hacer clic en **OK** para crear las mallas.
4. La pantalla mostrará las mallas en dos ventanas, en 3D en la ventana izquierda y en 2D en la ventana derecha (el título de esta última dice **X-Y Plane @ Z=6**).
5. Hacer clic en la ventana derecha para activarla, notar que el título de la ventana se enciende.
6. Hacer clic sobre el botón **yz 2D View** . Notar que el nombre de la ventana ahora dice **YZ Plane @ X=2,5**.
7. Hacer clic en el botón **Down One Gridline**  en la barra de herramientas principal para ubicar el nivel X=-2,5.
8. Hacer clic sobre el botón **Quick Draw Frame Element**  en la barra de herramientas lateral, o seleccionar **Quick Draw Frame Element** en el menú **Draw**.
9. Esta última herramienta activada permitirá dibujar un elemento Frame haciendo clic sobre una línea de malla, aquel elemento estará limitado por las dos líneas de malla que lo cruzan perpendicularmente y que están más cercanas a cada lado del punto donde se hizo clic.

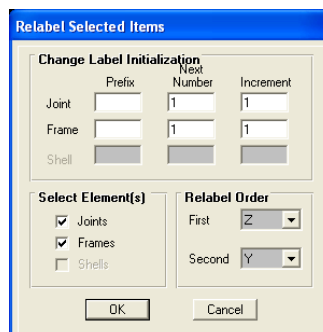
Entonces hacer clic sobre las cuatro líneas de malla que permitan dibujar las columnas de ambos niveles.



Nota: Si se falla ligeramente al hacer clic sobre la línea de malla, el programa puede asumir que se esta intentando dibujar dos brazos diagonales en el paño limitado por cuatro líneas. Si esto sucede simplemente hacer clic dos veces sobre el botón  **Undo** en la barra de herramientas principal o seleccionar dos veces **Undo Frame Add** en el menú **Edit**.

Nota: Para borrar un nudo o elemento Frame seleccionar y pulsar la tecla **Supr** o **Delete**.

10. Hacer clic en el botón **Up One Gridline**  en la barra de herramientas principal para ubicar el nivel X=2,5.
11. Con la herramienta **Quick Draw Frame Element**  dibujar nuevamente cuatro elementos Frame para modelar las cuatro columnas del nivel X=2,5.
12. Hacer clic sobre el botón **xy 2D View** . Notar que el nombre de la ventana ahora dice **XY Plane @ Z=6**.
13. Con la herramienta **Quick Draw Frame Element** dibujar ahora cuatro elementos Frame para modelar las vigas del nivel Z= 6 .
14. Hacer clic en el botón **Down One Gridline**  para ubicar el plano Z=3.
15. Con la herramienta **Quick Draw Frame Element** dibujar cuatro elementos Frame para modelar las vigas del nivel Z=3.
16. Hacer clic sobre la ventana izquierda. Notar que el nombre de la ventana dice **3-D View** es activado.
17. Hacer clic en el botón **Set Elements**  en la barra de herramientas principal ó seleccionar **Set Elements...** en el menú **View**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Set Elements**.
18. En este cuadro:
 - En la sección **Joints** seleccionar la casilla **Labels**.
 - Hacer clic en el botón **OK**.
19. Nota: Se esta mostrando las etiquetas de todos los nudos de la estructura.
20. En el menú **Select** elegir **Select** y luego **All** en el submenú. Todos los elementos en el modelo (nudos y elementos Frame) son seleccionados.
21. En el menú **Edit** elegir **Change Labels** para mostrar el cuadro de diálogo **Relabel Selected Items**.




22. En este cuadro:

- En la sección **Change Label Initialization** del cuadro de diálogo tipear **1** en los cuadros **Next Number** de **Joint** y de **Frame**.
- Aceptar el resto de los valores por defecto en el cuadro de diálogo.
- Hacer clic en **OK** para aceptar los cambios.

Nota: No es típico enumerar nuevamente los elementos. Esta hecho para ilustrar el proceso y para asegurar que todos los usuarios del tutorial tengan el mismo sistema de numeración, ya que iniciado el modelo desde el Template o desde el Scratch, la referencia a los nudos y los elementos Frame se hará mediante sus etiquetas cambiadas.

Nota: No es necesario seleccionar todos los elementos para re-etiquetar. Se podría seleccionar solo unos pocos elementos de cualquier tipo, y re-etiquetar solo los elementos seleccionados.

23. Hacer clic sobre el botón **Draw Frame Element**  en la barra de herramientas lateral, o seleccionar **Draw Frame Element** en el menú **Draw**. El programa estará en el modo Draw.

24. Asegurarse que el botón **Snap to Joints and Grid Points**  esta presionado.

25. Mover el puntero del mouse sobre el nudo etiquetado **5** y hacer clic en el botón izquierdo. Notar que cuando el puntero del mouse esta cerca del nudo “se atrapa al nudo” y aparece un cuadro que dice **Grid Intersection**. Este es el efecto de la propiedad **Snap to Joints and Grid Points**.


26. Mover el puntero del mouse cerca del nudo etiquetado **2** y hacer clic en el botón izquierdo para dibujar el brazo diagonal en un tramo.

27. Pulsar la tecla **Esc**.




Nota: otras opciones snap incluidas en el SAP2000 incluyen **Snap to Midpoints and Ends**, **Snap to Element Intersection**, **Snap to Perpendicular**, y **Snap to Lines and Edges**. Los botones de estas propiedades están localizados en la barra de herramientas lateral justo debajo del botón **Snap to Joints and Grid Points**. Notar que todas las propiedades snap pueden también seleccionarse a través del submenú **Snap to** del menú **Draw**.

28. De la misca forma dibujar los brazos diagonales entre los nudos etiquetados: 9 y 6, 7 y 4 y 11 y 8.


29. Hacer clic sobre la ventana derecha para activarla, notar que el nombre de la ventana probablemente dice **XY Plane @ Z=3**. Hacer clic sobre el botón **Down One Gridline** Hasta ubicar el nivel $Z=0$ (nivel de los apoyos).

30. Desactivar el modo Draw con el botón **Pointer** .

31. Seleccionar los cuatro nudos correspondientes a los apoyos de la estructura haciendo clic sobre cada uno de ellos o seleccionarlos dibujando una ventana que los incluya, para esto arrastrar el mouse presionando el botón izquierdo.

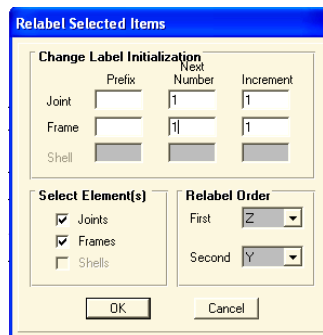
32. Hacer clic en el botón **Assign Joint Restraints**  o en el menú **Assign** escoger **Joint** y luego **Restraints...** en el submenú, esto mostrará el cuadro de diálogo Joints Restraints.
33. En este cuadro en la sección **Fast Restraints** Hacer clic en el botón:  y hacer clic en **OK**.
34. Hacer clic en la ventana izquierda y presionar el botón **Refresh Window** .
Esto completa la elaboración de la geometría del modelo desde el Scratch (dibujo de mallas).

Paso 2. Re-etiquetacion de los nudos y elementos Frame.

1. Hacer clic en la ventana etiquetada **3D-View** para activarla.
2. Hacer clic en el botón **Set Elements**  en la barra de herramientas principal o seleccionar **Set Elements...** en el menú **View**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Set Elements**.
3. En este cuadro:
 - En la sección **Joints** seleccionar la casilla **Labels**.
 - En la sección **Frames** seleccionar la casilla **Labels**.
 - Hacer clic en el botón **OK**.

Nota: Se esta mostrando las etiquetas de los elementos para poder ver los cambios efectuados. No es necesario mostrar las etiquetas para lograr la re-etiquetación.

4. En el menú **Select** elegir **Select** y luego **All** en el submenú. Todos los elementos en el modelo (nudos y elementos **Frame**) son seleccionados.
5. En el menú **Edit** elegir **Change Labels** para mostrar el cuadro de diálogo **Relabel Selected Items**.





6. En este cuadro:
 - Presionar la tecla **F1** para mostrar el contexto de **Ayuda en Línea** para este cuadro. Al finalizar la lectura de ayuda en línea salir de la ventana.
 - En la sección **Change Label Initialization** del cuadro de diálogo tipear **1** en los cuadros **Next Number** de **Joint** y de **Frame**.
 - Aceptar el resto de los valores por defecto en el cuadro de diálogo.

- Hacer clic en **OK** para aceptar los cambios.

Nota: No es típico enumerar nuevamente los elementos. Esta hecho para ilustrar el proceso y para asegurar que todos los usuarios del tutorial tengan el mismo sistema de numeración, ya que iniciado el modelo desde el Template o desde el Scratch, la referencia a los nudos y los elementos Frame se hará mediante sus etiquetas cambiadas.

Nota: Las etiquetas de los nudos y elementos Frame y Shell pueden tener prefijos alfanuméricos. Estos prefijos pueden ser ingresados en los cuadros de edición **Prefix** en el cuadro de diálogo **Relabel Selected Items**.


Nota: No es necesario seleccionar todos los elementos para re-etiquetar. Se podría seleccionar solo unos pocos elementos de cualquier tipo, y re-etiquetar solo los elementos seleccionados.

7. Hacer clic en el botón **Set Elements** . Esto mostrará el cuadro de diálogo **Set Elements**.
 8. En este cuadro:
 - En la sección **Joints** quitar la selección en la casilla **Labels**.
 - En la sección **Frames** quitar la selección en la casilla **Labels**.
 - Hacer clic en el botón **OK**.
 9. Hacer clic en el botón **Save Model**  en la barra de herramientas principal o seleccionar **Save** en el menú **File** para grabar el archivo.
- Esto completa el re-etiquetado de los nudos y elementos Frame.

Paso 3. Definición de las propiedades del material.

Las unidades de los valores de las propiedades se encontraran en las unidades definidas en el paso 1 (Elaboración de la geometría del modelo)

1. En el menú **Define** elegir **Materials...**, esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Materials**.
2. Con la opción **CONC** encendida en el área **Materials** hacer clic en **Modify/Show Material**, esto mostrará el cuadro de diálogo **Material Property Data**.
3. Notar que las propiedades del concreto están en unidades Ton-m.
4. Ya que no se va hacer un análisis dinámico en la estructura, tipear **0** en el cuadro de edición **Mass per unit Volume**.
5. Tipear **2,4** en el cuadro edición **Weight per unit Volume** para considerar el peso propio del concreto.
6. Tipear **2E6** en el cuadro de edición **Modulus of Elasticity**. Dejar el resto de valores dados por defecto.
7. Hacer clic en el botón **OK** para aceptar los cambios y salir del cuadro de diálogo **Material Property Data**.
8. Para añadir un nuevo material hacer clic en **Add New Material** esto mostrará el cuadro de diálogo **Material Property Data**.
9. Cambiar el nombre MAT1 por **ALBA** en la sección **Material Name**.

10. En el cuadro **Type of Design** seleccionar la opción **Concrete**.
 11. Típear **0** en el cuadro de edición **Mass per unit Volume**.
 12. Típear **0** en el cuadro de edición **Weight per unit Volume**.
 13. Típear **5E6** en el cuadro de edición **Modulus of Elasticity**.
 14. Típear **0,25** en el cuadro de edición **Poisson's Ratio**.
 15. Hacer clic en el botón **OK** para aceptar los cambios y salir del cuadro de diálogo **Material Property Data**.
 16. Hacer clic en el botón **OK** para salir del cuadro de diálogo **Define Materials**.
 17. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
- Esto completa la definición de los materiales.

Paso 4. Definición de las secciones Frame.

Si bien no se usaran secciones de acero en nuestra estructura (que están provistas por el SAP2000) se desarrollara el tutorial para saber definirlos en el caso que se quiera trabajar con estructuras metálicas.

El tutorial para la definición de las secciones de concreto se presentara después.

A. Definición de secciones de acero desde el archivo SECTIONS.PRO

1. En el menú Define elegir **Frame Sections..**, esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Frame Sections**.
2. Para importar secciones en este cuadro de diálogo:
 - Hacer clic en la opción **Import**.
 - En la lista desplegada hacer clic en **Import I/Wide Flange**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Section Property File**.
 - En este cuadro:
 - ✓ Localizar el archivo de datos SECTIONS.PRO, típicamente esta localizado en el directorio donde se instalo el SAP2000.
 - ✓ Abrir el archivo de datos SECTION.PRO haciendo doble clic sobre el nombre del archivo.
 - ✓ Esto mostrará el cuadro de diálogo que incluye una lista para mostrar todas las secciones disponibles. El título de esta caja mostrará la ruta para llegar al archivo de datos.
 - ✓ En esta lista:
 - Las secciones Frame pueden ser seleccionadas una a una, pero también pueden ser elegidas en grupo, para esto presionar la tecla **Shift** y hacer clic en la primera y en la última sección de un grupo de secciones que se encuentran juntas. Si se quiere seleccionar múltiples secciones que no están juntas presionar la tecla **Ctrl**. Y hacer clic en cada sección que se quiera seleccionar.
 - Hacer clic en el botón **OK**, esto mostrará el cuadro de diálogo **I/Wide Flange Section** el cual exhibirá la ultima sección

seleccionada, dimensiones de esta sección y STEEL como tipo de material por defecto.

- ✓ Hacer clic en **OK**, esto cerrara el cuadro de diálogo **I/Wide Flange Section** y retomara al cuadro de diálogo **Define Frame Sections**.
- ✓ Hasta aquí llega la definición de secciones para estructuras metálicas, para seguir con el tutorial en el mismo cuadro de diálogo borrar las secciones importadas haciendo clic en el botón **Delete Section**.
- ✓ Hacer clic en **OK** para salir del cuadro de diálogo **Define Frame Section**.

B Definición de secciones de concreto

1. En el menú **Define** elegir **Frame Sections..** esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Frame Sections**.
2. En este cuadro:
 - Hacer clic en la opción **Add I** esto desplegara hacia abajo una lista de secciones.
 - Hacer clic en **Add Rectangular**, esto mostrará el cuadro de diálogo **Rectangular Section**.
 - Cambiar el nombre **FSEC2** por **VIGA**, seleccionar **CONC** en el cuadro de lista **Material**.
 - En el área **Dimensions**:
 - ✓ Tipear **0,5** en la caja **Depth [t3]** (peralte).
 - ✓ Tipear **0,4** en la caja **Width [t2]** (ancho).
 - Hacer clic en **OK** para aceptar la nueva sección.
 - Hacer clic en la opción **Add I**.
 - Hacer clic en **Add Rectangular**.
 - Cambiar el nombre de **FSEC2** por **COLUMNA**, hacer clic en **CONC** en el cuadro de lista **Material**.
 - En el área **Dimensions**:
 - ✓ Tipear **0,4** en la caja **Depth [t3]** (peralte).
 - ✓ Tipear **0,4** en la caja **Width [t2]** (ancho).
 - Hacer clic en **OK** para aceptar la nueva sección.
 - Hacer clic en la opción **Add I**.
 - Hacer clic en **Add Rectangular**.
 - Cambiar el nombre de **FSEC2** por **PUNTAL1**, hacer clic en **ALBA** en el cuadro de lista **Material**.
 - En el área **Dimensions**:
 - ✓ Tipear **1,46** en la caja **Depth [t3]** (peralte).
 - ✓ Tipear **0.15** en la caja **Width [t2]** (ancho).
 - Hacer clic en **OK** para aceptar la nueva sección.

- Hacer clic en la opción **Add I**.
- Hacer clic en **Add General**, esto mostrará el cuadro de diálogo **Property Data**.
- Tipear **0,219** en el cuadro de edición **Cross-section (axial) área**.
- Tipear **0** en los cinco restantes cuadros de edición de la misma columna.
- Hacer clic en **OK**, esto mostrará el cuadro de diálogo **General Section**.
- Cambiar el nombre de **FSEC2** por **PUNTAL2**, hacer clic en **ALBA** en el cuadro de lista **Material**.
- En el área **Dimensions**:
 - ✓ Tipear **1,46** en la caja **Depth [t3]** (peralte).
 - ✓ Tipear **0,15** en la caja **Width [t2]** (ancho).

Nota: Como ya se ingresaron las propiedades geométricas de la sección PUNTAL2 estas dos últimas dimensiones tipeadas en el cuadro de diálogo **General Section** solo sirven para la exhibición de las dimensiones.

- Hacer clic en **OK** para aceptar la nueva sección. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Frame Sections**.
- Notar que una vez definidas las cuatro secciones los nombres **FSEC1**, **VIGA**, **COLUMN**, **PUNTAL1**, **PUNTAL2** aparecen en el área **Frame Sections**, la sección **FSEC1** es una sección rectangular que aparece por defecto.
- Si se requiere modificar alguna sección hacer clic en **Modify/Show Section** cuando el nombre de la sección a modificar esta encendida en la sección **Frame Sections**.
- Hacer clic en **OK** para salir del cuadro de diálogo **Define Frame Section**.

3. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.


Esto completa la definición de secciones Frame.



Paso 5. Asignación de grupos (Groups)

La definición de grupos puede ser una poderosa herramienta primero para seleccionar elementos y después para la asignación y la exhibición de resultados. En este paso se crearán tres grupos que se muestran en la tabla siguiente.




Nombre de Grupo	Descripción
GVIGAS	Todas la vigas del primer y segundo nivel
GCOLS	Todas las columnas del primer y segundo nivel
GPUNS1	Los dos brazos diagonales del primer nivel
GPUNS2	Los dos brazos diagonales del segundo nivel


Nota: Por defecto el programa crea un grupo llamado **All** el cual incluye todos los elementos en el modelo (incluidos nudos).

1. Hacer clic en la ventana derecha para activarla; presionar en botón **Show Undeformed Shape** . Notar que el titulo de la ventana ahora dice **X-Y Plane**






- @ **Z=0**. Hacer clic en el botón **Up One Gridline**  para ubicar el plano **Z=6**, notar que el título de la ventana ahora dice **X-Y Plane @ Z=6**.
2. Seleccionar todos los elementos en el plano **Z=6** dibujando una ventana que los incluya, para esto arrastrar el mouse presionando el botón izquierdo.
 3. Hacer clic en el botón **Down One Gridline**  para ubicar el plano **Z=3**, notar que el título de la ventana ahora dice **X-Y Plane @ Z=3**.
 4. Seleccionar todos los elementos del plano **Z=3**.
 5. En el menú **Assign** escoger **Group Name...** esto mostrará el cuadro de diálogo **Assign Group**.
En este cuadro:
 - En el cuadro de edición de la sección **Groups** tipear **GVIGAS**.
 - Hacer clic en **Add New Group Name** para definir el grupo llamado **GVIGAS**.
 - Hacer clic en **OK**.

Nota: Un error común es olvidar hacer clic sobre **Add New Group Name** antes de presionar el botón **OK**.

Nota: Para quitar la selección de elementos se debe hacer clic otra vez sobre estos, si se quiere quitar la selección de todos los elementos de una sola vez hacer clic en el botón  **Clear Selection** en la barra de herramientas lateral o escoger **Clear Selection** en el menú **Select**.
 6. Hacer clic en el botón **xz 2D View**  en la barra de herramientas principal para mostrar una elevación en el plano **X-Z**. Notar que el título de la ventana es probablemente **X-Z Plane @ Y=3**, si no es así entonces hacer clic sobre el botón **Up One Gridline**.
 7. Hacer clic sobre las cuatro columnas mostradas para seleccionadas.
 8. Hacer clic sobre el botón **Down One Gridline**  para mostrar el plano **Y= -3** y hacer clic sobre las otras cuatro columnas mostradas para seleccionadas también.
 9. En el menú **Assign** escoger **Group Name....** Esto mostrará el cuadro de diálogo **Assign Group**.
En este cuadro:
 - En la cuadro de edición de la sección **Group** tipear **GCOLS**.
 - Hacer clic en **Add New Group Name** para definir el grupo llamado **GCOLS**.
 - Hacer clic en **OK**.
 10. Asignar de la misma manera los dos brazos diagonales del primer nivel al grupo **GPUNS1**.
 11. Asignar también los dos brazos diagonales del segundo nivel al grupo **GPUNS2**.
Nota: Para añadir mas nudos y/o elementos a un grupo asignado, primero seleccionar los elementos del grupo, después seleccionar mas nudos y/o elementos y finalmente asignarlos al grupo. La asignación de un grupo siempre reemplaza los elementos existentes en aquel grupo.


12. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
Esto completa la asignación de grupos.

Paso 6. Asignación de Secciones Frame

1. Hacer clic en la ventana izquierda con título **3D View** para activarla.
2. Hacer clic en el botón **Set Elements**  en la barra de herramientas principal o seleccionar **Set Elements...** en el menú **View**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Set Elements**.
En este cuadro:
 - En el área **Frame** seleccionar la casilla **Labels**.
 - Hacer clic en **OK**.
3. En el menú **Select** seleccionar **Select** y después **Groups...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Select Groups**.
4. En este cuadro hacer clic en el nombre **GVIGAS** y después hacer clic en el botón **OK**. Notar que las vigas etiquetadas con los números 7, 8, 9, 10, 17, 18, 19 y 20 se seleccionan.
5. En el menú **Assign** seleccionar **Frame** y luego **Sections...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Frame Sections**.
6. En el área **Frame Section** hacer clic en **VIGA** y después hacer clic en **OK**.
7. Notar que las vigas se etiquetan con el nombre **VIGA** y los otros elementos por defecto tienen la etiqueta **FSEC1**.
8. Hacer clic en el botón **Show Undeformed Shape**  para limpiar la exhibición de las etiquetas de las secciones y poder ver las etiquetas de los elementos Frame otra vez. De esta manera se ha asignado la sección viga a las vigas del primer y segundo nivel. Proceder de la misma forma para asignar las secciones **COLUMNA**, **PUNTAL1** Y **PUNTAL2** a los elementos Frame respectivos.
9. Para ver la forma de la sección del elemento Frame en la pantalla hacer clic sobre el botón **Set Elements**  y luego seleccionar la opción **Show Extrusion**. Esto puede ayudar para verificar si los elementos están orientados apropiadamente. Volver al modelo de líneas desactivando la opción **Show Extrusion** en el cuadro de diálogo **Set Elements** .
10. Hacer clic en el botón **Save model**  para grabar el archivo.
Esto completa la asignación de secciones.

Paso 7. Asignación de End Releases Frame


Se liberaran los momentos M3 y M2 de los brazos diagonales del primer nivel.

1. Hacer clic en la ventana con título **3D View** para activarla.
2. Hacer clic en el botón **Set Elements**  en la barra de herramientas principal o seleccionar **Set Elements...** en el menú **View**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Set Elements**.

En este cuadro:

- En el área **Frames** seleccionar la casilla **Local Axes**.
- Hacer clic en **OK**.

Nota: Las flechas de los ejes locales son de color rojo, blanco y azul. La flecha **roja** es siempre el eje local **1**, la flecha **blanca** es siempre el eje local **2**, y la flecha **azul** es siempre el eje local **3**. Para elementos Frame el eje local 1 siempre se encuentran sobre el eje longitudinal del elemento y apunta desde el nudo inicial al nudo final. Por tanto se pueden usar los ejes locales para saber cuales son el extremo inicial y final de cualquier elemento Frame.

3. En el menú **Select** seleccionar **Select** y después **Groups...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Select Groups**.
4. En este cuadro hacer clic en el nombre **GPUNS1** y después hacer clic en **OK**.
5. En el menú **Assign** seleccionar **Frame** y después **Releases...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Frame Releases**.
6. En este cuadro:
 - Seleccionar las casillas **Start** y **End** para el momento **M22 (Minor)** y el momento **M33 (Major)**.
 - Hacer clic en **OK**.
7. Desde el menú **Assign** seleccionar **Clear Display of Assigns** para limpiar la exhibición de los Releases en los elementos Frame.
8. Hacer clic en el botón **Set Elements** . Esto mostrará el cuadro de diálogo **Set Elements**.

En este cuadro:


- En el área **Frames** quitar la selección de la casilla **Local Axes**.
- Hacer clic en **OK**.




9. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.

Esto completa la asignación de End Releases a los elementos Frames.



Paso 8. Asignación de Constraints.

Para aplicar las cargas laterales por sismo se deben crear primero dos nudos, uno para cada nivel, ubicados en los centroides de las áreas en planta. Cada nudo creado recibirá la carga lateral y estará unido a los demás nudos de su respectiva planta por medio de un Constraint tipo Diafragma. En este paso estos nudos serán llamados nudos centroidales.

1. Hacer clic en la ventana derecha para activarla.
2. Hacer clic en el botón **xy 2D View** .
3. Desde el menú **Draw** seleccionar **Edit Gris....** Esto mostrará el cuadro de diálogo **Modify Grid Lines**.
4. En este cuadro:
 - Seleccionar la opción **X** en el área **Direction**.
 - Típear **0** en el cuadro de edición **X Location**.

- Seleccionar la opción **Add Grid Line**.
 - Seleccionar la opción **Y** en el área **Direction**.
 - Típear **0** en el cuadro de edición **Y Location**.
 - Seleccionar la opción **Add Grid Line**.
 - Hacer clic en **OK** para salir del cuadro de diálogo **Modify Grid Lines**.
5. Hacer clic sobre el botón **Draw Special Joint**  en la barra de herramientas lateral, o seleccionar **Add Special Joint** en el menú **Draw**. El programa está ahora en el modo Draw.
 6. Asegúrese de que el botón **Snap to Joint and Grid Points**  está presionado.
 7. En la ventana derecha, ubíquese en el nivel Z=3. Mover el puntero del mouse sobre la intersección de las líneas X=0, Y=0 y hacer clic en el botón izquierdo. Esto creará el nudo centroidal del primer nivel.
 8. Hacer lo mismo para crear el nudo centroidal del segundo nivel.
 9. Hacer clic sobre el botón **Pointer**  para salir del modo Draw.


Asignación de restricciones a los nudos centroidales

10. Hacer clic sobre la ventana izquierda **3d View** para activarla.
11. Seleccionar los nudos centroidales del primer y segundo nivel.
12. Hacer clic en el botón **Assign Joint Restraints**  o en el menú **Assign** escoger **Joints** y luego **Restraints...** en el submenú, esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Restraints**.
13. En este cuadro:
 - Hacer clic en el botón  en el área **Fast Restraints**.
 - En el área **Restraints in Local Directions** seleccionar la casilla **Translation 3**, **Rotation about 1** y **Rotation about 2**.
 - Hacer clic en **OK**.

Se asignarán un Constraint tipo diafragma a cada nivel del edificio para simular el comportamiento rígido de las losas.
14. Hacer clic en la ventana derecha etiquetada **X-Y Plane @ Z=6** para activarla.
15. Seleccionar todos los elementos del techo dibujando una ventana que los incluya, para esto arrastrar el mouse presionando el botón izquierdo.
16. En el menú **Assign** escoger **Joint** y luego **Constraints...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Constraints**.
17. En este cuadro:
 - En la sección **Click to** seleccionar **Add Diaphragm**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Diaphragm Constraint**.
 - En este cuadro:
 - ✓ Típear **DIAF2** en el cuadro de edición **Constraint Name**.
 - ✓ Seleccionar la opción **Auto** en la sección **Constraint Axis**.
 - ✓ Hacer clic en **OK**.

- Hacer clic en el botón **OK** para salir del cuadro de diálogo **Constraints** asignando de esta manera al segundo nivel el Constraint tipo diafragma **DIAF2**


Nota: Los nudos cambian de color indicando la asignación de estos a un mismo Constraint.

18. Hacer lo mismo para el nivel Z=3 pero tipear **DIAF1** en el cuadro de edición **Constraint Name**.
19. En el menú **Assign** seleccionar **Clear Display of Assigns** para quitar la exhibición de los nudos Constraints.
20. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
Esto completa la asignación de Constraints.

Paso 9. Definición de los Casos de Carga Estática.





1. En el menú **Define** seleccionar **Static Load Cases...** Esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Static Load Case Names**.
2. En este cuadro:
 - Tipear **CM** en el cuadro **Load**.
 - Seleccionar **DEAD** en el cuadro de lista **Type**.
 - Tipear **1** en el cuadro de edición **Self Weight Multiplier**.
 - Hacer clic en el botón **Change Load**.

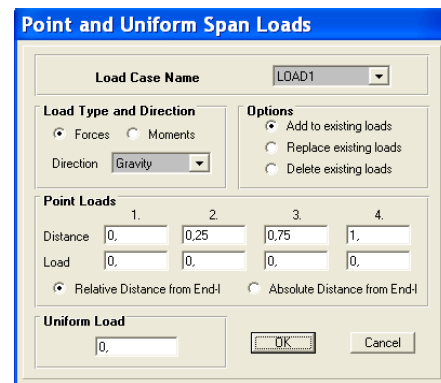
Nota: En este ejemplo el programa calculará automáticamente el peso propio de los elementos de la estructura. Si no se quiere incluir el peso propio se deberá tipear **0** en el cuadro **Self Weight Multiplier** o se debería tipear **0** en el cuadro **Weight per unit Volume** en el cuadro de diálogo **Define Material**.

- Tipear **CV** en el cuadro **Load**.
 - Seleccionar **LIVE** en el cuadro de lista **Type**.
 - Tipear **0** en el cuadro **Self Weight Multiplier**.
 - Hacer clic en **Add New Load**.
 - Tipear **EQX** en el cuadro **Load**.
 - Seleccionar **QUAKE** en el cuadro de lista **Type**.
 - Tipear **0** en el cuadro **Self Weight Multiplier**.
 - Hacer clic en **Add New Load**.
 - Hacer clic en el botón **OK**.
3. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
Esto completa la definición de los Casos de Carga Estática.



Paso 10. Asignación de cargas estáticas Frame.


Se asignarán tres tipos de cargas, carga muerta uniformemente distribuida, carga viva uniformemente distribuida, y cargas concentradas.

1. Hacer clic sobre la ventana derecha para activarla y luego hacer clic en el botón **yz 2D View** en la barra de herramientas principal. Notar que en la barra de estado el título de la ventana activada probablemente dice **Y-Z Plane @ X=2,5** si no es así hacer clic sobre el botón **Up One Gridline** .
2. Para seleccionar las dos vigas en el pórtico mostrado.
 - Hacer clic en el botón **Pointer**  en la barra de herramientas lateral.
 - Hacer clic en el botón **Set Intersecting Line Select Mode** en la barra de herramientas lateral .
 - Colocar el puntero del mouse sobre la viga superior del pórtico.
 - Hacer clic y mantener presionado el botón izquierdo del mouse, luego arrastrarlo sobre las dos vigas para seleccionarl
3. Hacer clic en el botón **Down One Gridline**  en la barra de herramientas principal. Hasta que el título de la ventana diga **Y-Z Plane @ X= -2,5**.
4. Usar nuevamente el botón **Set Intersecting Line Select Mode** para seleccionar las otras dos vigas del pórtico X= -2,5.
5. En el menú **Assign** seleccionar **Frame Static Loads...** y luego **Point and Uniform...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Point and Uniform Span Loads**.
6. En este cuadro:
 - Seleccionar **CM** en el cuadro **Load Case Name**.
 - En el área **Load Type and Direction**, seleccionar la opción **Forces** y seleccionar **Global Z** en el cuadro de lista **Direction**.
 - En el área **Options** seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - En el área de **Uniform Load** tipear **-0,75**.
 - Hacer clic en el botón **OK** para aplicar la carga.




Nota: Como la carga se ingresa en la dirección global Z el signo menos indica que la carga esta dirigida hacia abajo.

7. Hacer clic en el botón **Restore Previous Selection**  en la barra de herramienta lateral (o seleccionar **Get Previous Selection** en el menú **Select**). Esto restaurará las selecciones hechas a las cuatro vigas de los dos pórticos.
8. Hacer clic sobre el botón **Assing Frame Span Loading**  en la barra de herramienta principal. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Point and Uniform Span Loads**.
9. En este cuadro:
 - Seleccionar **CV** desde el cuadro **Load Case Name**.

- En el área **Load Type and Direction**, seleccionar la opción **Forces** y seleccionar **Global Z** desde el cuadro **Direction**.
 - En el área **Options** seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - En el área de **Uniform Load** tipear **-0,625**.
 - Hacer clic en el botón **OK** para aplicar la carga.
10. Hacer clic en el botón **Restore Previous Selection** en la barra de herramientas lateral.
 11. Hacer clic sobre el botón **Assign Frame Span Loading** en la barra de herramientas principal. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Point and Uniform Span Loads**.
 12. En este cuadro:
 - Seleccionar **CM** desde el cuadro **Load Case Name**.
 - En la sección **Options** Seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - En la sección **Points Loads** se encuentran los cuadros **Distance** y **Load** etiquetadas del 1 al 4.
 - En el primer cuadro de **Distance** tipear **0,5** y en el primer cuadro de **Load** tipear **-2**. Marcar la opción **Relative Distance from End-I**.
 - En el cuadro **Uniform Load** tipear **0**.
 - Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
 13. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
Esto asigna las cargas estáticas Frame.

Paso 11. Asignación de cargas estáticas en los nudos.

1. Hacer clic en la ventana izquierda **3D View** para activarla.
2. Seleccionar el nudo centroidal del segundo nivel (nivel $Z=6$).
3. En el menú **Assign** seleccionar **Joints Statics Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
4. En este cuadro:
 - Seleccionar **EQX** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Tipear **6** en el cuadro de edición **Force Global X**.
 - Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
5. Hacer clic sobre el nudo centroidal del primer nivel (nivel $Z=3$), para seleccionarlo.
6. Repetir los pasos 3 y 4 pero tipear **4** en el cuadro de edición **Force Global X**.
7. En el menú **Assign** seleccionar **Clear Display of Assigns** para quitar la exhibición de los nudos constraints.
8. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
Esto completa la asignación de cargas estáticas en los nudos.

Paso 12. Definición de Combinaciones.

Para este ejemplo se decidió utilizar las siguientes combinaciones:


1,4 CM + 1,7 CV

0,75 (1,4 CM + 1,7 CV + 1,87 EQX)

0,9 CM + 1,43 EQX

1. Desde el menú **Define** seleccionar **Load Combinations....** Esto mostrará el cuadro de diálogo **Load Combination Data**.
2. En este cuadro:
 - En la sección **Click to** seleccionar **Add New Combo**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Load Combination Data**.

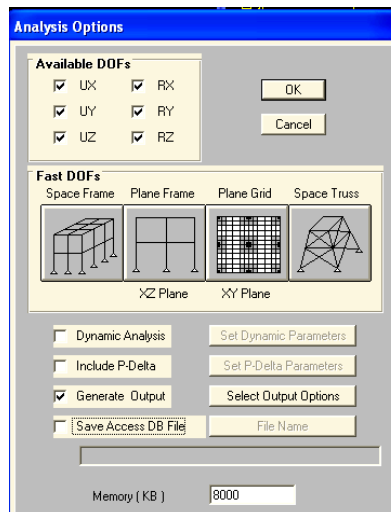
- En este cuadro:
 - ✓ Tipear **COMB1** en el cuadro de edición **Load Combination Name**.
 - ✓ Seleccionar **ADD** en el cuadro **Load Combination Type**.
 - ✓ En la sección **Define Combination**:
 - En el cuadro **Case Name** elegir **CM Load Case**.
 - Tipear **1,4** en el cuadro de edición **Scale Factor**.
 - Hacer clic en el botón **Add**.
 - En el cuadro **Case Name** elegir **CV Load Case**.
 - Tipear **1,7** en el cuadro de edición **Scale Factor**.
 - Hacer clic en el botón **Add**.
 - Hacer clic en **OK**.
- Seleccionar **Add New Combo**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Load Combination Data**.
- En este cuadro:
 - ✓ Tipear **COMB2** en el cuadro de edición **Load Combination Name**.
 - ✓ Seleccionar **ADD** en el cuadro **Load Combination Type**.
 - ✓ En la sección **Define Combination**:
 - Seleccionar **CM Load Case** y tipear **1,05** en el cuadro **Scale Factor**.

- Hacer clic en el botón **Modify**.
 - Seleccionar **CV Load Case** y tipear **1,275** en el cuadro **Scale Factor**.
 - Hacer clic en el botón **Modify**.
 - Seleccionar **EQX Load Case** del cuadro **Case Name** y tipear **1,4025** en el cuadro **Scale Factor**.
 - Hacer clic en el botón **Add**.
 - Hacer clic en **OK**.
 - Repetir estos pasos para añadir la combinación:
COMB3: 0,9CM+1,43EQX.
 - Seleccionar nuevamente **Add New Combo**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Load Combination Data**.
 - En este cuadro:
 - ✓ Tipear **COMB4** en el cuadro de edición **Load Combination Name**.
 - ✓ Seleccionar **ENVE** en el cuadro de lista **Load Combination Type**.
 - ✓ En la sección **Define Combination**:
 - Borrar los casos **CM**, **CV** y **EQX** con el botón **Delete**.
 - Seleccionar **COMB1** y tipear **1** en el cuadro de edición **Scale Factor**.
 - Hacer clic en el botón **Add**.
 - Hacer lo mismo para añadir las combinaciones **COMB2** y **COMB3** con factor de escala **1**.
 - Hacer clic en **OK**.
 - Hacer clic en **OK** para salir del cuadro **Load Combination Data**.
 - 3. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
- Esto completa la definición de combinaciones.

Paso 13. Análisis estático.

En este paso se verán las opciones para el análisis estático y como correr el programa.

1. Desde el menú **Analyze** seleccionar **Set Options...** Esto mostrará el cuadro de diálogo **Analysis Options**.



2. En este cuadro:

- Hacer clic en el botón **Space Frame** en la sección **Fast DOFs**.
- Seleccionar la casilla **Generate Output**.
- Hacer clic en el botón **Select Output Options**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Select Analysis Results**.

Nota: La opción **Generate Output** creará la salida que será almacenada en el archivo *.OUT donde * representa el nombre del Archivo SAP2000 del usuario.

- En este cuadro:
 - ✓ Seleccionar la casilla **Frame Forces**.
 - ✓ Seleccionar el botón **Select/Show Load**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Select Output**.
 - ✓ En este cuadro:
 - Seleccionar la combinación **COMB4**.
 - Hacer clic en **OK**.


Nota: Los casos de carga pueden ser seleccionados uno a uno, pero también pueden ser elegidos en grupo, para esto presionar la tecla **Shift** y hacer clic en el primer y en el último caso de carga de un grupo de casos que se encuentran juntos. Si se quiere seleccionar múltiples casos que no estén juntos presionar la tecla **Ctrl** y hacer clic en cada caso que se quiera seleccionar.

- ✓ Hacer clic en **OK** para salir del cuadro de diálogo **Select of Analysis Results**.



- Hacer clic en **OK** para salir del cuadro de diálogo **Analysis Options**.

Nota: Es importante notar que cuando los desplazamientos ó fuerzas son especificados para ser mostrados en el archivo *.OUT usando la opción **Generate Output**, los datos para todos los nudos y elementos son mostrados. No se tiene control sobre esto. Para problemas grandes esto puede generar archivos grandes e inmanejables.



Nota: Si se quiere correr un modelo grande, y se necesita incrementar la memoria alojada en el SAP2000 que por defecto es 8000Kb, hacer el cambio en el cuadro de diálogo **Analysis Options**.

3. Hacer clic en el botón **Run Analysis**  o seleccionar **Run** en el menú **Analyze**.
Nota: La opción **Run Minimized** es útil cuando se va a correr un modelo que puede tomar mucho tiempo para analizar. Esta opción proveerá un botón **Cancel** que permitirá que se cancele la corrida si es necesario.
 4. Al momento de correr se abrirá una ventana en la cual varias fases del análisis serán progresivamente reportadas. Una vez completado el análisis se puede usar la barra de movimiento vertical ubicada a la derecha de la ventana para revisar los mensajes editados y poder chequear cualquier advertencia o error.
Nota: Todos los mensajes editados al momento de correr el análisis se pueden encontrar en el archivo de texto *.LOG donde * es el nombre del archivo SAP2000 del usuario.
 5. Hacer clic en **OK** de la ventana de análisis. Notar que la ventana **3D View** ahora muestra el modelo deformado.
- Esto completa el análisis estático.


Paso 14. Revision de la deformada y de los desplazamientos de los nudos.


1. Notar que la estructura deformada aparece en la ventana izquierda con el primer caso de carga **CM**. Hacer clic en la ventana para activarla.
2. Hacer clic en el botón **Start Animation**  localizado en la barra de estado en la parte inferior derecha de la pantalla.
3. Hacer clic en el botón **Right Arrow**  localizado en la barra de estado, para ver la deformada de los otros casos de carga **CV** y **EQX**.

Revisión de la deformada

4. Hacer clic en el botón **Display Static Deformed Shape**  o seleccionar **Show Deformed Shape...** en el menú **Display**. Con esto aparece el cuadro de diálogo **Deformed Shape**.
5. En este cuadro:
 - Seleccionar el caso de carga **COMB1** en el cuadro de lista **Load**.
 - En la sección **Scaling** seleccionar la opción **Auto**.
 - Seleccionar las casillas **Wire Shadow** y **Cubic Curve** en la sección **Options**.
 - Hacer clic en **OK** para mostrar la estructura deformada.
6. Hacer clic en el botón **Right Arrow**  para ver las otras combinaciones **COMB2**, **COMB3** y **COMB4**.

Revisión de los desplazamientos de los nudos.

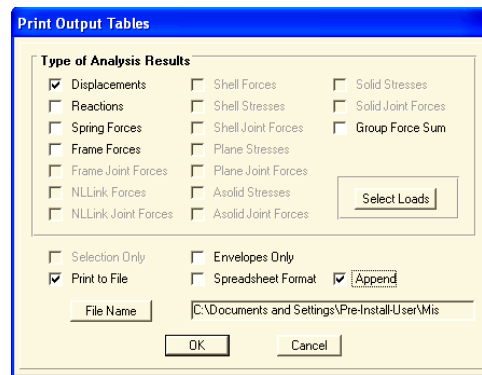
7. Hacer clic sobre el botón **Set Output Table Mode**  o en el menú **Display** seleccionar **Set Output Table Mode...** esto mostrará el cuadro de diálogo **Select Output**.

8. Todos los casos de carga en el cuadro de diálogo **Select Output** están seleccionados. Seleccionar el caso de carga **COMB4**. Hacer clic en **OK**.
9. Hacer clic con el botón derecho del mouse sobre cualquier nudo para ver sus desplazamientos.
 Nota: Por tratarse de una combinación tipo **ENVE** (envolvente) se muestran los valores máximos y mínimos.
 Nota: Al hacer clic derecho sobre cualquier elemento Frame se muestran sus fuerzas.
10. Hacer clic sobre el botón **Show Undeformed Shape**  o seleccionar **Show Undeformed Shape...** en el menú **Display**.

Impresión de los desplazamientos en un archivo de texto.

Se puede también mostrar los desplazamientos de los nudos en un archivo tipo texto desde la interfase grafica. Con este método se pueden seleccionar los nudos para los cuales la salida será impresa.



11. Seleccionar cualquier nudo de la estructura.
12. Seleccionar **Print Output Tables...** en el menú **File**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Print Output Tables**.



13. En este cuadro :
 - Seleccionar la casilla **Displacements** y quitar todas las otras selecciones en las casillas de la sección **Type of Analysis Results**.
 - Hacer clic en el botón **Select Loads** para seleccionar la combinación **COMB4**.
 - Seleccionar las casillas **Selection Only** y **Print to File** y quitar la selección de las demás casillas.
 Nota: Si no se selecciona **Print to File** la salida será llevada automáticamente a la impresora. Antes se deberá seleccionar **Print Setup** en el menú **File** para configurar las propiedades de la impresora.
 - Hacer clic sobre **File Name** para darle la dirección donde guardar el archivo de texto, o solo hacer clic en **OK** para aceptar la dirección dada por defecto.
14. Buscar el archivo y abrirlo con un editor o procesador de texto para revisar los resultados.

Esto completa la revisión de la deformada y los emplazamientos de los nudos.

Paso 15. Revisión de las fuerzas en los elementos Frame.

1. Después que el análisis ha sido corrido hacer clic sobre la ventana izquierda para activarla.
2. Hacer clic en el botón **Member Force Diagram for Frames**  o seleccionar **Show Element Forces/Stresses** en el menú **Display** y después seleccionar **Frames...** en el submenú, esto mostrará el cuadro de diálogo **Member Force Diagram for Frames**.
3. En este cuadro:
 - Seleccionar **COMB4 Load Case** en el cuadro de lista **Load**.
 - Seleccionar la opción **Moment 3-3** en la sección **Component**.
 - Seleccionar la opción **Auto** En la sección **Scaling**.
 - Seleccionar la casilla **Fill Diagram**.
 - Hacer clic en **OK**. esto mostrará los diagramas de momentos con las formas rellenas.
4. Hacer clic derecho sobre cualquier elemento para mostrar un cuadro de diálogo que permita ver el valor del momento en cualquier punto a lo largo del elemento.
5. Hacer clic en el botón **Member Force Diagram for Frames**  esto mostrará el cuadro de diálogo **Member Force Diagram for Frames**.
6. En este cuadro:
 - Quitar la selección de la casilla **Fill Diagram**.
 - Seleccionar la casilla **Show Values**.
 - Hacer clic en **OK** para exhibir los diagramas de momentos con los valores críticos mostrados.
7. Hacer clic derecho sobre cualquier elemento para mostrar un cuadro de diálogo que permita ver el valor del momento en cualquier punto a lo largo del elemento.

Impresión de las fuerzas en un archivo de texto.

Se puede también editar las fuerzas de los elementos Frame en un archivo de texto desde la interfase gráfica. Con este método se puede seleccionar los elementos para los cuales la salida será editada.

8. Seleccionar la viga numero 20 (viga del segundo nivel del pórtico).
9. Seleccionar **Print Output Tables...** en el menú **File**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Print Output Tables**.
10. En este cuadro:
 - Seleccionar la casilla **Frame Forces** y quitar todas las otras selecciones en las casillas de la sección **Type of Analysis Results**.
 - Hacer clic en el botón **Select Loads** para seleccionar la combinación **COMB4**.

Nota: Con la opción **Group Forces Sum** también se pueden seleccionar elementos Frame.

- Seleccionar las casillas **Selection Only**, **Print to File**, **Spreadsheet Format** y **Append**.

Nota: Si no se selecciona **Print to File** la salida será llevada automáticamente a la impresora. Antes se deberá seleccionar **Print Setup** en el menú **File** para configurar las propiedades de la impresora.

- Hacer clic sobre **File Name** para darle al archivo de texto la misma dirección de guardar del paso anterior.

11. Buscar el archivo y abrirlo con un editor o procesador de texto para revisar los resultados. Notar que esta ultima salida se encuentra justo debajo de la salida impresa en el paso anterior, esta es la virtud de la opción **Append**.

Esto completa la revisión de las fuerzas en los elementos Frame. Esto también completa el ejemplo 1 de esta parte.

Envolvente del diagrama momento flector de la viga 20

FRAME	LOAD	LOC	M3
20	COMB4 MAX	0.00	-0.600
20	COMB4 MAX	1.25	0.595
20	COMB4 MAX	2.50	1.157
20	COMB4 MAX	3.75	0.669
20	COMB4 MAX	5.00	-0.613
20	COMB4 MIN	0.00	-1.017
20	COMB4 MIN	1.25	0.409
20	COMB4 MIN	2.5	0.744
20	COMB4 MIN	3.75	0.403
20	COMB4 MIN	5.00	-0.869

Ejemplo 2. Análisis Estático de un Reservorio

A. Descripción del modelo

El ejemplo para esta parte es un reservorio cilíndrico con una cubierta semiesférica ambos de concreto. La estructura se modelará con elementos Shell.

Se aplicará dos casos de carga, uno por el peso propio del concreto, otro por la presión del agua y se hará una combinación de los dos casos.

Al final se obtendrán el diagrama de momento flector y el diagrama de fuerzas anulares a lo largo de la altura del cilindro correspondientes a la presión de agua.

Materiales:

Concreto	Peso específico	2400 Kg-f/m ³
	Modulo de Elasticidad	E=1,66E9 Kg-f/m ²
	Modulo de Poisson	v=0,20

Planta del cilindro:

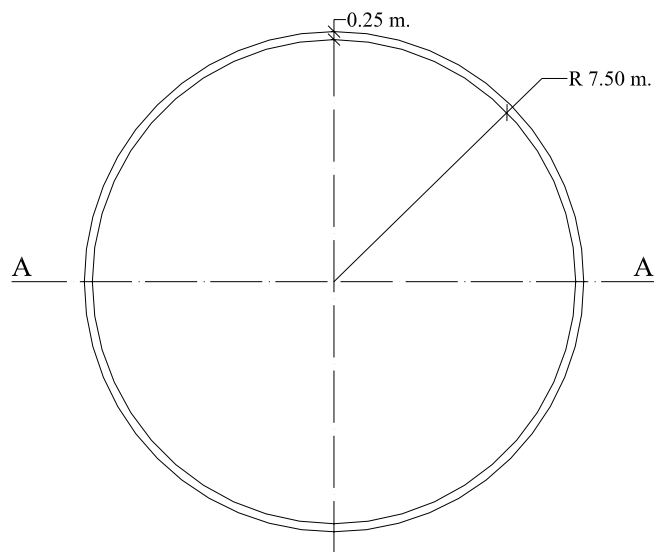


Figura 2.1. Planta del reservorio

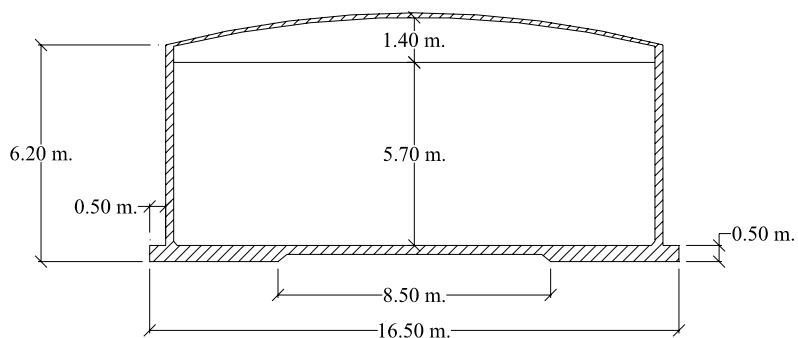


Figura 2.2. Corte A-A

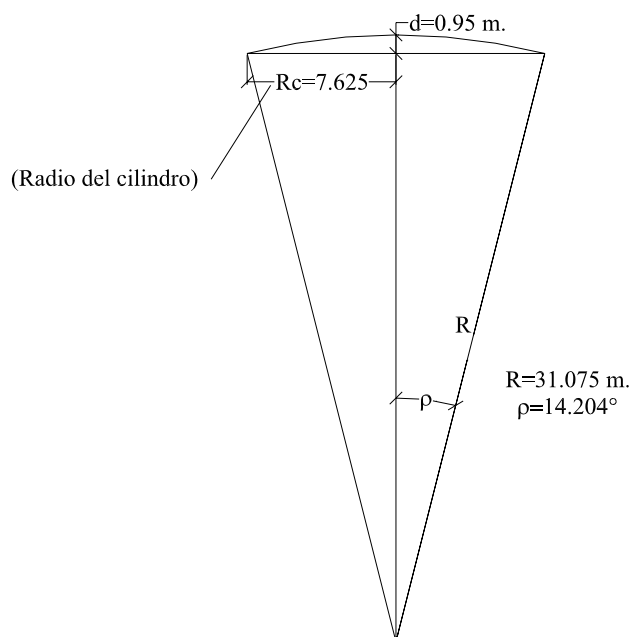


Figura 2.3. Datos para la elaboración de la geometría de la cubierta

B. Creación y análisis del modelo del reservorio





Paso 1. Elaboración de la geometría del modelo desde el Template (plantilla).

1. Para definir las unidades a **Kgf-m**. Hacer clic en:
2. En el menú **File** seleccionar **New Model From Template....** Esto mostrará el cuadro de diálogo **Model Templates**
3. En este cuadro:
 - Hacer clic en el boton **Cylinder**.




Esto mostrará el cuadro de diálogo **Cylinder**.

- En este cuadro:
 - ✓ Típear **32** en **Number of Circunferential Spaces** (numero de sectores circulares).
 - ✓ Típear **12** en **Number of Height Spaces** (número de secciones shell a lo largo de la altura del cilindro).
 - ✓ Típear **6,2** en **Cylinder Height**
 - ✓ Típear **7,625** en **Radius**
 - ✓ Comprobar que las casillas de verificación **Restraints** y **Gridlines** estén seleccionadas
 - ✓ Hacer clic en **OK**.
- 4. La pantalla mostrará la estructura en dos ventanas, en 3D en la ventana izquierda y en 2D en la ventana derecha (el titulo de esta ultima dice **r-theta Plane @ Z=6,2**).

5. Notar que los nudos de los apoyos están restringidos en los tres grados de libertad por traslación.
6. Hacer clic en la ventana **r-theta Plane @ Z=6,2** para activarla, seleccionar **Set 2D View...** en el menú **View**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Set 2D View**.
7. En este cuadro seleccionar la opción **r-theta plane** y tipear **0** en el cuadro de edición **Z** y hacer clic en **OK**.
8. Seleccionar los 32 apoyos dibujando una ventana que los incluya, para esto arrastrar el mouse presionando el botón izquierdo.
9. Hacer clic en el botón **Assign Joint Restraints**  o en el menú **Assign** escoger **Joint** y luego **Restraints...** en el submenú, esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Restraints**.
10. En este cuadro en la sección **Fast Restraints** hacer clic en el botón  y después hacer clic en **OK**.
11. Hacer clic en la ventana izquierda y presionar el botón **Refresh window** .
12. Activar la ventana derecha y hacer clic sobre el botón **All**. Esto seleccionara todos los elementos del cilindro.
13. En el menu **Edit** Seleccionar **Move...**, esto mostrará el cuadro de diálogo **Move Selected Points**.
14. En este cuadro tipear **-6,2** en el cuadro de edición **Delta Z** y luego hacer clic en **OK**.
15. En el menú **Edit** seleccionar **Add to Model From Template....** Esto mostrará el cuadro de diálogo **Model Templates**.
16. En este cuadro seleccionar el botón de diálogo **Dome**.  Esto mostrará el cuadro de diálogo **Dome**.
17. En este cuadro:
 - Tipear **32** en **Number of Circumferential Spaces** (número de sectores circulares).
 - Tipear **8** en **Number of Segments** (número de segmentos en el eje vertical).
 - Tipear **31,075** en **Radius**. Ver figura 2.3.
 - Tipear **14,204** en **Roll Down Angle**. Ver figura 2.3.
 - Quitar la selección de la casilla **Restraints**, solo debe quedar la selección en la casilla **Gridlines**.
 - Hacer clic en el botón **OK**.

Nota: En este último cuadro la opción **Advanced** sirve para trasladar y rotar la estructura que se esta añadiendo
18. La pantalla mostrará la estructura dome (cúpula) ubicado exactamente sobre el cilindro en donde los nudos de los elementos Shell en la zona de acoplamiento comparten las mismas coordenadas globales.

19. El programa esta en el modo **Draw**, hacer clic sobre el botón **Pointer**  para salir de este modo.
20. Seleccionar **Edit Grid...** en el menú **Draw**, esto mostrará el cuadro de diálogo **Modify Grid Lines**.
21. En este cuadro:
 - Seleccionar la opción **Z** en el área **Direction**
 - Típear **-6,2** en **Z Location**
 - Hacer clic en **Add Grid Line**
 - Hacer clic en **OK**.

Esto completa la elaboración de la geometría desde el Template (plantilla)

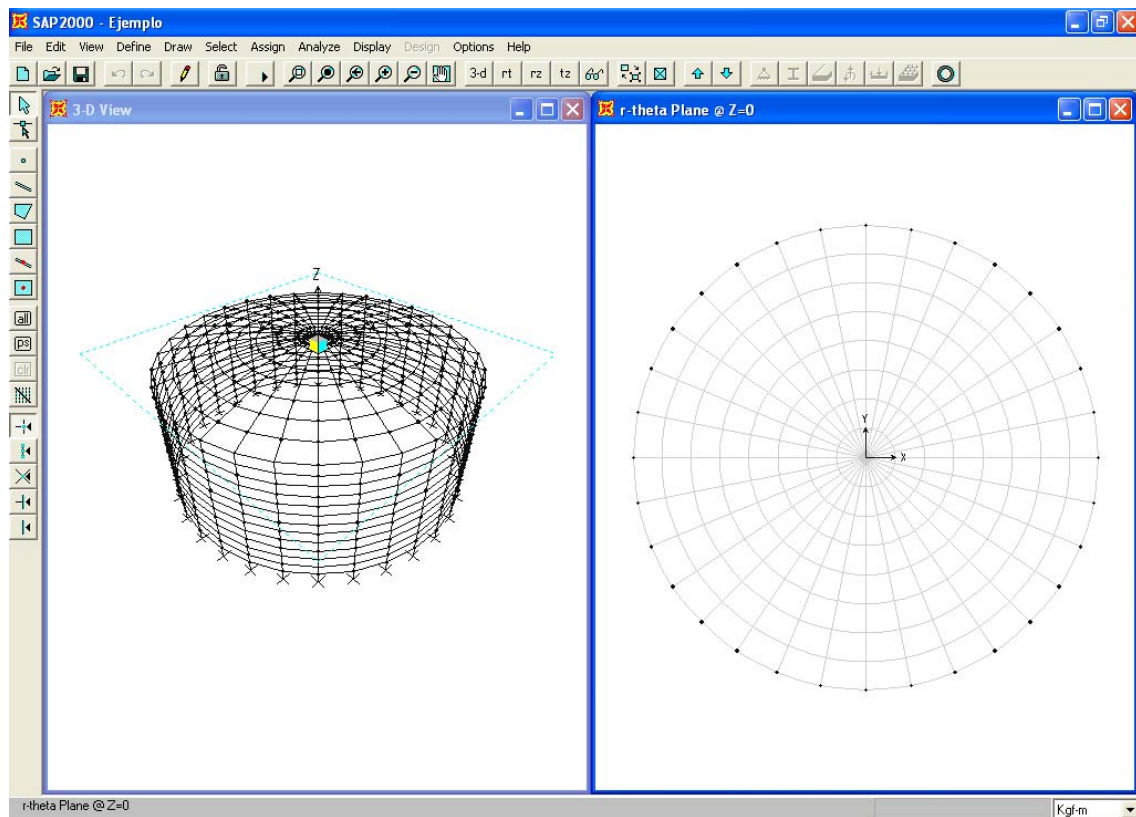



Figura 2.4. Geometría del modelo al terminar el paso 1

Paso 2. Definición de las propiedades del material.

Las unidades de los valores de las propiedades se encontrarán en las unidades definidas en el paso 1 (Elaboración de la geometría del modelo)


1. En el menú **Define** elegir **Materials...**, esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Materials**.
2. Con la opción **CONC** encendida en el área **Materials** hacer clic en **Modify/Show Material**, esto mostrará el cuadro de diálogo **Material Property Data**.
3. Típear **2400** en el cuadro edición **Weight per unit Volume** para considerar el peso propio del concreto.

4. Típear **1,66E9** en el cuadro de edición **Modulus of Elasticity**.
 5. Típear **0,2** en el cuadro de edición **Poisson's Ratio**.
 6. Hacer clic en el botón **OK** para aceptar los cambios y salir del cuadro de diálogo **Material Property Data**.
 7. Hacer clic en el botón **OK** para salir del cuadro de diálogo **Define Materials**.
 8. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
- Esto completa la definición de los materiales.

Paso 3. Definición de las secciones Shell.






1. En el menú **Define** elegir **Shell Sections...**, esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Shell Sections**.
2. En este cuadro:
 - Con la opción **SSEC1** encendida hacer clic en **Modify/Show Section**, esto mostrará el cuadro de diálogo **Shell Sections**.
 - Cambiar el nombre de **SSEC1** por **CUBIERTA**, seleccionar **CONC** en el cuadro de lista **Material**.
 - En el área **Thickness**:
 - ✓ Típear **0,1** en la caja **Membrane**.
 - ✓ Típear **0,1** en la caja **Bending**.
 - En el área **Type** verificar que solo queda la selección en la opción **Shell**.
 - Hacer clic en **OK** para aceptar la nueva sección.
 - Hacer clic en **Add New Section**.
 - Cambiar el nombre de **SSEC2** por **PARED**, seleccionar **CONC** en el cuadro de lista **Material**.
 - En el área **Thickness**:
 - ✓ Típear **0,25** en la caja **Membrane**.
 - ✓ Típear **0,25** en la caja **Bending**.
 - En el área **Type** verificar que solo queda la selección en la opción **Shell**.
 - Hacer clic en **OK** para aceptar la nueva sección.

Nota: La opción **Shell** determina el comportamiento completo de cáscara; una combinación de comportamiento de membrana y lamina. Todas las fuerzas y momentos pueden ser sostenidos.

 - Hacer clic en el botón **OK** para salir del cuadro de diálogo **Define Shell Sections**.
 - Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.

Esto completa la definición de secciones Shell.


Paso 4. Asignación de secciones Shell.

1. Hacer clic en la ventana derecha para activarla.
 2. Hacer clic en el botón **tz 2D View**  y seleccionar todos los elementos mostrados en la ventana derecha dibujando una ventana, para esto arrastrar el mouse presionando el botón izquierdo.
 3. Notar que en la ventana izquierda quedan seleccionados solo los elementos shell del cilindro.
 4. Seleccionar **Shell** en el menú **Assign** y luego **Sections...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Shell Sections**.
 5. En este cuadro:
 - Con la opción **PARED** encendida hacer clic en el botón **OK**.
 6. Hacer clic en el botón **3D View** . Observar que por defecto las secciones Shell de la cubierta quedan automáticamente asignados.
 7. Hacer clic sobre el botón **Show Undeformed Shape**  para limpiar la exhibición de las etiquetas de las secciones.
 8. Hacer clic en el botón **rt 2D View** .
 9. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
- Esto completa la asignación de secciones Shell

Paso 5. Definición de los Casos de Carga.


1. En el menú **Define** seleccionar **Static Load Cases...** Esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Static Load Case Names**.
2. En este cuadro:
 - Tipear **PESPROP** en el cuadro **Load**.
 - Seleccionar **DEAD** en el cuadro de lista **Type**.
 - Tipear **1** en el cuadro de edición **Self Weight Multiplier**.
 - Hacer clic en el botón **Change Load**.

Nota: En este ejemplo el programa calcula automáticamente el peso propio de los elementos de la estructura. Si no se quiere incluir el peso propio se deberá tipear **0** en el cuadro **Self Weight Multiplier** o se debería tipear **0** en el cuadro **Weight per unit Volume** en el cuadro de diálogo **Define Material**.

- Tipear **PRESAGUA** en el cuadro **Load**.
 - Seleccionar **LIVE** en el cuadro de lista **Type**.
 - Tipear **0** en el cuadro **Self Weight Multiplier**.
 - Hacer clic en **Add New Load**.
 - Hacer clic en el botón **OK**.
3. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
- Esto completa la definición de los Casos de Carga Estática.

Paso 6. Asignación de cargas estáticas Shell.

Se asignarán sobre la pared la carga distribuida triangular debido a la presión del agua. Para esto se usaran Nudos Patterns.

1. Hacer clic en la ventana izquierda **3D View** para activarla.
2. Hacer clic en el botón **Set Elements**  en la barra de herramientas principal o seleccionar **Set Elements...** en el menú **View**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Set Elements**.
3. En este cuadro:
 - En la sección **Shell** seleccionar la casilla **Local Axes**.
 - Hacer clic en el botón **OK**.


Nota: Las flechas de los ejes locales son de color rojo, blanco y azul. La flecha roja es siempre el eje local 1, la flecha blanca es siempre el eje local 2, y la flecha azul es siempre el eje local 3. Para elementos Shell el eje local 3 siempre se encuentra sobre la normal del elemento y apunta desde el elemento hacia fuera. Con esta flecha se define la cara interior y la cara exterior del elemento Shell.

Nota: Observar que la flecha del eje local 3 se dirige por defecto hacia fuera del cilindro. Como la carga de presión es positiva si actúa sobre la cara interior del elemento el signo de las presiones debe ser positivo.

Definición de Joints Patterns.

4. Seleccionar **Joint Patterns...** en el menú **Define**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Pattern Names**.
5. En este cuadro:
 - Tippear **PRESAGUA** en el cuadro **Patterns**.
 - Hacer clic en **Change Pattern Name**.
 - Hacer clic en **OK**.

Asignación de cargas Joints Patterns a los nudos del cilindro.

6. Hacer clic sobre la ventana derecha para activarla. Hacer clic sobre el botón **tz** **2D View** .
7. En la ventana derecha seleccionar todo el modelo dibujando una ventana, para esto arrastrar el mouse presionando el botón izquierdo. Notar en la ventana izquierda que solo los nudos y los elementos Shell del cilindro quedan seleccionados.
8. Seleccionar **Join Patterns...** en el menú **Assign**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Pattern Data**.
9. En este cuadro:
 - Elegir **PRESAGUA** en el cuadro de lista **Pattern Name**.
 - Ingresar los valores **-1000** en **C** y **-516,667** en **D**.
 - Seleccionar la opción **Zero Negative values**.
 - Hacer clic en **OK**.

10. Hacer clic sobre la ventana izquierda para activarla y hacer clic en el botón

Refresh Window .

Asignación de presiones a los elementos Shell mediante Joints Patterns.

11. Seleccionar **Get Previous Selection** en el menú **Select**.

12. Seleccionar **Shell Static Loads...** en el menú **Assign** y después **Pressure...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Shell Pressure Loads**.

13. En este cuadro:

- Seleccionar **PRESAGUA** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
- En la sección **Pressure** Seleccionar **By Joint Pattern**.
- Dejar los otros valores y opciones dados por defecto y hacer clic en **OK**.

14. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.

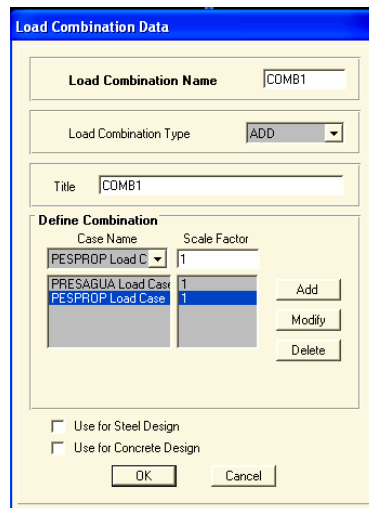
Esto completa la Asignación de Cargas Estáticas Shell.

Paso 7. Definición de combinaciones.

1. Desde el menú **Define** seleccionar **Load Combinations...** Esto mostrará el cuadro de diálogo **Load Combination Data**.


2. En este cuadro:

- En la sección **Clic to:** seleccionar **Add New Combo**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Load Combination Data**.



Case Name	Scale Factor
PRESAGUA Load Case	1
PESPROP Load Case	1

- En este cuadro:
 - ✓ Tipear **COMB1** en el cuadro de edición **Load Combination Name**.
 - ✓ Seleccionar **ADD** en el cuadro **Load Combination Type**.
 - ✓ En la sección **Define Combination**:
 - En el cuadro **Case Name** elegir **PRESAGUA Load Case**.
 - Hacer clic en el botón **Add**.
 - En el cuadro **Case Name** elegir **PESPROP Load Case**.
 - Hacer clic en el botón **Add**.
 - Hacer clic en **OK**.


- Hacer clic en **OK** para salir del cuadro **Load Combination Data**.
3. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
Esto completa la definición de combinaciones.

Paso 8. Análisis Estático.



1. En el menú **Analyze** seleccionar **Set Options....** Esto mostrará el cuadro de diálogo **Analysis Options**.
2. En este cuadro:
 - Hacer clic en el botón **Space Frame** en la sección **Fast DOFs**. ó seleccionar las seis casillas de la sección **Available DOFs**.
 - Hacer clic en **OK**.

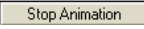
Nota: La opción **Generate Output** es útil para editar desplazamientos, fuerzas, esfuerzos, reacciones etc., en un archivo de texto *filename.OUT*. Pero las respuestas para cada nudo o elemento son editadas. Para problemas grandes eso puede llevar a imprimir archivos grandes e inmanejables. Los resultados de la estructura se obtendrán después de correr el programa. Esto se especifica en el siguiente paso.

Nota: Si se quiere correr un modelo grande, y se necesita incrementar la memoria alojada en el SAP2000 que por defecto es 8000Kb, hacer el cambio en el cuadro de diálogo **Analysis Options**.



3. Hacer clic en el botón **Run Analysis**  o seleccionar **Run** en el menú **Analyze**.
Nota: La opción **Run Minimized** es útil cuando se va a correr un modelo que puede tomar mucho mas tiempo para analizar. Esta opción proveerá un botón **Cancel** que permitirá que se cancele la corrida si es necesario.
4. Al momento de correr se abrirá una ventana en la cual varias fases del análisis serán progresivamente reportadas. Una vez completado el análisis se puede usar la barra de movimiento vertical ubicado a la derecha de la ventana para revisar los mensajes editados y poder chequear cualquier advertencia o error.
Nota: Todos los mensajes editados al momento de correr el análisis se pueden encontrar en el archivo de texto *filename.LOG*.
5. Hacer clic en **OK** de la ventana de análisis. Notar que la ventana **3D View** ahora muestra el modelo deformado.
Esto completa el análisis estático.

Paso 9. Revisión de la deformada y de los desplazamientos de los nudos.



1. Notar que la estructura deformada aparece en la ventana izquierda con el primer caso de carga **PESPROP**. Hacer clic en la ventana para activarla.
2. Hacer clic en el botón **Star Animation**  localizado en la barra de estado en la parte inferior derecha de la pantalla.
3. Hacer clic en el botón **Right Arrow**  localizado en la barra de estado, para ver la deformada del otro caso de carga **PRESAGUA**.

4. Hacer clic en el botón **Stop Animation**  localizado en la barra de estado en la parte inferior derecha de la pantalla.

Revisión de la deformada

5. Hacer clic en el botón **Display Static Deformed Shape**  o seleccionar **Show Deformed Shape...** en el menú **Display**. Con esto aparece el cuadro de diálogo **Deformed Shape**.
6. En este cuadro:
- Seleccionar el caso de carga **COMB1 combo** en el cuadro de lista **Load**.
 - En la sección **Scaling** seleccionar la opción **Auto**.
 - Seleccionar las casillas **Cubic Curve** en la sección **Options**.
 - Hacer clic en **OK** para mostrar la estructura deformada.
7. Hacer clic en el botón **Star Animation**  para animar la estructura.

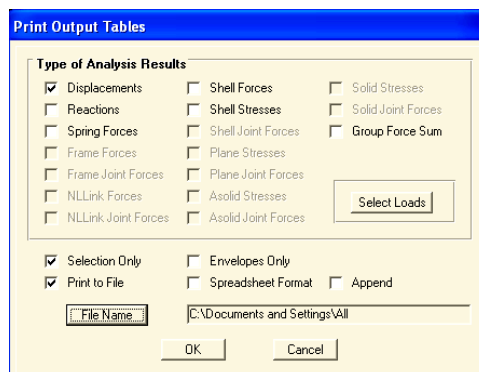
Revisión de los desplazamientos de los nudos.

8. Hacer clic sobre el botón **Display Output Tables**  o en el menú **Display** seleccionar **Set Output Table Mode...** esto mostrará la caja de diálogo **Select Output**.
9. Todos los casos de carga en el cuadro de diálogo **Select Output** están seleccionados. Seleccionar el caso de carga **COMB1**, y hacer clic en **OK**.
10. Hacer clic con el botón derecho del mouse sobre cualquier nudo para ver sus desplazamientos.
11. Hacer clic sobre el botón **Show Undeformed Shape**  o seleccionar **Show Undeformed Shape...** en el menú **Display**.

Impresión de los desplazamientos en un archivo de texto.

Se puede también mostrar los desplazamientos de los nudos en un archivo tipo texto desde la interfase grafica. Con este método se pueden seleccionar los nudos para los cuales la salida será impresa.

12. Seleccionar cualquier nudo de la estructura.
13. Seleccionar **Print Output Tables...** en el menú **File**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Print Output Tables**.



14. En este cuadro :

- Seleccionar la casilla **Displacements** y quitar todas las otras selecciones en las casillas de la sección **Type of Analysis Results**.
- Hacer clic en el botón **Select Loads** para seleccionar la combinación **COMB1**.
- Seleccionar las casillas **Selection Only** y **Print to File** y quitar la selección de las demás casillas.


Nota: Si no se selecciona **Print to File** la salida será llevada automáticamente a la impresora. Antes se deberá seleccionar **Print Setup** en el menú **File** para configurar las propiedades de la impresora.

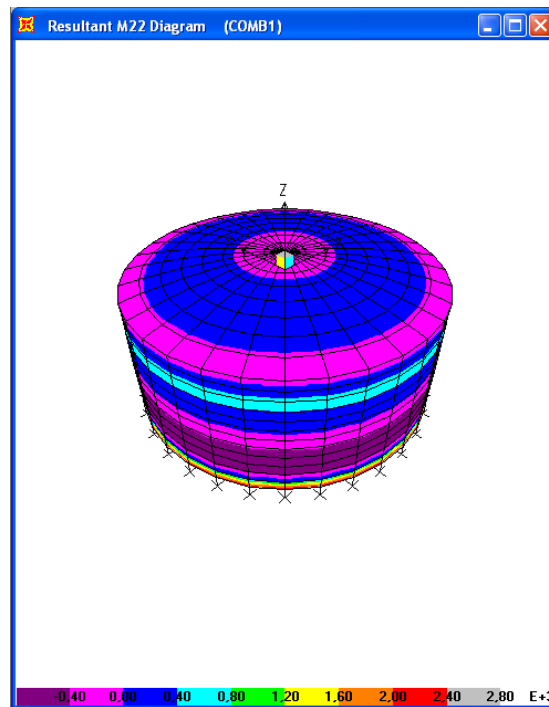
- Hacer clic sobre **File Name** para darle la dirección donde guardar el archivo de texto, o solo hacer clic en **OK** para aceptar la dirección dada por defecto.

15. Buscar el archivo o abrirlo con un editor o procesador de texto para revisar los resultados.

Esto completa la revision de la deformada y los desplazamientos de los nudos.

Paso 10. Revisión de las fuerzas en los elementos Shell.

1. Después que el análisis ha sido corrido hacer clic sobre la ventana izquierda para activarla.
2. Hacer clic en el botón **Element Force/Stress Contours for Shells**  o seleccionar **Show Element Forces/Stresses** en el menú **Display** y después seleccionar **Shells...** en el submenú, esto mostrará el cuadro de diálogo **Element Force/Stress Contours for Shell**.
3. En este cuadro:
 - Seleccionar **COMB1 Load Case** en le cuadro de lista **Load**.
 - Seleccionar la opción **Force**.
 - Seleccionar la opción **M22** En la sección **Component**.
 - Seleccionar la casilla **at Selected Joints**.
 - Hacer clic en **OK**. Esto mostrará los diagramas de momentos M22.
4. Hacer clic derecho sobre cualquier elemento para mostrar un cuadro de diálogo que permita ver el valor del momento en cualquier punto a lo largo del elemento.



Impresión de las fuerzas en un archivo de texto.

Se puede también editar las fuerzas de los elementos Shell en un archivo de texto desde la interfase grafica. Con este método se puede seleccionar los elementos para los cuales la salida será editada.

5. Seleccionar los doce elementos Shell que se encuentran a lo largo de la generatriz del cilindro.
6. Seleccionar **Print Output Table...** en el menú **File**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Print Output Tables**.
7. En este cuadro:
 - Seleccionar la casilla **Shell Forces** y quitar todas las otras selecciones en las casillas de la sección **Type of Analysis Results**.

Nota: Con la opción Shell Stresses se pueden revisar los esfuerzos en los elementos Shell, no se seleccionan porque en este ejemplo solo se graficaran las fuerzas.

- Hacer clic en el botón **Select Loads** para seleccionar la carga **Presagua**.
 - Seleccionar las casillas **Selection Only**, **Print to File**, **Spreadsheet Format** y **Append**.
 - Hacer clic sobre **File Name** para darle al archivo de texto la misma dirección de guardar del paso anterior.
8. Buscar el archivo y abrirlo con un editor o procesador de texto para revisar los resultados. Notar que esta ultima salida se encuentra justo debajo de la salida impresa en el paso anterior, esta es la virtud de la opción **Append**.

Esto completa el análisis estructural del reservorio.

Ejemplo 3. Diseño en acero de un pórtico bidimensional

A. Descripción del modelo

La estructura es un pórtico bidimensional de acero el cual esta sometido a cargas locales en los nudos y cargas uniformes sobre las vigas.

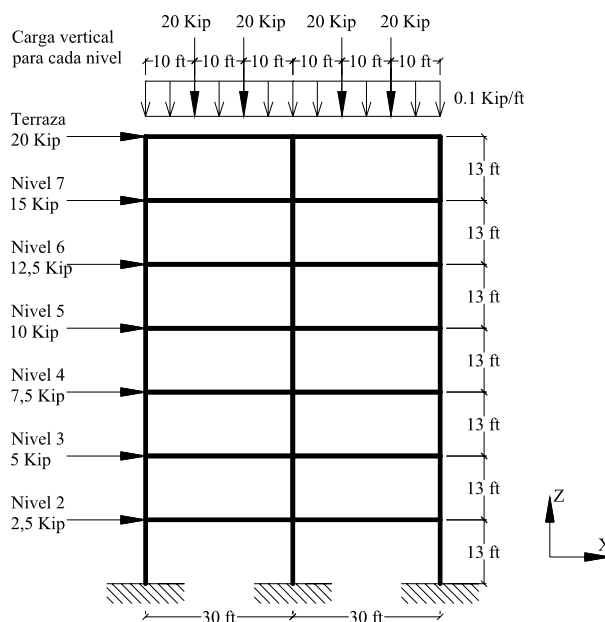


Figura 3.1

Secciones:

- Todas las columnas son W14S
- Todas las vigas son W24S

Materiales:

Acero:

- Modulo de elasticidad $E=29500$ Ksi.
- Masa típica de cada piso $0,489$ Kip-s²/in.
- Fluencia del acero $f_y=36$ Ksi





B. Creación y análisis del modelo del edificio

Paso 1. Elaboración de la geometría del modelo desde el template (plantilla).

1. Para definir las unidades a Kip-ft. Hacer clic en:
2. En el menú **File** seleccionar **New Model From Template....** Esto mostrará el cuadro de diálogo **Model Templates**
3. En este cuadro:
 - Hacer clic en el botón **Portal Frame**.





Esto mostrará el cuadro de diálogo **Portal Frame**.

- En este cuadro:
 - ✓ Tipear **7** en **Number of Stories** (número de pisos).
 - ✓ Tipear **2** en **Number of Bays** (número de paños).
 - ✓ Tipear **13** en **Story Height** (altura de entrepiso).
 - ✓ Tipear **30** en **Bay Width** (ancho del paño).
 - ✓ Comprobar que las casillas de verificación **Restraints** y **Gridlines** estén seleccionadas.
 - ✓ Hacer clic en **OK**.
- 4. En el menú **Draw** seleccionar **Edit Grid....** Esto mostrará el cuadro de diálogo **Modify Grid Lines**.
- 5. En este cuadro:
 - Seleccionar la opción **Z** en el área **Direction**.
 - Seleccionar la opción **Glue Joints to Grid Lines**.
 - Hacer clic en **OK**.
- 6. La pantalla mostrará la estructura en dos ventanas, en 3D en la ventana izquierda y en 2D en la ventana derecha (el título de esta última dice **X-Z Plane @ Y=0**). Notar que los nudos de los apoyos están restringidos en los tres grados de libertad por traslación.
- 7. Hacer clic en la ventana derecha **X-Z Plane @ Y=0** para activarla.
- 8. Seleccionar los tres apoyos haciendo clic sobre cada uno de ellos ó seleccionarlos dibujando una ventana que los incluya, para esto arrastrar el mouse presionando el botón izquierdo.
- 9. Hacer clic en el botón **Assign Joint Restraints**  ó en el menú **Assign** escoger **Joint** y luego **Restraints...** en el submenú, esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Restraints**.
- 10. En este cuadro en la sección **Fast Restraints** hacer clic en el botón  y después hacer clic en **OK**.
- 11. Hacer clic en la ventana izquierda y presionar el botón **Refresh window** .
- 12. Hacer clic en la ventana derecha para activarla.
- 13. Hacer clic en el botón **Save Model**  en la barra de herramientas principal o seleccionar **Save** en el menú **File** para grabar el archivo.

Paso 2. Definición de las propiedades del material.


Las unidades de los valores de las propiedades se encontrarán en las unidades definidas en el paso 1 (Elaboración de la geometría del modelo)

1. Presione el cuadro desplegable de la barra de estado para cambiar las unidades a Kip-in. Haciendo clic en: 
2. En el menú **Define** elegir **Materials...**, esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Materials**.


3. Con la opción **STEEL** encendida en el área **Materials** hacer clic en **Modify/Show Material**, esto mostrará el cuadro de diálogo **Material Property Data**.
 4. Típear **29500** en el cuadro de edición **Modulus of Elasticity**. Dejar el resto de valores dados por defecto.
 5. Verificar que el valor correspondiente al esfuerzo de fluencia del acero igual a **36** este tipeado el cuadro edición **Steel yield stress, fy**.
 6. Hacer clic en el botón **OK** para aceptar los cambios y salir del cuadro de diálogo **Material Property Data**.
 7. Hacer clic en el botón **OK** para salir del cuadro de diálogo **Define Materials**.
 8. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
- Esto completa la definición de los materiales.





Paso 3. Definición de las secciones Frame.

1. En el menú **Define** elegir **Frame Sections..**, esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Frame Sections**.
2. Para importar secciones en este cuadro de diálogo:
 - Hacer clic en la opción **Import/Wide Flange**.
 - En la lista desplegada hacer clic en **Import I/Wide Flange**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Section Property File**.
 - En este cuadro:
 - ✓ Localizar el archivo de datos **SECTIONS.PRO**, típicamente esta localizado en el directorio donde se instalo el SAP2000.
 - ✓ Abrir el archivo de datos **SECTION.PRO** haciendo doble clic sobre el nombre del archivo.
 - ✓ Esto mostrará el cuadro de diálogo que incluye una lista para mostrar todas las secciones disponibles. El título de esta caja mostrará la ruta para llegar al archivo de datos.
 - ✓ En esta lista:
 - Las secciones Frame pueden ser seleccionadas una a una, pero también pueden ser elegidas en grupo, para esto presionar la tecla **Shift** y hacer clic en la primera y en la última sección del grupo de secciones **W14** que se encuentran juntas.
 - Hacer clic en el botón **OK**, esto mostrará el cuadro de diálogo **I/Wide Flange Section** el cual exhibirá la última sección seleccionada, dimensiones de esta sección y **STEEL** como tipo de material por defecto.
 - ✓ Hacer clic en **OK**, esto cerrara el cuadro de diálogo **I/Wide Flange Section** y retomará el cuadro de diálogo **Define Frame Sections**.
 - De la misma forma importar la totalidad de las secciones **W24**.
 - Hacer clic en la opción **Add I/Wide Flange**.

- En la lista desplegada hacer clic en **Add Auto Select**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Auto Selection Sections**.
 - En este cuadro:
 - ✓ Cambiar el nombre **AUTO1** por **COLUMNA**, en el área **Auto Section Name**.
 - ✓ Seleccionar todo los perfiles exceptuando los perfiles **W14** del cuadro **Auto Selections**. Esto garantizará que todos los elementos que tengan una sección tipo **COLUMNA** serán diseñados empleando alguno de los perfiles **W14** de entre la lista **Auto Selections**.
 - ✓ Presionar el botón **Remove** para añadir los angulares a la lista **List of Sections**.
 - ✓ Hacer clic en **OK**, esto cerrara el cuadro de diálogo **Auto Selection Sections**.
 - Hacer clic en la opción **Add I/Wide Flange**.
 - En la lista desplegada hacer clic en **Add Auto Select**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Auto Selection Sections**.
 - En este cuadro:
 - ✓ Cambiar el nombre **AUTO1** por **VIGA**, en el área **Auto Section Name**.
 - ✓ Seleccionar todo los perfiles exceptuando los perfiles **W24** del cuadro **Auto Selections**. Esto garantizará que todos los elementos que tengan una sección tipo **VIGA** serán diseñados empleando alguno de los perfiles **W24** de entre la lista **Auto Selections**.
 - ✓ Presionar el botón **Remove** para añadir los angulares a la lista **List of Sections**.
 - ✓ Hacer clic en **OK**, esto cerrara el cuadro de diálogo **Auto Selection Sections**.
 - Hacer clic en **OK**.
3. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
Esto completa la definición de secciones **Frame**.

Paso 4. Asignación de Secciones **Frame**


1. Hacer clic en la ventana derecha para activarla.
2. Seleccionar todas las vigas de la estructura, haciendo clic sobre el boton  **Set Intersecting Line Select Mode** en la barra de herramientas lateral, para esto arrastrar el mouse presionando el botón izquierdo intersectando todas las vigas de la estructura.
3. En el menú **Assign** seleccionar **Frame** y luego **Sections...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Frame Sections**.
4. En el área **Frame Sections** hacer clic en **VIGA** y después hacer clic en **OK**.
5. Notar que las vigas se etiquetan con el nombre **VIGA** y los otros elementos por defecto tienen la etiqueta **FSEC1**.

6. Hacer clic en el botón **Show Undeformed Shape**  para limpiar la exhibición de las etiquetas de las secciones de los elementos Frame.
 7. Seleccionar todas las columnas de la estructura, haciendo clic sobre el botón  **Set Intersecting Line Select Mode** en la barra de herramientas lateral, para esto arrastrar el mouse presionando el botón izquierdo intersectando todas las columnas de la estructura.
 8. En el menú **Assign** seleccionar **Frame** y luego **Sections...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Frame Sections**.
 9. En el área **Frame Sections** hacer clic en **COLUMNA** y después hacer clic en **OK**.
 10. Notar que vigas y columnas se etiquetan con los nombres **VIGA** y **COLUMNA** respectivamente.
 11. Hacer clic en el botón **Show Undeformed Shape**  para limpiar la exhibición de las etiquetas de las secciones de los elementos Frame otra vez.
 12. Hacer clic en el botón **Save model**  para grabar el archivo.
- Esto completa la asignación de secciones.

Paso 5. Definición de los Casos de Carga Estática.



1. En el menú **Define** seleccionar **Static Load Cases...**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Static Load Case Names**.
2. En este cuadro:
 - Tipear **CM** en el cuadro **Load**.
 - Seleccionar **DEAD** en el cuadro de lista **Type**.
 - Tipear **1** en el cuadro de edición **Self Weight Multiplier**.
 - Hacer clic en el botón **Change Load**.



Nota: En este ejemplo el programa calcula automáticamente el peso propio de los elementos de la estructura. Si no se quiere incluir el peso propio se deberá tipear **0** en el cuadro **Self Weight Multiplier** o se debería tipear **0** en el cuadro **Weight per unit Volume** en el cuadro de diálogo **Define Material**.

- Tipear **EQX** en el cuadro **Load**.
 - Seleccionar **QUAKE** en el cuadro de lista **Type**.
 - Tipear **0** en el cuadro **Self Weight Multiplier**.
 - Hacer clic en **Add New Load**.
 - Hacer clic en el botón **OK**.
3. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
- Esto completa la definición de los Casos de Carga Estática.

Paso 6. Asignación cargas estáticas en los nudos.


Se procederá a la asignación de cargas, las cuales son mostradas en la figura 3.1





1. Presione el cuadro desplegable de la barra de estado para cambiar las unidades a Kip-ft. Haciendo clic en: 
2. Hacer clic en el botón **Set elements**  en la barra de herramientas principal o seleccionar **Set Elements...** en el menú **View**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Set Elements**.
3. En este cuadro:
 - En la sección **Joints** seleccionar la casilla **Labels**.
 - Hacer clic en el botón **OK**.
3. Seleccionar el nudo etiquetado **2** del segundo nivel.
4. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
5. En este cuadro:
 - Seleccionar **EQX** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Típear **2,5** en el cuadro de edición **Force Global X**.
 - Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
6. Seleccionar el nudo etiquetado **3** del tercer nivel.
7. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
8. En este cuadro:
 - Seleccionar **EQX** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Típear **5** en el cuadro de edición **Force Global X**.
 - Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
9. Seleccionar el nudo etiquetado **4** del cuarto nivel.
10. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
11. En este cuadro:
 - Seleccionar **EQX** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Típear **7,5** en el cuadro de edición **Force Global X**.
 - Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
12. Seleccionar el nudo etiquetado **5** del quinto nivel.
13. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
14. En este cuadro:
 - Seleccionar **EQX** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.

- Típear **10** en el cuadro de edición **Force Global X**.
 - Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
15. Seleccionar el nudo etiquetado **6** del sexto nivel.
 16. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
 17. En este cuadro:
 - Seleccionar **EQX** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Típear **12,5** en el cuadro de edición **Force Global X**.
 18. Hacer clic en **OK** para aplicar la carga
 19. Seleccionar el nudo etiquetado **7** del septimo nivel.
 20. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
 21. En este cuadro:
 - Seleccionar **EQX** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Típear **15** en el cuadro de edición **Force Global X**.
 22. Hacer clic en **OK** para aplicar la carga
 23. Seleccionar el nudo etiquetado **8** del la terraza.
 24. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
 25. En este cuadro:
 - Seleccionar **EQX** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Típear **20** en el cuadro de edición **Force Global X**.
 26. Hacer clic en **OK** para aplicar la carga
 27. Hacer clic en el botón **Show Undeformed Shape**  para limpiar la exhibición de las cargas estáticas en los nudos.
 28. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
- Esto completa la asignación de cargas estáticas en los nudos.

Paso 7. Asignación de cargas estáticas Frame.

Se procederá a la asignación de cargas a cada uno de los niveles de la estructura, las cuales son mostradas en la figura 3.1.

1. Seleccionar todas las vigas de la estructura, haciendo clic sobre el boton  **Set Intersecting Line Select Mode** en la barra de herramientas lateral, para esto arrastrar el mouse presionando el botón izquierdo intersectando todas las vigas de la estructura.



2. En el menú **Assign** seleccionar **Frame Static Loads...** y luego **Point and Uniform...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Point and Uniform Span Loads**.
3. En este cuadro:
 - Seleccionar **CM** desde el cuadro **Load Case Name**.
 - En el área **Load Type and Direction**, seleccionar la opción **Forces** y seleccionar **Global Z** en el cuadro de lista **Direction**.
 - En el área **Options** Seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - En el área **Uniform Load** tipear **-0,1**.
 - Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
4. Hacer clic en el botón **Restore Previous Selection**  en la barra de herramienta lateral (o seleccionar **Get Previous Selection** en el menú **Select**). Esto restaurará las selecciones hechas a las vigas del pórtico.
5. Hacer clic sobre el botón **Assign Frame Span Loading**  en la barra de herramienta principal. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Point and Uniform Span Loads**.
6. En este cuadro:
 - Seleccionar **CM** desde el cuadro **Load Case Name**.
 - En el área **Options** Seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - En el área **Point Loads** se encuentran los cuadros **Distance** y **Load** etiquetadas del 1 al 4.
 - En el segundo cuadro de **Distance** tipear **0,33** y en el segundo cuadro de **Load** tipear **-20**.
 - En el tercer cuadro de **Distance** tipear **0,66** y en el tercer cuadro de **Load** tipear **-20** y tipear **0** en el área **Uniform Load**.
 - Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
7. Hacer clic en el botón **Show Undeformed Shape**  para limpiar la exhibición de las cargas estáticas en los elementos Frame.
8. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
9. Esto completa la asignación de cargas estáticas en los elementos Frame.

Paso 8. Asignación de Constraints.

1. Seleccionar los nudos del segundo nivel.
2. En el menú **Assign** seleccionar **Joint** y luego **Constraints...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Constraints**.
3. En este cuadro:
 - Hacer clic en la opción **Add Body** del área **Click to**.
 - En la lista desplegada hacer clic en **Add Diaphragm**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Diaphragm Constraint**.
 - En este cuadro:


-
- ✓ Cambiar el nombre **DIAPH1** por **NIVEL2** en el área **Constraint Name**.
 - ✓ Verificar que la opción **Z Axis** este seleccionada en el área **Constraint Axis**.
 - ✓ Hacer clic en **OK**, esto cerrara el cuadro de diálogo **Diaphragm Constraint**.
 - Hacer clic en **OK**.
4. Seleccionar los nudos del tercer nivel.
 5. En el menú **Assign** seleccionar **Joint** y luego **Constraints...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Constraints**.
 6. En este cuadro:
 - Hacer clic en la opción **Add Body** del área **Click to**.
 - En la lista desplegada hacer clic en **Add Diaphragm**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Diaphragm Constraint**.
 - En este cuadro:
 - ✓ Cambiar el nombre **DIAPH1** por **NIVEL3** en el área **Constraint Name**.
 - ✓ Verificar que la opción **Z Axis** este seleccionada en el área **Constraint Axis**.
 - ✓ Hacer clic en **OK**, esto cerrara el cuadro de diálogo **Diaphragm Constraint**.
 - Hacer clic en **OK**.
 7. Seleccionar los nudos del cuarto nivel.
 8. En el menú **Assign** seleccionar **Joint** y luego **Constraints...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Constraints**.
 9. En este cuadro:
 - Hacer clic en la opción **Add Body** del área **Click to**.
 - En la lista desplegada hacer clic en **Add Diaphragm**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Diaphragm Constraint**.
 - En este cuadro:
 - ✓ Cambiar el nombre **DIAPH1** por **NIVEL4** en el área **Constraint Name**.
 - ✓ Verificar que la opción **Z Axis** este seleccionada en el área **Constraint Axis**.
 - ✓ Hacer clic en **OK**, esto cerrara el cuadro de diálogo **Diaphragm Constraint**.
 - Hacer clic en **OK**.
 10. Seleccionar los nudos del quinto nivel.
 11. En el menú **Assign** seleccionar **Joint** y luego **Constraints...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Constraints**.

12. En este cuadro:
 - Hacer clic en la opción **Add Body** del área **Click to**.
 - En la lista desplegada hacer clic en **Add Diaphragm**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Diaphragm Constraint**.
 - En este cuadro:
 - ✓ Cambiar el nombre **DIAPH1** por **NIVEL5** en el área **Constraint Name**.
 - ✓ Verificar que la opción **Z Axis** este seleccionada en el área **Constraint Axis**.
 - ✓ Hacer clic en **OK**, esto cerrara el cuadro de diálogo **Diaphragm Constraint**.
 - Hacer clic en **OK**.
13. Seleccionar los nudos del sexto nivel.
14. En el menú **Assign** seleccionar **Joint** y luego **Constraints...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Constraints**.
15. En este cuadro:
 - Hacer clic en la opción **Add Body** del área **Click to**.
 - En la lista desplegada hacer clic en **Add Diaphragm**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Diaphragm Constraint**.
 - En este cuadro:
 - ✓ Cambiar el nombre **DIAPH1** por **NIVEL6** en el área **Constraint Name**.
 - ✓ Verificar que la opción **Z Axis** este seleccionada en el área **Constraint Axis**.
 - ✓ Hacer clic en **OK**, esto cerrara el cuadro de diálogo **Diaphragm Constraint**.
 - Hacer clic en **OK**.
16. Seleccionar los nudos del septimo nivel.
17. En el menú **Assign** seleccionar **Joint** y luego **Constraints...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Constraints**.
18. En este cuadro:
 - Hacer clic en la opción **Add Body** del área **Click to**.
 - En la lista desplegada hacer clic en **Add Diaphragm**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Diaphragm Constraint**.
 - En este cuadro:
 - ✓ Cambiar el nombre **DIAPH1** por **NIVEL7** en el área **Constraint Name**.
 - ✓ Verificar que la opción **Z Axis** este seleccionada en el área **Constraint Axis**.
 - ✓ Hacer clic en **OK**, esto cerrara el cuadro de diálogo **Diaphragm Constraint**.



- Hacer clic en **OK**.
19. Seleccionar los nudos de la terraza.
 20. En el menú **Assign** seleccionar **Joint** y luego **Constraints...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Constraints**.
 21. En este cuadro:
 - Hacer clic en la opción **Add Body** del área **Click to**.
 - En la lista desplegada hacer clic en **Add Diaphragm**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Diaphragm Constraint**.
 - En este cuadro:
 - ✓ Cambiar el nombre **DIAPH1** por **TERRAZA** en el área **Constraint Name**.
 - ✓ Verificar que la opción **Z Axis** este seleccionada en el área **Constraint Axis**.
 - ✓ Hacer clic en **OK**, esto cerrara el cuadro de diálogo **Diaphragm Constraint**.
 - Hacer clic en **OK**.
 22. Hacer clic en el botón **Show Undeformed Shape**  para limpiar la exhibición de las constricciones de los nudos.
 23. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
- Esto completa la asignación de Constraints.

Paso 9. Rigidizacion de nudos.

Esta estructura es diseñada para un sistema de momentos aporticados con los elementos que tienen secciones de dimensiones cruzadas para propósitos de diseño. Sin embargo, si bien no es una mala simulación, el SAP2000 permite una más adecuada modelación. Colocando los elementos *End offset*, puede definir una región cerca de la conexión viga columna donde los elementos no puedan flexarse. Esto produce esencialmente una zona rígida en la conexión. El área puede ser tan grande como se quiera pero es generalmente tomado como el ancho del elemento y esta encuadrado dentro de el, en ese nudo.

1. Seleccionar todos los elementos del portico, haciendo clic en el botón **Select All**  situado en la barra de herramientas lateral.
2. En el menú **Assign** seleccionar **Frame** y luego **End Offsets...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Frame End Offsets**.
3. En este cuadro:
 - Seleccionar la opción **Update Lengths from Current Connectivity** del área **End offset Lengths**.
 - Topear **1** en el cuadro de **Rigid-Zone Factor**.
 - Hacer clic en **OK**.

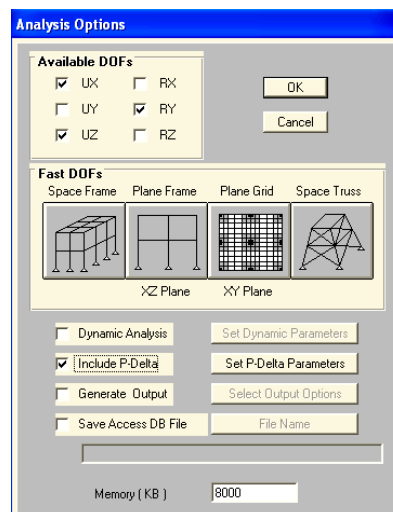
Nota: el introducir el valor de 1 en el cuadro de **Rigid-Zone Factor** significa que el 100% de la longitud del nudo será tomado como rígido para la corrida del análisis.


4. Hacer clic en el botón **Set elements**  en la barra de herramientas principal o seleccionar **Set Elements...** en el menú **View**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Set Elements**.
5. En este cuadro:
 - Seleccionar **Shrink Elements** en el area **Options**.
 - Hacer clic en el botón **OK**.
6. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo. Esto completa la rigidizacion de nudos.

Paso 10. Análisis estatico.

Es este caso se verán las opciones para el análisis estático y como correr el programa.

1. Desde el menú **Analyze** seleccionar **Set Options...** . Esto mostrará el cuadro de diálogo **Analysis Options**.



2. En este cuadro:
 - Hacer clic en el botón **Plane Frame** en la sección **Fast DOFs**.
 - Seleccionar la casilla **Incluye P-Delta**.
 - Hacer clic en el botón **Set P-Delta Parameters**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **P-Delta Parameters**.
 - En este cuadro:
 - ✓ Tipear **10** en el cuadro **Maximum Iterations** del área **Iteration Controls**.
 - ✓ Aceptar el resto de los valores dados por defecto.
 - ✓ Hacer clic en **OK**.
 - Hacer clic en **OK** para salir del cuadro de diálogo **Analysis Options**.
3. Hacer clic en el botón **Run Analysis**  o seleccionar **Run** en el menú **Analyze**.

Nota: La opción **Run Minimizado** es útil cuando se va a correr un modelo que puede tomar mucho mas tiempo para analizar. Esta opción proveerá un botón **Cancel** que permitirá que se cancele la corrida si es necesario.



- Al momento de correr se abrirá una ventana en la cual varias fases del análisis serán progresivamente reportadas. Una vez completado el análisis se puede usar la barra de movimiento vertical ubicado a la derecha de la ventana para revisar los mensajes editados y poder chequear cualquier advertencia o error.

Nota: Todos los mensajes editados al momento de correr el análisis se pueden encontrar en el archivo de texto *.LOG donde * es el nombre del archivo SAP2000 del usuario.



- Hacer clic en **OK** de la ventana de análisis. Notar que la ventana **3D View** ahora muestra el modelo deformado.

Esto completa el análisis estático.

Paso 11. Revision de la deformada y de los desplazamientos de los nudos.

- Notar que la estructura deformada aparece en la ventana izquierda con el primer caso de carga **CM**. Hacer clic en la ventana para activarla.
- Hacer clic en el botón **Start Animation**  localizado en la barra de estado en la parte inferior derecha de la pantalla.
- Hacer clic en el botón **Right Arrow**  localizado en la barra de estado, para ver la deformada del otro caso de carga **EQX**.

Revisión de la deformada

- Hacer clic en el botón **Display Static Deformed Shape**  o seleccionar **Show Deformed Shape** en el menú **Display**. Con esto aparece el cuadro de diálogo **Deformed Shape**.
- En este cuadro:
 - Seleccionar el caso de carga **CM Load Case** en el cuadro de lista **Load**.
 - En la sección **Scaling** seleccionar la opción **Auto**.
 - Seleccionar las casillas **Wire Shadow** y **Cubic Curve** en la sección **Options**.
 - Hacer clic en **OK** para mostrar la estructura deformada.
- Hacer clic en el botón **Right Arrow**  localizado en la barra de estado, para ver la deformada del otro caso de carga **EQX**.

Selección del Código de Diseño

A menudo se quiere tener certeza de que la estructura este dentro de los límites de funcionamiento, como los índices de esfuerzos; teniendo cuidado de cumplir el código utilizado. El programa SAP2000 verifica los esfuerzos automáticamente cuando un elemento es diseñado.

- En el menú **Desing** verificar que la opción **Steel Desing** este habilitada.
- En el menú **Options** seleccionar **Preferentes...** esto mostrará el cuadro de diálogo **Preferences**.

En este cuadro:

- Active la pestaña **Steel**.
 - En el área **Steel Desing code** seleccionar la opción AISC-LRFD93.
 - Hacer clic en **OK**.
9. En el menú **Desing** seleccionar la opción **Select Desing Combos...** esto mostrará el cuadro de diálogo **Desing Load Combinations Selection**, en este cuadro seleccionar una combinación y presione el botón **Show**, esto permitirá observar las combinaciones de diseño establecidas por la Norma de diseño seleccionada. Si se desea introducir otras combinaciones en el diseño pueden ser añadidas definiendo previamente la combinación desde el menú **Define** en la opción **Load Combinations...** y luego en el menú **Desing** en la opción **Select Desing Combos...** añadir la combinación a la lista **Desing Combos**.
10. Los elementos estructurales pueden ser diseñados por simple selección desde el menú **Desing** con la opción **Start Desing/Check of Structure**.
- Cada uno de los elementos será diseñado empleando la sección más eficiente de entre las correspondientes a su grupo de **Auto Selection**.
 - El SAP2000 mostrará automáticamente el porcentaje del nivel de esfuerzos existente en cada elemento con relación al máximo esfuerzo admisible.
 - Para mayor comodidad el programa asignará colores a cada uno de los elementos los cuales mostrarán el nivel de esfuerzo presente en cada elemento usando una escala gráfica de Colores/Esfuerzos ubicada en la parte inferior de la ventana; cada elemento muestra su respectivo valor de índice de esfuerzo; un valor igual a **1** equivale a decir que el elemento está esforzado en un 100%.

Revisión de los resultados y rediseño.

Una vez efectuado el Diseño/Revisión es tiempo de verificar si los resultados son correctos SAP2000 brinda al usuario una serie de herramientas para ello.

11. Hacer clic con el botón derecho del mouse sobre cualquier elemento para ver los resultados de su diseño. El elemento que haya sido seleccionado parpadeará para su fácil identificación.
12. En el cuadro de diálogo **Steel Stress Check Information** encontrará una lista de las combinaciones de carga empleadas para verificar la sección en varios puntos a lo largo del elemento:

Steel Stress Check Information

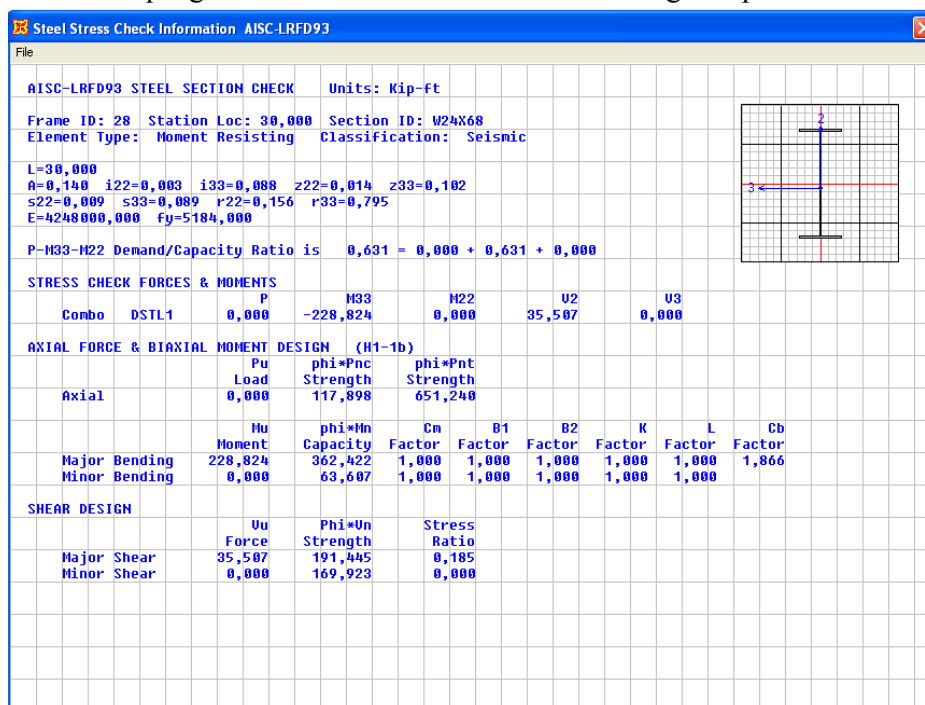
Frame ID: 28
Section ID: W24X68

Details ReDesign

COMBO ID	STATION LOC	---MOMENT INTERACTION CHECK---	---MAJ-SHR---	---MIN-SHR---
		RATIO = $R_{XL} + B \cdot R_{XU} + B \cdot MIN$	RATIO	RATIO
DSTL1	0,00	$0,279(T) = 0,000 + 0,279 + 0,000$	0,144	0,000
DSTL1	7,50	$0,273(T) = 0,000 + 0,273 + 0,000$	0,135	0,000
DSTL1	15,00	$0,394(T) = 0,000 + 0,394 + 0,000$	0,021	0,000
DSTL1	22,50	$0,085(T) = 0,000 + 0,085 + 0,000$	0,176	0,000
DSTL1	30,00	$0,631(T) = 0,000 + 0,631 + 0,000$	0,185	0,000

OK Cancel

- Una de las combinaciones de carga estará resaltada cuando se abra este cuadro de diálogo. Esta es la combinación que controla el diseño del elemento.
 - Junto a cada combinación de carga existe un indicador de la ubicación a lo largo del elemento donde fue efectuada la verificación, seguida por la relación de esfuerzo para la interacción de momento y cortante.
13. Seleccionando cualquiera de las combinaciones de carga y presionando el botón **Details** se mostrarán los resultados del análisis para ese elemento así como las ecuaciones que gobiernan su diseño de acuerdo al código empleado.



14. Al presionar el botón **ReDesing** se mostrará el cuadro de diálogo **Element Overwrite Assignments**. En este cuadro de diálogo se puede elegir de entre varias opciones.

Nota: Si se efectúan cambios en el cuadro de diálogo **Element Overwrite Assignments** empleando el botón **ReDesing**, será necesario presionar el botón **Refresh Window** de la barra de herramientas para ver los resultados del diseño actualizados en la ventana activa.

Re-Analizando

El primer análisis empleó propiedades de sección aproximadas para generar la matriz de rigidez de la estructura. Es por ello que le modelo se debe reanalizar a manera de un proceso iterativo para asegurarnos que el análisis toma en cuenta las propiedades y secciones actualizadas de los elementos.

15. Una vez que se ha terminado de modificar las secciones estructurales que se van a emplear, ingrese al menú **Desing** y elegir la opción **Update Analysis Sections**.

Luego efectúe nuevamente el análisis empleando las últimas propiedades de sección.

16. Llevar a cabo nuevamente el diseño de los elementos para ver si existen cambios.
17. Una vez que el usuario se encuentre satisfecho con las secciones elegidas ingrese al menú **Desing** y elegir la opción **Replace Auto w/Optimal Sections**. Esta opción asigna las secciones definitivas ya sean las optimas o bien aquella seleccionadas por el usuario tanto para el análisis como para el diseño, y reemplaza las propiedades de sección preliminares tomadas de los grupos de autoselección VIGA y COLUMNA.

Ejemplo 4. Diseño en hormigón de un pórtico bidimensional

A. Descripción del modelo

La estructura es un pórtico bidimensional de hormigón el cual esta sometido a cargas locales en los nudos y cargas uniformes sobre las vigas.

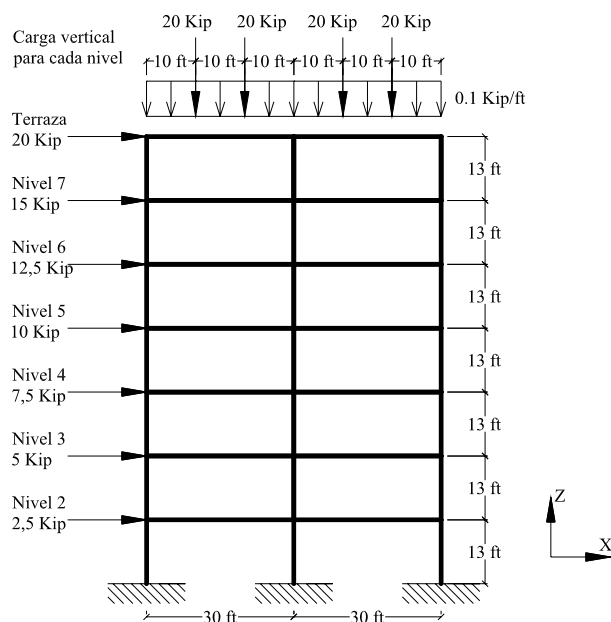


Figura 4.1

Secciones:

- Todas las columnas son: 13,78 x 13,78
- Todas las vigas son: 15,75 x 7,89

Materiales:

Concreto:

- Modulo de elasticidad $E=3600$ Ksi.
- Modulo de Poisson $=0,2$





B. Creación y análisis del modelo del edificio

Paso 1. Elaboración de la geometría del modelo desde el template (plantilla).

1. Para definir las unidades a Kip-ft. Hacer clic en:
2. En el menú **File** seleccionar **New Model From Template....** Esto mostrará el cuadro de diálogo **Model Templates**
3. En este cuadro:
 - Hacer clic en el botón **Portal Frame**.





Esto mostrará el cuadro de diálogo **Portal Frame**.

- En este cuadro:
 - ✓ Tipear **7** en **Number of Stories** (número de pisos).
 - ✓ Tipear **2** en **Number of Bays** (número de paños).
 - ✓ Tipear **13** en **Story Height** (altura de entrepiso).
 - ✓ Tipear **30** en **Bay Width** (ancho del paño).
 - ✓ Comprobar que las casillas de verificación **Restraints** y **Gridlines** estén seleccionadas.
 - ✓ Hacer clic en **OK**.
- 4. En el menú **Draw** seleccionar **Edit Grid....** Esto mostrará el cuadro de diálogo **Modify Grid Lines**.
- 5. En este cuadro:
 - Seleccionar la opción **Z** en el área **Direction**.
 - Seleccionar la opción **Glue Joints to Grid Lines**.
 - Hacer clic en **OK**.
- 6. La pantalla mostrará la estructura en dos ventanas, en 3D en la ventana izquierda y en 2D en la ventana derecha (el título de esta última dice **X-Z Plane @ Y=0**). Notar que los nudos de los apoyos están restringidos en los tres grados de libertad por traslación.
- 7. Hacer clic en la ventana derecha **X-Z Plane @ Y=0** para activarla.
- 8. Seleccionar los tres apoyos haciendo clic sobre cada uno de ellos ó seleccionarlos dibujando una ventana que los incluya, para esto arrastrar el mouse presionando el botón izquierdo.
- 9. Hacer clic en el botón **Assign Joint Restraints**  ó en el menú **Assign** escoger **Joint** y luego **Restraints...** en el submenú, esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Restraints**.
- 10. En este cuadro en la sección **Fast Restraints** hacer clic en el botón  y después hacer clic en **OK**.
- 11. Hacer clic en la ventana izquierda y presionar el botón **Refresh window** .
- 12. Hacer clic en la ventana derecha para activarla.
- 13. Hacer clic en el botón **Save Model**  en la barra de herramientas principal o seleccionar **Save** en el menú **File** para grabar el archivo.

Paso 2. Definición de las propiedades del material.


Las unidades de los valores de las propiedades se encontrarán en las unidades definidas en el paso 1 (Elaboración de la geometría del modelo)

1. Presione el cuadro desplegable de la barra de estado para cambiar las unidades a Kip-in. Haciendo clic en: 
2. En el menú **Define** elegir **Materials...**, esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Materials**.






3. Con la opción **CONC** encendida en el área **Materials** hacer clic en **Modify/Show Material**, esto mostrará el cuadro de diálogo **Material Property Data**.
 4. Típear **3600** en el cuadro de edición **Modulus of Elasticity**. Dejar el resto de valores dados por defecto.
 5. Hacer clic en el botón **OK** para aceptar los cambios y salir del cuadro de diálogo **Material Property Data**.
 6. Hacer clic en el botón **OK** para salir del cuadro de diálogo **Define Materials**.
 7. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
- Esto completa la definición de los materiales.

Paso 3. Definición de las secciones Frame.

1. En el menú **Define** elegir **Frame Sections..**, esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Frame Sections**.
2. Para importar secciones en este cuadro de diálogo:
 - Hacer clic en la opción **Add I/Wide Flange**.
 - En la lista desplegada hacer clic en **Add Rectangular**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Rectangular Section**.
 - Cambiar el nombre **FSEC2** por **VIGA**, seleccionar **CONC** en el cuadro de lista **Material**.
 - En el área **Dimensions**:
 - ✓ Típear **15,75** en la caja **Depth [t3]** (peralte).
 - ✓ Típear **7,89** en la caja **Width [t2]** (ancho).
 - Hacer clic en la opción **Reinforcement** en el área **Concrete**.
 - En el cuadro de diálogo **Reinforcement Data**:
 - ✓ En el área **Element Class** elegir la opción **Beam**.
 - ✓ Típear **1,2** en la caja **Top** y **Bottom** en el área **Concrete Cover to Rebar Center**.
 - ✓ Hacer clic en **OK** para salir del cuadro de diálogo **Reinforcement Data**.
 - Hacer clic en **OK** para aceptar la nueva sección.
 - Hacer clic en la opción **Add I**.
 - Hacer clic en **Add Rectangular**.
 - Cambiar el nombre de **FSEC2** por **COLUMNA**, hacer clic en **CONC** en el cuadro de lista **Material**.
 - En el área **Dimensions**:
 - ✓ Típear **13,78** en la caja **Depth [t3]** (peralte).
 - ✓ Típear **13,78** en la caja **Width [t2]** (ancho).
 - Hacer clic en la opción **Reinforcement** en el área **Concrete**.
 - En el cuadro de diálogo **Reinforcement Data**:
 - ✓ En el área **Element Class** elegir la opción **Column**.

- ✓ Verificar que en el área **Configuration of Reinforcement** este seleccionada la opción **Rectangular**.
 - ✓ Típear **1,2** en la caja **Cover to Rebar Center** en el área **Rectangular Reinforcement**.
 - ✓ Hacer clic en OK para salir del cuadro de diálogo **Reinforcement Data**.
 - ✓ Hacer clic en OK para aceptar la nueva sección.
 - Hacer clic en **OK**.
3. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo. Esto completa la definición de secciones Frame.

Paso 4. Asignación de Secciones Frame

1. Hacer clic en la ventana derecha para activarla.
2. Seleccionar todas las vigas de la estructura, haciendo clic sobre el botón  **Set Intersecting Line Select Mode** en la barra de herramientas lateral, para esto arrastrar el mouse presionando el botón izquierdo intersectando todas las vigas de la estructura.
3. En el menú **Assign** seleccionar **Frame** y luego **Sections...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Frame Sections**.
4. En el área **Frame Sections** hacer clic en **VIGA** y después hacer clic en **OK**.
5. Notar que las vigas se etiquetan con el nombre **VIGA** y los otros elementos por defecto tienen la etiqueta **FSEC1**.
6. Hacer clic en el botón **Show Undeformed Shape**  para limpiar la exhibición de las etiquetas de las secciones de los elementos Frame.
7. Seleccionar todas las columnas de la estructura, haciendo clic sobre el botón  **Set Intersecting Line Select Mode** en la barra de herramientas lateral, para esto arrastrar el mouse presionando el botón izquierdo intersectando todas las columnas de la estructura.
8. En el menú **Assign** seleccionar **Frame** y luego **Sections...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Frame Sections**.
9. En el área **Frame Sections** hacer clic en **COLUMNA** y después hacer clic en **OK**.
10. Notar que vigas y columnas se etiquetan con los nombres **VIGA** y **COLUMNA** respectivamente.
11. Hacer clic en el botón **Show Undeformed Shape**  para limpiar la exhibición de las etiquetas de las secciones de los elementos Frame otra vez.
12. Hacer clic en el botón **Save model**  para grabar el archivo. Esto completa la asignación de secciones.

Paso 5. Definición de los Casos de Carga Estática.

1. En el menú **Define** seleccionar **Static Load Cases...**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Static Load Case Names**.
2. En este cuadro:

- Tipear **CM** en el cuadro **Load**.
- Seleccionar **DEAD** en el cuadro de lista **Type**.
- Tipear **1** en el cuadro de edición **Self Weight Multiplier**.
- Hacer clic en el botón **Change Load**.



Nota: En este ejemplo el programa calcula automáticamente el peso propio de los elementos de la estructura. Si no se quiere incluir el peso propio se deberá tipear **0** en el cuadro **Self Weight Multiplier** o se debería tipear **0** en el cuadro **Weight per unit Volume** en el cuadro de diálogo **Define Material**.

- Tipear **EQX** en el cuadro **Load**.
- Seleccionar **QUAKE** en el cuadro de lista **Type**.
- Tipear **0** en el cuadro **Self Weight Multiplier**.
- Hacer clic en **Add New Load**.
- Hacer clic en el botón **OK**.



3. Hacer clic en el botón **Save Model**  para guardar el archivo.
Esto completa la definición de los Casos de Carga Estática.

Paso 6. Asignación cargas estáticas en los nudos.

Se procederá a la asignación de cargas, las cuales son mostradas en la figura 4.1




1. Presione el cuadro desplegable de la barra de estado para cambiar las unidades a Kip-ft. Haciendo clic en: 
2. Hacer clic en el botón **Set elements**  en la barra de herramientas principal o seleccionar **Set Elements...** en el menú **View**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Set Elements**.
3. En este cuadro:
 - En la sección **Joints** seleccionar la casilla **Labels**.
 - Hacer clic en el botón **OK**.
4. Seleccionar el nudo etiquetado **2** del segundo nivel.
5. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
6. En este cuadro:
 - Seleccionar **EQX** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Tipear **2,5** en el cuadro de edición **Force Global X**.
 - Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
7. Seleccionar el nudo etiquetado **3** del tercer nivel.



8. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
9. En este cuadro:
 - Seleccionar **EQX** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Tipear **5** en el cuadro de edición **Force Global X**.
 - Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
10. Seleccionar el nudo etiquetado **4** del cuarto nivel.
11. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
12. En este cuadro:
 - Seleccionar **EQX** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Tipear **7,5** en el cuadro de edición **Force Global X**.
 - Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
13. Seleccionar el nudo etiquetado **5** del quinto nivel.
14. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
15. En este cuadro:
 - Seleccionar **EQX** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Tipear **10** en el cuadro de edición **Force Global X**.
 - Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
16. Seleccionar el nudo etiquetado **6** del sexto nivel.
17. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
18. En este cuadro:
 - Seleccionar **EQX** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Tipear **12,5** en el cuadro de edición **Force Global X**.
19. Hacer clic en **OK** para aplicar la carga
20. Seleccionar el nudo etiquetado **7** del séptimo nivel.
21. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
22. En este cuadro:
 - Seleccionar **EQX** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Tipear **15** en el cuadro de edición **Force Global X**.
23. Hacer clic en **OK** para aplicar la carga
24. Seleccionar el nudo etiquetado **8** de la terraza.

25. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
 26. En este cuadro:
 - Seleccionar **EQX** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Típear **20** en el cuadro de edición **Force Global X**.
 27. Hacer clic en **OK** para aplicar la carga
 28. Hacer clic en el botón **Show Undeformed Shape**  para limpiar la exhibición de las cargas estáticas en los nudos.
 29. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
- Esto completa la asignación de cargas estáticas en los nudos.

Paso 7. Asignación de cargas estáticas Frame.

Se procederá a la asignación de cargas a cada uno de los niveles de la estructura, las cuales son mostradas en la figura 4.1.

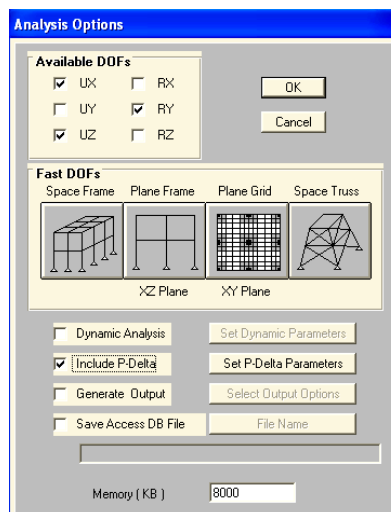
1. Seleccionar todas las vigas de la estructura, haciendo clic sobre el botón  **Set Intersecting Line Select Mode** en la barra de herramientas lateral, para esto arrastrar el mouse presionando el botón izquierdo intersectando todas las vigas de la estructura.
2. En el menú **Assign** seleccionar **Frame Static Loads...** y luego **Point and Uniform...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Point and Uniform Span Loads**.
3. En este cuadro:
 - Seleccionar **CM** desde el cuadro **Load Case Name**.
 - En el área **Load Type and Direction**, seleccionar la opción **Forces** y seleccionar **Global Z** en el cuadro de lista **Direction**.
 - En el área **Options** Seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - En el área **Uniform Load** típear **-0,1**.
 - Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
4. Hacer clic en el botón **Restore Previous Selection**  en la barra de herramienta lateral (o seleccionar **Get Previous Selection** en el menú **Select**). Esto restaurará las selecciones hechas a las vigas del pórtico.
5. Hacer clic sobre el botón **Assign Frame Span Loading**  en la barra de herramienta principal. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Point and Uniform Span Loads**.
6. En este cuadro:
 - Seleccionar **CM** desde el cuadro **Load Case Name**.
 - En el área **Options** Seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - En el área **Point Loads** se encuentran los cuadros **Distance** y **Load** etiquetadas del 1 al 4.


- En el segundo cuadro de **Distance** tipear **0,33** y en el segundo cuadro de **Load** tipear **-20**.
 - En el tercer cuadro de **Distance** tipear **0,66** y en el tercer cuadro de **Load** tipear **-20** y tipear **0** en el area **Uniform Load**.
 - Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
7. Hacer clic en el botón **Show Undeformed Shape**  para limpiar la exhibición de las cargas estáticas en los elementos Frame.
 8. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
 9. Esto completa la asignación de cargas estáticas en los elementos Frame.

Paso 8. Análisis estatico.

Es este caso se verán las opciones para el análisis estático y como correr el programa.

1. Desde el menú **Analyze** seleccionar **Set Options...**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Analysis Options**.



2. En este cuadro:
 - Hacer clic en el botón **Plane Frame** en la sección **Fast DOFs**.
 - Seleccionar la casilla **Incluye P-Delta**.
 - Hacer clic en el botón **Set P-Delta Parameters**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **P-Delta Parameters**.
 - En este cuadro:
 - ✓ Tipear **10** en el cuadro **Maximum Iterations** del área **Iteration Controls**.
 - ✓ Aceptar el resto de los valores dados por defecto.
 - ✓ Hacer clic en **OK**.
 - Hacer clic en **OK** para salir del cuadro de diálogo **Analysis Options**.
3. Hacer clic en el botón **Run Analysis**  o seleccionar **Run** en el menú **Analyze**.

Nota: La opción **Run Minimizado** es útil cuando se va a correr un modelo que puede tomar mucho mas tiempo para analizar. Esta opción proveerá un botón **Cancel** que permitirá que se cancele la corrida si es necesario.



- Al momento de correr se abrirá una ventana en la cual varias fases del análisis serán progresivamente reportadas. Una vez completado el análisis se puede usar la barra de movimiento vertical ubicado a la derecha de la ventana para revisar los mensajes editados y poder chequear cualquier advertencia o error.

Nota: Todos los mensajes editados al momento de correr el análisis se pueden encontrar en el archivo de texto *.LOG donde * es el nombre del archivo SAP2000 del usuario.



- Hacer clic en **OK** de la ventana de análisis. Notar que la ventana **3D View** ahora muestra el modelo deformado.

Esto completa el análisis estático.

Paso 9. Revision de la deformada y de los desplazamientos de los nudos.

- Notar que la estructura deformada aparece en la ventana izquierda con el primer caso de carga **CM**. Hacer clic en la ventana para activarla.
- Hacer clic en el botón **Start Animation**  localizado en la barra de estado en la parte inferior derecha de la pantalla.
- Hacer clic en el botón **Right Arrow**  localizado en la barra de estado, para ver la deformada del otro caso de carga **EQX**.

Revisión de la deformada

- Hacer clic en el botón **Display Static Deformed Shape**  o seleccionar **Show Deformed Shape** en el menú **Display**. Con esto aparece el cuadro de diálogo **Deformed Shape**.
- En este cuadro:
 - Seleccionar el caso de carga **CM Load Case** en el cuadro de lista **Load**.
 - En la sección **Scaling** seleccionar la opción **Auto**.
 - Seleccionar las casillas **Wire Shadow** y **Cubic Curve** en la sección **Options**.
 - Hacer clic en **OK** para mostrar la estructura deformada.
- Hacer clic en el botón **Right Arrow**  localizado en la barra de estado, para ver la deformada del otro caso de carga **EQX**.

Selección del Código de Diseño

A menudo se quiere tener certeza de que la estructura este dentro de los límites de funcionamiento, como los índices de esfuerzos; teniendo cuidado de cumplir el código utilizado. El programa SAP2000 verifica los esfuerzos automáticamente cuando un elemento es diseñado.

- En el menú **Desing** verificar que la opción **Concrete Desing** este habilitada.
- En el menú **Options** seleccionar **Preferences...** esto mostrará el cuadro de diálogo **Preferences**.

En este cuadro:

- Active la pestaña **Concrete**.
 - En el área **Concrete Desing code** seleccionar la opción ACI 318-99.
 - Hacer clic en **OK**.
9. En el menú **Desing** seleccionar la opción **Select Desing Combos...** esto mostrará el cuadro de diálogo **Desing Load Combinations Selection**, en este cuadro seleccionar una combinación y presione el botón **Show**, esto permitirá observar las combinaciones de diseño establecidas por la Norma de diseño seleccionada. Si se desea introducir otras combinaciones en el diseño pueden ser añadidas definiendo previamente la combinación desde el menú **Define** en la opción **Load Combinations...** y luego en el menú **Desing** en la opción **Select Desing Combos...** añadir la combinación a la lista **Desing Combos**.
10. Los elementos estructurales pueden ser diseñados por simple selección desde el menú **Desing** con la opción **Start Desing/Check of Structure**.

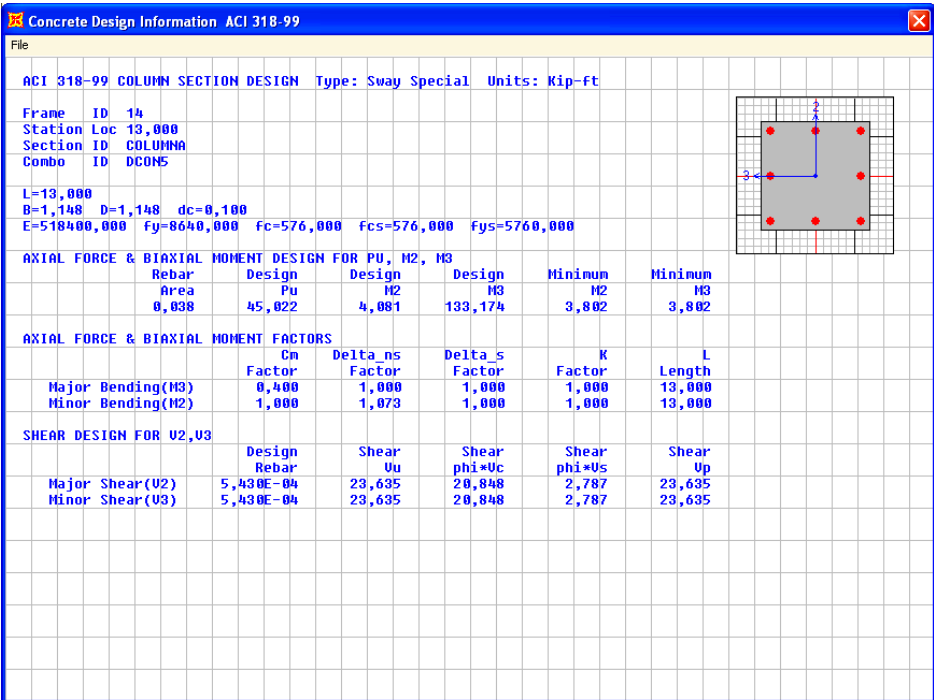
Revisión de los resultados y rediseño.

Una vez efectuado el Diseño/Revisión es tiempo de verificar si los resultados son correctos SAP2000 brinda al usuario una serie de herramientas para ello.

11. Hacer clic con el botón derecho del mouse sobre cualquier elemento para ver los resultados de su diseño. El elemento que haya sido seleccionado parpadeará para su fácil identificación.
12. En el cuadro de diálogo **Concrete Desing Information** encontrará una lista de las combinaciones de carga empleadas para verificar la sección en varios puntos a lo largo del elemento:

COMBO ID	STATION LOC	LONGITUDINAL REINFORCEMENT	MAJOR SHEAR REINFORCEMENT	MINOR SHEAR REINFORCEMENT
DCON4	6,50	0,013	0,000	0,000
DCON4	13,00	0,038	0,000	0,000
DCON5	0,00	0,017	0,000	0,000
DCON5	6,50	0,013	0,000	0,000
DCON5	13,00	0,038	0,000	0,000

- Una de las combinaciones de carga estará resaltada cuando se abra este cuadro de diálogo. Esta es la combinación que controla el diseño del elemento.
 - Junto a cada combinación de carga existe un indicador de la ubicación a lo largo del elemento donde fue efectuada la verificación, seguida por la relación de esfuerzo para la interacción de momento y cortante.
13. Seleccionando cualquiera de las combinaciones de carga y presionando el botón **Details** se mostrarán los resultados del análisis para ese elemento así como las ecuaciones que gobiernan su diseño de acuerdo al código empleado.



Ejemplo 5 Viga sobre fundación elástica

A. Descripción del modelo

Es una viga de concreto sobre una fundación elástica en la que determinará el diagrama de momento y el desplazamiento máximo, bajo la combinación de carga dada.

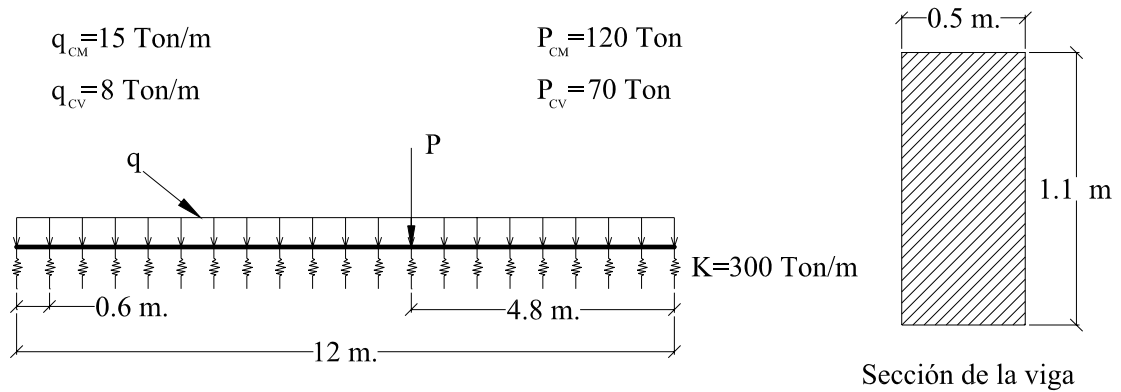


Figura 5.1

Secciones:

- Viga de 0.5 m x 1.1 m

Materiales:

Concreto:

- Peso específico 2,4 Ton/m.
- Modulo de elasticidad $E = 2E6 \text{ Ton/m}^2$
- Modulo de Poisson $\nu = 0.2$

Cargas verticales asumidas

Cargas distribuidas	Cargas puntuales
CM=15 Ton/m.	CM=120 Ton/m.
CV=8 Ton/m.	CV=70 Ton/m.

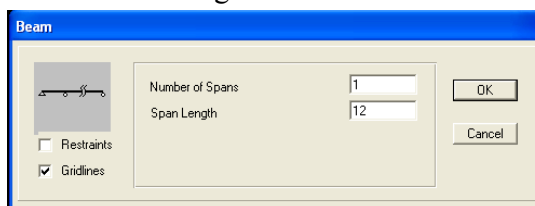
B. Creación y análisis del modelo.


Paso 1. Elaboración de la geometría del modelo desde el Template (plantilla).

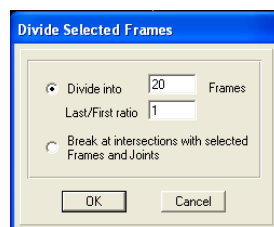
1. Para definir las unidades a Ton-m. Hacer clic en:
2. En el menú **File** seleccionar **New Model from Template....** Esto mostrará el cuadro de diálogo **Model Templates**
3. En este cuadro:
 - Hacer clic en el botón **Beam**.



Esto mostrará el cuadro de diálogo **Beam**




- En este cuadro:
 - ✓ Típear **1** en **Number of Spans** (número de tramos).
 - ✓ Típear **12** en **Span Length** (longitud de tramo).
 - ✓ Comprobar que las casillas de verificación: **Restrains** este desactivada y la casilla **Gridlines** esté seleccionada.
 - ✓ Hacer clic en **OK**.
- 4. La pantalla mostrará la estructura en dos ventanas, en 3D en la ventana izquierda y en 2D en la ventana derecha; presione la esquina superior izquierda de la primera, para cerrar la ventana en 3D.
- 5. Hacer clic en el botón **Save Model**  en la barra de herramientas principal o seleccionar **Save** en el menú **File** para grabar el archivo.
- 6. Hacer clic sobre el elemento viga para seleccionarlo
- 7. En el menú **Edit** seleccionar **Divide Frames...**
- 8. En el cuadro de diálogo **Divide Selected Frames**
- 9. Seleccionar la opción **Divide into**
- 10. Típear 20 en esta opción.



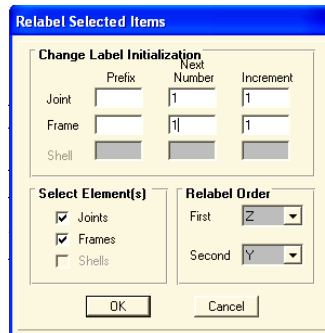
- 11. Hacer clic en OK.

Paso 2. Re-etiquetacion de los nudos y elementos Frame.

1. Hacer clic en el botón **Set Elements**  en la barra de herramientas principal o seleccionar **Set Elements...** en el menú **View**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Set Elements**.
2. En este cuadro:
 - En la sección **Joints** seleccionar la casilla **Labels**.
 - En la sección **Frames** seleccionar la casilla **Labels**.
 - Hacer clic en el botón **OK**.

Nota: Se esta mostrando las etiquetas de los elementos para poder ver los cambios efectuados. No es necesario mostrar las etiquetas para lograr la re-etiquetación.

3. En el menú **Select** elegir **Select** y luego **All** en el submenú. Todos los elementos en el modelo (nudos y elementos **Frame**) son seleccionados.
4. En el menú **Edit** elegir **Change Labels...** para mostrar el cuadro de diálogo **Relabel Selected Items**.





5. En este cuadro:
 - Presionar la tecla **F1** para mostrar el contexto de **Ayuda en Línea** para este cuadro. Al finalizar la lectura de ayuda en línea salir de la ventana.
 - En la sección **Change Label Initialization** del cuadro de diálogo tipear **1** en los cuadros **Next Number** de **Joint** y de **Frame**.
 - Aceptar el resto de los valores por defecto en el cuadro de diálogo.
 - Hacer clic en **OK** para aceptar los cambios.

Nota: No es típico enumerar nuevamente los elementos. Esta hecho para ilustrar el proceso y para asegurar que todos los usuarios del tutorial tengan el mismo sistema de numeración, ya que iniciado el modelo desde el Template o desde el Scratch, la referencia a los nudos y los elementos Frame se hará mediante sus etiquetas cambiadas.

Nota: Las etiquetas de los nudos y elementos Frame y Shell pueden tener prefijos alfanuméricos. Estos prefijos pueden ser ingresados en los cuadros de edición **Prefix** en el cuadro de diálogo **Relabel Selected Items**.


Nota: No es necesario seleccionar todos los elementos para re-etiquetar. Se podría seleccionar solo unos pocos elementos de cualquier tipo, y re-etiquetar solo los elementos seleccionados.

6. Hacer clic en el botón **Set Elements** . Esto mostrará el cuadro de diálogo **Set Elements**.
7. En este cuadro:
 - En la sección **Joints** quitar la selección en la casilla **Labels**.
 - En la sección **Frames** quitar la selección en la casilla **Labels**.
 - Hacer clic en el botón **OK**.
8. Hacer clic en el botón **Save Model**  en la barra de herramientas principal o seleccionar **Save** en el menú **File** para grabar el archivo.

Esto completa el re-etiquetado de los nudos y elementos Frame.

Paso 3. Definición de las propiedades del material.



Las unidades de los valores de las propiedades se encontraran en las unidades definidas en el paso 1 (Elaboración de la geometría del modelo)

1. En el menú **Define** elegir **Materials...**, esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Materials**.
 2. Con la opción **CONC** encendida en el área **Materials** hacer clic en **Modify/Show Material**, esto mostrará el cuadro de diálogo **Material Property Data**.
 3. Notar que las propiedades del concreto están en unidades Ton-m.
 4. Tipear **2,4** en el cuadro edición **Weight per unit Volume** para considerar el peso propio del concreto.
 5. Tipear **2E6** en el cuadro edición **Modulus of Elasticity**. Dejar el resto de valores dados por defecto.
 6. Hacer clic en el botón **OK** para aceptar los cambios y salir del cuadro de diálogo **Material Property Data**.
 7. Hacer clic en el botón **OK** para salir del cuadro de diálogo **Define Materials**.
 8. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
- Esto completa la definición de los materiales.

Paso 4. Definición y asignación de las secciones Frame.**Definición de secciones de concreto**

1. En el menú **Define** elegir **Frame Sections..** esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Frame Sections**.
2. En este cuadro:
 - Hacer clic en la opción **Add I** esto desplegara hacia abajo una lista de secciones.
 - Hacer clic en **Add Rectangular**, esto mostrará el cuadro de diálogo **Rectangular Section**.
 - Cambiar el nombre **FSEC2** por **VIGA**, seleccionar **CONC** en el cuadro de lista **Material**.
 - En el área **Dimension**:
 - ✓ Tipear **1,1** en la caja **Depth [t3]** (peralte).
 - ✓ Tipear **0,5** en la caja **Width [t2]** (ancho).
 - Hacer clic en **OK** para aceptar la nueva sección. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Frame Sections**.
 - Notar que una vez definida la sección los nombres **FSEC1** y **VIGA**, aparecen en el área **Frame Sections**, la sección **FSEC1** es una sección rectangular que aparece por defecto. Hacer clic en **OK**.
 - Si se requiere modificar alguna sección hacer clic en **Modify/Show Section** cuando el nombre de la sección a modificar esta encendida en la sección **Frame Sections**.


Asignación de secciones Frame

3. En el menú **Select** elegir **Select** y luego **All** en el submenú. Todos los elementos en el modelo (nudos y elementos **Frame**) son seleccionados.
4. En el menú **Assign** seleccionar **Frame** y luego **Sections...** en el submenú esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Frame Sections**.
5. En este cuadro:
 - Hacer clic en la opción **VIGA** en el área **Frame Section**.
 - Hacer clic en **OK**
6. Hacer clic sobre el botón **Show Undeformed Shape**  o seleccionar **Show Undeformed Shape** en el menú **Display**, para limpiar la exhibición de las etiquetas de las secciones.
7. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo. Esto completa la definición y asignación de secciones Frame.

Paso 5. Definición de los Casos de Carga Estática.

1. En el menú **Define** seleccionar **Static Load Cases...** Esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Static Load Case Names**.
2. En este cuadro:
 - Tipear **CM** en el cuadro **Load**.
 - Seleccionar **DEAD** en el cuadro de lista **Type**.
 - Tipear **1** en el cuadro de edición **Self Weight Multiplier**.
 - Hacer clic en el botón **Change Load**.

Nota: En este ejemplo el programa calcula automáticamente el peso propio de la viga. Si no se quiere incluir el peso propio se deberá tipear **0** en el cuadro **Self Weight Multiplier** ó se debería tipear **0** en el cuadro **Weight per unit Volume** en el cuadro de diálogo **Define Material**.

- Tipear **CV** en el cuadro **Load**.
 - Seleccionar **LIVE** en el cuadro de lista **Type**.
 - Tipear **0** en el cuadro **Self Weight Multiplier**.
 - Hacer clic en **Add New Load**.
 - Hacer clic en el botón **OK**.
3. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo. Esto completa la definición de los Casos de Carga Estática.

Paso 6. Asignación de cargas estáticas Frame.

Se asignarán dos tipos de cargas, carga muerta uniformemente distribuida y carga viva uniformemente distribuida.

1. Hacer clic y mantener presionado el botón izquierdo del mouse, luego arrastrarlo haciendo un rectángulo que contenga la viga.

- En el menú **Assign** seleccionar **Frame Static Loads...** y luego **Point and Uniform...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Point and Uniform Span Loads**.

- En este cuadro:

- Seleccionar **CM** en el cuadro **Load Case Name**.
- En el área **Load Type and Direction**, seleccionar la opción **Forces** y seleccionar **Global Z** en el cuadro de lista **Direction**.
- En el área **Options** seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
- En el área de **Uniform Load** tipear **-15**.
- Hacer clic en el botón **OK** para aplicar la carga.




Point Loads	
	1. 2. 3. 4.
Distance	0, 0.25 0.75 1.
Load	0, 0, 0, 0.

Nota: Como la carga se ingresa en la dirección global Z el signo menos indica que la carga esta dirigida hacia abajo.

- Hacer clic en el botón **Restore Previous Selection** en la barra de herramienta lateral (o seleccionar **Get Previous Selection** en el menú **Select**). Esto restaurará la última selección.
- Hacer clic sobre el botón **Assign Frame Span Loading** en la barra de herramienta principal. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Point and Uniform Span Loads**.
- En este cuadro:
 - Seleccionar **CV** en el cuadro **Load Case Name**.
 - En el área **Load Type and Direction**, seleccionar la opción **Forces** y seleccionar **Global Z** en el cuadro **Direction**.
 - En el área **Options** seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - En el área de **Uniform Load** tipear **- 8**.
 - Hacer clic en el botón **OK** para aplicar la carga.
- Hacer clic sobre el botón **Show Undeformed Shape** o seleccionar **Show Undeformed Shape** en el menú **Display**, para limpiar la exhibición de las etiquetas de las cargas.
- Hacer clic en el botón **Save Model** para grabar el archivo. Esto asigna las cargas estáticas Frame.

Paso 7. Asignación cargas estáticas en los nudos.

- Hacer clic en el botón **Set Elements** . Esto mostrará el cuadro de diálogo **Set Elements**.
- En este cuadro:
 - En la sección **Joints** seleccionar la casilla **Labels**.

3. Hacer clic en el botón **OK**
 4. Seleccionar el nudo **13** haciendo clic sobre este.
 5. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
 6. En este cuadro:
 - Seleccionar **CM** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Típear **-120** en el cuadro de edición **Force Global Z**.
 - Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
 7. Hacer clic en el botón **Restore Previous Selection**  en la barra de herramienta lateral (o seleccionar **Get Previous Selection** en el menú **Select**). Esto restaurará la última selección.
 8. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
 9. En este cuadro:
 - Seleccionar **CV** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Típear **-70** en el cuadro de edición **Force Global Z**.
 10. Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
 11. Hacer clic sobre el botón **Show Undeformed Shape**  o seleccionar **Show Undeformed Shape** en el menú **Display**, para limpiar la exhibición de las etiquetas de las cargas.
 12. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
- Esto completa la asignación de cargas estáticas en los nudos.

Paso 8. Definición de Combinaciones.

Para este ejemplo se decidió utilizar la siguiente combinación:

$$1,4 \text{ CM} + 1,7 \text{ CV}$$

1. Desde el menú **Define** seleccionar **Load Combinations....** Esto mostrará el cuadro de diálogo **Load Combination Data**.
2. En este cuadro:
 - En la sección **Click to** seleccionar **Add New Combo**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Load Combination Data**.

Load Combination Data

Load Combination Name: COMB1

Load Combination Type: ADD

Title: COMB1


Define Combination

Case Name	Scale Factor
CV Load Case	1.7
CM Load Case	1.4
CV Load Case	1.7

Add Modify Delete

☐ Use for Steel Design
☐ Use for Concrete Design

OK Cancel



- En este cuadro:
 - ✓ Tipear **COMB1** en el cuadro de edición **Load Combination Name**.
 - ✓ Seleccionar **ADD** en el cuadro **Load Combination Type**.
 - ✓ En la sección **Define Combinations**:
 - En el cuadro **Case Name** elegir **CM Load Case**.
 - Tipear **1,4** en el cuadro de edición **Scale Factor**.
 - Hacer clic en el botón **Add**.
 - En el cuadro **Case Name** elegir **CV Load Case**.
 - Tipear **1,7** en el cuadro de edición **Scale Factor**.
 - Hacer clic en el botón **Add**.
 - Hacer clic en **OK**.
 - Hacer clic en **OK** para salir del cuadro **Load Combination Data**.
3. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
- Esto completa la definición de combinaciones.

Paso 9. Simulación de lecho elástico.

A continuación se vera el procedimiento a seguir para simular la viga sobre fundación elástica.

1. Seleccionar todos los nudos con una ventana.
2. En el menú **Assign** seleccionar **Joint** y después **Springs...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Springs**.

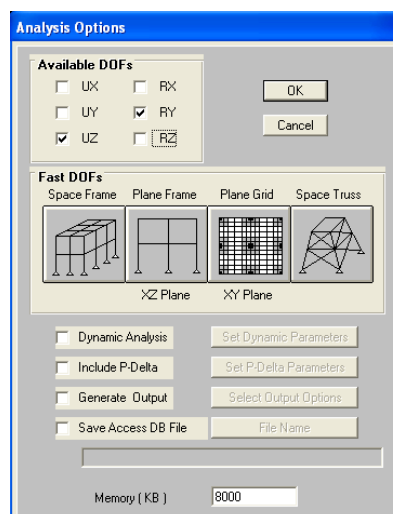
En este cuadro:


- Tipear **300** en la casilla **Traslation 3**.
 - Hacer clic en **OK**.
3. Hacer clic sobre el botón **Show Undeformed Shape**  o seleccionar **Show Undeformed Shape** en el menú **Display** para remover la asignación de **Springs**.
 4. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.

Paso 10. Análisis y visualización de resultados

En este paso se verán las opciones para el análisis y como correr el programa.



- Desde el menú **Analyze** seleccionar **Set Options...** Esto mostrará el cuadro de diálogo **Analysis Options**.




- En el cuadro **Available DOFs**:
 - Seleccionar las casillas **UZ** y **RY** solamente, verificando previamente que las casillas **UX**, **UY**, **RX** y **RZ** se encuentran deshabilitadas
 Hacer clic en **OK**.
- Hacer clic en el botón **Run Analysis**  o seleccionar **Run** en el menú **Analyze**.
- Hacer clic en **OK** de la ventana de análisis. Notar que la ventana ahora muestra el modelo deformado.

Esto completa el análisis.




Paso 11. Revisión de la deformada y de los desplazamientos de los nudos.

- Notar que la estructura deformada aparece con el primer caso de carga **CM**.
- Hacer clic en el botón **Start Animation**  localizado en la barra de estado en la parte inferior derecha de la pantalla.
- Hacer clic en el botón **Right Arrow**  localizado en la barra de estado, para ver la deformada del otro caso de carga **CV**.

Revisión de la deformada

- Hacer clic en el botón **Display Static Deformed Shape**  o seleccionar **Show Deformed Shape...** en el menú **Display**. Con esto aparece el cuadro de diálogo **Deformed Shape**.
- En este cuadro:
 - Seleccionar el caso de carga **COMB1** en el cuadro de lista **Load**.
 - En la sección **Scaling** seleccionar la opción **Auto**.
 - Seleccionar las casillas **Wire Shadow** y **Cubic Curve** en la sección **Options**.
 - Hacer clic en **OK** para mostrar la estructura deformada.

Paso 12. Revisión de las fuerzas en los elementos Frame.

1. Hacer clic en el botón **Member Force Diagram for Frames**  o seleccionar **Show Element Forces/Stresses** en el menú **Display** y después seleccionar **Frames...** en el submenú, esto mostrará el cuadro de diálogo **Member Force Diagram for Frames**.
2. En este cuadro:
 - Seleccionar **COMB1 Combo** en el cuadro de lista **Load**.
 - Seleccionar la opción **Moment 3-3** en la sección **Component**.
 - Seleccionar la opción **Auto** En la sección **Scaling**.
 - Seleccionar la casilla **Fill Diagram**.
 - Hacer clic en **OK**. esto mostrará los diagramas de momentos con las formas rellenas.
3. Hacer clic derecho sobre cualquier elemento para mostrar un cuadro de diálogo que permita ver el valor del momento en cualquier punto a lo largo del elemento.
4. Hacer clic en el botón **Member Force Diagram for Frames**  esto mostrará el cuadro de diálogo **Member Force Diagram for Frames**.
5. En este cuadro:
 - Quitar la selección de la casilla **Fill Diagram**.
 - Seleccionar la casilla **Show Values on Diagram**.
 - Hacer clic en **OK** para exhibir los diagramas de momentos con los valores críticos mostrados.
6. Hacer clic derecho sobre cualquier elemento para mostrar un cuadro de diálogo que permita ver el valor del momento en cualquier punto a lo largo del elemento.
7. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo, de esta manera se concluye el análisis del modelo.

Ejemplo 6. Losa sobre fundación elástica

A. Descripción del modelo

Es una losa de concreto sobre una fundación elástica en la que se determinará el diagrama de momento y el máximo desplazamiento, bajo la combinación de carga dada.

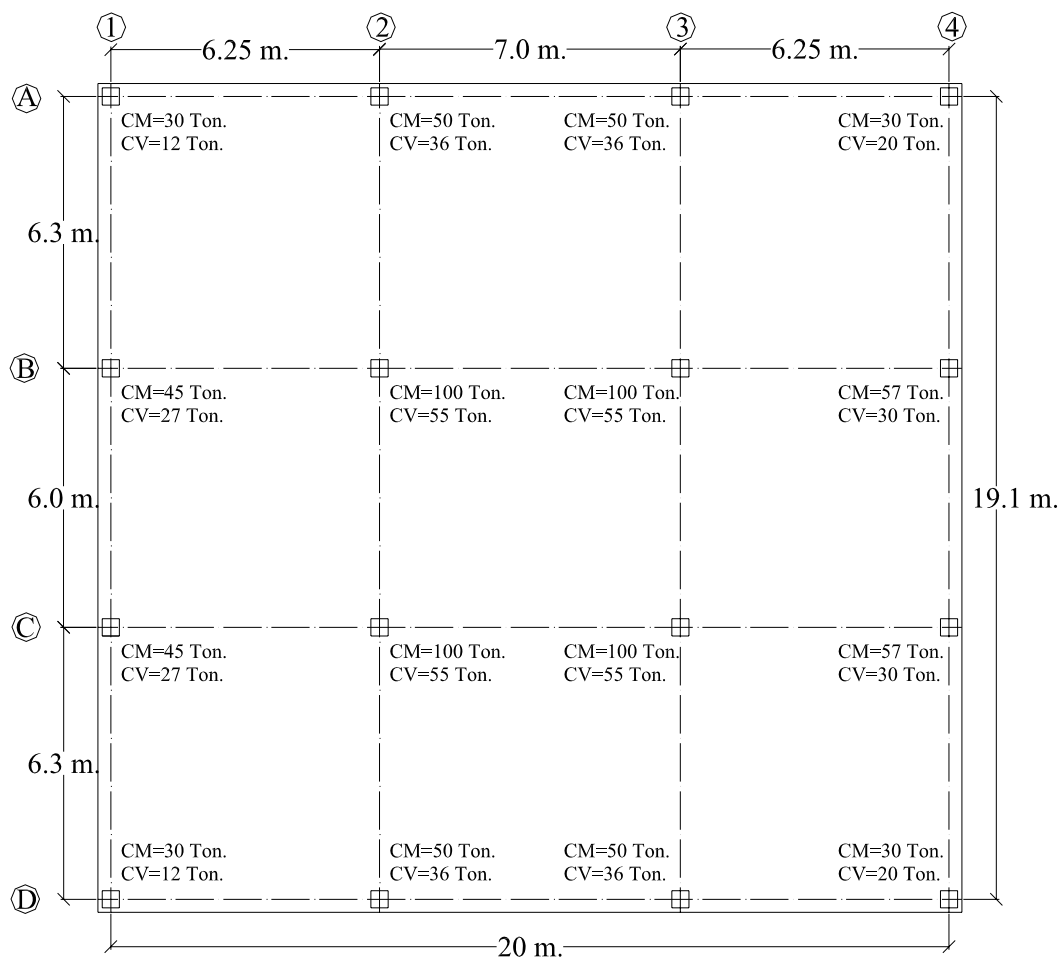


Figura 6.1

Dimenciones:

- Losa de 18,6 m x 20.1 m

Materiales:


Concreto:

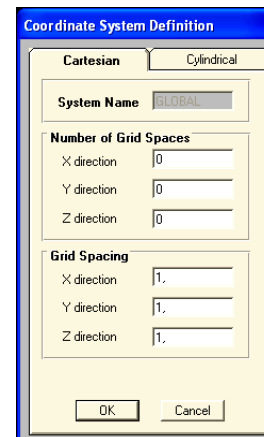
- Peso específico 2,4 Ton/m.
- Modulo de elasticidad $E=2E6 \text{ Ton/m}^2$
- Modulo de Poisson $\nu=0.2$

B. Creación y análisis del modelo.

Paso 1. Elaboración de la geometría del modelo desde el Scratch (dibujo de mallas).



La geometría del modelo se construirá mediante el Scratch (dibujo de mallas).

1. Para definir las unidades a Ton-m hacer clic en .
2. En el menú **File** seleccionar **New Model**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Coordinate System Definition**.
3. En este cuadro:
 - Seleccionar la ficha **Cartesian**
 - En la sección **Number of Grid Spaces**:
 - ✓ Típear **0** en el cuadro edición **X direction** (esto define el numero de espaciamento entre líneas).
 - ✓ Típear **0** en el cuadro de edición **Y direction**.
 - ✓ Típear **0** en el cuadro de edición **Z direction**.
 - En la sección **Grid Spacing**:
 - ✓ Típear **1** en el cuadro edición **X direction** (esto define la longitud del espaciamento entre líneas).
 - ✓ Típear **1** en el cuadro de edición **Y direction**.
 - ✓ Típear **1** en el cuadro de edición **Z direction**.
 - Hacer clic en **OK** para crear las mallas.
4. Desde el menú **Draw** seleccionar **Edit Grid...**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Modify Grid Lines**.



En este cuadro: Seleccionar la opción **X** en el área **Direction**:

- Típear **0,25** en el cuadro de edición **X Location**.
- Seleccionar la opción **Add Grid Line**.
- Típear **6,5** en el cuadro de edición **X Location**.
- Seleccionar la opción **Add Grid Line**.
- Típear **13,5** en el cuadro de edición **X Location**.
- Seleccionar la opción **Add Grid Line**.
- Típear **19,75** en el cuadro de edición **X Location**.
- Seleccionar la opción **Add Grid Line**.
- Típear **20** en el cuadro de edición **X Location**.
- Seleccionar la opción **Add Grid Line**.
- Seleccionar la casilla **Y** en el área **Direction**.
- Típear **0,25** en el cuadro de edición **Y Location**.
- Seleccionar la opción **Add Grid Line**.
- Típear **6,55** en el cuadro de edición **Y Location**.
- Seleccionar la opción **Add Grid Line**.
- Típear **12,55** en el cuadro de edición **Y Location**.
- Seleccionar la opción **Add Grid Line**.

- Típear **18,85** en el cuadro de edición **Y Location**.
 - Seleccionar la opción **Add Grid Line**.
 - Típear **19,1** en el cuadro de edición **Y Location**.
 - Seleccionar la opción **Add Grid Line**.
 - Hacer clic en **OK** para salir del cuadro de diálogo **Modify Grid Lines**.
5. Hacer clic sobre el boton **Draw Rectangular Shell Element**  en la barra de herramientas lateral o seleccionar **Draw Rectangular Shell Element** en el menú **Draw**
 6. Esta última herramienta activada permitirá dibujar las 21 losas que se muestran en la figura 6.2, dibujando cada elemento Shell entre cuatro nudos haciendo clic sobre dos nudos opuestos de la losa, aquel elemento estará limitado por las cuatro líneas de malla que lo comprenden.
 7. Hacer clic en el botón **Save Model**  en la barra de herramientas principal o seleccionar **Save** en el menú **File** para grabar el archivo.

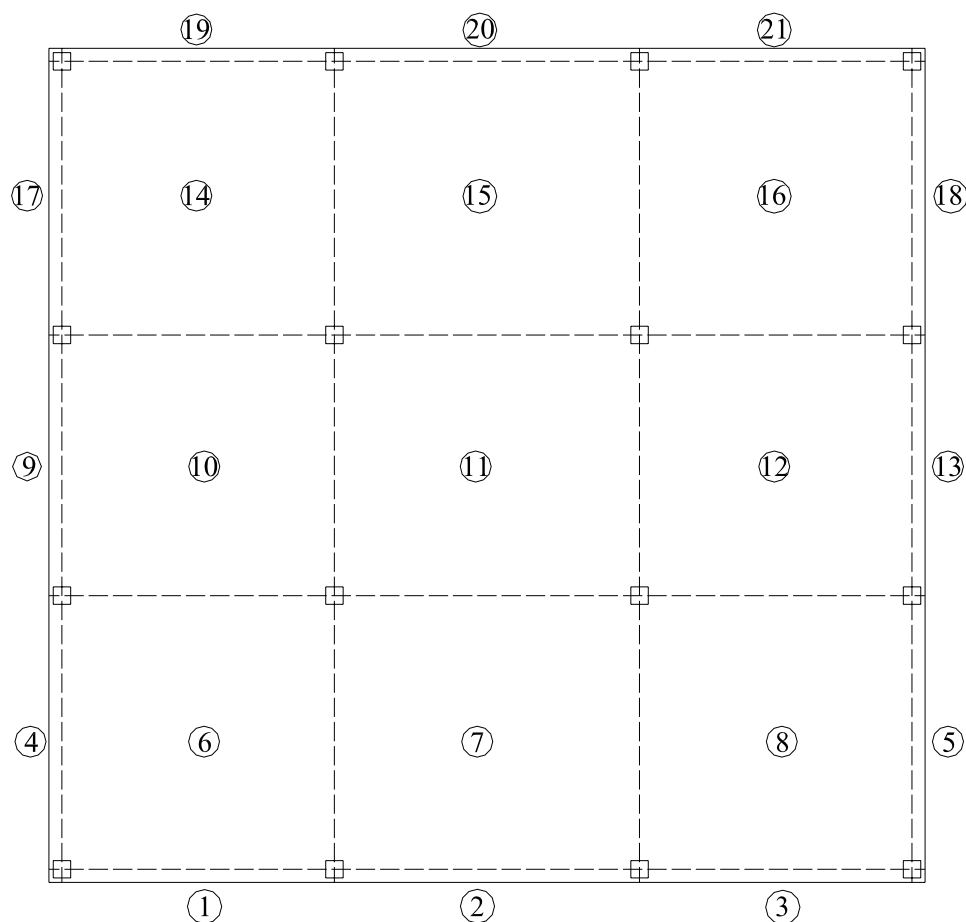



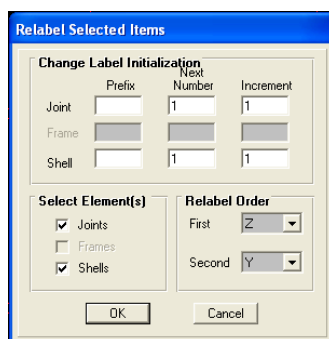
Figura 6.2

Paso 2. Re-etiquetacion de los nudos y elementos Shell

1. Hacer clic en el botón **Set Elements**  en la barra de herramientas principal o seleccionar **Set Elements...** en el menú **View**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Set Elements**.
2. En este cuadro:
 - En la sección **Joints** seleccionar la casilla **Labels**.
 - En la sección **Shells** seleccionar la casilla **Labels**.
 - Hacer clic en el botón **OK**.

Nota: Se esta mostrando las etiquetas de los elementos para poder ver los cambios efectuados. No es necesario mostrar las etiquetas para lograr la re-etiquetación.

3. En el menú **Select** elegir **Select** y luego **All** en el submenú. Todos los elementos en el modelo (nudos y elementos Shell) son seleccionados.
4. En el menú **Edit** elegir **Change Labels...** para mostrar el cuadro de diálogo **Relabel Selected Items**.




5. En este cuadro:
 - En la sección **Change Label Initialization** del cuadro de diálogo tipear **1** en los cuadros **Next Number** de **Joint** y de **Shell**.
 - Aceptar el resto de los valores por defecto en el cuadro de diálogo.
 - Hacer clic en **OK** para aceptar los cambios.

Nota: No es típico enumerar nuevamente los elementos. Esta hecho para ilustrar el proceso y para asegurar que todos los usuarios del tutorial tengan el mismo sistema de numeración, ya que iniciado el modelo desde el Template o desde el Scratch, la referencia a los nudos y los elementos Frame se hará mediante sus etiquetas cambiadas.

Nota: Las etiquetas de los nudos y elementos Shell pueden tener prefijos alfanuméricos. Estos prefijos pueden ser ingresados en los cuadros de edición **Prefix** en el cuadro de diálogo **Relabel Selected Items**.


Nota: No es necesario seleccionar todos los elementos para re-etiquetar. Se podría seleccionar solo unos pocos elementos de cualquier tipo, y re-etiquetar solo los elementos seleccionados.

6. Hacer clic en el botón **Set Elements** . Esto mostrará el cuadro de diálogo **Set Elements**.

7. En este cuadro:
 - En la sección **Joints** quitar la selección en la casilla **Labels**.
 - Hacer clic en el botón **OK**.
 8. Hacer clic en el botón **Save Model**  en la barra de herramientas principal o seleccionar **Save** en el menú **File** para grabar el archivo.
- Esto completa el re-etiquetado de los nudos y elementos Shells.

Paso 3. Definición de las propiedades del material.

Las unidades de los valores de las propiedades se encontraran en las unidades definidas en el paso 1 (Elaboración de la geometría del modelo)

1. En el menú **Define** elegir **Materials...**, esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Materials**.
 2. Con la opción **CONC** encendida en el área **Materials** hacer clic en **Modify/Show Material**, esto mostrará el cuadro de diálogo **Material Property Data**.
 3. Notar que las propiedades del concreto están en unidades Ton-m.
 4. Típear **2,4** en el cuadro edición **Weight per unit Volume** para considerar el peso propio del concreto. Dejar el resto de valores dados por defecto.
 5. Hacer clic en el botón **OK** para aceptar los cambios y salir del cuadro de diálogo **Material Property Data**.
 6. Hacer clic en el botón **OK** para salir del cuadro de diálogo **Define Materials**.
 7. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
- Esto completa la definición de los materiales.




Paso 4. Definición y asignación de la sección Shell.

Definición de secciones de concreto

1. En el menú **Define** elegir **Shell Sections...** esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Shell Sections**.
2. En este cuadro:
 - Hacer clic en la opción **Add New Section**.
 - Cambiar el nombre **SSEC2** por **LOSA**, seleccionar **CONC** en el cuadro de lista **Material**.
 - En el área **Thickness**:
 - ✓ Típear **0,75** en la caja **Membrane**.
 - ✓ Típear **0,75** en la caja **Bending**.
 - Verificar que solo la opción **Shell** este habilitada en el área **Type**.
 - Hacer clic en **OK** para aceptar la nueva sección. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Shell Sections**.
 - Notar que una vez definida la sección los nombres **SSEC1** y **LOSA** aparecen en el área **Shell Sections**, la sección **SSEC1** es una sección que aparece por defecto.

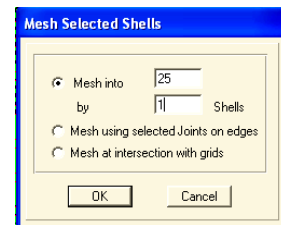
3. Si se requiere modificar alguna sección hacer clic en **Modify/Show Section** cuando el nombre de la sección a modificar esta encendida en la sección **Shell Sections**.
4. Hacer clic en **OK** para salir del cuadro de diálogo **Define Shell Sections**.


Asignación de secciones Shell

5. Verificar que el botón **Pointer**  en la barra de herramientas lateral este activado. Seleccionar todas las losas dibujadas anteriormente.
6. En el menú **Assign** seleccionar **Shell** y luego **Sections...** en el submenu esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Shell Sections**.
7. En este cuadro:
 - Hacer clic en la opción **LOSA** en el área **Shell Section**.
 - Hacer clic en **OK**
8. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo. Esto completa la definición y asignación de secciones Frame.
9. Hacer clic sobre el botón **Show Undeformed Shape**  o seleccionar **Show Undeformed Shape** en el menú **Display**, para limpiar la exhibición de las etiquetas de las secciones.

Discretización de losas

10. Seleccionar las losas etiquetadas: 19, 21, 1 y 3.
11. En el menú **Edit** seleccionar **Mesh Shells...**
 - En el cuadro de diálogo **Mesh Selected Shell**:
 - ✓ Tipear **25** en la caja **Mesh into**.
 - ✓ Tipear **1** en la caja **by**
12. Hacer clic en **OK**.
13. Seleccionar las losas etiquetadas: 20 y 2.
14. En el menú **Edit** seleccionar **Mesh Shells...**
 - En el cuadro de diálogo **Mesh Selected Shell**:
 - ✓ Tipear **28** en la caja **Mesh into**.
 - ✓ Tipear **1** en la caja **by**
15. Hacer clic en **OK**.
16. Seleccionar las losas etiquetadas: 17, 18, 4 y 5.
17. En el menú **Edit** seleccionar **Mesh Shells...**
 - En el cuadro de diálogo **Mesh Selected Shell**:
 - ✓ Tipear **1** en la caja **Mesh into**.
 - ✓ Tipear **26** en la caja **by**
18. Hacer clic en **OK**.
19. Seleccionar las losas etiquetadas: 9 y 13.
20. En el menú **Edit** seleccionar **Mesh Shells...**
 - En el cuadro de diálogo **Mesh Selected Shell**:
 - ✓ Tipear **1** en la caja **Mesh into**.
 - ✓ Tipear **28** en la caja **by**




21. Hacer clic en **OK**.
22. Seleccionar las losas etiquetadas: 14, 16, 6 y 8.
23. En el menú **Edit** seleccionar **Mesh Shells...**
 - En el cuadro de diálogo **Mesh Selected Shell**:
 - ✓ Típear **25** en la caja **Mesh into**.
 - ✓ Típear **25** en la caja **by**
 - ✓ Hacer clic en **OK**.
24. Seleccionar las losas etiquetadas: 15 y 7.
25. En el menú **Edit** seleccionar **Mesh Shells...**
 - En el cuadro de diálogo **Mesh Selected Shell**:
 - ✓ Típear **28** en la caja **Mesh into**.
 - ✓ Típear **25** en la caja **by**
26. Hacer clic en **OK**.
27. Seleccionar las losas etiquetadas: 10 y 12.
28. En el menú **Edit** seleccionar **Mesh Shells...**
 - En el cuadro de diálogo **Mesh Selected Shell**:
 - ✓ Típear **25** en la caja **Mesh into**.
 - ✓ Típear **28** en la caja **by**
29. Hacer clic en **OK**.
30. Seleccionar la losa etiquetada: 11.
31. En el menú **Edit** seleccionar **Mesh Shells...**
 - En el cuadro de diálogo **Mesh Selected Shell**:
 - ✓ Típear **28** en la caja **Mesh into**.
 - ✓ Típear **28** en la caja **by**.
32. Hacer clic en **OK**.
33. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.

Paso 5. Definición de los Casos de Carga Estática.



1. En el menú **Define** seleccionar **Static Load Cases...** Esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Static Load Case Names**.
2. En este cuadro:
 - Típear **CM** en el cuadro **Load**.
 - Seleccionar **DEAD** en el cuadro de lista **Type**.
 - Típear **1** en el cuadro de edición **Self Weight Multiplier**.
 - Hacer clic en el botón **Change Load**.



Nota: En este ejemplo el programa calcula automáticamente el peso propio de los elementos de la estructura. Si no se quiere incluir el peso propio se deberá típear **0** en el cuadro **Self Weight Multiplier** o se debería típear **0** en el cuadro **Weight per unit Volume** en el cuadro de diálogo **Define Material**.



 - Típear **CV** en el cuadro **Load**.


- Seleccionar **LIVE** en el cuadro de lista **Type**.
 - Típear **0** en el cuadro **Self Weight Multiplier**.
 - Hacer clic en **Add New Load**.
 - Hacer clic en el botón **OK**.
3. Hacer clic en el botón **Save Model**  para guardar el archivo.
- Esto completa la definición de los Casos de Carga Estática.

Paso 6. Asignación cargas estáticas en los nudos.

1. Seleccionar los nudos situados en los ejes **A1** y **D1** (figura 6.1) haciendo clic sobre estos.
2. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
3. En este cuadro:
 - Seleccionar **CM** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Típear **-30** en el cuadro de edición **Force Global Z**.
 - Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
4. Hacer clic en el botón **Restore Previous Selection**  en la barra de herramienta lateral (o seleccionar **Get Previous Selection** en el menú **Select**). Esto restaurará la última selección.
5. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
6. En este cuadro:
 - Seleccionar **CV** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Típear **-12** en el cuadro de edición **Force Global Z**.
7. Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
8. Seleccionar los nudos situados en los ejes **A2**; **D2**; **A3** y **D3** (figura 6.1). haciendo clic sobre estos.
9. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
10. En este cuadro:
 - Seleccionar **CM** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Típear **-50** en el cuadro de edición **Force Global Z**.
 - Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
11. Hacer clic en el botón **Restore Previous Selection**  en la barra de herramienta lateral (o seleccionar **Get Previous Selection** en el menú **Select**). Esto restaurará la última selección.

12. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
13. En este cuadro:
 - Seleccionar **CV** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Tipear **-36** en el cuadro de edición **Force Global Z**.
14. Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
15. Seleccionar los nudos situados en los ejes **A4** y **D4** (figura 6.1) haciendo clic sobre estos.
16. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
17. En este cuadro:
 - Seleccionar **CM** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Tipear **-30** en el cuadro de edición **Force Global Z**.
 - Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
18. Hacer clic en el botón **Restore Previous Selection**  en la barra de herramienta lateral (o seleccionar **Get Previous Selection** en el menú **Select**). Esto restaurará la última selección.
19. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
20. En este cuadro:
 - Seleccionar **CV** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Tipear **-20** en el cuadro de edición **Force Global Z**.
21. Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
22. Seleccionar los nudos situados en los ejes **B1** y **C1** (figura 6.1). haciendo clic sobre estos.
23. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
24. En este cuadro:
 - Seleccionar **CM** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Tipear **-45** en el cuadro de edición **Force Global Z**.
 - Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
25. Hacer clic en el botón **Restore Previous Selection**  en la barra de herramienta lateral (o seleccionar **Get Previous Selection** en el menú **Select**). Esto restaurará la última selección.
26. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.

27. En este cuadro:
 - Seleccionar **CV** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Tipear **-27** en el cuadro de edición **Force Global Z**.
28. Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
29. Seleccionar los nudos situados en los ejes **B2; B3; C2 y C3** (figura 6.1). haciendo clic sobre estos.
30. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
31. En este cuadro:
 - Seleccionar **CM** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Tipear **-100** en el cuadro de edición **Force Global Z**.
 - Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
32. Hacer clic en el botón **Restore Previous Selection**  en la barra de herramienta lateral (o seleccionar **Get Previous Selection** en el menú **Select**). Esto restaurará la última selección.
33. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
34. En este cuadro:
 - Seleccionar **CV** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Tipear **-55** en el cuadro de edición **Force Global Z**.
35. Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
36. Seleccionar los nudos situados en los ejes **B4 y C4** (figura 6.1). haciendo clic sobre estos.
37. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
38. En este cuadro:
 - Seleccionar **CM** en el cuadro de lista **Load Case Name**.
 - En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Tipear **-57** en el cuadro de edición **Force Global Z**.
 - Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
39. Hacer clic en el botón **Restore Previous Selection**  en la barra de herramienta lateral (o seleccionar **Get Previous Selection** en el menú **Select**). Esto restaurará la última selección.
40. En el menú **Assign** seleccionar **Joint Static Loads...** y después **Forces...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Forces**.
41. En este cuadro:
 - Seleccionar **CV** en el cuadro de lista **Load Case Name**.

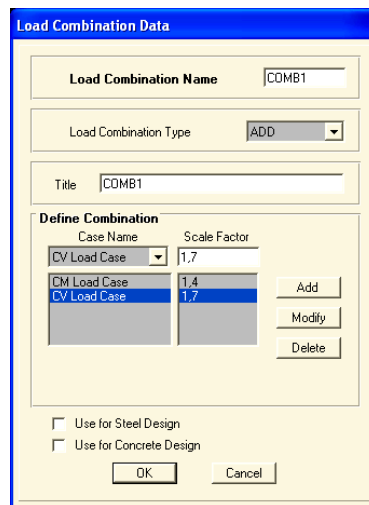
- En la sección **Options**, seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Típear **-30** en el cuadro de edición **Force Global Z**.
42. Hacer clic en **OK** para aplicar la carga.
43. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
- Esto completa la asignación de cargas estáticas en los nudos.

Paso 7. Definición de Combinaciones.


Para este ejemplo se decidió utilizar la siguiente combinación:

$$1,4 \text{ CM} + 1,7 \text{ CV}$$

1. Desde el menú **Define** seleccionar **Load Combinations**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Load Combination Data**.
2. En este cuadro:
 - En la sección **Click to** seleccionar **Add New Combo**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Load Combination Data**.



Case Name	Scale Factor
CV Load Case	1,7
CM Load Case	1,4
CV Load Case	1,7

- En este cuadro:
 - ✓ Típear **COMB1** en el cuadro de edición **Load Combination Name**.
 - ✓ Seleccionar **ADD** en el cuadro **Load Combination Type**.
 - ✓ En la sección **Define Combination**:
 - En el cuadro **Case Name** elegir **CM Load Case**.
 - Típear **1,4** en el cuadro de edición **Scale Factor**.
 - Hacer clic en el botón **Add**.
 - En el cuadro **Case Name** elegir **CV Load Case**.
 - Típear **1,7** en el cuadro de edición **Scale Factor**.
 - Hacer clic en el botón **Add**.
 - Hacer clic en **OK**.
 - Hacer clic en **OK** para salir del cuadro **Load Combination Data**.
 - 3. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
- Esto completa la definición de combinaciones.

Paso 8. Simulación de lecho elástico.

En este paso se verán los pasos a seguir para simular la losa sobre fundación elástica.

1. Seleccionar todos los nudos con una ventana.
2. En el menú **Assign** seleccionar **Joint** y después **Springs...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Springs**.


En este cuadro:

- Típear **150** en la casilla **Traslation 3**.
 - Verificar que la opción **Add to existing springs** este habilitada.
 - Hacer clic en **OK**.
3. Seleccionar todos los nudos del contorno de la losa.
 4. En el menú **Assign** seleccionar **Joint** y después **Springs...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Springs**.

En este cuadro:

- Típear **75** en la casilla **Traslation 3**.
 - Verificar que la opción **Replace existing springs** este habilitada.
 - Hacer clic en **OK**.
5. Seleccionar los cuatro nudos de las esquinas de la losa.
 6. En el menú **Assign** seleccionar **Joint** y después **Springs...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Joint Springs**.

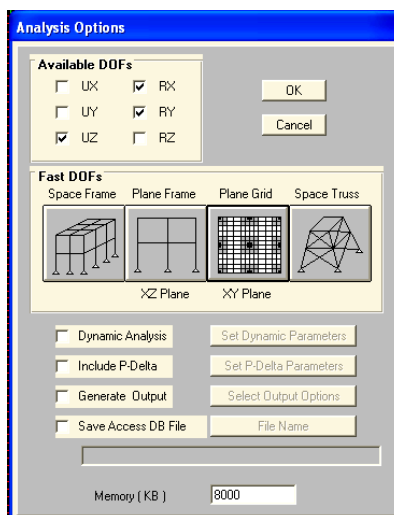
En este cuadro:


- Típear **37,5** en la casilla **Traslation 3**.
 - Verificar que la opción **Replace existing springs** este habilitada.
 - Hacer clic en **OK**.
7. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.

Paso 9. Análisis estatico.



En este paso se verán las opciones para el análisis y como correr el programa.

1. Desde el menú **Analyze** seleccionar **Set Options...** Esto mostrará el cuadro de diálogo **Analysis Options**.




2. En este cuadro:
 - Seleccionar la opción **Plane Grid**, en el cuadro **Fast DOFs**.
Hacer clic en **OK**.
3. Hacer clic en el botón **Run Analysis**  o seleccionar **Run** en el menú **Analyze**.
Nota: La opción **Run Minimized** es útil cuando se va a correr un modelo que puede tomar mucho tiempo para analizar. Esta opción proveerá un botón **Cancel** que permitirá que se cancele la corrida si es necesario.
4. Al momento de correr se abrirá una ventana en la cual varias fases del análisis serán progresivamente reportadas. Una vez completado el análisis se puede usar la barra de movimiento vertical ubicado a la derecha de la ventana para revisar los mensajes editados y poder chequear cualquier advertencia o error.
Nota: Todos los mensajes editados al momento de correr el análisis se pueden encontrar en el archivo de texto *.LOG donde * es el nombre del archivo SAP2000 del usuario.
5. Hacer clic en **OK** de la ventana de análisis. Notar que la ventana ahora muestra el modelo deformado.
Esto completa el análisis.


Paso 10. Revision de la deformada y de los desplazamientos de los nudos.

1. Notar que la estructura deformada aparece en la ventana izquierda con el primer caso de carga **CM**.
2. Hacer clic en el botón **Start Animation**  localizado en la barra de estado en la parte inferior derecha de la pantalla.
3. Hacer clic en el botón **Right Arrow**  localizado en la barra de estado, para ver la deformada del otro caso de carga **CV**.


Revisión de la deformada

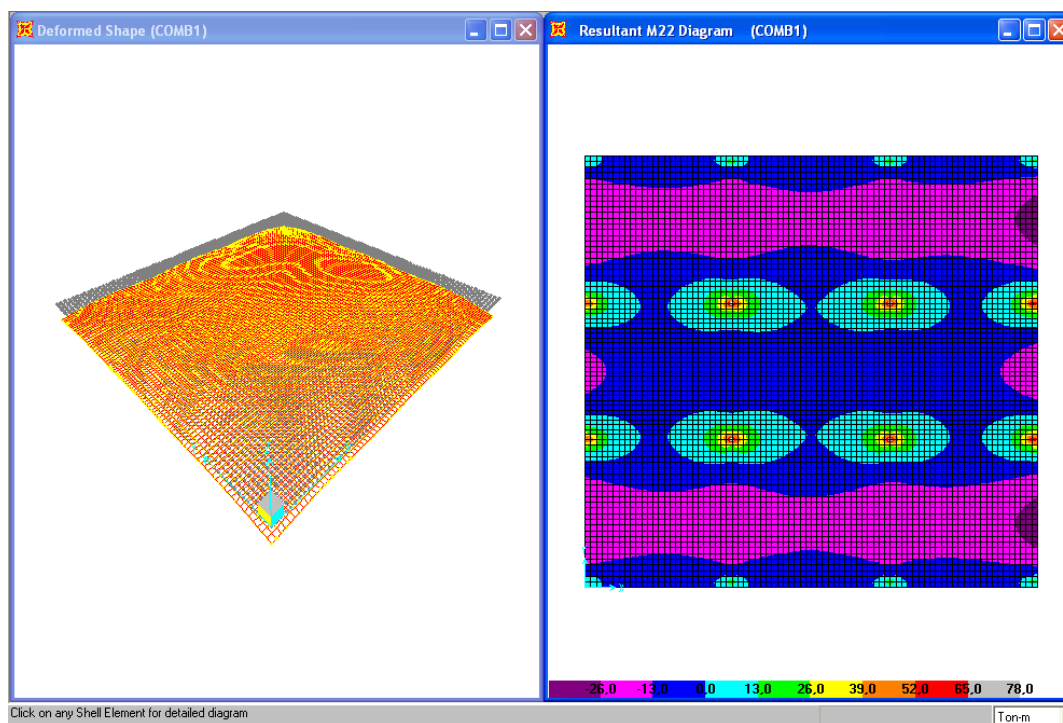
4. Hacer clic en el botón **Display Static Deformed Shape**  o seleccionar **Show Deformed Shape...** en el menú **Display**. Con esto aparece el cuadro de diálogo **Deformed Shape**.
5. En este cuadro:
 - Seleccionar el caso de carga **COMB1** en el cuadro de lista **Load**.
 - En la sección **Scaling** seleccionar la opción **Auto**.
 - Seleccionar las casillas **Wire Shadow** y **Cubit Curve** en la sección **Options**.
 - Hacer clic en **OK** para mostrar la estructura deformada.

Paso 11. Revisión de las fuerzas en los elementos Shells.

1. Hacer clic en la ventana derecha para activarla.
2. Hacer clic en el botón **Element Force/Stress Contours for Shells**  o seleccionar **Show Element Forces/Stresses** en el menú **Display** y después

seleccionar **Shells...** en el submenú, esto mostrará el cuadro de diálogo **Element Force/Stress Contours for Shells**.

3. En este cuadro:
 - Seleccionar **COMB1 Combo** en el cuadro de lista **Load**.
 - Seleccionar la opción **M22** en la sección **Component**.
 - Hacer clic en **OK**, esto mostrará los diagramas de momentos.
4. Hacer clic derecho sobre cualquier elemento para mostrar un cuadro de diálogo que permita ver el valor del momento en cualquier punto a lo largo del elemento.
5. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.



Ejemplo 7. Análisis Estático del “Instituto Oftalmológico Cochabamba”**A. Descripción del modelo**

Ubicación del proyecto: El edificio del Instituto Oftalmológico Cochabamba se encuentra ubicado en la calle 16 de Julio entre Paccieri y Salamanca en la zona noreste de la ciudad de Cochabamba.

Número de niveles del proyecto:

- Semisótano
- Planta Baja
- Planta Alta: Primer Nivel
- Planta Alta: Segundo Nivel
- Planta Alta Tipo: Tercer y Cuarto Nivel
- Planta Alta: Quinto Nivel
- Planta Alta: Sexto Nivel

Uso servicio del Proyecto: El edificio esta destinado al Instituto Oftalmológico Cochabamba que consta de Laboratorios, Quirófanos, Consultorios, Sala de reuniones, Sala de maquinas, etc.

Norma empleada: Después de armar el modelo, se hará un análisis estático empleando combinaciones de carga de acuerdo al código ACI.

Cota de fundación: Las zapatas serán construidas a 1,5 m por debajo el nivel de edificación.

Secciones:

- Vigas de: 0.2 m x 0.35 m
- Columnas de: 0.2 m x 0.2 m

Materiales:

- Concreto $E=2E6 \text{ Ton/m}^2$
 $\nu=0.25$

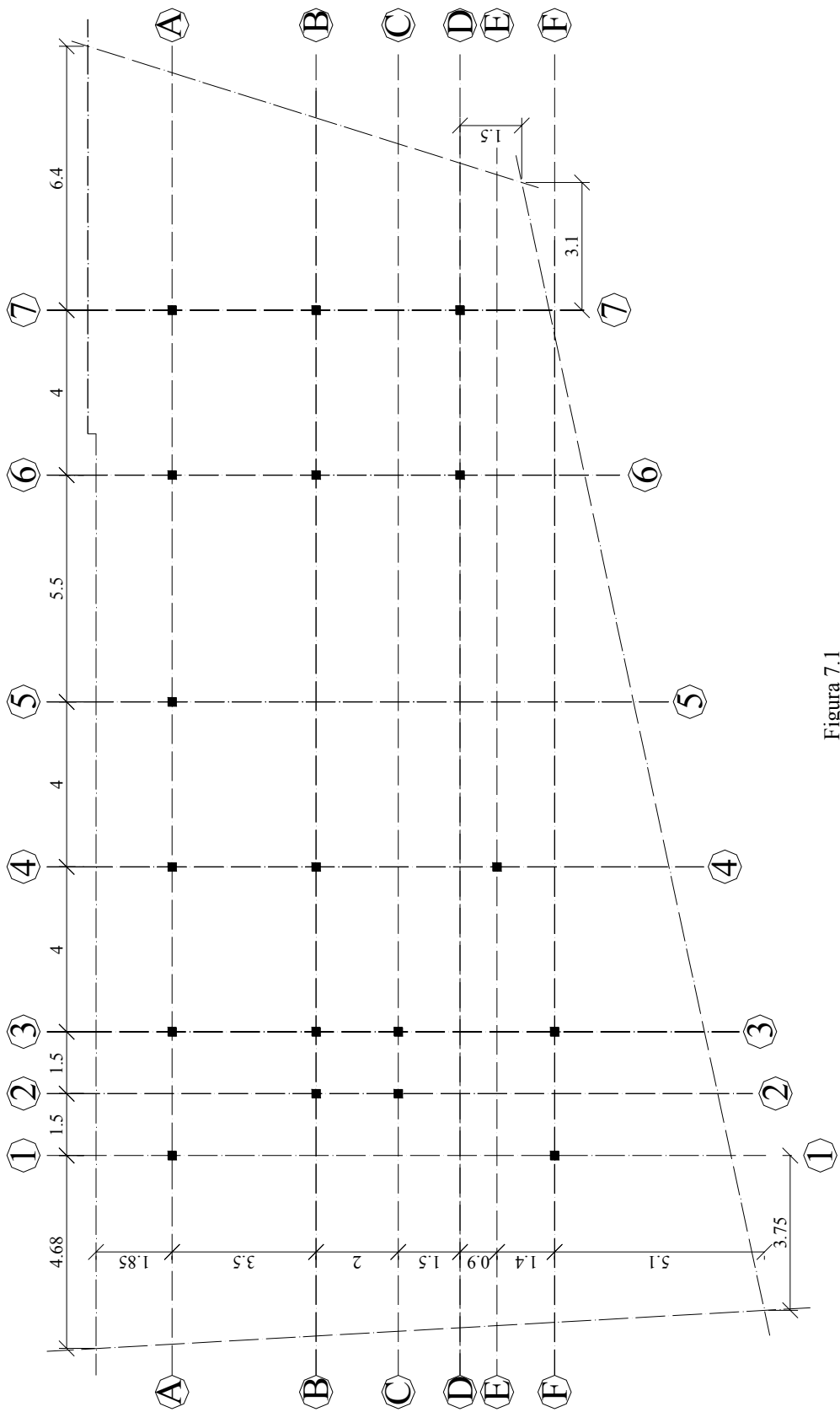


Figura 7.1

Cargas verticales asumidas

Determinación de cargas

Los pesos de las vigas, columnas y losas serán determinados por el programa SAP2000, como se indica en el paso 7.

Para la determinación del espesor de la losa, se considerará la losa más grande y por motivos constructivos este espesor será utilizado en todas las plantas.

$$e = \frac{2(4,4) + 1,55 + 1,85 + 2(2) + 2(1,2) + 2(0,8) + 3,7 + 9,5}{180}$$

$$e = 0,2 \text{ m}$$

Entonces se decide adoptar un espesor de losa de 20 cm.

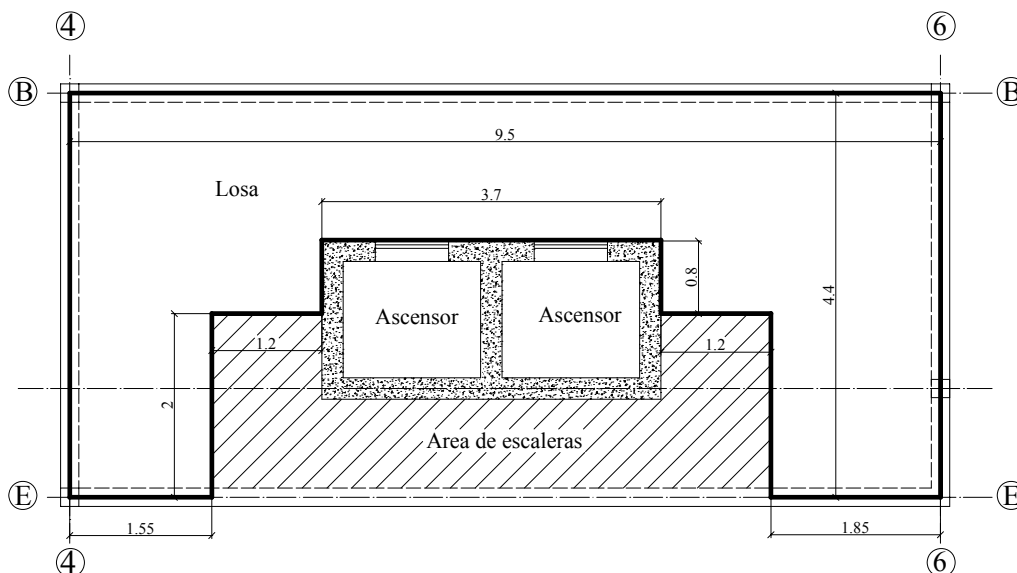


Figura 7.2

Cálculo de carga muerta

Para todas las losas ver Anexo B:

$W_{\text{cielo raso}}$	30 kg/m ²
$W_{\text{piso+contrapiso (5 cm H°)}}$	120 kg/m ²
W_{revoque}	12 kg/m ²
$W_{\text{luminarias}}$	10 kg/m ²
W_{muros}	<u>100 kg/m²</u>
W_{TOTAL}	272 kg/m ²

Entonces la carga muerta que se utilizará para cada una de las losas es 0,272 Ton/m².

Cálculo de la carga muerta para la escalera

Las cargas que se calculan a continuación corresponden a los peldaños de las escaleras, debiéndose estas ser cargadas a las losas que representan a dichas escaleras.

$$\text{Cálculo del área de los peldaños } A = \frac{0,30(0,20)}{2} = 0,03 \text{ m}^2$$

Debido a que se trata de tres tramos diferentes, siendo el primer y tercer tramo iguales el cálculo de estos se realizara por separado:

Primer y Tercer Tramo:

Multiplicando el área por el número de peldaños: $0,03(5) = 0,15 \text{ m}^2$

Peso del Hormigón Armado: 2400 kg/m^3

$$0,15 \text{ m}^2 (2400 \text{ kg/m}^3) = 360 \text{ kg/m}$$

$$\text{Peso de cada peldaño: } \frac{360 \text{ kg/m} (1,2 \text{ m})}{5} = 86,4 \text{ kg}$$

Peso total de peldaños: $86,4 \text{ kg} (5) = 432 \text{ kg}$

$$\text{Carga muerta aplicada } \frac{432 \text{ kg}}{1,6 \text{ m} (1,2 \text{ m})} = 225 \text{ kg/m}^2$$

Entonces la carga muerta que se utilizará para el segundo tramo de las escaleras en cada piso es $0,225 \text{ Ton/m}^2$.

Segundo Tramo:

Multiplicando área por el número de peldaños: $0,03(10) = 0,30 \text{ m}^2$

Peso del Hormigón Armado: 2400 kg/m^3

$$0,30 \text{ m}^2 (2400 \text{ kg/m}^3) = 720 \text{ kg/m}$$

$$\text{Peso de cada peldaño: } \frac{720 \text{ kg/m} (1,2 \text{ m})}{10} = 86,4 \text{ kg}$$

Peso total de peldaños: $86,4 \text{ kg} (10) = 864 \text{ kg}$

$$\text{Carga muerta aplicada } \frac{864 \text{ kg}}{3,97 \text{ m} (1,2 \text{ m})} = 181,2 \text{ kg/m}^2$$

Entonces la carga muerta que se utilizará para el segundo tramo de las escaleras en cada piso es $0,181 \text{ Ton/m}^2$.

Carga viva (sobrecarga) asumida

Debido a que se trata de una clínica oftalmológica las cargas que se asumen son las siguientes (ver Anexo B):

Zonas de dormitorio	200 kg/m^2
Zonas publicas, escaleras, accesos	300 kg/m^2
Locales de reunión y espectáculo	500 kg/m^2

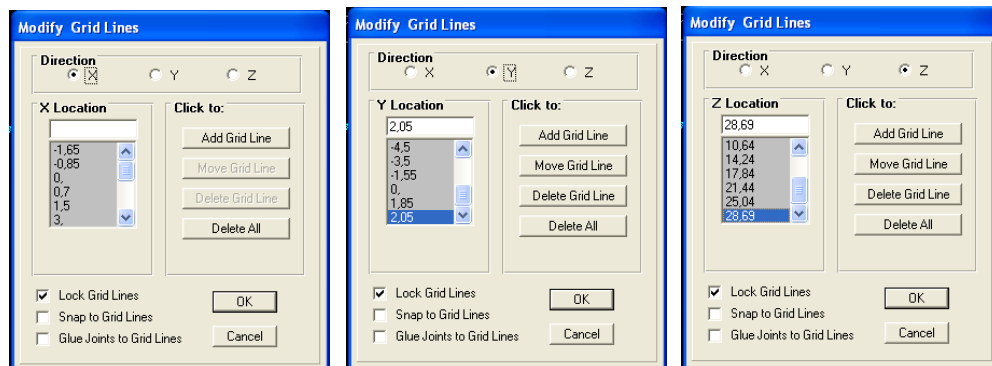
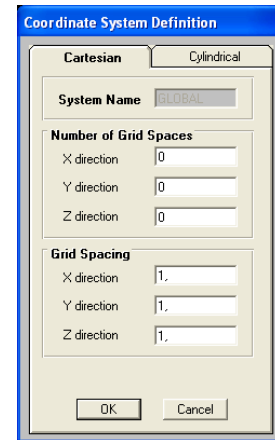
B. Creación y análisis del modelo del edificio

Paso 1. Elaboración de la geometría del modelo desde el Scratch (dibujo de mallas).

La geometría se construirá desde el Scratch (dibujo de mallas)

Para definir las unidades a Ton-m hacer clic en .

1. En el menú **File** seleccionar **New Model**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Coordinate System Definition**.
2. En este cuadro:
 - Seleccionar la ficha **Cartesian**
 - En la sección **Number of Grid Spaces**:
 - ✓ Típear **0** en el cuadro edición **X direction** (esto define el número de espaciamiento entre líneas).
 - ✓ Típear **0** en el cuadro de edición **Y direction**.
 - ✓ Típear **0** en el cuadro de edición **Z direction**.
 - En la sección **Grid Spacing**:
 - ✓ Típear **1** en el cuadro edición **X direction** (esto define la longitud del espaciamiento entre líneas).
 - ✓ Típear **1** en el cuadro de edición **Y direction**.
 - ✓ Típear **1** en el cuadro de edición **Z direction**.
 - Hacer clic en **OK** para visualizar el sistema de ejes.
3. La pantalla mostrará el sistema de ejes en dos ventanas, en 3D en la ventana izquierda y en 2D en la ventana derecha (el título de esta última dice **X-Y Plane @ Z=0**).
4. Hacer clic en la ventana derecha para activarla, notar que el título de la ventana se enciende.
5. Hacer clic en el menú **Draw** y seleccionar **Edit Grid...** Esto mostrará el cuadro de diálogo **Modify Grid Lines**
6. En el cuadro de diálogo **Modify Grid Lines** se tipean los valores de nuestras grillas en la dirección **X**, **Y** y **Z** del edificio ver figura 7.3(a) y figura 7.3(b).



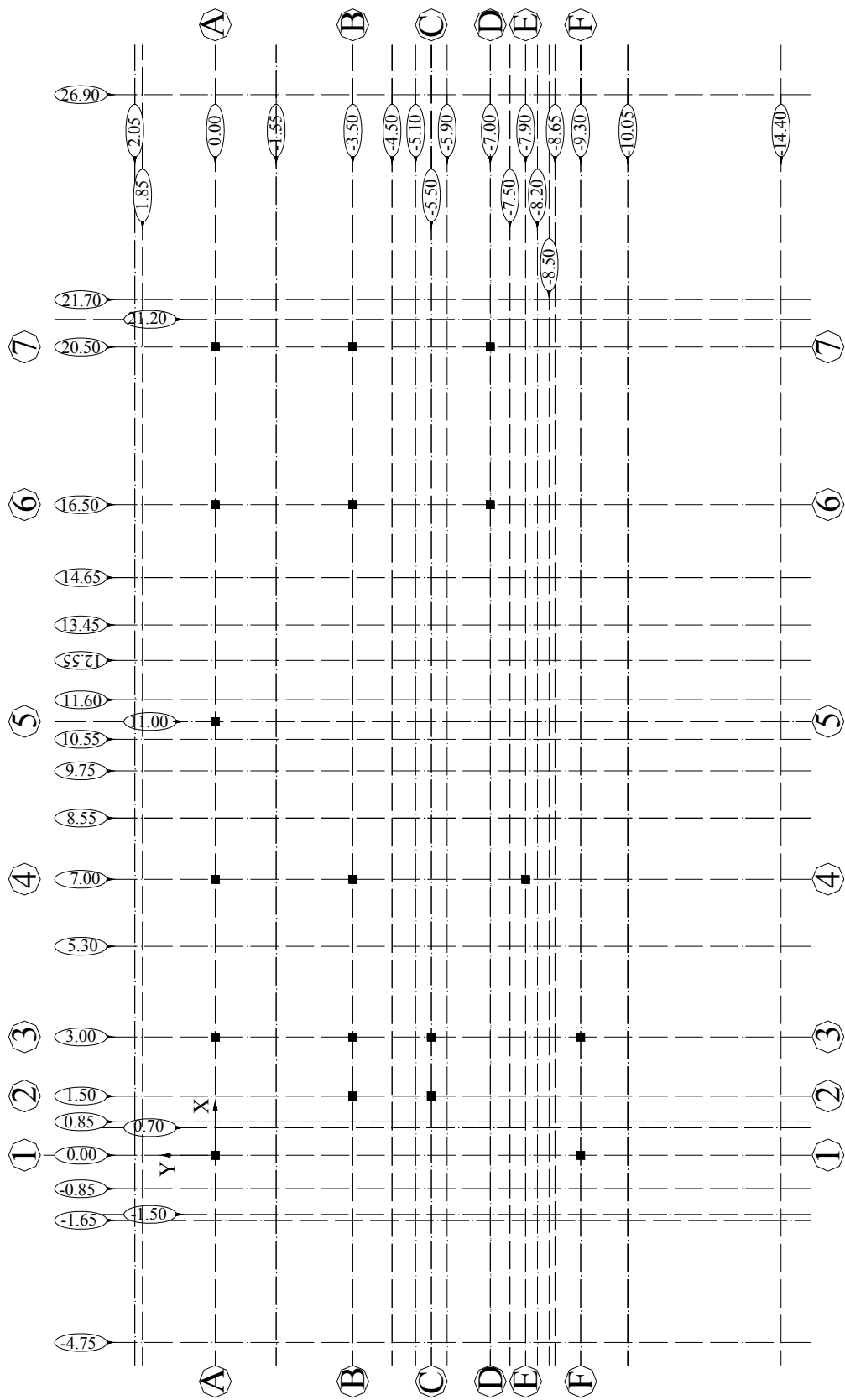


Figura 7.3(a)

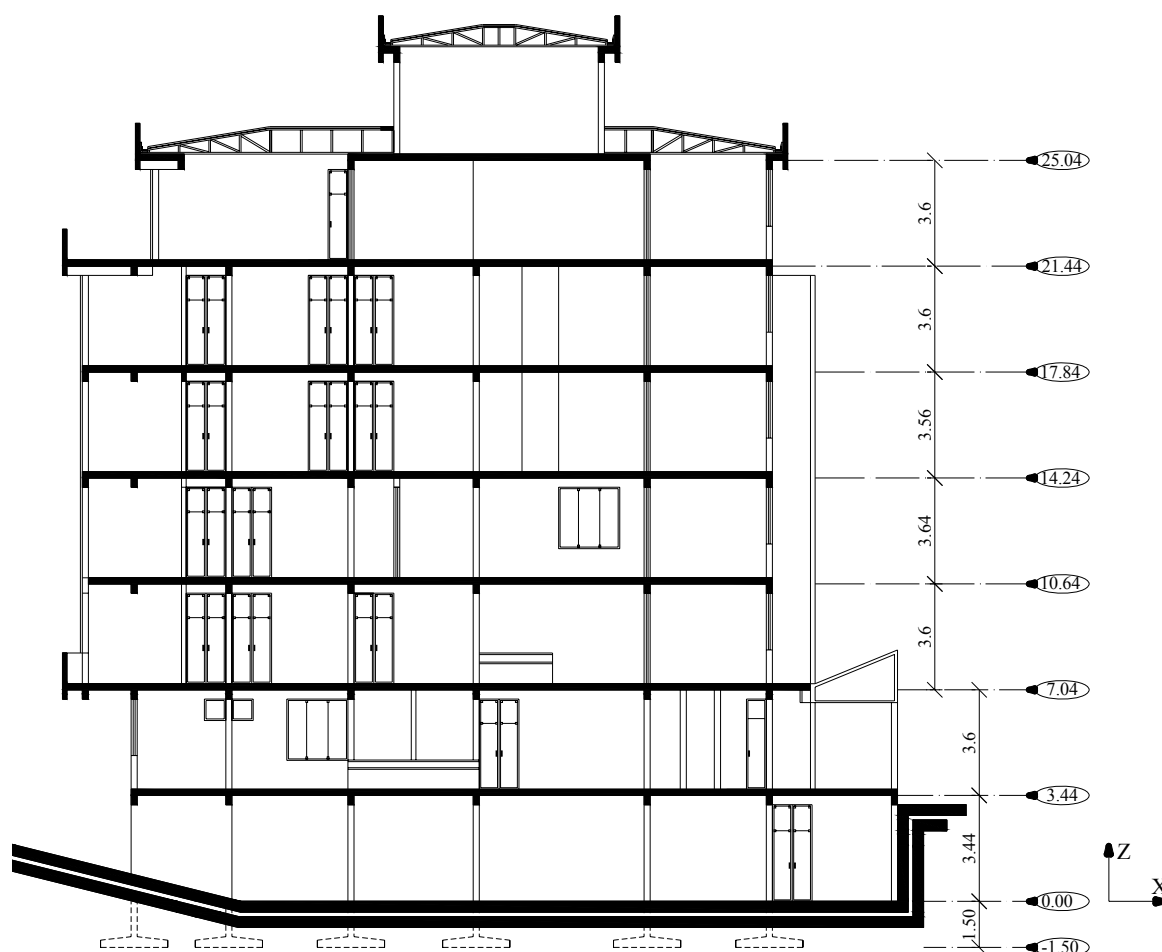







Figura 7.3(b)







7. Hacer clic sobre el botón **xz 2D View** . Notar que el nombre de la ventana ahora dice **XZ Plane @ Y=7**.
8. Hacer clic en el botón **Down One Gridline**  en la barra de herramientas principal para ubicar el nivel Y=0.
9. Hacer clic sobre el botón **Quick Draw Frame Element**  en la barra de herramientas lateral o seleccionar **Quick Draw Frame Element** en el menú **Draw**.
10. Esta última herramienta activada permitirá dibujar un elemento Frame haciendo clic sobre una línea de malla, aquel elemento estará limitado por las dos líneas de malla que lo cruzan perpendicularmente y que están más cercanas a cada lado del punto donde se hizo clic.






Con la herramienta **Quick Draw Frame Element** dibujar los elementos Frame para modelar las columnas del eje A-A del nivel Y=0; eje B-B del nivel Y=-3,5; eje C-C del nivel Y=-5,5; eje E-E del nivel Y=-7,9 y eje F-F del nivel Y=-9,3; (ver figura 7.3).



Nota: Si se falla ligeramente al hacer clic sobre la línea de malla, el programa puede asumir que se está intentando dibujar dos brazos diagonales en el tramo limitado por cuatro líneas. Si esto sucede simplemente hacer clic dos veces sobre el botón  **Undo** en la barra de herramientas principal o seleccionar dos veces **Undo Frame Add** en el menú **Edit**.


Nota: Para borrar un nudo o elemento Frame seleccionar y pulsar la tecla **Supr** o **Delete**.


Nota: Se debe tener cuidado de dibujar un solo elemento Frame correspondiente a las columnas comprendidas entre los niveles $Z=-1,5$ y $Z=3,44$; utilizando la herramienta **Draw Frame Element** .



11. Hacer clic sobre el botón **xy 2D View** . Notar que el nombre de la ventana ahora dice **XY Plane @ Z=0**.
12. Hacer clic en el botón **Up One Gridline**  en la barra de herramientas principal para ubicar el nivel $Z=3,44$.
13. Con la herramienta **Draw Frame Element**  dibujar los elementos Frame para modelar las vigas de los niveles $Z=3,44$; $Z=7,04$; $Z=10,64$; $Z=14,24$; $Z=17,84$; $Z=21,44$ y $Z=25,04$.
14. Asegurarse que el botón **Snap to Joints and Grid Points**  está presionado.
15. Mover el puntero del mouse sobre uno de los nudos de los extremos de la viga hacer clic en el botón izquierdo. Notar que cuando el puntero del mouse está cerca del nudo “se atrapa al nudo” y aparece un cuadro que dice **Grid Intersection**. Este es el efecto de la propiedad **Snap to Joints and Grid Points** dirigir el puntero hacia el otro extremo de la viga y hacer clic izquierdo en ese nudo.
16. Pulsar la tecla **Esc**.
 Nota: Otras opciones snap incluidas en el SAP2000 incluyen **Snap to Midpoints and Ends**, **Snap to Element Intersection**, **Snap to Perpendicular**, y **Snap to Lines and Edges**. Los botones de estas propiedades están localizados en la barra de herramientas lateral justo debajo del botón **Snap to Joints and Grid Points**. Notar que todas las propiedades snap pueden también seleccionarse a través del submenú **Snap to** del menú **Draw**.
17. Hacer clic sobre el botón **xy 2D View**  notar que el nombre de la ventana probablemente dice **XY Plane @ Z=0**. Si no es así, hacer clic sobre el botón **Down One Gridline** hasta ubicar el nivel $Z=-1,5$ (nivel de fundación).
18. Desactivar el modo Draw con el botón **Pointer** .
19. Seleccionar los 18 nudos correspondientes a los apoyos de la estructura haciendo clic sobre cada uno de ellos o seleccionarlos dibujando una ventana que los incluya, para esto arrastrar el mouse presionando el botón izquierdo.



20. Hacer clic en el botón **Assign Joint Restraints**  o en el menú **Assign** escoger **Joint** y luego **Restraints...** en el submenú, esto mostrará el cuadro de diálogo Joints Restraints.
21. En este cuadro, en la sección **Fast Restraints** hacer clic en el botón:  y hacer clic en **OK**.
22. Hacer clic en la ventana izquierda y presionar el botón **Refresh Window** .
23. Hacer clic sobre el botón **Draw Rectangular Shell Element**  en la barra de herramientas lateral o seleccionar **Draw Rectangular Shell Element** en el menú **Draw**
24. Esta última herramienta activada permitirá dibujar un elemento Shell entre cuatro nudos haciendo clic sobre dos nudos opuestos de la losa, aquel elemento estará limitado por las cuatro líneas de malla que lo comprenden.
25. Hacer clic sobre el botón **Draw Quadrilateral Shell Element**  en la barra de herramientas lateral o seleccionar **Draw Quadrilateral Shell Element** en el menú **Draw**
26. Esta última herramienta activada permitirá dibujar un elemento Shell de forma irregular entre cuatro nudos haciendo clic sobre cada uno de ellos.








Con las herramientas **Draw Rectangular Shell Element** y **Draw Quadrilateral Shell Element** dibujar los elementos Shell para modelar las losas rectangulares e irregulares de los niveles: Z=3,44; Z=7,04; Z=10,64; Z=14,24; Z=17,84; Z=21,44 y Z=25,04; correspondientes a la planta baja, primer, segundo, tercer, cuarto, quinto piso y sala de maquinas respectivamente. Para ubicarnos en el plano deseado utilizar las herramientas **Down One Gridline**  y **Up One Gridline**  ya mencionadas anteriormente.

Nota: Si se falla ligeramente al hacer clic sobre uno de los cuatro nudos. Hacer simplemente clic una vez sobre el botón  **Undo** en la barra de herramientas principal o seleccionar una vez **Undo Shell Add** en el menú **Edit**.

La herramienta **Quick Draw Rectangular Shell Element**  en la barra de herramientas lateral permite dibujar un elemento Shell entre cuatro nudos haciendo clic sobre el espacio comprendido entre estos nudos, aquel elemento estará limitado por las cuatro líneas de malla que lo comprenden y que están más cercanas a cada lado del punto donde se hizo clic.


27. Hacer clic sobre el botón **3D View** . Notar que el nombre de la ventana ahora dice **3D-View**.
28. Hacer clic sobre el botón **Draw Quadrilateral Shell Element**  en la barra de herramientas lateral o seleccionar **Draw Quadrilateral Shell Element** en el menú **Draw**
29. Esta última herramienta activada permitirá dibujar un elemento Shell entre cuatro nudos haciendo clic sobre cada uno de ellos.

Con la herramienta **Quadrilateral Shell Element** dibujar los elementos Shell para modelar las losas que representarán a las gradas que se encuentran entre los niveles de: $Z=3,44$ a $Z=4,45$; $Z=4,45$ a $Z=6,04$; $Z=6,04$ a $Z=7,04$; $Z=7,04$ a $Z=8,04$; $Z=8,04$ a $Z=9,64$; $Z=9,64$ a $Z=10,64$; $Z=10,64$ a $Z=11,64$; $Z=11,64$ a $Z=13,24$; $Z=13,24$ a $Z=14,24$; $Z=14,24$ a $Z=15,24$; $Z=15,24$ a $Z=16,84$; $Z=16,84$ a $Z=17,84$; $Z=17,84$ a $Z=18,84$; $Z=18,84$ a $Z=20,44$; $Z=20,44$ a $Z=21,44$; $Z=21,44$ a $Z=22,44$; $Z=22,44$ a $Z=24,04$; $Z=24,04$ a $Z=25,04$; correspondientes a las gradas situadas entre la planta baja y primer piso, primer y segundo piso, segundo y tercer piso, tercer y cuarto piso, cuarto y quinto piso y quinto piso y sala de maquinas respectivamente; teniendo cuidado de dibujar los elementos Shell correspondientes a los descansos entre gradas en los niveles $Z=4,45$; $Z=6,04$; $Z=8,04$; $Z=9,64$; $Z=11,64$; $Z=13,24$; $Z=15,24$; $Z=16,84$; $Z=18,84$; $Z=20,44$; $Z=22,44$ y $Z=24,04$ como se dibujo en el punto 26 del paso 1. Para ubicarnos en el plano deseado utilizar las herramientas **Down One Gridline**  y **Up One Gridline**  ya mencionadas anteriormente.

30. De la misma manera procedemos a dibujar las losas correspondientes a la caja del ascensor teniendo cuidado de adicionar las grillas correspondientes a los ejes de esta (ver paso 1; punto 5). Las grillas a ser adicionadas en la dirección X son: 10,25; 11,10; 12,10; y 12,25; donde la ubicación en los planos YZ y XZ facilitará el dibujo de estas losas.
31. Con el botón **Pointer**  seleccionar las losas correspondientes a las cajas del ascensor.
32. En el menú **Edit** seleccionar **Mesh Shells...** en el cuadro de diálogo **Mesh Selected Shells** activar la opción **Mesh at intersection with grids.**; el discretizar las losas de esta manera asegura que las cajas del ascensor estén unidas al resto de la estructura.
33. Hacer clic en la ventana izquierda y presionar el botón **Refresh Window** .
34. Hacer clic sobre el botón **xy 2D View**  notar que el nombre de la ventana probablemente dice **XY Plane @ Z=0**. Si no es así hacer clic sobre el botón **Down One Gridline** Hasta ubicar el nivel $Z=-1,5$ (nivel de los apoyos).
35. Desactivar el modo Draw con el botón **Pointer** .
36. Seleccionar todos los nudos correspondientes a la base de las cajas que forman el ascensor haciendo clic sobre cada uno de ellos para seleccionarlos ó dibujar una ventana que los incluya a todos.
37. Hacer clic en el botón **Assign Joint Restraints**  o en el menú **Assign** escoger **Joint** y luego **Restraints...** en el submenú, esto mostrará el cuadro de diálogo **Joints Restraints**.
38. En este cuadro en la sección **Fast Restraints** hacer clic en el botón:  y hacer clic en **OK**.
39. Hacer clic en la ventana izquierda y presionar el botón **Refresh Window** .

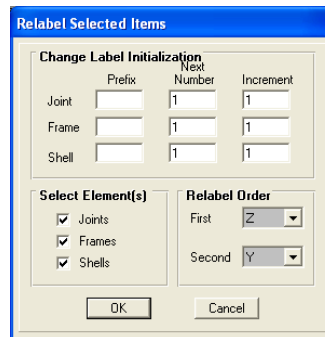
40. Esto completa la elaboración de la geometría del modelo desde el Scratch (dibujo de mallas).

Paso 2. Re-etiquetación de los nudos y elementos Frame y Shell.

1. Hacer clic en la ventana etiquetada **3D-View** para activarla.
2. Hacer clic en el botón **Set Elements**  en la barra de herramientas principal o seleccionar **Set Elements...** en el menú **View**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Set Elements**.
3. En este cuadro:
 - En la sección **Joints** seleccionar la casilla **Labels**.
 - En la sección **Frames** seleccionar la casilla **Labels**.
 - En la sección **Shells** seleccionar la casilla **Labels**.
 - Hacer clic en el botón **OK**.

Nota: Se está mostrando las etiquetas de los elementos para poder ver los cambios efectuados. No es necesario mostrar las etiquetas para lograr la re-etiquetación.

4. En el menú **Select** elegir **Select** y luego **All** en el submenú. Todos los elementos en el modelo (nudos, elementos **Frame** y elementos **Shell**) son seleccionados.
5. En el menú **Edit** elegir **Change Labels** para mostrar el cuadro de diálogo **Relabel Selected Items**.





6. En este cuadro:
 - Presionar la tecla **F1** para mostrar el contexto de **Ayuda en Línea** para este cuadro. Al finalizar la lectura de ayuda en línea salir de la ventana.
 - En la sección **Change Label Initialization** del cuadro de diálogo tipear **1** en los cuadros **Next Number** de **Joint**, **Frame** y **Shell**.
 - Aceptar el resto de los valores por defecto en el cuadro de diálogo.
 - Hacer clic en **OK** para aceptar los cambios.

Nota: No es típico enumerar nuevamente los elementos. Esta hecho para ilustrar el proceso y para asegurar que todos los usuarios del tutorial tengan el mismo sistema de numeración.

Nota: Las etiquetas de los nudos y elementos Frame y Shell pueden tener prefijos alfanuméricos. Estos prefijos pueden ser ingresados en los cuadros de edición **Prefix** en el cuadro de diálogo **Relabel Selected Items**.

Nota: No es necesario seleccionar todos los elementos para re-etiquetar. Se podría seleccionar solo unos pocos elementos de cualquier tipo, y re-etiquetar solo los elementos seleccionados.

7. Hacer clic en el botón **Set Elements** . Esto mostrará el cuadro de diálogo **Set Elements**.
 8. En este cuadro:
 - En la sección **Joints** quitar la selección en la casilla **Labels**.
 - En la sección **Frames** quitar la selección en la casilla **Labels**.
 - En la sección **Shells** quitar la selección en la casilla **Labels**.
 - Hacer clic en el botón **OK**.
 9. Hacer clic en el botón **Save Model**  en la barra de herramientas principal o seleccionar **Save** en el menú **File** para grabar el archivo.
- Esto completa el re-etiquetado de los nudos, elementos Frame y Shell.

Paso 3. Definición de las propiedades del material.

Las unidades de los valores de las propiedades se encontrarán en las unidades definidas en el paso 1 (Elaboración de la geometría del modelo)


1. En el menú **Define** elegir **Materials...**, esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Materials**.
2. Con la opción **CONC** encendida en el área **Materials** hacer clic en **Modify/Show Material**, esto mostrará el cuadro de diálogo **Material Property Data**.
3. Notar que las propiedades del concreto están en unidades Ton-m.
4. Ya que no se va hacer un análisis dinámico en la estructura, tipear **0** en el cuadro de edición **Mass per unit Volume**.
5. Tipear **2,4** en el cuadro edición **Weight per unit Volume** para considerar el peso propio del concreto.
6. Tipear **2E6** en el cuadro de edición **Modulus of Elasticity**. Dejar el resto de valores dados por defecto.
7. Hacer clic en el botón **OK** para aceptar los cambios y salir del cuadro de diálogo **Material Property Data**.

Paso 4. Definición de las secciones Frame y Shell.

Definición de secciones de concreto

1. En el menú **Define** elegir **Frame Sections..** esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Frame Sections**.
2. En este cuadro:
 - Hacer clic en la opción **Add I** esto desplegara hacia abajo una lista de secciones.
 - Hacer clic en **Add Rectangular**, esto mostrará el cuadro de diálogo **Rectangular Section**.

- Cambiar el nombre **FSEC2** por **VIGA**, seleccionar **CONC** en el cuadro de lista **Material**.
 - En el área **Dimensions**:
 - ✓ Tipear **0,35** en la caja **Depth** [t3] (peralte).
 - ✓ Tipear **0,2** en la caja **Width** [t2] (ancho).
 - Hacer clic en **OK** para aceptar la nueva sección.
 - Hacer clic en la opción **Add I**.
 - Hacer clic en **Add Rectangular**.
 - Cambiar el nombre de **FSEC2** por **COLUMNA**, hacer clic en **CONC** en el cuadro de lista **Material**.
 - En el área **Dimensions**:
 - ✓ Tipear **0,2** en la caja **Depth** [t3] (peralte).
 - ✓ Tipear **0,2** en la caja **Width** [t2] (ancho).
 - Hacer clic en **OK** para aceptar la nueva sección. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Frame Sections**.
 - Notar que una vez definidas las dos secciones los nombres **FSEC1**, **VIGA**, **COLUMNA** aparecen en el área **Frame Sections**, la sección **FSEC1** es una sección rectangular que aparece por defecto.
 - Si se requiere modificar alguna sección hacer clic en **Modify/Show Section** cuando el nombre de la sección a modificar esta encendida en la sección **Frame Sections**.
3. En el menú **Define** elegir **Shell Sections...** esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Shell Sections**.
4. En este cuadro:
- Hacer clic en la opción **Add New Section**.
 - Cambiar el nombre **SSEC2** por **LOSA**, seleccionar **CONC** en el cuadro de lista **Material**.
 - En el área **Thickness**:
 - ✓ Tipear **0,20** en la caja **Membrane**.
 - ✓ Tipear **0,20** en la caja **Bending**.
 - Verificar que solo la opción **Shell** este habilitada en el área **Type**.
 - Hacer clic en **OK** para aceptar la nueva sección. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Shell Sections**.
 - Notar que una vez definida la sección los nombres **SSEC1** y **LOSA** aparecen en el área **Shell Sections**, la sección **SSEC1** es una sección que aparece por defecto.
 - Si se requiere modificar alguna sección hacer clic en **Modify/Show Section** cuando el nombre de la sección a modificar esta encendida en la sección **Shell Sections**.
5. En el cuadro **Define Shell Sections**:



- Hacer clic en la opción **Add New Section**.
 - Cambiar el nombre **SSEC2** por **LOSAGRAD**, seleccionar **CONC** en el cuadro de lista **Material**.
 - En el área **Thickness**:
 - ✓ Típear **0,10** en la caja **Membrane**.
 - ✓ Típear **0,10** en la caja **Bending**.
 - Verificar que solo la opción **Shell** este habilitada en el área **Type**.
 - Hacer clic en **OK** para aceptar la nueva sección. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Shell Sections**.
 - Notar que una vez definida la sección los nombres **SSEC1**, **LOSA** y **LOSAGRAD** aparecen en el área **Shell Sections**.
 - Si se requiere modificar alguna sección hacer clic en **Modify/Show Section** cuando el nombre de la sección a modificar esta encendida en la sección **Shell Sections**.
6. En el cuadro **Define Shell Sections**:
- Hacer clic en la opción **Add New Section**.
 - Cambiar el nombre **SSEC2** por **LOSAASCE**, seleccionar **CONC** en el cuadro de lista **Material**.
 - En el área **Thickness**:
 - ✓ Típear **0,25** en la caja **Membrane**.
 - ✓ Típear **0,25** en la caja **Bending**.
 - Verificar que solo la opción **Shell** este habilitada en el área **Type**.
 - Hacer clic en **OK** para aceptar la nueva sección. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Shell Sections**.
 - Notar que una vez definida la sección los nombres **SSEC1**, **LOSA**, **LOSAGRAD** y **LOSAASCE** aparecen en el área **Shell Sections**.
7. Si se requiere modificar alguna sección hacer clic en **Modify/Show Section** cuando el nombre de la sección a modificar esta encendida en la sección **Shell Sections**
8. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
- Esto completa la definición de secciones **Frame** y **Shell**.

Paso 5. Asignación de grupos (Groups)

La definición de grupos puede ser una poderosa herramienta primero para seleccionar elementos y después para la asignación y la exhibición de resultados. En este paso se crearán cinco grupos que se muestran en la tabla siguiente.

Nombre de Grupo	Descripción
GVIGAS	Todas la vigas del edificio
GCOLS	Todas las columnas del edificio
GLOSAS	Las losas del edificio
GLOSAGRAD	Las gradas y descansos del edificio
GLOSAASCE	Las losas de la caja del ascensor del edificio


Nota: Por defecto el programa crea un grupo llamado **All** el cual incluye todos los elementos en el modelo (incluido nudos).




1. Para definir el grupo GVIGAS hacer clic en la ventana derecha para activarla. Hacer clic en el botón  **xz 2D View**.
2. Seleccionar todos los elementos Frame correspondientes a las vigas en los planos: Y=0; Y=-3,5; Y=-5,5; Y=-7; Y=-7,9 y Y=-9,3; haciendo clic sobre el boton  **Set Intersecting Line Select Mode** en la barra de herramientas lateral, para esto arrastrar el mouse presionando el botón izquierdo intersectando todas las vigas que se desee seleccionar en los planos anteriormente mencionados.
3. En el menú **Assign** escoger **Group Name...** esto mostrará el cuadro de diálogo **Assign Group**.

En este cuadro:

- En el cuadro de edición de la sección **Groups** tipear **GVIGAS**.
- Hacer clic en **Add New Group Name** para definir el grupo llamado **GVIGAS**.
- Hacer clic en **OK**.








Nota: Un error común es olvidar hacer clic sobre Add New Group Name antes de presionar el botón OK.


Nota: Para quitar la selección de elementos se debe hacer clic otra vez sobre estos, si se quiere quitar la selección de todos los elementos de una sola vez hacer clic en el botón  **Clear Selection** en la barra de herramientas lateral o escoger **Clear Selection** en el menú **Select**.

4. Para definir el grupo GCOLS. Seleccionar todos los elementos Frame correspondientes a las columnas en los planos: Y=0; Y=-3,5; Y=-5,5; Y=-7; Y=-7,9 y Y=-9,3; haciendo clic sobre el boton  **Set Intersecting Line Select Mode** en la barra de herramientas lateral, para esto arrastrar el mouse presionando el botón izquierdo intersectando todas las columnas que se desee seleccionar en los planos anteriormente mencionados. Para ubicarnos en el plano deseado utilizar las herramientas **Down One Gridline**  y **Up One Gridline**  ya mencionadas anteriormente.

5. En el menú **Assign** escoger **Group Name...** esto mostrará el cuadro de diálogo **Assign Group**.

En este cuadro:

- En el cuadro de edición de la sección **Groups** tipear **GCOLS**.
 - Hacer clic en **Add New Group Name** para definir el grupo llamado **GCOLS**.
 - Hacer clic en **OK**.
6. Para definir el grupo GLOSAS hacer clic en el botón  **xy 2D View**.
 7. Seleccionar todos los elementos Shell correspondientes a las losas en los niveles: $Z=3,44$; $Z=7,04$; $Z=10,64$; $Z=14,24$; $Z=17,84$; $Z=21,44$ y $Z=25,04$; correspondientes a la planta baja, primer, segundo, tercer, cuarto, quinto piso y sala de maquinas; haciendo clic sobre cada una de las losas, teniendo cuidado de que el boton **Pointer**  este activado.
 8. En el menú **Assign** escoger **Group Name...** esto mostrará el cuadro de diálogo **Assign Group**.
- En este cuadro:
- En el cuadro de edición de la sección **Groups** tipear **GLOSAS**.
 - Hacer clic en **Add New Group Name** para definir el grupo llamado **GLOSAS**.
9. Hacer clic en **OK**.
 10. Para definir el grupo GLOSAGRAD hacer clic en la ventana izquierda para activarla. Hacer clic en el botón  **3D View**.
 11. Seleccionar todos los elementos Shell correspondientes a las gradas y sus descansos; haciendo clic sobre la losa correspondiente a cada uno de ellos, teniendo cuidado de que el boton **Pointer**  este activado.
 12. En el menú **Assign** escoger **Group Name...** esto mostrará el cuadro de diálogo **Assign Group**.
- En este cuadro:
- En el cuadro de edición de la sección **Groups** tipear **GLOSAGRAD**.
 - Hacer clic en **Add New Group Name** para definir el grupo llamado **GLOSAGRAD**.
 - Hacer clic en **OK**.
13. Para definir el grupo GLOSAASCE hacer clic en la ventana derecha para activarla. Hacer clic en el botón  **xz 2D View**.
 14. Seleccionar todos los elementos Shell correspondientes a las losas en los niveles: $Y=-5,1$ y $Y=-7,0$. correspondientes a las paredes de la caja del ascensor; haciendo clic sobre cada una de las losas, teniendo cuidado de que el boton **Pointer**  este activado.
 15. Hacer clic en el botón  **yz 2D View**. Seleccionar todos los elementos Shell correspondientes a las losas en los niveles: $X=9,75$; $X=11,6$ y $X=13,45$.

correspondientes a las paredes de la caja del ascensor; haciendo clic sobre cada una de las losas, teniendo cuidado de que el botón **Pointer**  este activado.

16. En el menú **Assign** escoger **Group Name...** esto mostrará el cuadro de diálogo **Assign Group**.

En este cuadro:


- En el cuadro de edición de la sección **Groups** tipear **GLOSAASCE**.
- Hacer clic en **Add New Group Name** para definir el grupo llamado **GLOSAASCE**.

17. Hacer clic en **OK**.


18. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.


Esto completa la asignación de grupos.

Paso 6. Asignación de Secciones Frame y Shell






1. Hacer clic en la ventana izquierda con título **3D View** para activarla.
2. Hacer clic en el botón **Set Elements**  en la barra de herramientas principal o seleccionar **Set Elements...** en el menú **View**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Set Elements**.

En este cuadro:


- En el área **Frame** seleccionar la casilla **Labels**.
 - Hacer clic en **OK**.
3. En el menú **Select** seleccionar **Select** y después **Groups...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Select Groups**.
 4. En este cuadro hacer clic en el nombre **GVIGAS** y después hacer clic en el botón **OK**. Notar que todas las vigas de la estructura se seleccionan.
 5. En el menú **Assign** seleccionar **Frame** y luego **Sections...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Frame Sections**.
 6. En el área **Frame Section** hacer clic en **VIGA** y después hacer clic en **OK**.
 7. Notar que las vigas se etiqueta con el nombre **VIGA** y los otros elementos por defecto tienen la etiqueta **FSEC1**.
 8. Hacer clic en el botón **Show Undeformed Shape**  para limpiar la exhibición de las etiquetas de las secciones y poder ver las etiquetas de los elementos Frame otra vez. De esta manera se ha asignado la sección viga a las vigas del edificio. Proceder de la misma forma para asignar las secciones **COLUMN** a los elementos Frame respectivos.
 9. Para ver la forma de las secciones de los elementos en la pantalla hacer clic sobre el botón **Set Elements** y luego seleccionar la opción **Show Extrusion**. Esto puede ayudar para verificar si los elementos están orientados apropiadamente. Volver al modelo de líneas desactivando la opción **Show Extrusion** en el cuadro de diálogo **Set Elements**.

10. Hacer clic en el botón **Set Elements**  en la barra de herramientas principal o seleccionar **Set Elements...** en el menú **View**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Set Elements**.

En este cuadro:

- En el área **Frame** desactivar la casilla **Labels**.
 - En el área **Shell** seleccionar la casilla **Labels**.
 - Hacer clic en **OK**.
11. En el menú **Select** seleccionar **Select** y después **Groups...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Select Groups**.
12. En este cuadro hacer clic en el nombre **GLOSAS** y después hacer clic en el botón **OK**. Notar que todas las losas de la estructura se seleccionan, hacer clic en la ventana derecha para activarla. Hacer clic en el botón  **xy 2D View**, teniendo cuidado de que el botón **Pointer**  este activado seleccionar las losas correspondientes a los descansos de las gradas.
13. En el menú **Assign** seleccionar **Shell** y luego **Sections...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Shell Sections**.
14. En el área **Shell Section** hacer clic en **LOSA** y después hacer clic en **OK**.
15. Notar que las losas se etiquetan con el nombre **LOSA** y los otros elementos por defecto tienen la etiqueta **SSEC1**.
16. Hacer clic en el botón  **3D View**. Seleccionar las losas correspondientes a las gradas de los distintos niveles del edificio.
17. En el menú **Assign** seleccionar **Shell** y luego **Sections...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Shell Sections**.
18. En el área **Shell Section** hacer clic en **LOSAGRAD** y después hacer clic en **OK**.
19. Notar que estas losas se etiquetan con el nombre **LOSAGRAD**.
20. Hacer clic en el botón **Show Undeformed Shape**  para limpiar la exhibición de las etiquetas de las secciones y poder ver las etiquetas de los elementos Shell otra vez. De esta manera se ha asignado las secciones **LOSA** y **LOSAGRAD** a las losas del edificio.
21. En el menú **Select** seleccionar **Select** y después **Groups...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Select Groups**.
22. En este cuadro hacer clic en el nombre **GLOSAASCE** y después hacer clic en el botón **OK**. Notar que todas las losas correspondientes a la caja del ascensor de la estructura se seleccionan.
23. En el menú **Assign** seleccionar **Shell** y luego **Sections...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Shell Sections**.
24. En el área **Shell Section** hacer clic en **LOSAASCE** y después hacer clic en **OK**.
25. Notar que las losas se etiqueta con el nombre **LOSAASCE**.
26. Hacer clic en el botón **Show Undeformed Shape**  para limpiar la exhibición de las etiquetas de las secciones y poder ver las etiquetas de los elementos Shell


otra vez. De esta manera se ha asignado la sección **LOSAASCE** a las losas correspondientes a las paredes de la caja del ascensor del edificio.

27. Hacer clic en el botón **Set Elements**  en la barra de herramientas principal o seleccionar **Set Elements...** en el menú **View**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Set Elements**.

En este cuadro:

- En el área **Frame** desactivar la casilla **Labels**.
- En el área **Shell** desactivar la casilla **Labels**.

28. Hacer clic en **OK**.

29. Hacer clic en el botón **Save model**  para grabar el archivo.

Esto completa la asignación de secciones.

Paso 7. Definición de los Casos de Carga Estática.

1. En el menú **Define** seleccionar **Static Load Cases...** Esto mostrará el cuadro de diálogo **Define Static Load Case Names**.
2. En este cuadro:
 - Tipear **CM** en el cuadro **Load**.
 - Seleccionar **DEAD** en el cuadro de lista **Type**.
 - Tipear **1** en el cuadro de edición **Self Weight Multiplier**.
 - Hacer clic en el botón **Change Load**.

Nota: En este ejemplo el programa calcula automáticamente el peso propio de los elementos de la estructura. Si no se quiere incluir el peso propio se deberá tipear **0** en el cuadro **Self Weight Multiplier** o se debería tipear **0** en el cuadro **Weight per unit Volume** en el cuadro de diálogo **Define Material**.


- Tipear **CV** en el cuadro **Load**.
- Seleccionar **LIVE** en el cuadro de lista **Type**.
- Tipear **0** en el cuadro **Self Weight Multiplier**.
- Hacer clic en **Add New Load**.
- Hacer clic en el botón **OK**.

3. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.

Esto completa la definición de los Casos de Carga Estática.

Paso 8. Asignación de cargas estáticas Shell.

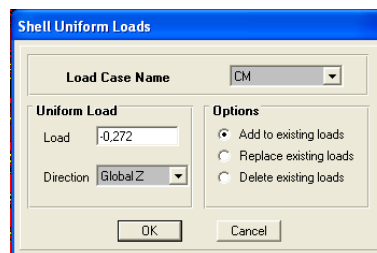
Se asignarán dos tipos de cargas, carga muerta uniformemente distribuida, carga viva uniformemente distribuida.

1. Hacer clic en la ventana izquierda para activarla y luego hacer clic en el botón  **3D View** en la barra de herramienta principal.
2. En el menú **Select** seleccionar **Select** y después **Groups...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Select Groups**.


3. En este cuadro hacer clic en el nombre **GLOSAS** y después hacer clic en el botón **OK**. Notar que todas las losas de este grupo de la estructura se seleccionan.
4. En el menú **Assign** seleccionar **Shell Static Loads...** y luego **Uniform...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Shell Uniform Loads**.

En este cuadro:


- Seleccionar **CM** en el cuadro **Load Case Name**.
- En el área **Uniform Load**, tipear $-0,272 \text{ Tn/m}^2$ que corresponde a la carga muerta, en el cuadro **Load** y seleccionar **Global Z** en el cuadro de lista **Direction**.
- En el área **Options** seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
- Hacer clic en el botón **OK** para aplicar la carga.



Nota: Como la carga se ingresa en la dirección Global Z el signo menos indica que la carga esta dirigida hacia abajo.

5. Hacer clic en la ventana izquierda para activarla y luego hacer clic en el botón  **3D View** en la barra de herramienta principal.
6. Seleccionar las 12 losas que representan las escaleras que se conectan con las losas de los diferentes niveles únicamente.
7. En el menú **Assign** seleccionar **Shell Static Loads...** y luego **Uniform...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Shell Uniform Loads**.

En este cuadro:


- Seleccionar **CM** en el cuadro **Load Case Name**.
 - En el área **Uniform Load**, tipear $-0,225 \text{ Tn/m}^2$ que corresponde al peso de los peldaños de la escalera, en el cuadro **Load** y seleccionar **Global Z** en el cuadro de lista **Direction**.
 - En el área **Options** seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Hacer clic en el botón **OK** para aplicar la carga.
8. Hacer clic en la ventana izquierda para activarla y luego hacer clic en el botón  **3D View** en la barra de herramienta principal.
 9. Seleccionar las 6 losas que representan las escaleras intermedias a las anteriormente seleccionadas de los diferentes niveles.
 10. En el menú **Assign** seleccionar **Shell Static Loads...** y luego **Uniform...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Shell Uniform Loads**.

En este cuadro:

- Seleccionar **CM** en el cuadro **Load Case Name**.
- En el área **Uniform Load**, tipear $-0,181 \text{ Tn/m}^2$ que corresponde al peso de los peldaños de la escalera, en el cuadro **Load** y seleccionar **Global Z** en el cuadro de lista **Direction**.

- En el área **Options** seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
- Hacer clic en el botón **OK** para aplicar la carga.

Paso 9. Asignación de sobrecargas de uso

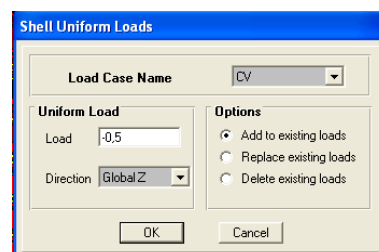
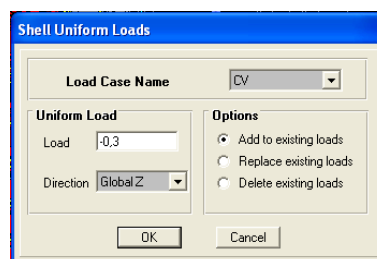
1. Hacer clic en la ventana izquierda para activarla y luego hacer clic en el botón  **3D View** en la barra de herramienta principal.
2. En el menú **Select** seleccionar **Select** y después **Groups...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Select Groups**.
3. En este cuadro hacer clic en el nombre **GLOSAGRAD** y después hacer clic en el botón **OK**. Notar que todas las losas de este grupo de la estructura se seleccionan.
4. En el menú **Assign** seleccionar **Shell Static Loads...** y luego **Uniform...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Shell Uniform Loads**.


En este cuadro:

- Seleccionar **CV** desde el cuadro **Load Case Name**.
 - En el área **Uniform Load**, tipear $-0,3 \text{ Tn/m}^2$ que corresponde a la carga viva de las escaleras este valor es adoptado según norma (ver Anexo B), en el cuadro **Load** y seleccionar **Global Z** en el cuadro de lista **Direction**.
 - En el área **Options** seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Hacer clic en el botón **OK** para aplicar la carga. Hacer clic en el botón **Restore Previous Selection** en la barra de herramienta lateral.
5. Seleccionar las losas que corresponden a la Biblioteca y Sala de reuniones, ubicadas en el nivel $Z=21,44$; correspondiente al quinto piso del edificio.
 6. En el menú **Assign** seleccionar **Shell Static Loads...** y luego **Uniform...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Shell Uniform Loads**.

En este cuadro:

- Seleccionar **CV** en el cuadro **Load Case Name**.
- En el área **Uniform Load**, tipear $-0,5 \text{ Tn/m}^2$ que corresponde a la sobrecarga (Anexo B), en el cuadro **Load** y seleccionar **Global Z** en el cuadro de lista **Direction**.
- En el área **Options** seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
- Hacer clic en el botón **OK** para aplicar la carga.




7. Hacer clic en la ventana izquierda para activarla y luego hacer clic en el botón  **3D View** en la barra de herramienta principal.
8. Seleccionar las losas correspondientes a: consultorios, laboratorios, dormitorios, quirófanos, baños y salas de espera de todos los niveles del edificio.
9. En el menú **Assign** seleccionar **Shell Static Loads...** y luego **Uniform...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Shell Uniform Loads**.

En este cuadro:

- Seleccionar **CV** en el cuadro **Load Case Name**.
 - En el área **Uniform Load**, tipear $-0,2 \text{ Tn/m}^2$ que corresponde a la sobrecarga de los diferentes ambientes, en el cuadro **Load** y seleccionar **Global Z** en el cuadro de lista **Direction**.
 - En el área **Options** seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
 - Hacer clic en el botón **OK** para aplicar la carga.
10. Seleccionar las losas correspondientes a la sala de máquinas del edificio ubicada en el nivel $Z=25,04$.
 11. En el menú **Assign** seleccionar **Shell Static Loads...** y luego **Uniform...** en el submenú. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Shell Uniform Loads**.

En este cuadro:

- Seleccionar **CV** en el cuadro **Load Case Name**.
 - En el área **Uniform Load**, tipear $-0,5 \text{ Tn/m}^2$ que corresponde a la sobrecarga asumida para la sala de máquinas, en el cuadro **Load** y seleccionar **Global Z** en el cuadro de lista **Direction**.
 - En el área **Options** seleccionar la opción **Add to Existing Loads**.
12. Hacer clic en el botón **OK** para aplicar la carga.
 13. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo. Esto asigna las sobrecargas a los elementos Shell.

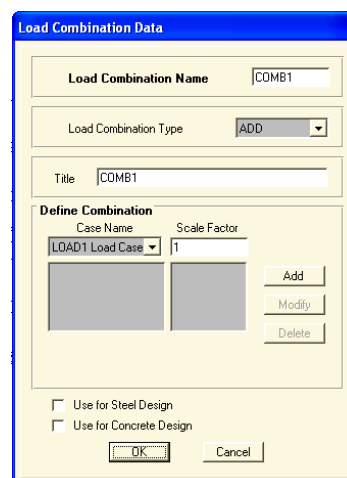
Paso 10. Definición de Combinaciones.


Para este ejemplo se decidió utilizar las siguientes combinaciones:

1,4 CM

1,4 CM + 1,7 CV

1. Desde el menú **Define** seleccionar **Load Combinations....** Esto mostrará el cuadro de diálogo **Load Combination Data**.
2. En este cuadro:
 - En la sección **Click to** seleccionar **Add New Combo**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Load Combination Data**.

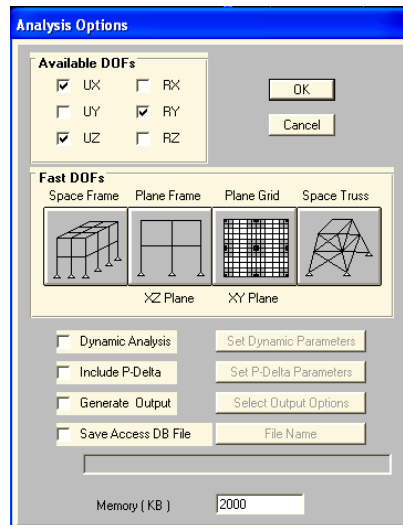



- En este cuadro:
 - ✓ Tipear **COMB1** en el cuadro de edición **Load Combination Name**.
 - ✓ Seleccionar **ADD** en el cuadro **Load Combination Type**.
 - ✓ En la sección **Define Combinations**:
 - En el cuadro **Case Name** elegir **CM Load Case**.
 - Tipear **1,4** en el cuadro de edición **Scale Factor**.
 - Hacer clic en el botón **Add**.
 - Hacer clic en **OK**.
 - Seleccionar **Add New Combo**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Load Combination Data**.
 - En este cuadro:
 - ✓ En la sección **Define Combinations**:
 - Seleccionar **CM Load Case** y tipear **1,4** en el cuadro **Scale Factor**.
 - Hacer clic en el botón **Modify**.
 - Seleccionar **CV Load Case** y tipear **1,7** en el cuadro **Scale Factor**.
 - Hacer clic en el botón **Add**.
 - Hacer clic en **OK**.
 - Hacer clic en **OK** para salir del cuadro **Load Combination Data**.
3. Hacer clic en el botón **Save Model**  para grabar el archivo.
- Esto completa la definición de combinaciones.

Paso 11. Análisis estático.

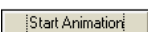

En este paso se verán las opciones para el análisis estático y como correr el programa.

1. Desde el menú **Analyze** seleccionar **Set Options...** Esto mostrará el cuadro de diálogo **Analysis Options**.






2. En este cuadro:
 - Hacer clic en el botón **Space Frame** en la sección **Fast DOFs**.
 3. Hacer clic en el botón **Run Analysis**  o seleccionar **Run** en el menú **Analyze**.
 Nota: La opción **Run Minimized** es útil cuando se va a correr un modelo que puede tomar mucho tiempo para analizar. Esta opción proveerá un botón **Cancel** que permitirá que se cancele la corrida si es necesario.
 4. Al momento de correr se abrirá una ventana en la cual varias fases del análisis serán progresivamente reportadas. Una vez completado el análisis se puede usar la barra de movimiento vertical ubicada a la derecha de la ventana para revisar los mensajes editados y poder chequear cualquier advertencia o error.
 Nota: Todos los mensajes editados al momento de correr el análisis se pueden encontrar en el archivo de texto *.LOG donde * es el nombre del archivo SAP2000 del usuario.
 5. Hacer clic en **OK** de la ventana de análisis. Notar que la ventana **3D View** ahora muestra el modelo deformado.
- Esto completa el análisis estático.

Paso 12. Revisión de la deformada y de los desplazamientos de los nudos.

1. Notar que la estructura deformada aparece en la ventana izquierda con el primer caso de carga **CM**. Hacer clic en la ventana para activarla.
2. Hacer clic en el botón **Start Animation**  localizado en la barra de estado en la parte inferior derecha de la pantalla.
3. Hacer clic en el botón **Right Arrow**  localizado en la barra de estado, para ver la deformada del otro caso de carga **CV**.

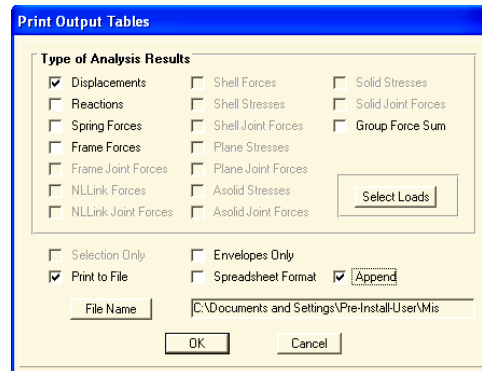
Revisión de la deformada

4. Hacer clic en el botón **Display Static Deformed Shape**  o seleccionar **Show Deformed Shape...** en el menú **Display**. Con esto aparece el cuadro de diálogo **Deformed Shape**.
5. En este cuadro:
 - Seleccionar el caso de carga **COMB1** en el cuadro de lista **Load**.
 - En la sección **Scaling** seleccionar la opción **Auto**.
 - Seleccionar las casillas **Wire Shadow** y **Cubit Curve** en la sección **Options**.
 - Hacer clic en **OK** para mostrar la estructura deformada.
6. Hacer clic en el botón **Right Arrow**  para ver la otra combinación **COMB2**.
7. Hacer clic sobre el botón **Show Undeformed Shape**  o seleccionar **Show Undeformed Shape...** en el menú **Display**.

Impresión de los desplazamientos en un archivo de texto.

Se puede también mostrar los desplazamientos de los nudos en un archivo tipo texto desde la interfase grafica. Con este método se pueden seleccionar los nudos para los cuales la salida será impresa.

8. Seleccionar cualquier nudo de la estructura.
9. Seleccionar **Print Output Tables...** en el menú **File**. Esto mostrará el cuadro de diálogo **Print Output Tables**.




10. En este cuadro :
 - Seleccionar la casilla **Displacements** y quitar todas las otras selecciones en las casillas de la sección **Type of Analysis Results**.
 - Hacer clic en el botón **Select Loads** para seleccionar la combinación requerida.
 - Seleccionar las casillas **Selection Only** y **Print to File** y quitar la selección de las demás casillas.


Nota: Si no se selecciona **Print to File** la salida será llevada automáticamente a la impresora. Antes se deberá seleccionar **Print Setup** en el menú **File** para configurar las propiedades de la impresora.

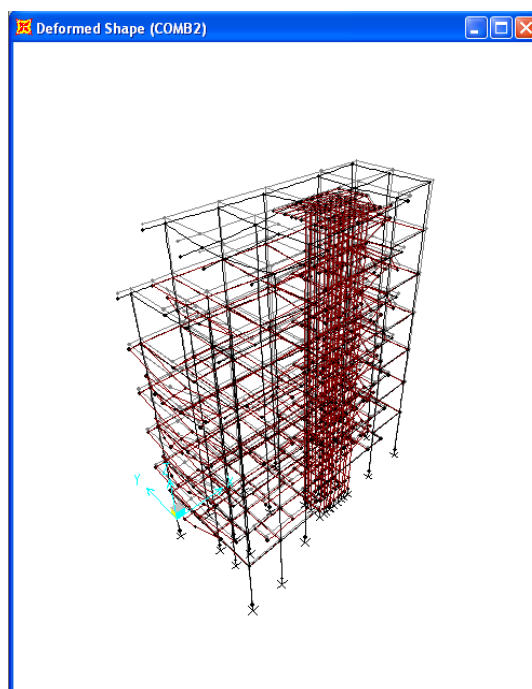
- Hacer clic sobre **File Name** para darle la dirección donde guardar el archivo de texto, o solo hacer clic en **OK** para aceptar la dirección dada por defecto.
11. Buscar el archivo o abrirlo con un editor o procesador de texto para revisar los resultados.

Esto completa la revisión de la deformada y los emplazamientos de los nudos.

Paso 13. Revisión de las fuerzas en los elementos Frame.

1. Después que el análisis ha sido corrido hacer clic sobre la ventana izquierda para activarla.
2. Hacer clic en el botón **Member Force Diagram for Frames**  ó seleccionar **Show Element Forces/Stresses** en el menú **Display** y después seleccionar **Frames...** en el submenú, esto mostrará el cuadro de diálogo **Member Force Diagram for Frames**.
3. En este cuadro:
 - Suponiendo que en el caso que la combinación requerida sea la COMB2 entonces seleccionar **COMB2 Combo** en el cuadro de lista **Load**.
 - Seleccionar la opción **Moment 3-3** en la sección **Component**.
 - Seleccionar la opción **Auto** En la sección **Scaling**.
 - Seleccionar la casilla **Fill Diagram**.

- Hacer clic en **OK**. esto mostrará los diagramas de momentos con las formas rellenas.
4. Hacer clic derecho sobre cualquier elemento para mostrar un cuadro de diálogo que permita ver el valor del momento en cualquier punto a lo largo del elemento.
 5. Hacer clic en el botón **Member Force Diagram for Frames**  esto mostrará el cuadro de diálogo **Member Force Diagram for Frames**.
 6. En este cuadro:
 - Quitar la selección de la casilla **Fill Diagram**.
 - Seleccionar la casilla **Show Values**.
 - Hacer clic en **OK** para exhibir los diagramas de momentos con los valores críticos mostrados.
 7. Hacer clic derecho sobre cualquier elemento para mostrar un cuadro de diálogo que permita ver el valor del momento en cualquier punto a lo largo del elemento.



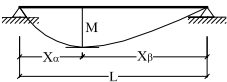
BIBLIOGRAFIA

- [1] “Apuntes de la materia Estructuras Hiperestáticas” Ing. Franz Vargas Loayza
- [2] Campanari Flavio Antonio “Teoria das Estruturas”
Ed. Guanabara. dois S.A. Rio de Janeiro 1985
- [3] Castillo Martínez Heberto “Análisis y Diseño Estructural”
Ed. Representaciones y Servicios de Ingeniería S. A. 1ª Edición México 1973
- [4] Castillo Martinez Heberto “Análisis y Diseño de Estructuras”
Tomo 2: Estructuras Reticulares
Ed. Alfaomega Mexico 2003
- [5] Coates R. C. – Kouti M. G. – Kong F. K. “Structural Analysis”
- [6] Cristiano P. y Au T “Fundamentals of Structural Analysis” Prentice Hall 1993
- [7] Hibbeter Russell C. “Análisis Estructural”
3ª Edición México 1997
- [8] Hsieh Yuan-yu “Elementary Theory of Structures”
Ed. Prentice Hall 4ª Edición 1994
- [9] Jenkins W. M. “Análisis y mecánica de las estructuras”
México 1985
- [10] Kardestuncer Hayrettin “Introducción al análisis estructural con matrices”
Ed. McGraw-Hill Colombia 1975
- [11] Kinney J. S. “Análisis de Estructuras Indeterminadas”
Ed CECSA
- [12] Laible Jeffrey P “Análisis Estructural”
Ed. McGraw-Hill México 1993
- [13] Luthe García Rodolfo “Análisis estructural”
Ed. Representaciones y Servicios de Ingeniería S. A. 2ª Reimpresión México 1976
- [14] Martí Montrull Pascual “Análisis de Estructuras”
Métodos clásicos y matriciales.
Ed. Cartagena: Horacio Escarabajal., Colombia 2003
- [15] Mirolubov I., Engalichev S., Serguievski N.
Almametov F., Kuritsin N.
Smirnov K.- Vasiliev, Yashina L. “Problemas de resistencia de materiales”
Ed. MIR, MOSCU 3ª Edición URSS 1978
- [16] McCormac J. y Elling R. E. “Structural Analysis”
Ed. Haper Collins 1988

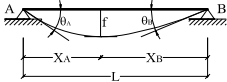
- [17] McCormac Jack y Nelson James “Análisis de Estructuras” Métodos Clásico y Matricial.
Ed. Alfaomega 2ª Edición Mexico 2003.
- [18] Norris y Wilbur “Análisis elemental de estructuras”
Ed. Shaum 2ª Edición México 1973
- [19] Prenzlów C. “Cálculo de estructuras por el método de Cross”
Ed. Gustavo Hill 3ª Edición Barcelona
- [20] Smith Seely “Resistencia de materiales”
Ed. Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana 2ª Edición México 1963
- [21] Tartaglione L. C. “Estructural Analysis”
Ed. McGraw-Hill 1991
- [22] Trujillo Acevedo Augusto. “Análisis estructural. Parte II. Estructuras Estáticamente indeterminadas”. Ed. Universidad Nacional (Facultad de Minas) Medellín 1ª Edición Medellín Colombia 1991
- [23] Tuma Jan J. “Análisis estructural Teoría y 200 problemas resueltos”
Ed. McGraw-Hill 1ª Edición México 1973
- [24] Valencia Jorge “Modalidades y Aplicaciones del Método de Cross al Cálculo de Estructuras”
- [25] Wang Chu-kia. “Estructuras Estáticamente Indeterminadas” McGraw-Hill
- [26] DEPARTAMENTO DE TECNOLOGÍA DA CONSTRUÇÃO:
<http://www.udc.es/dep/dtcon/estructuras/ETSAC/Descarga/Descarga.htm>
- [27] ARMADURAS PLANAS:
<http://www.quimika.com/materias/fisicas/materiales/analisis.htm>
- [28] ARMADURAS RETICULARES
<http://www1.ceit.es/esiiss/Asignaturas/Estructuras1/programas.htm>
- [29] ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS
<http://juangilurbaneja.iespana.es/edificacion.htm>
- [30] ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS
<http://www1.ceit.es/esiiss/Asignaturas/Estructuras1/Apuntes.htm>

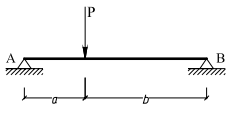
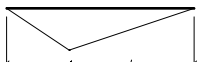

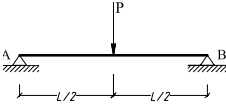
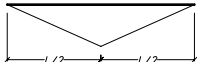
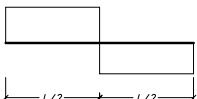
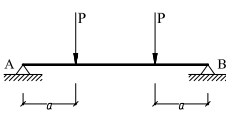
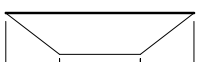
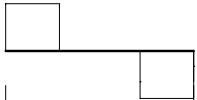
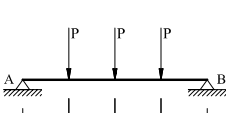
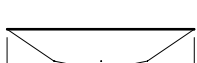
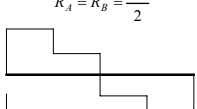
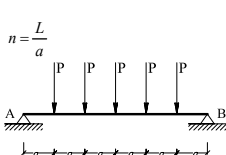
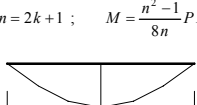
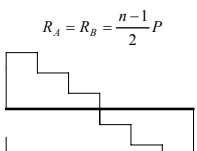
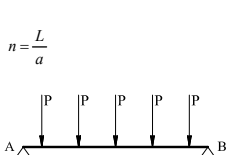
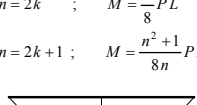
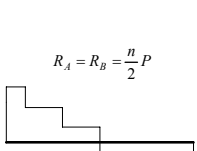
TABLA A.1

VIGA APOYADA
DISTINTAS HIPOTESIS DE CARGA



P, q y segmentos en valor absoluto



SOLICITACION	DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES MOMENTO MAXIMO	DIAGRAMA DE ESFUERZOS CORTANTES REACCIONES EN APOYOS	FLECHAS MAXIMAS ÁNGULOS DE GIRO EXTREMOS
	$M = \frac{Pab}{L}$ 	$R_A = \frac{Pb}{L}$ $R_B = \frac{Pa}{L}$ 	$a < b ; X_B = \left[\frac{b(L+a)}{3} \right]^{\frac{1}{2}} ; f = \frac{Pa}{3LEI} \left[\frac{b(L+a)}{3} \right]^{\frac{3}{2}}$ $a > b ; X_A = \left[\frac{a(L+b)}{3} \right]^{\frac{1}{2}} ; f = \frac{Pb}{3LEI} \left[\frac{a(L+b)}{3} \right]^{\frac{3}{2}}$ $\theta_A = \frac{Pab(L+b)}{6LEI} ; \theta_B = \frac{Pab(L+a)}{6LEI}$
	$M = \frac{PL}{4}$ 	$R_A = R_B = \frac{P}{2}$ 	$X_A = X_B = \frac{L}{2} ; f = \frac{PL^3}{48EI}$ $\theta_A = \theta_B = \frac{PL^2}{16EI}$
	$M = Pa$ 	$R_A = R_B = P$ 	$X_A = X_B = \frac{L}{2} ; f = \frac{Pa}{24EI} (3L^2 - 4a^2)$ $\theta_A = \theta_B = \frac{Pa(L-a)}{2EI}$
	$M = \frac{PL}{2}$ 	$R_A = R_B = \frac{3P}{2}$ 	$X_A = X_B = \frac{L}{2} ; f = \frac{19}{384} \cdot \frac{P}{EI} L^3$ $\theta_A = \theta_B = \frac{5PL^2}{32EI}$
$n = \frac{L}{a}$ 	$n = 2k ; M = \frac{n}{8} PL$ $n = 2k + 1 ; M = \frac{n^2 - 1}{8n} PL$ 	$R_A = R_B = \frac{n-1}{2} P$ 	$X_A = X_B = \frac{L}{2} ; f = \frac{5n^2 - 4}{384n} \cdot \frac{PL^3}{EI}$ $n = 2k + 1 ; f = \frac{(5n^2 + 1)(n^2 - 1)}{384n^3} \cdot \frac{PL^3}{EI}$ $\theta_A = \theta_B = \frac{n^2 - 1}{24n} \cdot \frac{PL^2}{EI}$
$n = \frac{L}{a}$ 	$n = 2k ; M = \frac{n}{8} PL$ $n = 2k + 1 ; M = \frac{n^2 + 1}{8n} PL$ 	$R_A = R_B = \frac{n}{2} P$ 	$X_A = X_B = \frac{L}{2} ; f = \frac{-n^4 + 6n^3 + 2n^2 + 4n - 4}{384n^2} \cdot \frac{PL^3}{EI}$ $n = 2k + 1 ; f = \frac{5n^4 + 2n^2 + 1}{384n^3} \cdot \frac{PL^3}{EI}$ $\theta_A = \theta_B = \frac{2n^2 + 1}{48n} \cdot \frac{PL^2}{EI}$

FUENTE: Jiménez Montoya – García Meseguer – Morán Cabre

TABLA A.2

VIGA APOYADA
DISTINTAS HIPOTESIS DE CARGA

P, q y segmentos en valor absoluto

SOLICITACION	DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES MOMENTO MAXIMO	DIAGRAMA DE ESFUERZOS CORTANTES REACCIONES EN APOYOS	FLECHAS MAXIMAS ÁNGULOS DE GIRO EXTREMOS
	$M = \frac{1}{8} q L^2$ 	$R_A = R_B = \frac{q L}{2}$ 	$X_A = X_B = \frac{L}{2} \quad ; \quad f = \frac{5}{384} \frac{q L^4}{EI}$ $\theta_A = \theta_B = \frac{q L^3}{24 EI}$
	$X_a = \frac{a(L+b)}{2L} ; M = \frac{q a^2 (L+b)^2}{8 L^2}$ 	$R_A = \frac{q a (L+b)}{2 L}$ $R_B = \frac{q a^2}{2 L}$ 	$a < 0,4531 L ; X_B = \left[\frac{2 L^2 - a^2}{6} \right]^{1/2} ; f = \frac{q a^2}{6} \left[\frac{2 L^2 - a^2}{6} \right]^{3/2}$ $a > 0,4531 L \quad ; \quad X_B = \frac{58,575 L - 8,575 a}{100} ;$ $f = \frac{q L^4}{10^3 EI} \left(13,5734 \frac{a}{L} - 0,5526 \right)$ $\theta_A = \frac{q a^2 L}{24 EI} \left(2 - \frac{a}{L} \right)^2 \quad ; \quad \theta_B = \frac{q a^2 L}{24 EI} \left(2 - \frac{a^2}{L^2} \right)$
	$M = \frac{q c (L-c)}{2}$ 	$R_A = R_B = q c$ 	$X_A = X_B = \frac{L}{2} \quad ; \quad f = \frac{q c L^3}{24 EI} \left[1 - \frac{c^2}{L^2} \left(2 - \frac{c}{L} \right) \right]$ $\theta_A = \theta_B = \frac{q c L^2}{24 EI} \left(3 - 4 \frac{c^2}{L^2} \right)$
	$X_a = a + c - \frac{2 a c}{L} \quad ;$ $M = 2 q a c \left(\frac{b-c}{L} + \frac{a c}{L^2} \right)$ 	$R_A = \frac{2 q c (L-a)}{L}$ $R_B = \frac{2 q c (L-b)}{L}$ 	$\theta_A = \frac{q b c L}{3 EI} \left(1 - \frac{b^2}{L^2} - \frac{c^2}{L^2} \right) ; \theta_B = \frac{q a c L}{3 EI} \left(1 - \frac{a^2}{L^2} - \frac{c^2}{L^2} \right)$
	$M = \frac{q L^2}{12}$ 	$R_A = R_B = \frac{q L}{4}$ 	$X_A = X_B = \frac{L}{2} \quad ; \quad f = \frac{q L^4}{120 EI}$ $\theta_A = \theta_B = \frac{5 q L^3}{196 EI}$

FUENTE: Jiménez Montoya – García Meseguer – Morán Cabre

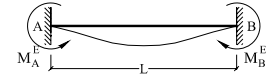
TABLA A.3.
VIGA APOYADA
DISTINTAS HIPOTESIS DE CARGA

P, q y segmentos en valor absoluto

SOLICITACION	DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES MOMENTO MAXIMO	DIAGRAMA DE ESFUERZOS CORTANTES REACCIONES EN APOYOS	FLECHAS MAXIMAS ÁNGULOS DE GIRO EXTREMOS
	$X_a = a \left(\frac{3L - 2a}{3L} \right)^{1/2} ;$ $M = \frac{qa^2}{3} \left(\frac{3L - 2a}{3L} \right)^{3/2}$	$R_A = \frac{qa(3L - 2a)}{6L}$ $R_B = \frac{qa^2}{3L}$	$a < 0,4607L; X_B = \left[\frac{5L^2 - 3a^2}{15} \right]^{1/2}; f = \frac{qa^2}{9LEI} \left[\frac{5L^2 - 3a^2}{15} \right]^{3/2}$ $a > 0,4607L; X_a = \left(1,592 \frac{a}{L} - 1,0737 \right) L ;$ $f = \frac{qL^4}{10^3 EI} \left(4,117 + 2,405 \frac{a}{L} \right)$ $\theta_A = \frac{(12a^2 - 45aL + 40L^2)qa^2}{360EI L} ; \theta_B = \frac{(5L^2 - 3a^2)qa^2}{90EI L}$
	$X_b = b \left(1 - \sqrt{\frac{b}{3L}} \right) ;$ $M = \frac{qb^2}{6} \left[\frac{a}{L} + 2 \left(\frac{b}{3L} \right)^{3/2} \right]$	$R_A = \frac{qb^2}{6L}$ $R_B = \frac{qb(3L - b)}{6L}$	$b < 0,4396 \cdot L ; X_A = \left[\frac{10L^2 - 3b^2}{30} \right]^{1/2} ;$ $f = \frac{qb^2}{18EI L} \left[\frac{10L^2 - 3b^2}{30} \right]^{3/2}$ $b > 0,4396 \cdot L ; X_A = \left(1,2527 - 0,7334 \frac{b}{L} \right) L ;$ $f = \frac{qL^4}{10^3 EI} \left(8,267 \frac{b}{L} - 1,745 \right)$ $\theta_A = \frac{(10L^2 - 3b^2)qb^2}{360EI L} ; \theta_B = \frac{(20L^2 - 15bL + 3b^2)qb^2}{360EI L}$
<p>Carga parabólica</p>	$M = \frac{5}{48} qL^2$	$R_A = R_B = \frac{qL}{3}$	$X_A = X_B = \frac{L}{2} ; f = \frac{61qL^4}{5,760EI}$ $\theta_A = \theta_B = \frac{qL^3}{30EI}$
	$a < b ; M = \frac{mb}{L}$ $a > b ; M = \frac{ma}{L}$	$R_A = -R_B = \frac{m}{L}$	$a < b; X_A = L - \left(\frac{L^2 - 3a^2}{3} \right)^{1/2}; f = \frac{m}{3EI L} \left(\frac{L^2 - 3a^2}{3} \right)^{3/2}$ $b < a; X_B = L - \left(\frac{L^2 - 3b^2}{3} \right)^{1/2}; f = \frac{m}{3EI L} \left(\frac{L^2 - 3b^2}{3} \right)^{3/2}$ $\theta_A = \frac{m(L^2 - 3b^2)}{6EI L} ; \theta_B = \frac{m(L^2 - 3a^2)}{6EI L}$

FUENTE: Jiménez Montoya – García Meseguer – Morán Cabre

TABLA A.4
VIGA EMPOTRADA
DISTINTAS HIPOTESIS DE CARGA

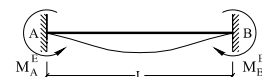


P, q y segmentos en valor absoluto

SOLICITACION	MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO	REACCIONES EN LOS APOYOS	DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES
	$M_A^E = \frac{Pab^2}{L^2}$ $M_B^E = -\frac{Pa^2b}{L^2}$	$R_A = P \frac{b^2}{L^2} \left(3 - 2 \frac{b}{L} \right)$ $R_B = P \frac{a^2}{L^2} \left(3 - 2 \frac{a}{L} \right)$	
	$M_A^E = \frac{PL}{8}$ $M_B^E = -\frac{PL}{8}$	$R_A = \frac{P}{2}$ $R_B = \frac{P}{2}$	
	$M_A^E = \frac{Pa(L-a)}{L}$ $M_B^E = -\frac{Pa(L-a)}{L}$	$R_A = P$ $R_B = P$	
	$M_A^E = \frac{5PL}{16}$ $M_B^E = -\frac{5PL}{16}$	$R_A = \frac{3P}{2}$ $R_B = \frac{3P}{2}$	
n° de fuerzas = n-1 	$M_A^E = \frac{PL(n^2-1)}{12n}$ $M_B^E = -\frac{PL(n^2-1)}{12n}$	$R_A = \frac{n-1}{2}P$ $R_B = \frac{n-1}{2}P$	
n° de fuerzas = n-1 	$M_A^E = \frac{PL(2n^2+1)}{24n}$ $M_B^E = -\frac{PL(2n^2+1)}{24n}$	$R_A = \frac{n}{2}P$ $R_B = \frac{n}{2}P$	
	$M_A^E = \frac{qL^2}{12}$ $M_B^E = -\frac{qL^2}{12}$	$R_A = \frac{qL}{2}$ $R_B = \frac{qL}{2}$	
	$M_A^E = \frac{qa^2}{12} \left[6 - \frac{a}{L} \left(8 - 3 \frac{a}{L} \right) \right]$ $M_B^E = -\frac{qa^3}{12L} \left(4 - 3 \frac{a}{L} \right)$	$R_A = \frac{qa}{2} \left[2 - \frac{a^2}{L^2} \left(2 - \frac{a}{L} \right) \right]$ $R_B = \frac{qa^3}{2L^2} \left(2 - \frac{a}{L} \right)$	

FUENTE: Jiménez Montoya – García Meseguer – Morán Cabre

TABLA A.5
VIGA EMPOTRADA
DISTINTAS HIPOTESIS DE CARGA

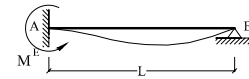


P, q y segmentos en valor absoluto

SOLICITACION	MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO	REACCIONES EN LOS APOYOS	DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES
	$M_A^E = \frac{qc}{12L} (3L^2 - 4c^2)$ $M_B^E = -\frac{qc}{12L} (3L^2 - 4c^2)$	$R_A = qc$ $R_B = qc$	
	$M_A^E = 2qc \left(a \frac{b^2}{L^2} - \frac{c^2}{L^2} \cdot \frac{3b-L}{3} \right)$ $M_B^E = -2qc \left(b \frac{a^2}{L^2} - \frac{c^2}{L^2} \cdot \frac{3a-L}{3} \right)$	$R_A = 2qc \left[1 - 3 \frac{a^2}{L^2} - \frac{c^2}{L^2} + 2 \frac{a}{L} \left(\frac{a^2}{L^2} + \frac{c^2}{L^2} \right) \right]$ $R_B = 2qc \left[3 \frac{a^2}{L^2} + \frac{c^2}{L^2} - 2 \frac{a}{L} \left(\frac{a^2}{L^2} + \frac{c^2}{L^2} \right) \right]$	
	$M_A^E = \frac{5}{96} qL^2$ $M_B^E = -\frac{5}{96} qL^2$	$R_A = \frac{qL}{4}$ $R_B = \frac{qL}{4}$	
	$M_A^E = \frac{qL^2}{30}$ $M_B^E = -\frac{qL^2}{20}$	$R_A = \frac{3}{20} qL$ $R_B = \frac{7}{20} qL$	
	$M_A^E = \frac{qa^2}{30} \left[10 - \frac{a}{L} \left(15 - 6 \frac{a}{L} \right) \right]$ $M_B^E = -\frac{qa^3}{20L^2} \left(5 - 4 \frac{a}{L} \right)$	$R_A = \frac{qa}{20} \left[10 - \frac{a^2}{L^2} \left(15 - 8 \frac{a}{L} \right) \right]$ $R_B = \frac{qa^3}{20L^2} \left(15 - 8 \frac{a}{L} \right)$	
	$M_A^E = \frac{qb^3}{60L} \left(5 - 3 \frac{b}{L} \right)$ $M_B^E = -\frac{qb^2}{60} \left(3 \frac{b^2}{L^2} + 10 \frac{a}{L} \right)$	$R_A = \frac{qb^3}{20L^2} \left(5 - 2 \frac{b}{L} \right)$ $R_B = \frac{qb}{20} \left[10 - \frac{b^2}{L^2} \left(5 - 2 \frac{b}{L} \right) \right]$	
Carga parabólica 	$M_A^E = \frac{qL^2}{15}$ $M_B^E = -\frac{qL^2}{15}$	$R_A = \frac{qL}{3}$ $R_B = \frac{qL}{3}$	
	$M_A^E = m \frac{b}{L} \left(2 - 3 \frac{b}{L} \right)$ $M_B^E = m \frac{a}{L} \left(2 - 3 \frac{a}{L} \right)$	$R_A = m \frac{6ab}{L^3}$ $R_B = -m \frac{6ab}{L^3}$	

FUENTE: Jiménez Montoya – García Meseguer – Morán Cabre

TABLA A.6

 VIGA APOYADA EMPOTRADA
 DISTINTAS HIPOTESIS DE CARGA


P, q y segmentos en valor absoluto

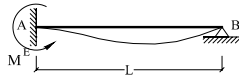
SOLICITACION	MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO	REACCIONES EN LOS APOYOS	DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES
	$M^E = \frac{Pab(L+b)}{2L^2}$	$R_A = \frac{Pb}{2L} \left(3 - \frac{b^2}{L^2} \right)$ $R_B = \frac{Pa^2}{2L^2} \left(3 - \frac{a}{L} \right)$	
	$M^E = \frac{3}{16} PL$	$R_A = \frac{11}{16} P$ $R_B = \frac{5}{16} P$	
	$M^E = \frac{3Pa(L-a)}{2L}$	$R_A = \frac{P}{2} \left[2 + 3 \frac{a}{L} \left(1 - \frac{a}{L} \right) \right]$ $R_B = \frac{P}{2} \left[2 - 3 \frac{a}{L} \left(1 - \frac{a}{L} \right) \right]$	
	$M^E = \frac{15}{32} PL$	$R_A = \frac{63}{32} P$ $R_B = \frac{33}{32} P$	
n° de fuerzas = n-1 	$M^E = \frac{n^2-1}{8n} PL$	$R_A = \frac{(n-1)(5n+1)}{8n} P$ $R_B = \frac{(n-1)(3n-1)}{8n} P$	
n° de fuerzas = n-1 	$M^E = \frac{2n^2+1}{16n} PL$	$R_A = \frac{10n^2+1}{16n} P$ $R_B = \frac{6n^2-1}{16n} P$	
	$M^E = \frac{1}{8} qL^2$	$R_A = \frac{5}{8} qL$ $R_B = \frac{3}{8} qL$	
	$M^E = \frac{qa^2(L+b)^2}{8L^2}$	$R_A = \frac{qa}{8} \left(5 - \frac{b^2}{L^2} \right) \left(1 + \frac{b}{L} \right)$ $R_B = \frac{qa^3}{8L^2} \left(4 - \frac{a}{L} \right)$	

FUENTE: Jiménez Montoya – García Meseguer – Morán Cabre

TABLA A.7

VIGA APOYADA EMPOTRADA
DISTINTAS HIPOTESIS DE CARGA

P, q y segmentos en valor absoluto



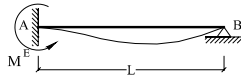
SOLICITACION	MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO	REACCIONES EN LOS APOYOS	DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES
	$M^E = \frac{qb^2}{8L^2} (2L^2 - b^2)$	$R_A = \frac{qb^2}{8L} \left(6 - \frac{b^2}{L^2} \right)$ $R_B = \frac{qb}{8} \left[8 - \frac{b}{L} \left(6 - \frac{b^2}{L^2} \right) \right]$	
	$M^E = \frac{qc}{8L} (3L^2 - 4c^2)$	$R_A = \frac{qc}{8} \left(11 - 4 \frac{c^2}{L^2} \right)$ $R_B = \frac{qc}{8} \left(5 + 4 \frac{c^2}{L^2} \right)$	
	$M^E = \frac{qbc}{L^2} [a(L+b) - c^2]$	$R_A = qc \left[2 - 3 \frac{a^2}{L^2} - \frac{c^2}{L^2} + \frac{a}{L} \left(\frac{a^2}{L^2} + \frac{c^2}{L^2} \right) \right]$ $R_B = qc \left[3 \frac{a^2}{L^2} + \frac{c^2}{L^2} - \frac{a}{L} \left(\frac{a^2}{L^2} + \frac{c^2}{L^2} \right) \right]$	
	$M^E = \frac{5}{64} qL^2$	$R_A = \frac{21}{64} qL$ $R_B = \frac{11}{64} qL$	
	$M^E = \frac{7}{120} qL^2$	$R_A = \frac{9}{40} qL$ $R_B = \frac{11}{40} qL$	
	$M^E = \frac{qL^2}{25}$	$R_A = \frac{2}{5} qL$ $R_B = \frac{qL}{10}$	
	$M^E = \frac{qa^2}{120} \left[40 - 3 \frac{a}{L} \left(15 - 4 \frac{a}{L} \right) \right]$	$R_A = \frac{qa}{20} \left[20 - \frac{a^2}{L^2} \left(15 - 4 \frac{a}{L} \right) \right]$ $R_B = \frac{qa^3}{40L^2} \left(15 - 4 \frac{a}{L} \right)$	
	$M^E = \frac{qb^2}{30} \left(5 - 3 \frac{b^2}{L^2} \right)$	$R_A = \frac{qb^2}{10L} \left(5 - \frac{b^2}{L^2} \right)$ $R_B = \frac{qb}{10} \left[5 - \frac{b}{L} \left(5 - \frac{b^2}{L^2} \right) \right]$	

FUENTE: Jiménez Montoya – García Meseguer – Morán Cabre

TABLA A.8

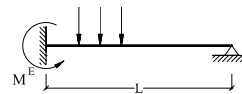
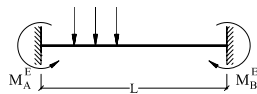
VIGA APOYADA EMPOTRADA
DISTINTAS HIPOTESIS DE CARGA

P, q y segmentos en valor absoluto



SOLICITACION	MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO	REACCIONES EN LOS APOYOS	DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES
	$M^E = \frac{qb^2}{120} \left(10 - 3 \frac{b^2}{L^2} \right)$	$R_A = \frac{qb^2}{40L} \left(10 - \frac{b^2}{L^2} \right)$ $R_B = \frac{qb}{40} \left[20 - \frac{b}{L} \left(10 - \frac{b^2}{L^2} \right) \right]$	
	$M^E = \frac{qa^2}{120} \left[20 - 3 \frac{a}{L} \left(5 - \frac{a}{L} \right) \right]$	$R_A = \frac{qa}{40} \left[20 - \frac{a^2}{L^2} \left(5 - \frac{a}{L} \right) \right]$ $R_B = \frac{qa^3}{40L^2} \left(5 - \frac{a}{L} \right)$	
	$M^E = \frac{qL^2}{10}$	$R_A = \frac{13}{30} qL$ $R_B = \frac{7}{30} qL$	
	$M^E = \frac{m}{2} \left(1 - 3 \frac{b^2}{L^2} \right)$	$R_A = \frac{3}{2} \cdot \frac{ma}{L^2} \left(2 - \frac{a}{L} \right)$ $R_B = -\frac{3}{2} \cdot \frac{ma}{L^2} \left(2 - \frac{a}{L} \right)$	
	$M^E = \frac{m}{2}$	$R_A = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{L}$ $R_B = -\frac{3}{2} \cdot \frac{m}{L}$	

CALCULO DE MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO DE UNA VIGA APOYADA-EMPOTRADA EN FUNCIÓN DE LOS MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO.



$$M^E = M_A^E - \beta_B \cdot M_B^E$$

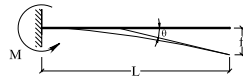
$$M^E = M_A^E - \frac{1}{2} M_B^E$$

FUENTE: Jiménez Montoya – García Meseguer – Morán Cabre

TABLA A.9

VIGA EN VOLADIZO
DISTINTAS HIPOTESIS DE CARGA

P, q y segmentos en valor absoluto



SOLICITACION	DIAGRAMA DE MOMENTOS FLECTORES MOMENTO MAXIMO	DIAGRAMA DE ESFUERZOS CORTANTES REACCION EN APOYO	FLECHAS MAXIMAS ÁNGULO DE GIRO EXTREMO
	$M = Pa$ 	$R = P$ 	$f = Pa^2 \frac{3L-a}{6EI}$ $\theta = \frac{Pa^2}{2EI}$
	$M = PL$ 	$R = P$ 	$f = \frac{PL^3}{3EI}$ $\theta = \frac{PL^2}{2EI}$
	$M = \frac{1}{2}qL^2$ 	$R = qL$ 	$f = \frac{qL^4}{8EI}$ $\theta = \frac{qL^3}{6EI}$
	$M = \frac{1}{2}qa^2$ 	$R = qa$ 	$f = qa^3 \frac{4L-a}{24EI}$ $\theta = \frac{qa^3}{6EI}$
	$M = 2qca$ 	$R = 2qc$ 	$f = \frac{qca^2}{3EI} \left[L \left(3 + \frac{c^2}{a^2} \right) - a \left(1 + \frac{c^2}{a^2} \right) \right]$ $\theta = \frac{q}{6EI} \left[a^3 - 15c^3 + 3ac(a+c) \right]$
	$M = \frac{1}{6}qL^2$ 	$R = \frac{1}{2}qL$ 	$f = \frac{qL^4}{30EI}$ $\theta = \frac{qL^3}{24EI}$
	$M = \frac{1}{6}qL^2$ 	$R = \frac{1}{2}qL$ 	$f = \frac{qa^3}{120EI} (5L-a)$ $\theta = \frac{qa^3}{24EI}$
	$M = m^2$ 	$R = 0$ 	$f = \frac{ma}{2EI} (2L-a)$ $\theta = \frac{ma}{EI}$

