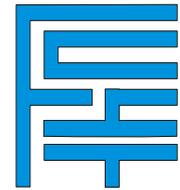


**UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN SIMÓN**  
**FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA**  
**CARRERA DE INGENIERÍA CIVIL**



**MATERIAL DE APOYO DIDÁCTICO DE LA ENSEÑANZA  
APRENDIZAJE EN LA ASIGNATURA DE RESISTENCIA DE  
MATERIALES I**

Trabajo dirigido, Por Adscripción, Para Obtener el Diploma  
Académico de Licenciatura en Ingeniería Civil.

**Presentado por: JUAN JHONNY GARCIA LUIZAGA**

**MARIO VARGAS LEDESMA**

**Tutor: Ing. Guido Gómez Ugarte.**

**COCHABAMBA – BOLIVIA**

Mayo, 2007

## *DEDICATORIA*

*A nuestros queridos padres y a nuestros  
hermanos (as) por brindarnos su apoyo  
incondicional durante nuestro trabajo.*

## *AGRADECIMIENTOS*

*A Dios por darnos la luz y guía espiritual para nuestro crecimiento, tanto intelectual como moral.*

*A nuestros padres por el amor que nos brindaron, sus sacrificios, su amistad y compañerismo.*

*A nuestros hermanos por la ayuda que nos dieron.*

*Al Ing. Guido Gómez por toda su ayuda, para que sea posible este proyecto.*

*A nuestros tribunales: Ing. Oscar Florero Ortuño, Ing. Orlando Camacho, Ing. José Meruvia M. Por su ayuda y colaboración desinteresada.*

*Al Director de la Carrera de Ingeniería Civil, Ing. Armando Escalera V.*

*A nuestros docentes de la carrera por sus consejos y enseñanzas, haciendo de nosotros buenos ciudadanos.*

*A la Universidad por abrirnos las puertas y cobijarnos hasta la culminación de nuestros estudios.*

*Y a todos nuestros amigos que nos ayudaron y nos apoyaron.*

*¡Muchísimas Gracias!*

## **FICHA RESUMEN**

El presente documento ha sido elaborado con un propósito de ofrecer al estudiante un apoyo sobre la materia, este documento servirá como texto de guía de consulta para la materia: “Resistencia de Materiales I”, orientando a los estudiantes de la carrera de Ingeniería Civil – Ingeniería Mecánica – Electromecánica de la facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad Mayor de San Simón.

Se hace conocer que el documento ha sido desarrollado en base a observaciones y recomendaciones dadas por el docente de la materia Ing. Guido Gómez Ugarte, fundamentadas en su totalidad por el conocimiento y la gran experiencia que tiene en el campo profesional.

La estructura del documento esta planteada de la siguiente manera.

### **PRIMERA PARTE**

La primera parte comprende de CAPITULO I a CAPITULO V, que están basados en las determinaciones de las tensiones que actúan en cada capítulo.

### **SEGUNDA PARTE**

La segunda parte comprende de CAPITULO VI a CAPITULO X, basados en las determinaciones de las tensiones en las vigas, las deformaciones debido a la flexión.

El CAPITULO X, es un resumen de todos los capítulos avanzados, el la cual se realiza un análisis completo de todas las tensiones presente en la sección critica.

## INDICE GENERAL

DEDICATORIA	Pág.
AGRADECIMIENTO	ii
FICHA RESUMEN	iii
INDICE GENERAL	iv
INDICE DE TABLAS	v
OBJETIVOS	ix
JUSTIFICACIÓN	ix-1

## INTRODUCCIÓN

	Pág.
I.-CONCEPTOS BÁSICOS	1
I.1.- MECÁNICA	1
I.2.- ESTÁTICA	1
I.3.- DINÁMICA	1
I.4.- RESISTENCIA DE MATERIALES	2
I.5.- PRINCIPIO DE FUERZAS	2
I.5.1.- FUERZAS CONCURRENTES	2
I.5.2.- FUERZAS NO CONCURRENTES	3
II.- ECUACIONES DE EQUILIBRIO	3
III.- CENTROIDES Y MOMENTOS DE INERCIA	5
III.1.- Inercia	5
III.2.- Momento de inercia	5
IV.- CENTROIDES DE AREAS	5
V.- MOMENTOS DE INERCIA DE AREAS	5
VI.- TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS (TEOREMA DE STEINER)	6
EVALUACIÓN DIALOGADA DEL TEMA (CUESTIONARIO)	7
PROBLEMAS RESUELTOS DE CENTROIDE Y MOMENTOS DE INERCIA	12

## CAPITULO I

### CONCEPTO DE ESFUERZO

	Pág.
1.1.- INTRODUCCIÓN	25
1.2.- CARGA AXIAL (ESFUERZO NORMAL)	26
1.3.- CARGA SOMETIDO A TENSIÓN (TRACCIÓN - COMPRESIÓN)	26
1.3.1.- TRACCIÓN	26
1.3.2.- COMPRESIÓN	26
1.4.- SISTEMA DE UNIDADES	28
1.5.- PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES	29
1.6.- PROCEDIMIENTO DEL ENSAYO	29
1.6.1.- ENSAYO DUCTIL	29
a).- ENSAYO DE TRACCIÓN DE MATERIAL DUCTIL	29
1.6.1.1.- DIAGRAMA ESFUERZO – DEFORMACIÓN	30

1.6.1.2.- PROCEDIMIENTO	30
• Zona elástica	30
• Zona Plástica	31
1.6.1.3.- CURVA ESFUERZO DEFORMACIÓN UNITARIA (TRACCIÓN)	33
b).- ENSAYO DE COMPRESIÓN DE MATERIAL DUCTIL	33
b.1).- CURVA ESFUERZO DEFORMACIÓN UNITARIA COMPRESIÓN	34
1.6.2.- ENSAYO FRÁGIL	35
1.6.2.1.- CURVA ESFUERZO DEFORMACION (FRÁGIL)	35
1.6.3.- CURVA ESFUERZO DEFORMACIÓN ( TRACCIÓN-COMPRESIÓN)	36
1.7.- CURVA REAL Y APARENTE	37
a).- Curva aparente de esfuerzo deformación unitaria en tracción.	37
b).- Curva real de esfuerzo deformación unitaria en tracción.	37
c).- Curva aparente de esfuerzo deformación unitaria en compresión.	37
d).- Curva real de esfuerzo deformación unitaria en compresión.	37
1.8.- RESUMEN DIAGRAMA ESFUERZO – DEFORMACIÓN	38
a).- El límite de proporcionalidad.	38
b).- El límite elástico.	38
c).- El límite de fluencia.	38
d).- El límite último o esfuerzo ultimo.	38
e).- Punto de rotura.	38
CLASE DIALOGADA DEL TEMA (CUESTIONARIO)	39
PROBLEMAS RESUELTOS DE TENSIONES NORMALES	41
PROBLEMAS PROPUESTOS DE TENSIONES	46

## **CAPITULO II**

### **TENSIÓN CORTANTE**

	Pág.
2.1.- TENSIÓN CORTANTE SIMPLE	50
2.2.- TENSIÓN CORTANTE DOBLE	51
2.3.- DIMENSIONAMIENTO	52
PREGUNTAS SOBRE EL TEMA	52
PROBLEMAS RESUELTOS DE TENSIONES CORTANTES	53
PROBLEMAS PROPUESTOS DE TENSIONES CORTANTES	57

## **CAPITULO III**

### **ESFUERZO Y DEFORMACIÓN CARGA AXIAL**

	Pág.
3.1.- INTRODUCCIÓN	59
3.2.- DEFORMACIÓN NORMAL BAJO CARGA AXIAL	59
3.3.- COMPARACIÓN DE DIAGRAMAS DE DISTINTOS MATERIALES	60
3.4.- LEY DE HOOKE	60
3.5.- DEFORMACIÓN TANGENCIAL	60
3.6.- DIMENSIONAMIENTO A LA RIGIDEZ	61

3.7.- DIFERENCIAS DE LA GRÁFICA DE ESFUERZO – DEFORMACIÓN DE LOS METALES Y NO METALES	61
3.8.- ECUACIONES PARA DEFORMACIONES TRANSVERSALES	62
3.9.- ALGUNOS CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE LOS MATERIALES (CUESTIONARIO)	63
PROBLEMAS RESUELTOS DE ESFUERZO – DEFORMACIÓN	64
RESOLUCIÓN DE SISTEMAS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS	71
PROBLEMAS PROPUESTOS DE ESFUERZO – DEFORMACIÓN	76

## **CAPITULO IV**

### **VARIACIÓN DE TENSIONES INTERNAS**

	Pág.
4.1.- INTRODUCCIÓN	84
4.2.- ESFUERZO EN UN PUNTO	84
4.3.- MÉTODO GRÁFICO PARA SU DETERMINACIÓN DE LAS TENSIONES MÁXIMAS	84
4.4.- CÓMO SE USA EL CÍRCULO DE MOHR Y LUEGO CÓMO FUNCIONA	86
4.5.- DESARROLLO DE LAS ECUACIONES DE CÍRCULO DE MOHR	86
PREGUNTAS TEORICAS PARA EL ESTUDIANTE	88
PROBLEMAS RESUELTOS DE CÍRCULO DE MORH	89
PROBLEMAS PROPUESTOS DE CÍRCULO DE MORH	100

## **CAPITULO V**

### **RECIPIENTES DE PARED DELGADA**

	Pág.
5.1.- INTRODUCCIÓN	103
5.2.- OBJETIVOS	103
5.3.- DEDUCCIÓN DE LAS TENSIONES CIRCUNFERENCIALES Y TANGENCIALES	103
5.4.- TENSIÓN CIRCUNFERENCIAL	104
5.5.- TENSIÓN LONGITUDINAL	105
5.6.- TENSIONES PRINCIPALES PARA EL CILINDRO DE PARED DELGADA	105
PREGUNTAS TEÓRICAS PARA EL ESTUDIANTE	106
PROBLEMAS RESUELTOS DE CILINDROS DE PARED DELGADA	107
PROBLEMAS PROPUESTOS DE CILINDROS DE PARED DELGADA	113

## **CAPITULO VI**

### **FLEXIÓN EN VIGAS**

	Pág.
6.1.- INTRODUCCIÓN	116
6.2.- HIPÓTESIS	116
6.3.- OBJETIVOS	116
6.4.- TIPOS DE APOYOS EN LOS ELEMENTOS ESTRUCTURALES	117
6.5.- DEDUCCIÓN DE ECUACIÓN DE ESFUERZO A FLEXIÓN	117
PROBLEMAS RESUELTOS DE FLEXIÓN EN VIGAS	119
PROBLEMAS PROPUESTOS DE FLEXIÓN EN VIGAS	129

## **CAPITULO VII**

### **ESFUERZO CORTANTE EN VIGAS**

	Pág.
7.1.- INTRODUCCIÓN	134
7.2.- HIPÓTESIS	134
7.3.- OBJETIVOS	134
7.4.- DEDUCCIÓN DE ECUACIÓN DE ESFUERZO CORTANTE A FLEXIÓN	135
7.5.- GRÁFICAS DE LOS ESFUERZOS CORTANTES DE PERFILES	136
7.6.- PERFILES (SECCIONES) DE ACERO	137
7.6.1.- PERFILES W	137
7.6.2.- PERFILES S	137
7.6.3.- PERFILES C	138
7.6.4.- PERFILES L	138
7.6.5.- PERFILES RECTANGULARES HSS	139
7.6.6.- PERFILES CIRCULARES HSS	139
PROBLEMAS RESUELTOS DE CORTANTE A FLEXIÓN EN VIGAS	140
PROBLEMAS PROPUESTOS DE CORTANTE A FLEXIÓN EN VIGAS	147

## **CAPITULO VIII**

### **DEFORMACIÓN EN VIGAS DEBIDO A FLEXIÓN**

	Pág.
8.1.- INTRODUCCIÓN	154
8.2.- HIPÓTESIS	154
8.3.- OBJETIVOS	154
8.4.- DEDUCCIÓN DE ECUACIÓN DE ESFUERZO A FLEXIÓN	155
8.5.- DIFERENTES CASOS DE LAS CONDICIONES DE APOYO	156
PROBLEMAS RESUELTOS DE DEFORMACIÓN DEBIDO A FLEXIÓN	157
PROBLEMAS PROPUESTOS DE DEFORMACIÓN DEBIDO A FLEXIÓN	168

## **CAPITULO IX**

### **TORSIÓN EN VIGAS**

9.1.- INTRODUCCIÓN	174
9.2.- OBJETIVOS	174
9.3.- HIPÓTESIS	175
9.4.- DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE CORTANTE Y LA DEFORMACIÓN ANGULAR DEBIDO A LA TORSIÓN	176
9.5.- ANÁLISIS DE LAS TENSIONES MÁXIMAS	177
PREGUNTAS TEÓRICAS DE LOS CAPITULOS VI- VII-VIII - IX	178
PROBLEMAS RESUELTOS DE ESFUERZOS CORTANTES A TORSIÓN	179
PROBLEMAS PROPUESTOS DE ESFUERZOS CORTANTES A TORSIÓN	183

## **CAPITULO X**

## TENSIONES COMBINADAS EN EL ESPACIO (FLEXO – TRAXO – TORSIÓN)

	Pág.
10.1.- INTRODUCCIÓN	185
10.2.- ANÁLISIS DE LAS TENSIONES MÁXIMAS CASO VIGA DE SECCIÓN CIRCULAR	185
a).- DETERMINACIÓN DE LAS TENSIONES RESULTANTES	185
b).- DETERMINACIÓN DE LA SECCION CRÍTICA	186
c).- DIAGRAMA DE TENSIONES RESULTANTES EN EL PLANO	186
d).- DETERMINACION DEL PUNTO CRÍTICO DE LAS DIAGRAMAS	186
e).- ECUACIONES PARA SU DIMENSIONAMIENTO	186
10.3.- ANÁLISIS DE LAS TENSIONES MÁXIMAS CASO VIGA DE SECCIÓN CIRCULAR	187
a).- DETERMINACIÓN DEL PUNTO MAS CRÍTICO EN CASO DE SECCIÓN RECTANGULAR	187
PROBLEMAS RESUELTOS DE FLEXIÓN EN EL ESPACIO	188
PROBLEMAS PROPUESTOS DE FLEXIÓN EN EL ESPACIO	206

## INDICE DE TABLAS

TABLA A -1 PERFILES H (VIGAS DE ALA ANCHA) AMERICANAS	-1-
TABLA A -1 PERFILES H (VIGAS DE ALA ANCHA) AMERICANAS	-2-
TABLA A -1 PERFILES H (VIGAS DE ALA ANCHA) AMERICANAS	-3-
TABLA A -1 PERFILES H (VIGAS DE ALA ANCHA) AMERICANAS	-4-
TABLA A -1 PERFILES H (VIGAS DE ALA ANCHA) AMERICANAS	-5-
TABLA A -1 PERFILES H (VIGAS DE ALA ANCHA) AMERICANAS	-6-
TABLA A -2 PERFILES C (CANALES) AMERICANAS	-7-
TABLA A -3 PERFILES L (ANGULARES) LADOS IGUALES, AMERICANAS	-8-
TABLA A -3 PERFILES L (ANGULARES) LADOS IGUALES, AMERICANAS	-9-
TABLA A -3 PERFILES L (ANGULARES) LADOS DESIGUALES, AMERICANAS	-10-
TABLA A -3 PERFILES L (ANGULARES) LADOS DESIGUALES, AMERICANAS	-11-
TABLA A -4 PERFILES H (VIGAS DE ALA ANCHA) EUROPEOS	-12-
TABLA A -5 PERFILES I (VIGAS NORMALES) EUROPEOS	-12-
TABLA A -6 PERFILES C ( O U )(CANALES) EUROPEOS	-13-
CONCLUSIONES Y RECOMNDACIONES	
RESPUESTAS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS	
BIBLIOGRAFIA	

# INDICE GENERAL

DEDICATORIA	Pág.
AGRADECIMIENTO	ii
FICHA RESUMEN	iii
INDICE GENERAL	iv
INDICE DE TABLAS	v
OBJETIVOS	ix
JUSTIFICACIÓN	ix-1

## INTRODUCCIÓN

	Pág.
I.-CONCEPTOS BÁSICOS	1
I.1.- MECÁNICA	1
I.2.- ESTÁTICA	1
I.3.- DINÁMICA	1
I.4.- RESISTENCIA DE MATERIALES	2
I.5.- PRINCIPIO DE FUERZAS	2
I.5.1.- FUERZAS CONCURRENTES	2
I.5.2.- FUERZAS NO CONCURRENTES	3
II.- ECUACIONES DE EQUILIBRIO	3
III.- CENTROIDES Y MOMENTOS DE INERCIA	5
III.1.- Inercia	5
III.2.- Momento de inercia	5
IV.- CENTROIDES DE AREAS	5
V.- MOMENTOS DE INERCIA DE AREAS	5
VI.- TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS (TEOREMA DE STEINER)	6
EVALUACIÓN DIALOGADA DEL TEMA (CUESTIONARIO)	7
PROBLEMAS RESUELTOS DE CENTROIDE Y MOMENTOS DE INERCIA	12

## CAPITULO I

### CONCEPTO DE ESFUERZO

	Pág.
1.1.- INTRODUCCIÓN	25
1.2.- CARGA AXIAL (ESFUERZO NORMAL)	26
1.3.- CARGA SOMETIDO A TENSIÓN (TRACCIÓN - COMPRESIÓN)	26
1.3.1.- TRACCIÓN	26
1.3.2.- COMPRESIÓN	26
1.4.- SISTEMA DE UNIDADES	28
1.5.- PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES	29
1.6.- PROCEDIMIENTO DEL ENSAYO	29
1.6.1.- ENSAYO DUCTIL	29
a).- ENSAYO DE TRACCIÓN DE MATERIAL DUCTIL	29
1.6.1.1.- DIAGRAMA ESFUERZO – DEFORMACIÓN	30

1.6.1.2.- PROCEDIMIENTO	30
• Zona elástica	30
• Zona Plástica	31
1.6.1.3.- CURVA ESFUERZO DEFORMACIÓN UNITARIA (TRACCIÓN)	33
b).- ENSAYO DE COMPRESIÓN DE MATERIAL DUCTIL	33
b.1).- CURVA ESFUERZO DEFORMACIÓN UNITARIA COMPRESIÓN	34
1.6.2.- ENSAYO FRÁGIL	35
1.6.2.1.- CURVA ESFUERZO DEFORMACION (FRÁGIL)	35
1.6.3.- CURVA ESFUERZO DEFORMACIÓN ( TRACCIÓN-COMPRESIÓN)	36
1.7.- CURVA REAL Y APARENTE	37
a).- Curva aparente de esfuerzo deformación unitaria en tracción.	37
b).- Curva real de esfuerzo deformación unitaria en tracción.	37
c).- Curva aparente de esfuerzo deformación unitaria en compresión.	37
d).- Curva real de esfuerzo deformación unitaria en compresión.	37
1.8.- RESUMEN DIAGRAMA ESFUERZO – DEFORMACIÓN	38
a).- El límite de proporcionalidad.	38
b).- El límite elástico.	38
c).- El límite de fluencia.	38
d).- El límite último o esfuerzo ultimo.	38
e).- Punto de rotura.	38
CLASE DIALOGADA DEL TEMA (CUESTIONARIO)	39
PROBLEMAS RESUELTOS DE TENSIONES NORMALES	41
PROBLEMAS PROPUESTOS DE TENSIONES	46

## **CAPITULO II**

### **TENSIÓN CORTANTE**

	Pág.
2.1.- TENSIÓN CORTANTE SIMPLE	50
2.2.- TENSIÓN CORTANTE DOBLE	51
2.3.- DIMENSIONAMIENTO	52
PREGUNTAS SOBRE EL TEMA	52
PROBLEMAS RESUELTOS DE TENSIONES CORTANTES	53
PROBLEMAS PROPUESTOS DE TENSIONES CORTANTES	57

## **CAPITULO III**

### **ESFUERZO Y DEFORMACIÓN CARGA AXIAL**

	Pág.
3.1.- INTRODUCCIÓN	59
3.2.- DEFORMACIÓN NORMAL BAJO CARGA AXIAL	59
3.3.- COMPARACIÓN DE DIAGRAMAS DE DISTINTOS MATERIALES	60
3.4.- LEY DE HOOKE	60
3.5.- DEFORMACIÓN TANGENCIAL	60
3.6.- DIMENSIONAMIENTO A LA RIGIDEZ	61

3.7.- DIFERENCIAS DE LA GRÁFICA DE ESFUERZO – DEFORMACIÓN DE LOS METALES Y NO METALES	61
3.8.- ECUACIONES PARA DEFORMACIONES TRANSVERSALES	62
3.9.- ALGUNOS CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE LOS MATERIALES (CUESTIONARIO)	63
PROBLEMAS RESUELTOS DE ESFUERZO – DEFORMACIÓN	64
RESOLUCIÓN DE SISTEMAS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS	71
PROBLEMAS PROPUESTOS DE ESFUERZO – DEFORMACIÓN	76

## **CAPITULO IV**

### **VARIACIÓN DE TENSIONES INTERNAS**

	Pág.
4.1.- INTRODUCCIÓN	84
4.2.- ESFUERZO EN UN PUNTO	84
4.3.- MÉTODO GRÁFICO PARA SU DETERMINACIÓN DE LAS TENSIONES MÁXIMAS	84
4.4.- CÓMO SE USA EL CÍRCULO DE MOHR Y LUEGO CÓMO FUNCIONA	86
4.5.- DESARROLLO DE LAS ECUACIONES DE CÍRCULO DE MOHR	86
PREGUNTAS TEORICAS PARA EL ESTUDIANTE	88
PROBLEMAS RESUELTOS DE CÍRCULO DE MORH	89
PROBLEMAS PROPUESTOS DE CÍRCULO DE MORH	100

## **CAPITULO V**

### **RECIPIENTES DE PARED DELGADA**

	Pág.
5.1.- INTRODUCCIÓN	103
5.2.- OBJETIVOS	103
5.3.- DEDUCCIÓN DE LAS TENSIONES CIRCUNFERENCIALES Y TANGENCIALES	103
5.4.- TENSIÓN CIRCUNFERENCIAL	104
5.5.- TENSIÓN LONGITUDINAL	105
5.6.- TENSIONES PRINCIPALES PARA EL CILINDRO DE PARED DELGADA	105
PREGUNTAS TEÓRICAS PARA EL ESTUDIANTE	106
PROBLEMAS RESUELTOS DE CILINDROS DE PARED DELGADA	107
PROBLEMAS PROPUESTOS DE CILINDROS DE PARED DELGADA	113

## **CAPITULO VI**

### **FLEXIÓN EN VIGAS**

	Pág.
6.1.- INTRODUCCIÓN	116
6.2.- HIPÓTESIS	116
6.3.- OBJETIVOS	116
6.4.- TIPOS DE APOYOS EN LOS ELEMENTOS ESTRUCTURALES	117
6.5.- DEDUCCIÓN DE ECUACIÓN DE ESFUERZO A FLEXIÓN	117
PROBLEMAS RESUELTOS DE FLEXIÓN EN VIGAS	119
PROBLEMAS PROPUESTOS DE FLEXIÓN EN VIGAS	129

## **CAPITULO VII**

### **ESFUERZO CORTANTE EN VIGAS**

	Pág.
7.1.- INTRODUCCIÓN	134
7.2.- HIPÓTESIS	134
7.3.- OBJETIVOS	134
7.4.- DEDUCCIÓN DE ECUACIÓN DE ESFUERZO CORTANTE A FLEXIÓN	135
7.5.- GRÁFICAS DE LOS ESFUERZOS CORTANTES DE PERFILES	136
7.6.- PERFILES (SECCIONES) DE ACERO	137
7.6.1.- PERFILES W	137
7.6.2.- PERFILES S	137
7.6.3.- PERFILES C	138
7.6.4.- PERFILES L	138
7.6.5.- PERFILES RECTANGULARES HSS	139
7.6.6.- PERFILES CIRCULARES HSS	139
PROBLEMAS RESUELTOS DE CORTANTE A FLEXIÓN EN VIGAS	140
PROBLEMAS PROPUESTOS DE CORTANTE A FLEXIÓN EN VIGAS	147

## **CAPITULO VIII**

### **DEFORMACIÓN EN VIGAS DEBIDO A FLEXIÓN**

	Pág.
8.1.- INTRODUCCIÓN	154
8.2.- HIPÓTESIS	154
8.3.- OBJETIVOS	154
8.4.- DEDUCCIÓN DE ECUACIÓN DE ESFUERZO A FLEXIÓN	155
8.5.- DIFERENTES CASOS DE LAS CONDICIONES DE APOYO	156
PROBLEMAS RESUELTOS DE DEFORMACIÓN DEBIDO A FLEXIÓN	157
PROBLEMAS PROPUESTOS DE DEFORMACIÓN DEBIDO A FLEXIÓN	168

## **CAPITULO IX**

### **TORSIÓN EN VIGAS**

9.1.- INTRODUCCIÓN	174
9.2.- OBJETIVOS	174
9.3.- HIPÓTESIS	175
9.4.- DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE CORTANTE Y LA DEFORMACIÓN ANGULAR DEBIDO A LA TORSIÓN	176
9.5.- ANÁLISIS DE LAS TENSIONES MÁXIMAS	177
PREGUNTAS TEÓRICAS DE LOS CAPITULOS VI- VII-VIII - IX	178
PROBLEMAS RESUELTOS DE ESFUERZOS CORTANTES A TORSIÓN	179
PROBLEMAS PROPUESTOS DE ESFUERZOS CORTANTES A TORSIÓN	183

## **CAPITULO X**

## TENSIONES COMBINADAS EN EL ESPACIO (FLEXO – TRAXO – TORSIÓN)

	Pág.
10.1.- INTRODUCCIÓN	185
10.2.- ANÁLISIS DE LAS TENSIONES MÁXIMAS CASO VIGA DE SECCIÓN CIRCULAR	185
a).- DETERMINACIÓN DE LAS TENSIONES RESULTANTES	185
b).- DETERMINACIÓN DE LA SECCION CRÍTICA	186
c).- DIAGRAMA DE TENSIONES RESULTANTES EN EL PLANO	186
d).- DETERMINACION DEL PUNTO CRÍTICO DE LAS DIAGRAMAS	186
e).- ECUACIONES PARA SU DIMENSIONAMIENTO	186
10.3.- ANÁLISIS DE LAS TENSIONES MÁXIMAS CASO VIGA DE SECCIÓN CIRCULAR	187
a).- DETERMINACIÓN DEL PUNTO MAS CRÍTICO EN CASO DE SECCIÓN RECTANGULAR	187
PROBLEMAS RESUELTOS DE FLEXIÓN EN EL ESPACIO	188
PROBLEMAS PROPUESTOS DE FLEXIÓN EN EL ESPACIO	206

## INDICE DE TABLAS

TABLA A -1 PERFILES H (VIGAS DE ALA ANCHA) AMERICANAS	-1-
TABLA A -1 PERFILES H (VIGAS DE ALA ANCHA) AMERICANAS	-2-
TABLA A -1 PERFILES H (VIGAS DE ALA ANCHA) AMERICANAS	-3-
TABLA A -1 PERFILES H (VIGAS DE ALA ANCHA) AMERICANAS	-4-
TABLA A -1 PERFILES H (VIGAS DE ALA ANCHA) AMERICANAS	-5-
TABLA A -1 PERFILES H (VIGAS DE ALA ANCHA) AMERICANAS	-6-
TABLA A -2 PERFILES C (CANALES) AMERICANAS	-7-
TABLA A -3 PERFILES L (ANGULARES) LADOS IGUALES, AMERICANAS	-8-
TABLA A -3 PERFILES L (ANGULARES) LADOS IGUALES, AMERICANAS	-9-
TABLA A -3 PERFILES L (ANGULARES) LADOS DESIGUALES, AMERICANAS	-10-
TABLA A -3 PERFILES L (ANGULARES) LADOS DESIGUALES, AMERICANAS	-11-
TABLA A -4 PERFILES H (VIGAS DE ALA ANCHA) EUROPEOS	-12-
TABLA A -5 PERFILES I (VIGAS NORMALES) EUROPEOS	-12-
TABLA A -6 PERFILES C ( O U )(CANALES) EUROPEOS	-13-
CONCLUSIONES Y RECOMNDACIONES	
RESPUESTAS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS	
BIBLIOGRAFIA	

## **OBJETIVOS**

- Este texto es la herramienta principal para los estudiantes, que proporciona una explicación breve.
- Emplear los conocimientos adquiridos para dimensionar los materiales.
- Este material de apoyo didáctico, es una herramienta que permite al estudiante, seguir con el avance del temario de la materia.

## JUSTIFICACIÓN

- El continuo avance de la tecnología, exige a los nuevos ingenieros la permanente actualización del conocimiento y la aplicación de nuevas técnicas.
- De esta manera la materia de Resistencia de materiales I, es una necesidad dentro de la carrera de ingeniería Civil, es necesario considerar todas las actividades dentro del proceso “Enseñanza – Aprendizaje” para la capacitación del alumno en la formación de su perfil curricular.
- Desde hace mucho tiempo, el estudiante no tenía idea, que libro va a comprar y de que autor, para realizar el seguimiento al avance del tema.
- Si bien, el alumno se compra un libro, pero se encontraba con el problema de que en ese libro, no tenía todo el contenido de la materia.

# INTRODUCCIÓN

---

Por los cursos de física I y II se conocen los conceptos de vectores de fuerza y momento, las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos que se utilizan en el análisis de estructuras simples en reposo. Estos conceptos se ampliaron a un mas en un curso de la estática y estructuras isostaticas, en los cuales las nociones de diagramas de cuerpo libre que se aplica a estructuras simples se estudiaron minuciosamente. El diagrama de cuerpo libre de una estructura o parte de ella es la *pictografía* que permite extraer y escribir con facilidad y sistemáticamente las ecuaciones de equilibrio de la estructura. Al analizar el equilibrio de los cuerpos en reposo, se supone que los cuerpos o algunas de sus partes están compuestos de materiales rígidos en los que no se presentan deformaciones o movimientos. Naturalmente, se esperaría en elementos estructurales reales que los materiales se deformen y cambien de forma.

## I.- CONCEPTOS BASICOS

### I.1.- MECÁNICA

La mecánica es la ciencia que estudia el equilibrio y movimiento de los cuerpos.

### I.2.- ESTÁTICA

La estática es parte de la mecánica que estudia las leyes del equilibrio.

### I.3.- DINÁMICA

Parte de la mecánica que trata de las leyes del movimiento en relación con las fuerzas que lo producen.

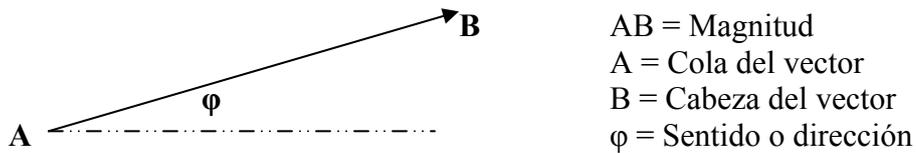
---

#### I.4.- RESISTENCIA DE MATERIALES

Es el estudio de las propiedades físicas de cuerpos sólidos, y son esfuerzos internos y deformaciones producidas por alguna fuerza externa o peso propio del cuerpo.

#### I.5.- PRINCIPIO DE FUERZAS

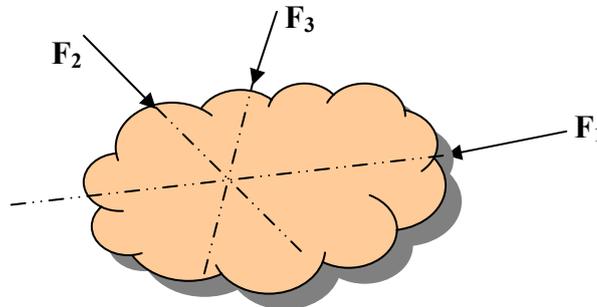
El principio de fuerzas esta basada en la parte de la mecánica, es creada por la acción de un cuerpo sobre otro, la fuerza es un vector que posee magnitud y dirección. Además de estos valores, se necesita un punto o línea de acción para determinar el efecto de una fuerza sobre un sistema estructural.



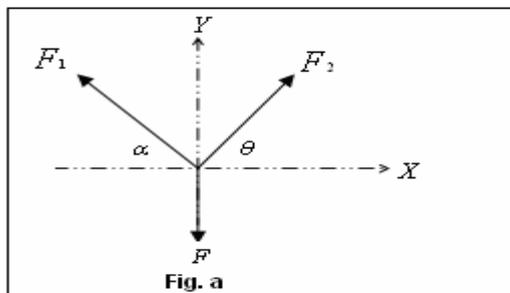
Dichas fuerzas pueden ser concentradas o distribuidas. Una fuerza es concentrada, cuando es aplicada sobre un punto. Una fuerza es distribuida cuando actúa sobre una sección.

#### I.5.1.- FUERZAS CONCURRENTE

Cuando la intersección de las líneas de acción de las fuerzas pasan por un solo punto. El efecto que produce es de traslación.



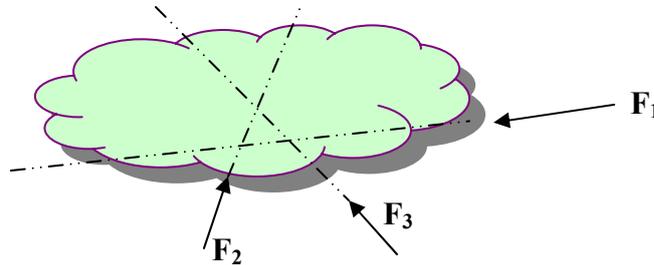
Por equilibrio estático debe cumplirse  $\Sigma F_x=0$  y  $\Sigma F_y=0$  (ver fig.a)



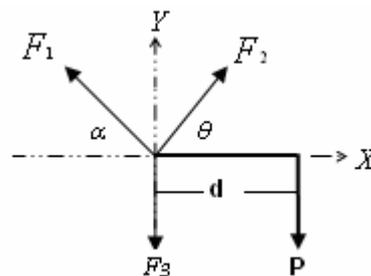
### I.5.2.- FUERZAS NO CONCURRENTES

Son aquellas fuerzas cuyas líneas de acción, al menos una de ellas no pasa por un solo punto.

El efecto que produce es traslación y rotación.



En el plano tenemos tres ecuaciones de la estática.  $\Sigma F_x=0$ ,  $\Sigma F_y=0$  y  $\Sigma M=0$



## II.- ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Cuando un cuerpo se encuentra en equilibrio estático, no ocurre traslación, ni rotación en ninguna dirección.

- No hay traslación, si la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo debe ser igual a cero.

$$\Sigma F_T=0$$

- No hay rotación, si la suma de todos los momentos con respecto a cualquier punto debe ser igual a cero.

$$\Sigma M=0$$

**Cuerpos bidimensionales.-** Las ecuaciones de equilibrio se escriben así: Ver fig.a

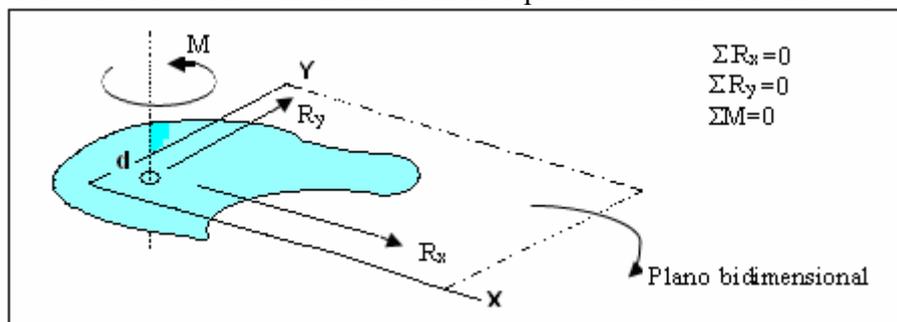


Fig.a.

Donde  $\Sigma R_x$  y  $\Sigma R_y$  son la suma de los componentes de las fuerzas en la dirección de los ejes perpendiculares (x, y) respectivamente y  $\Sigma M=0$ , es la suma de todos los momentos al rededor de cualquier punto en el plano de las fuerzas.

**Cuerpos tridimensionales.-** Las ecuaciones de equilibrio se escriben así: Ver fig.b.

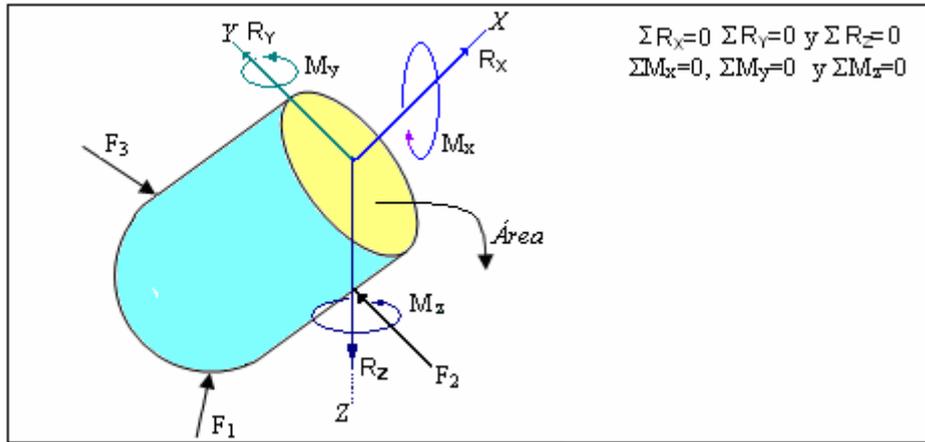


Fig. b.

La suma de las componentes de las tres fuerzas ( $R_x$ ,  $R_y$ ,  $R_z$ ) establecen que para un cuerpo en equilibrio no hay fuerza resultante que produzca una traslación en ninguna de las tres direcciones y las tres ecuaciones de momento ( $\Sigma M_x$ ,  $\Sigma M_y$ ,  $\Sigma M_z$ ) establecen que para un cuerpo en equilibrio no hay momento resultante que produzca rotación alrededor de un mismo eje coordenado u otro paralelos.

**En resumen de la Fig.b tenemos:**

$R_x$  es una fuerza axial, produce un esfuerzo normal que puede ser tracción o compresión.

$$\sigma_N = \frac{R_x}{A}$$

$R_y$ ,  $R_z$  son fuerzas tangenciales que producen esfuerzos cortantes.

$$\tau = \frac{R_y}{A} \quad , \quad \tau = \frac{R_z}{A}$$

$M_x$  produce una fuerza cortante debido al momento torsionante.

$$\tau = \frac{M_x * r}{I_p}$$

$M_y$ ,  $M_z$  son momentos flexionantes que producen esfuerzos.

$$\sigma = \frac{M_y * Z}{I_{yy}} \quad \dots \dots \text{Esfuerzo en el plano (X - Z)}$$

$$\sigma = \frac{M_z * Y}{I_{zz}} \quad \dots \dots \text{Esfuerzo en el plano (X - Y)}$$

### III.- CENTROIDES Y MOMENTOS DE INERCIA

Los centroides y los momentos de inercia de las áreas son conceptos que surgen repetidamente en el análisis de los problemas de resistencia de materiales.

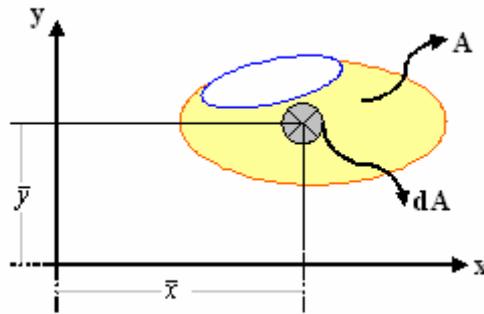
**III.1.- Inercia**, es la resistencia que tiene un cuerpo para estar en reposo o para cambiar de velocidad en movimiento.

**III.2.- Momento de inercia**

Es la resistencia de un cuerpo para girar (rotación).

### IV.- CENTROIDES DE AREAS

Considérese un área  $A$  en el plano  $(x - y)$  las coordenadas de un elemento de área  $dA$ , definimos el primer momento de área  $A$  con respecto al eje  $x$  como la integral.

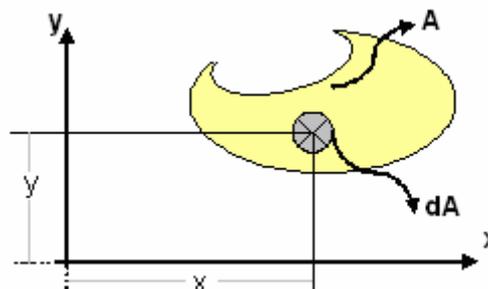


$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int_A dA} \rightarrow \bar{x} = \frac{\sum A x_i}{\sum A} \qquad \bar{y} = \frac{\int y dA}{\int_A dA} \rightarrow \bar{y} = \frac{\sum A y_i}{\sum A}$$

Analógicamente, el primer momento de área  $A$  con respecto al eje  $y$  es la Integral.

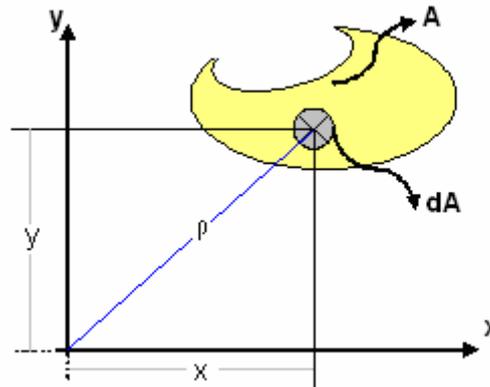
### V.- MOMENTOS DE INERCIA DE AREAS

Los momentos de inercia de un área son integrales semejantes en su forma a las que se usan para determinar el centroide de área. Es el segundo momento de inercia de área  $A$  con respecto a los ejes  $(x,y)$  y se define como la integral.



$$I_y = \int_A x^2 dA$$

Definimos ahora el **momento polar** de inercia del área A con respecto al origen de coordenadas, como la integral.



$$I_p = \int_A \rho^2 dA$$

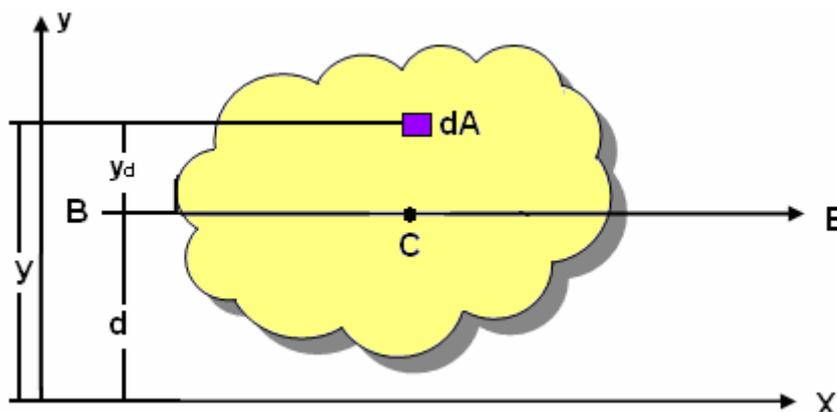
Donde  $\rho$  es la distancia del origen al elemento  $dA$ . Mientras esta integral es nuevamente una integral doble, es posible en el caso de una área circular elegir elemento de  $dA$  en forma de anillos circulares y reducir el calculo de  $I_p$  a una integral única. Se puede establecer una importante relación entre el momento de inercia polar de un área dada y los momentos de inercia  $I_x$  e  $I_y$  de la misma área como:  $\rho^2 = x^2 + y^2$  entonces se puede escribir de la siguiente forma.

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA$$

$$I_p = I_x + I_y \quad \text{Para el caso circular tenemos } I_x = I_y \Rightarrow I_p = \frac{\pi \phi^4}{32}$$

#### VI.- TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS (TEOREMA DE STEINER)

Supóngase que se conocen los momentos de inercia  $I$  de un área A en términos de un sistema de coordenadas  $(x - y)$  con su origen en el centroide de A, y el objetivo consiste en establecer los momentos de inercia en términos de un sistema de coordenadas paralelas a  $(x - y)$ . Ahora se dibuja a través del centroide "C" del área un eje "BB" que es paralelo a  $(x - y)$ , dicho eje recibe el nombre de *eje centroidal*. Representado con  $y_d$  la distancia del elemento  $dA$  hasta "BB"; se escribe  $y = y_d + d$ , donde "d" es la distancia entre los ejes  $(x - y)$  y "BB". Sustituyendo  $(y_d + d)$  en lugar de "y" la integral de momento de inercia se escribe.



$$I = \int y^2 dA \quad \rightarrow \quad I = \int (y_d + d)^2 dA \quad \rightarrow \quad \text{desarrollando tenemos:}$$

$$I = \int (y_d)^2 dA + 2d \int y_d dA + d^2 \int dA$$

la primera integral representa el momento de inercia  $\hat{I}$  de área con respecto del eje centroidal “BB”. La segunda integral representa el primer momento con respecto de “BB”; puesto que el centroide “C” de área esta localizada sobre dicho eje, por lo tanto la segunda integral debe ser igual a cero, ya que  $\int y_d dA$  es el momento estático de área respecto al centro de gravedad, finalmente, se observa que la ultima integral es igual al área total A. por lo tanto se tiene.

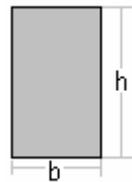
$$\int (y_d)^2 dA = \bar{I}$$

$$2d \int y_d dA = 0$$

$$d^2 \int dA = Ad^2$$

$$I = \bar{I} + Ad^2$$

El valor de la distancia “d” es desde la línea neutra al centroide de cada figura:  
 $\bar{I} = bh^3/12$  para una figura rectangular de base “b” y altura “h”.



### EVALUACIÓN DIALOGADA DEL TEMA (CUESTIONARIO)

**1.- ¿Qué es inercia en ( $I_x$ )?**

**R.-** Es la resistencia u oposición de un cuerpo al cambio de movimiento alrededor del eje “X”

**2.- ¿Qué es inercia en ( $I_y$ )?**

**R.-** Es la resistencia u oposición de un cuerpo al cambio de movimiento alrededor del eje “Y”

**3.- ¿Qué es inercia en ( $I_z$ )?**

**R.-** Es la resistencia u oposición de un cuerpo al cambio de movimiento alrededor del eje “Z”

---

#### 4.- ¿Qué es módulo de elasticidad?

R.- Tiene dos explicaciones, una grafica y otro significado del material:

Desde el punto de vista grafica se dice que es la pendiente de la recta o línea de proporcionalidad del rango elástico.

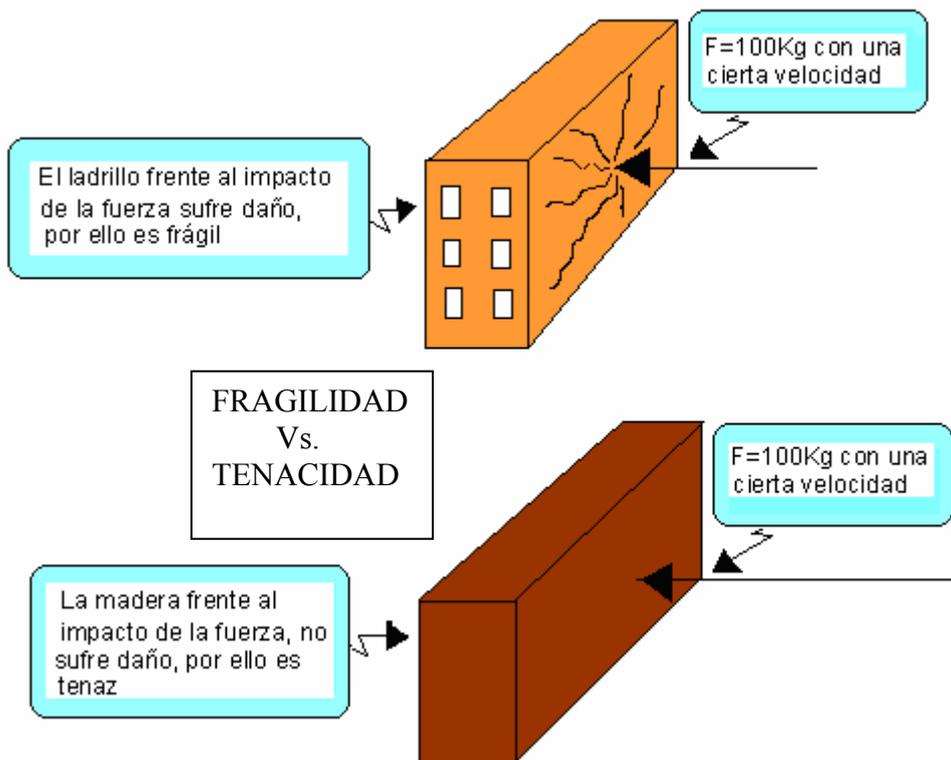
Desde el punto de vista conceptual del comportamiento del material, se dice que es la rigidez que ofrece el material.

#### 5.- ¿Qué es fragilidad?

R.- Es el material que no presenta resistencia al impacto

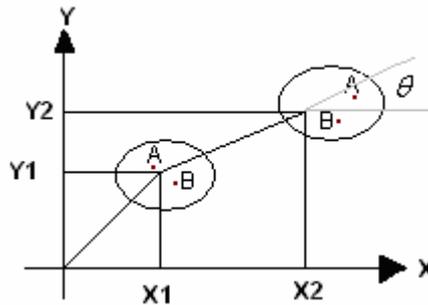
#### 6.- ¿Qué es tenacidad?

R.- Es el material que presenta resistencia al impacto.



**7.- ¿Que son los grados de libertad?**

Son coordenadas linealmente independientes que sirven para describir el Movimiento de un cuerpo



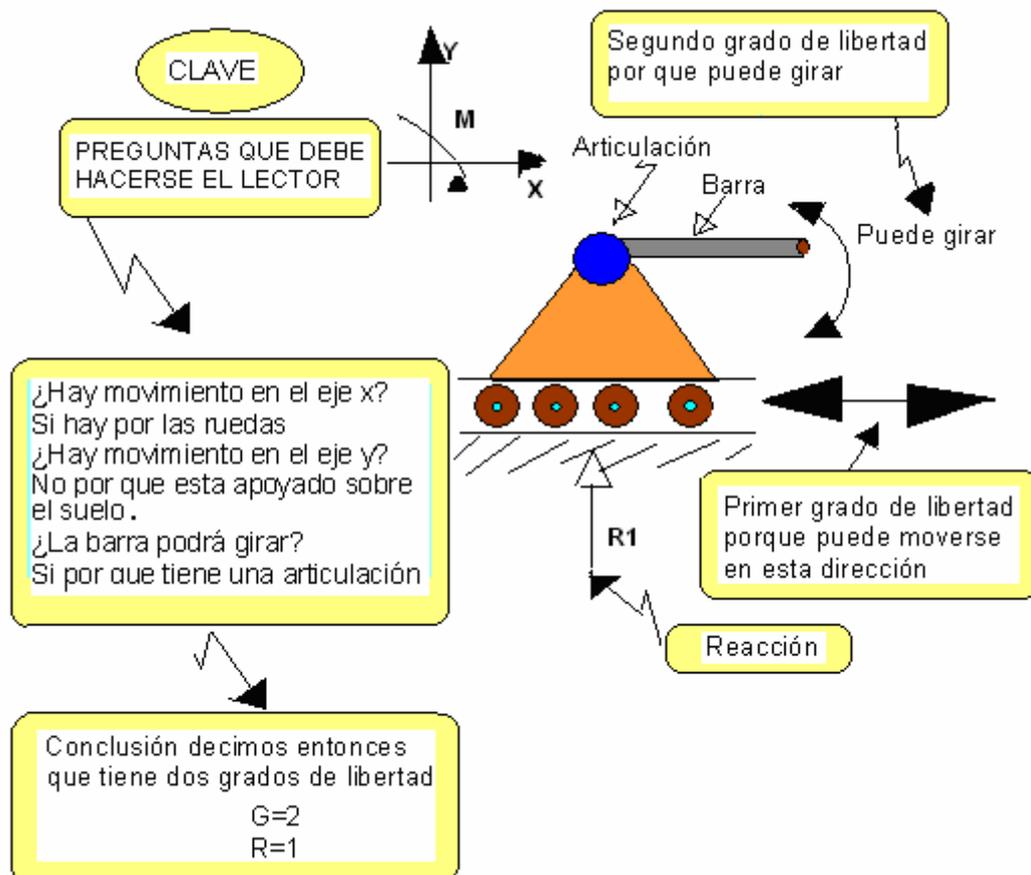
$X_1, Y_1$  son coordenadas linealmente independientes.  
 $X_2, Y_2$  son coordenadas linealmente independientes  
 Existen tres grados de libertad. ( $X, Y, \theta$ )

**8.- ¿Qué es una reacción?**

**R.-** La reacción es una magnitud debido a la acción externa de un cuerpo, ésta reacción está ligada con los grados de la libertad, los cuales se deben las unas a las otras y reciprocamente.

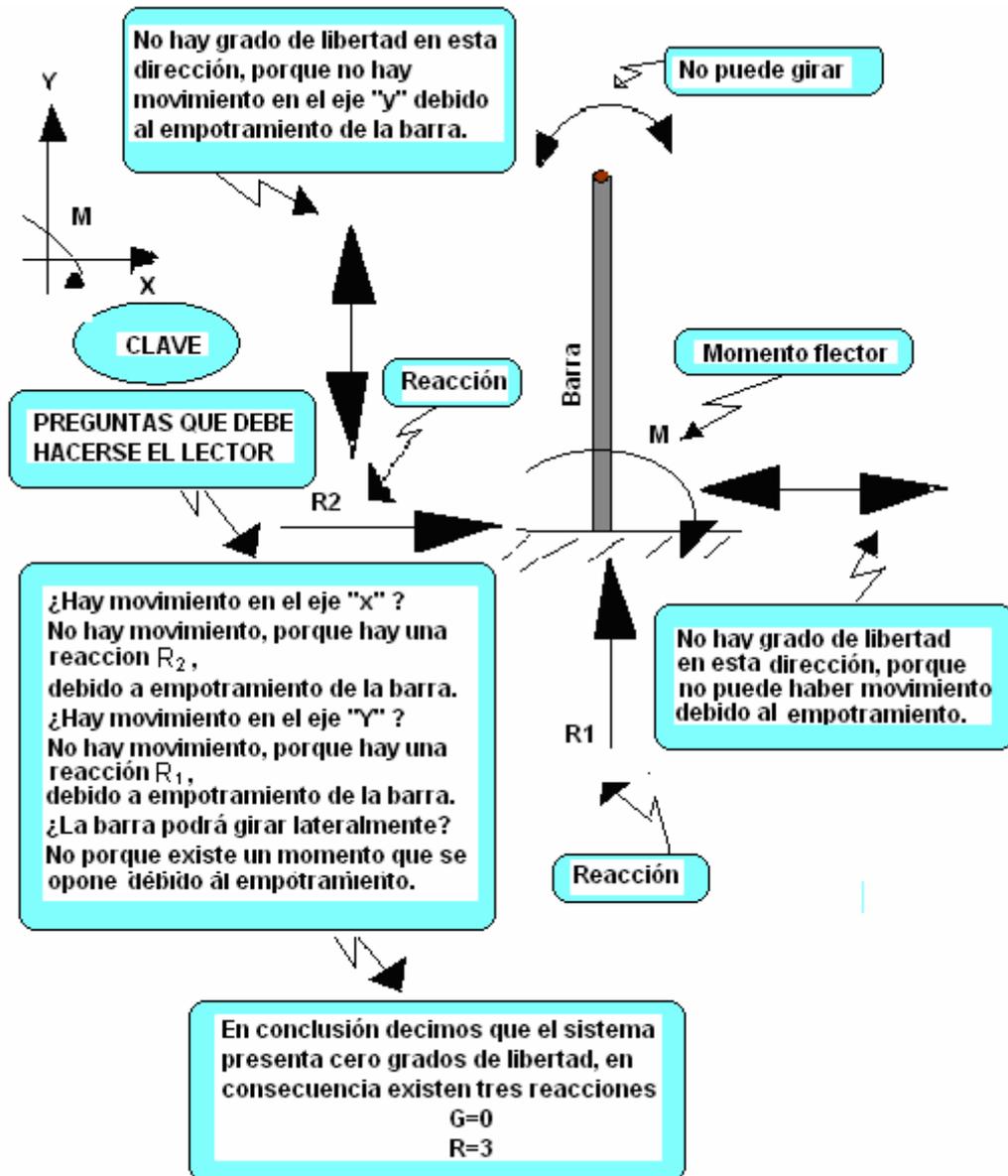
La mejor explicación se da con ejemplo:

**Ejemplo 1.-** Sistema de una barra en apoyo móvil.



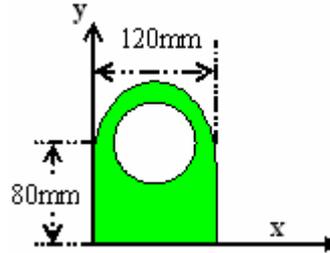


**Ejemplo 3.**-El sistema presenta una barra empotrada.

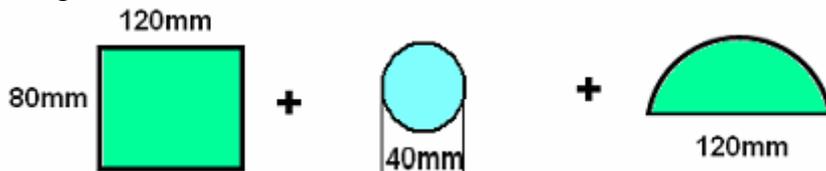


**PROBLEMAS RESUELTOS DE CENTROIDE Y MOMENTOS DE INERCIA**

**PROBLEMA 1.-** Para el área plana mostrada en la figura, determinar las coordenadas del centroide con respecto a los ejes dados, si el diámetro interior de la sección hueca es 40mm



Lo más conveniente es dividir en figuras conocidas, que se puede fácilmente detectar sus centros de gravedad de cada una de ellas.



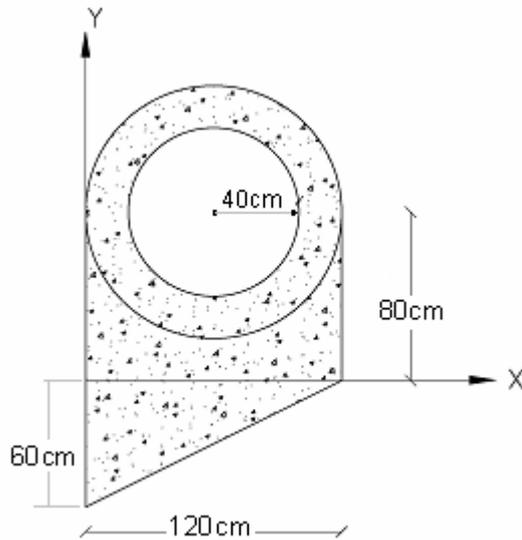
Figuras conocidas	A (mm <sup>2</sup> )	$\bar{x}$ (mm)	$\bar{y}$ (mm)	$\bar{x} A$ (mm <sup>3</sup> )	$\bar{y} A$ (mm <sup>3</sup> )
Rectángulo	$120 \cdot 80 = 9.6 \cdot 10^3$	60	40	$576 \cdot 10^3$	$384 \cdot 10^3$
Círculo	$-\pi 40^2 = -5.027 \cdot 10^3$	60	80	$-301.6 \cdot 10^3$	$-402.2 \cdot 10^3$
Semicírculo	$\frac{1}{2} \pi 60^2 = 5.655 \cdot 10^3$	60	105.46	$339.3 \cdot 10^3$	$596.4 \cdot 10^3$
	<b><math>\Sigma A = 10228</math></b>			<b><math>\Sigma \bar{x} A</math> 613700</b>	<b><math>\Sigma \bar{y} A</math> 578200</b>

$$\bar{x} = \frac{613700}{10228} \rightarrow \bar{x} = 60.002 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{578200}{10228} \rightarrow \bar{y} = 56.53 \text{ mm}$$

Las coordenadas del centroide son (60.002, 56.53)

**PROBLEMA 2.-**Para el sistema mostrado en la figura. Determinar las coordenadas del centro de gravedad. Con respecto al eje dado.

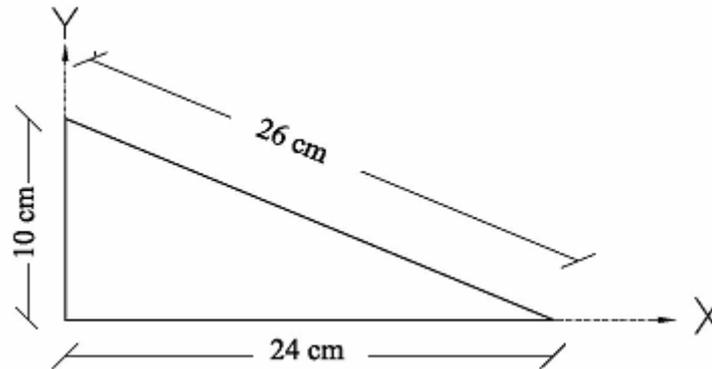


Secciones	Área(cm <sup>2</sup> )	$\bar{x}(cm)$	$\bar{y}(cm)$	$\bar{x}A$	$\bar{y}A$
Triángulo	3600	40	-20	144000	-72000
Rectángulo	9600	60	40	576000	384000
Semicírculo	5655	60	105.46	339300	596376.3
Círculo	-5027	60	80	-301620	-402160
$\Sigma$	13828			757680	506216.3

$$\bar{X} = \frac{\Sigma AX}{\Sigma A} \Rightarrow \bar{X} = \frac{757680}{13828} \Rightarrow \bar{X} = 54.8 \text{ cm}$$

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma AY}{\Sigma A} \Rightarrow \bar{Y} = \frac{506216.3}{13828} \Rightarrow \bar{Y} = 36.6 \text{ cm}$$

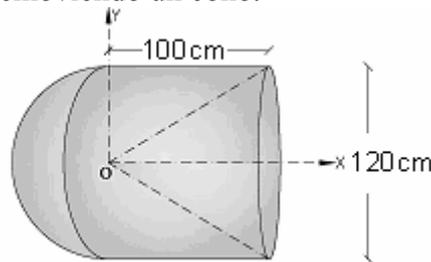
**PROBLEMA 3.**-La figura mostrada esta hecha a partir de un pedazo de alambre delgado y homogéneo, Determinar la ubicación del centro de gravedad. Con respecto al eje dado.



$$\bar{X} = \frac{\sum L\bar{X}_i}{\sum L} \Rightarrow \bar{X} = \frac{10(0) + 24(12) + 26(12)}{10 + 24 + 26} \Rightarrow \bar{X} = 10 \text{ cm}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum LY_i}{\sum L} = \frac{(10)(5) + 24(0) + 26(5)}{60} \Rightarrow \bar{Y} = 3 \text{ cm}$$

**PROBLEMA 5.**-Determinése la ubicación del centro de gravedad del cuerpo de revolución homogéneo mostrado en la figura, el cual fue obtenido uniendo una semiesfera y un cilindro y removiendo un cono.



Secciones	Volumen (cm <sup>3</sup> )	$\bar{x}(cm)$	$xv(cm)$
Cono	-376991.1184	75	-28274333.88
Cilindro	1130973.355	50	56548667.75
Semiesfera	452389.342	-22.5	-10178760.2
$\Sigma$	1206371.579		18095573.67

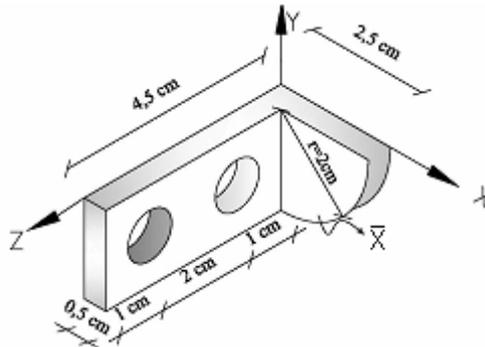
Como  $\rightarrow V = \frac{\pi}{3} r^2 h \rightarrow \bar{X} = \frac{3}{4} h \therefore$  Como  $\rightarrow V = \pi r^2 h \rightarrow \bar{X} = \frac{h}{2}$

Semiesferas  $\rightarrow V = 0.54 \frac{\pi}{3} r^2 \rightarrow \bar{X} = \frac{3}{8} r$

$\bar{Y} = 0$  con respecto al eje de coordenadas.

$$\bar{X} = \frac{\sum Vx_i}{\sum V} \Rightarrow \bar{X} = \frac{18095573.67}{1206371.579} \Rightarrow \bar{X} = 15 \text{ cm}$$

**PROBLEMA 6.**-Localizar el centro de gravedad del elemento de maquina hecho de acero que se muestra en la figura. El diámetro de cada agujero es de 1cm. Con respecto al eje dado.



$$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi} \Rightarrow \bar{x} = \frac{4*2}{3\pi} \Rightarrow \bar{x} = 0.8488cm$$

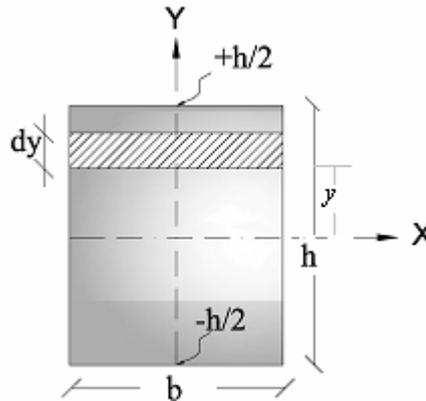
Figuras	Vol. (cm <sup>3</sup> )	$\bar{x}(cm)$	$\bar{y}(cm)$	$\bar{z}(cm)$	$v\bar{x}$	$v\bar{y}$	$v\bar{z}$
Rectángulo	4.5	0.25	-1	2.25	1.125	-4.5	10.125
Cilindro	-0.3927	0.25	-1	1.5	-0.098175	0.3927	-0.589
	-0.3927	0.25	-1	3.5	-0.098175	0.3927	-1.374
¼ Cilindro	1.571	1.3488	-0.849	0.25	2.1189648	-1.3334	0.3927
$\Sigma$	5.2856				3.0476148	-5.0480	8.5542

$$\bar{X} = \frac{\Sigma Vx}{\Sigma V} \Rightarrow \bar{X} = \frac{3.0476148}{5.2856} \Rightarrow \bar{X} = 0.58 \text{ cm}$$

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma Vy}{\Sigma V} \Rightarrow \bar{Y} = \frac{-5.0480648}{5.2856} \Rightarrow \bar{Y} = -0.955 \text{ cm}$$

$$\bar{Z} = \frac{\Sigma Vz}{\Sigma V} \Rightarrow \bar{Z} = \frac{8.55425}{5.2856} \Rightarrow \bar{Z} = 1.618 \text{ cm}$$

**PROBLEMA 7.**-Para una sección rectangular de base  $b$  y de altura  $h$ . Determinar el momento de inercia respecto a un eje paralelo a la base por el centro de gravedad y un eje que coincida con la base.



$$\int dI_x = \int y^2 dA \Rightarrow I_x = \int y^2 dA \Rightarrow I_x = \int y^2 (b dy)$$

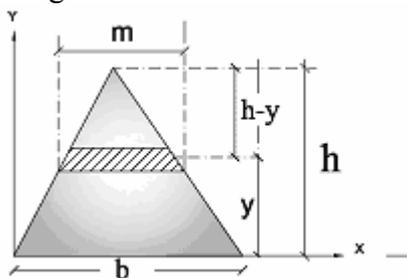
$$I_x = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy \Rightarrow I_x = \frac{by^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} \Rightarrow I_x = \frac{b}{3} \left[ \left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3 \right]$$

$$I_x = \frac{b}{3} \left( \frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right) \Rightarrow I_x = \frac{bh^3}{12} \dots \dots \dots \text{Con respecto al centro de gravedad}$$

Con respecto a la base

$$I_x = \int_0^h by^2 dy \Rightarrow I_x = \frac{by^3}{3} \Big|_0^h \Rightarrow I_x = \frac{bh^3}{3} \dots \dots \dots \text{respecto a la base}$$

**PROBLEMA 8.**-Se dibuja un triángulo de base  $b$  y altura  $h$ ; el eje  $x$  se selecciona de tal forma que coincida con la base del triángulo. Determine el momento de inercia con respecto al eje  $x$ , con respecto a la base y con respecto al centro de gravedad del triángulo.



$$I_x = \int y^2 dA \Rightarrow I_x = \int y^2 (m dy) \dots \dots (1)$$

Por relación de triángulos

$$\frac{m}{b} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow m = \frac{b}{h}(h-y) \dots \dots \dots (2)$$

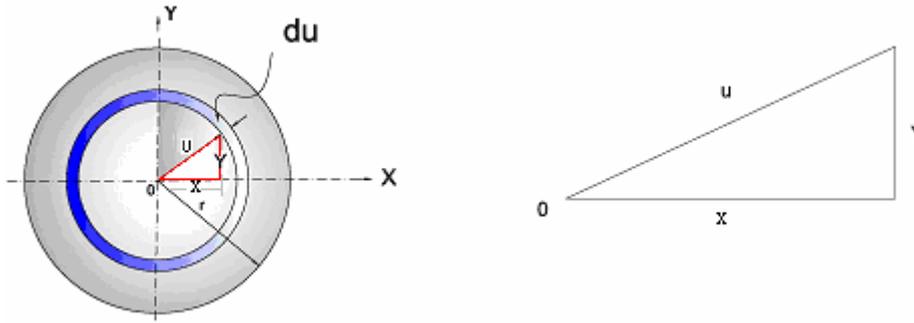
Reemplazar 2 en 1

$$I_x = \int_0^h y^2 \left( \frac{b}{h}(h-y) \right) dy \Rightarrow I_x = \frac{bh^3}{3} \rightarrow \text{con respecto a la base}$$

Con respecto al centro de gravedad

Por teorema de Steiner  $I_x = \bar{I}_x + Ady^2 \Rightarrow \bar{I}_x = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{bh}{2}\right) \left(\frac{h}{3}\right)^2 \Rightarrow \bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$

**PROBLEMA 9.-** Para una sección circular. Determinar el momento de inercia polar y los momentos rectangulares con respecto a ambos ejes (x,y)



$$dI_p = u^2 dA \Rightarrow \int dI_p = \int_0^r u^2 (2\pi u) du \Rightarrow I_p = 2\pi \int_0^r u^3 du$$

$$I_p = \frac{2\pi u^4}{4} \Big|_0^r \Rightarrow I_p = \frac{\pi r^4}{2} \quad \text{como } r = \frac{d}{2} \Rightarrow I_p = \frac{\pi}{2} \left(\frac{d}{2}\right)^4 \Rightarrow I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

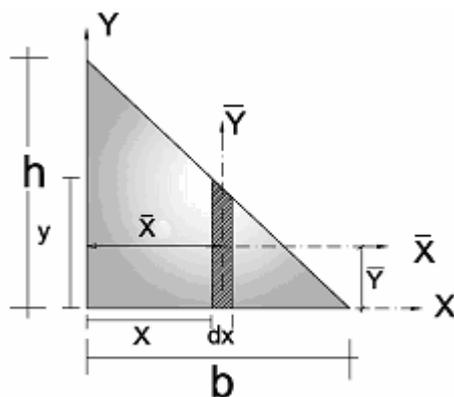
Determinación de momentos de inercia con respecto a los ejes

$$dI_p = u^2 dA \Rightarrow \int dI_p = \int (x^2 + y^2) dA \Rightarrow I_p = \int x^2 dA + \int y^2 dA$$

$$I_p = I_x + I_y \Rightarrow I_x = I_y \rightarrow \text{caso circular}$$

$$I_p = 2I_x \Rightarrow \frac{\pi d^4}{32} = 2I_x \Rightarrow I_x = \frac{\pi d^4}{64} \dots\dots \text{Respecto al centro de gravedad.}$$

**PROBLEMA 10.-** Determinar el producto de inercia del triángulo recto mostrado en la figura, con respecto a ejes centroidales que son paralelos a los ejes (x,y)



$$dA = Y dx \dots\dots 1$$

$$\text{pero } \frac{y}{h} = \frac{b-x}{b} \Rightarrow y = h \left(1 - \frac{x}{b}\right) \dots\dots 2$$

Reemplazando 2 en 1

$$dA = h \left(1 - \frac{x}{b}\right) dx$$

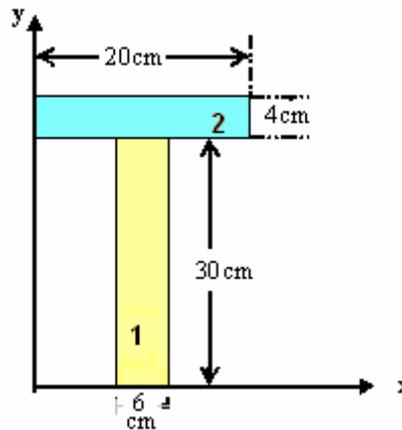
$$I_{xy} = \int \bar{X}_e \bar{Y}_e dA \Rightarrow I_{xy} = \int x \left(\frac{1}{2} y\right) dA \Rightarrow I_{xy} = \int \frac{1}{2} x \left[ h \left(1 - \frac{x}{b}\right) \right]^2 dx \Rightarrow$$

$$I_{xy} = \frac{1}{2} h^2 \int_0^b x \left(1 - \frac{x}{b}\right)^2 dx \Rightarrow \text{Integrando } I_{xy} = \frac{b^2 h^2}{24}$$

$$\text{Con respecto al centro de gravedad. } I_{xy} = \bar{I}_{xy} + \bar{x} * \bar{y} * A \Rightarrow$$

$$\frac{b^2 * h^2}{24} = \bar{I}_{xy} + (1/3b)(1/3h)(1/2bh) \Rightarrow \bar{I}_{xy} = -\frac{b^2 h^2}{72}$$

**PROBLEMA 11.-** Determinar el momento de inercia con respecto a ambos ejes y el producto de inercias a partir de la figura presentada a continuación.



**Paso 1.-** Determinación del centro de gravedad

$$\bar{x} = \frac{6 \cdot 30 \cdot 10 + 20 \cdot 4 \cdot 10}{6 \cdot 30 + 20 \cdot 4} \rightarrow \bar{x} = 10 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{6 \cdot 30 \cdot 15 + 20 \cdot 4 \cdot 32}{6 \cdot 30 + 20 \cdot 4} \rightarrow \bar{y} = 20.23 \text{ cm}$$

**Paso 2.-** Utilizando los ejes paralelos o el Teorema de Steiner calculamos los momentos de inercia.

$$I_x = \sum (I_0 + A(dy)^2) \rightarrow I_x = \sum \left( \frac{b \cdot h^3}{12} + bh(\bar{y} - y')^2 \right)$$

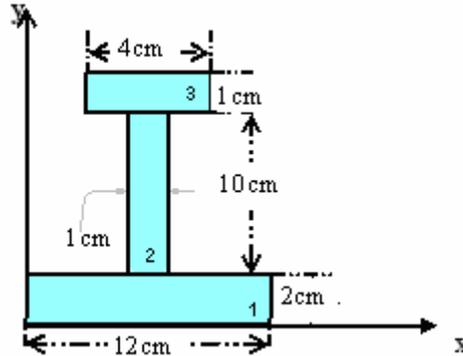
$$I_x = \frac{6 \cdot 30^3}{12} + 180(15 - 20.23)^2 + \frac{20 \cdot 4^3}{12} + 80(32 - 20.23)^2 \rightarrow I_x = 29612.82 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \sum (I_0 + A(dx)^2) \rightarrow I_y = \sum \left( \frac{h \cdot b^3}{12} + bh(\bar{x} - x')^2 \right)$$

$$I_y = \frac{30 \cdot 6^3}{12} + 180(10 - 10)^2 + \frac{4 \cdot 20^3}{12} + 80(10 - 10)^2 \rightarrow I_y = 3206.67 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = \sum (A(\bar{y} - y')(\bar{x} - x')) \rightarrow I_{xy} = 180 \cdot (-5.23) \cdot (0) + 80 \cdot (11.77) \cdot (0) \rightarrow I_{xy} = 0$$

**PROBLEMA 12.-** Determinar el momento de inercia con respecto a ambos ejes y el producto de inercias a partir de la figura presentada a continuación.



**Paso 1.-** Determinación del centro de gravedad

$$\bar{x} = \frac{12 \cdot 2 \cdot 6 + 10 \cdot 1 \cdot 6 + 4 \cdot 1 \cdot 6}{12 \cdot 2 + 10 \cdot 1 + 4 \cdot 1} \rightarrow \bar{x} = \frac{228}{38} \rightarrow \bar{x} = 6 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{12 \cdot 2 \cdot 1 + 10 \cdot 1 \cdot 6 + 4 \cdot 1 \cdot 12.5}{12 \cdot 2 + 10 \cdot 1 + 4 \cdot 1} \rightarrow \bar{y} = \frac{134}{38} \rightarrow \bar{y} = 3.53 \text{ cm}$$

**Paso 2.-** Utilizando los ejes paralelos o el Teorema de Steiner calculamos los momentos de inercia.

$$I_x = \sum (I_0 + A(dy)^2) \rightarrow I_x = \sum \left( \frac{b \cdot h^3}{12} + bh(\bar{y} - y')^2 \right)$$

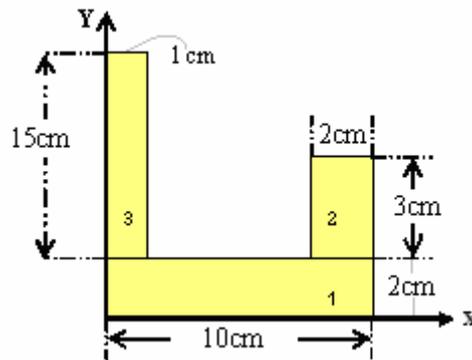
$$I_x = \frac{12 \cdot 2^3}{12} + 24(1 - 3.53)^2 + \frac{1 \cdot 10^3}{12} + 10(6 - 3.53)^2 + \frac{4 \cdot 1^3}{12} + 4(12.5 - 3.53)^2 \rightarrow I_x = 628.14 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \sum (I_0 + A(dx)^2) \rightarrow I_y = \sum \left( \frac{h \cdot b^3}{12} + bh(\bar{x} - x')^2 \right)$$

$$I_y = \frac{2 \cdot 12^3}{12} + 24(6 - 6)^2 + \frac{10 \cdot 1^3}{12} + 10(6 - 6)^2 + \frac{1 \cdot 4^3}{12} + 4(6 - 6)^2 \rightarrow I_y = 294.16 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = \sum (A(\bar{y} - y')(\bar{x} - x')) \rightarrow I_{xy} = 24 \cdot (-2.53) \cdot (0) + 10 \cdot (2.47) \cdot (0) + 4 \cdot (8.97) \cdot (0) \rightarrow I_{xy} = 0$$

**PROBLEMA 13.-** Determinar los momentos de inercia máximos y mínimos



**Paso 1.-** Determinar el centro de gravedad lo mismo que el ejercicio anterior se tiene las coordenadas del centroide (3.94, 4.48).

**Paso 2.-** Utilizando los ejes paralelos o el Teorema de Steiner calculamos los momentos de inercia.

$$I_x = \sum (I_0 + A(dy)^2) \rightarrow I_x = \sum \left( \frac{b \cdot h^3}{12} + bh(\bar{y} - y')^2 \right)$$

$$I_x = \frac{10 \cdot 2^3}{12} + 20(1 - 4.48)^2 + \frac{2 \cdot 3^3}{12} + 6(3.5 - 4.48)^2 + \frac{1 \cdot 15^3}{12} + 15(9.5 - 4.48)^2 \rightarrow I_x = 918.39 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \sum (I_0 + A(dx)^2) \rightarrow I_y = \sum \left( \frac{h \cdot b^3}{12} + bh(\bar{x} - x')^2 \right)$$

$$I_y = \frac{2 \cdot 10^3}{12} + 20(5 - 3.94)^2 + \frac{3 \cdot 2^3}{12} + 6(9 - 3.94)^2 + \frac{15 \cdot 1^3}{12} + 15(0.5 - 3.94)^2 \rightarrow I_y = 523.51 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = \sum (A(\bar{y} - y')(\bar{x} - x')) \rightarrow I_{xy} = 20 \cdot (-3.48) \cdot (1.06) + 6 \cdot (-0.98) \cdot (5.06) + 15 \cdot (5.02) \cdot (-3.44)$$

$$\therefore I_{xy} = -362.56 \text{ cm}^4$$

**Paso 3.-** Calculo de los momentos de inercia máximos y mínimos

$$\tan 2\theta = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} \rightarrow \tan 2\theta = \frac{2 \cdot 362.56}{918.39 - 523.51} \rightarrow 2\theta = 61.43$$

$$I_{x'} = \frac{(I_x + I_y)}{2} + \frac{(I_x - I_y)}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

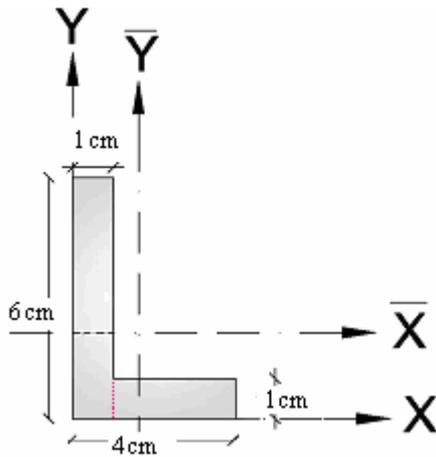
$$I_{x'} = \frac{(1441.9)}{2} + \frac{(394.88)}{2} \cos 61.43 + 362.56 \sin 61.43 \rightarrow I_{x'} = 1133.78 \text{ cm}^4$$

$$I_{y'} = \frac{(I_x + I_y)}{2} - \frac{(I_x - I_y)}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{(1441.9)}{2} - \frac{(394.88)}{2} \cos 61.43 - 362.56 \sin 61.43 \rightarrow I_{y'} = 308.12 \text{ cm}^4$$

$$I_{x'y'} = \frac{(I_x - I_y)}{2} \sin 2\theta - I_{xy} \cos 2\theta \rightarrow I_{x'y'} = \frac{(394.88)}{2} \sin 61.43 - 362.56 \cos 61.43 \rightarrow I_{x'y'} = 0$$

**PROBLEMA 14.-** Para una figura L mostrada a continuación. Se pide determinar los momentos de inercia máximos. Para ambos ejes (x,y).



$$\bar{X} = \frac{\Sigma AX}{\Sigma A} \Rightarrow \bar{X} = \frac{(3)(2.5) + 6(0.5)}{3+6} \Rightarrow \bar{X} = 1.17 \text{ cm}$$

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma AY}{\Sigma A} \Rightarrow \bar{Y} = \frac{(3)(0.5) + 6(3)}{9} \Rightarrow \bar{Y} = 2.17 \text{ cm}$$

$$I_x = \Sigma \frac{bh^3}{12} + A(dy)^2 \Rightarrow I_x = \frac{3(1)^3}{12} + 3(0.5 - 2.17)^2 + \frac{1(6)^3}{12} + 6(3 - 2.17)^2 \Rightarrow$$

$$I_x = 30.75 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \Sigma \frac{hb^3}{12} + A(dx)^2 \Rightarrow I_y = \frac{1(3)^3}{12} + 3(2.5 - 1.17)^2 + \frac{6(1)^3}{12} + 6(0.5 - 1.17)^2 \Rightarrow$$

$$I_y = 10.75 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = \Sigma \bar{X}\bar{Y}A \Rightarrow I_{xy} = (1.33)(-1.67)(3) + (-0.67)(0.83)(6) \Rightarrow I_{xy} = -10 \text{ cm}^4$$

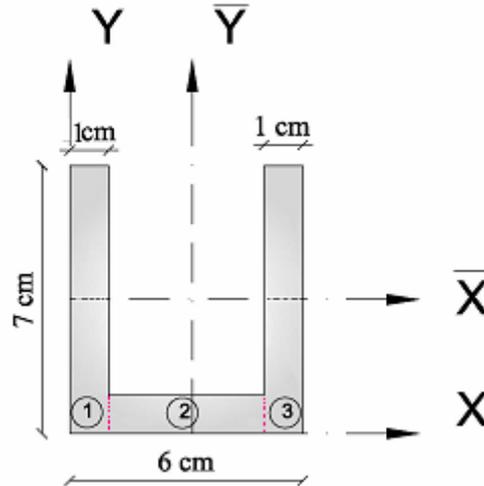
$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \Rightarrow I_{x'} = \frac{30.75 + 10.75}{2} + \sqrt{\left(\frac{30.75 - 10.75}{2}\right)^2 + (-10)^2}$$

$$I_{x'} = 34.89 \text{ cm}^4$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \Rightarrow I_{y'} = \frac{30.75 + 10.75}{2} - \sqrt{\left(\frac{30.75 - 10.75}{2}\right)^2 + (-10)^2}$$

$$I_{y'} = 6.61 \text{ cm}^4$$

**PROBLEMA 15.-** Para una figura U mostrada se pide determinar los momentos de inercia máximos con respecto a los ejes (x, y)



Determinación del centro de gravedad.

$$\bar{X} = \frac{\sum AX}{\sum A} \Rightarrow \bar{X} = \frac{(7)(0.5) + 4(3) + 7(5.5)}{18} \Rightarrow \bar{X} = 3 \text{ cm}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum AY}{\sum A} \Rightarrow \bar{Y} = \frac{(7)(3.5) + 4(0.5) + 7(3.5)}{18} \Rightarrow \bar{Y} = 2.83 \text{ cm}$$

Determinación de los momentos de inercia.

$$I_x = \sum \frac{bh^3}{12} + A(dy)^2 \Rightarrow I_x = \left[ \frac{1(7)^3}{12} + 7(3.5 - 2.83)^2 \right] 2 + \frac{4(1)^3}{12} + 4(0.5 - 2.83)^2 \Rightarrow$$

$$I_x = 85.5 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \sum \frac{hb^3}{12} + A(dx)^2 \Rightarrow I_y = \frac{7(1)^3}{12} + 7(0.5 - 3)^2 + \frac{7(1)^3}{12} + 7(5.5 - 3)^2 + \frac{4^3}{12} + 4(0)^2 \Rightarrow$$

$$I_y = 94 \text{ cm}^4$$

Determinación de producto de momentos de inercia.

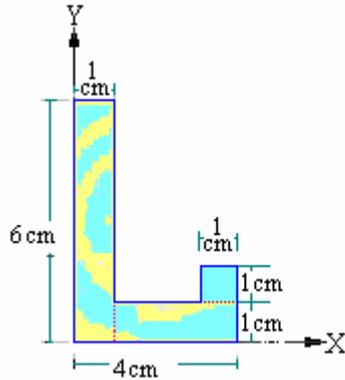
$$I_{xy} = \sum \bar{X}\bar{Y}A \Rightarrow I_{xy} = (-2.5)(0.67)(7) + (2.5)(0.67)(7) + 0(-2.33)(4) \Rightarrow I_{xy} = 0 \text{ cm}$$

Determinación de los momentos de inercia máximas.

$$\text{Como } I_{xy} = 0 \Rightarrow I_{x'} = I_y \Rightarrow I_{x'} = 94 \text{ cm}^4$$

$$I_{y'} = I_x \Rightarrow I_{y'} = 85.5 \text{ cm}^4$$

**PROBLEMA 16.-** Para una figura L mostrada a continuación. Se pide determinar los momentos de inercia máximos. Para ambos ejes (x,y).



$$\bar{x} = \frac{\sum A_i X_i}{\sum A} \Rightarrow \bar{x} = \frac{3 \cdot 2.5 + 6 \cdot 0.5 + 1 \cdot 3.5}{3 + 6 + 1} \Rightarrow \bar{x} = 1.4 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i Y_i}{\sum A} \Rightarrow \bar{y} = \frac{3 \cdot 0.5 + 6 \cdot 3 + 1 \cdot 1.5}{3 + 6 + 1} \Rightarrow \bar{y} = 2.1 \text{ cm}$$

$$I_x = \sum \frac{bh^3}{12} + A(dy)^2 \Rightarrow$$

$$I_x = \frac{3(1)^3}{12} + 3(0.5 - 2.1)^2 + \frac{6(1)^3}{12} + 6(3 - 2.1)^2 + \frac{1(1)^3}{12} + 1(1.5 - 2.1)^2 \Rightarrow$$

$$I_x = 26.913 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \sum \frac{hb^3}{12} + A(dx)^2 \Rightarrow$$

$$I_y = \frac{1(3)^3}{12} + 3(2.5 - 1.4)^2 + \frac{6(1)^3}{12} + 6(0.5 - 1.4)^2 + \frac{1(1)^3}{12} + 1(3.5 - 1.4)^2 \Rightarrow$$

$$I_y = 15.733 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = \sum \bar{X}\bar{Y}A \Rightarrow \}$$

$$I_{xy} = (3)(1.1)(-1.6) + (6)(-0.9)(0.3) + 1(2.1)(-0.6) \Rightarrow I_{xy} = -8.16 \text{ cm}^4$$

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \Rightarrow I_{x'} = \frac{26.913 + 15.733}{2} + \sqrt{\left(\frac{26.913 - 15.733}{2}\right)^2 + (-8.16)^2}$$

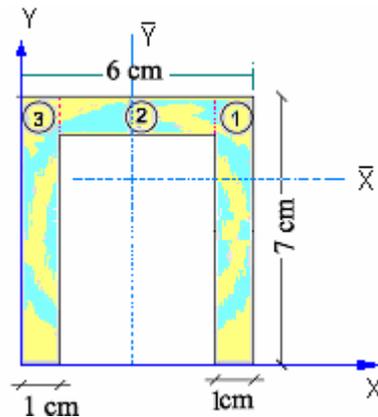
$$I_{x'} = 31.2141 \text{ cm}^4$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \Rightarrow I_{y'} = \frac{26.913 + 15.733}{2} - \sqrt{\left(\frac{26.913 - 15.733}{2}\right)^2 + (-8.16)^2}$$

$$I_{y'} = 11.432 \text{ cm}^4$$

$$I_{x'y'} \cong 0 \text{ cm}^4$$

**PROBLEMA 17.-** Para una figura U invertida mostrada se pide determinar los momentos de inercia máximos con respecto a los ejes (x, y)



Determinación del centro de gravedad.

$$\bar{X} = \frac{\sum AX}{\sum A} \Rightarrow \bar{X} = \frac{(7)(0.5) + 4(3) + 7(5.5)}{18} \Rightarrow \bar{X} = 3 \text{ cm}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum AY}{\sum A} \Rightarrow \bar{Y} = \frac{(7)(3.5) + 4(7.5) + 7(3.5)}{18} \Rightarrow \bar{Y} = 4.39 \text{ cm}$$

Determinación de los momentos de inercia.

$$I_x = \sum \frac{bh^3}{12} + A(dy)^2 \Rightarrow I_x = \left[ \frac{1(7)^3}{12} + 7(3.5 - 4.39)^2 \right] 2 + \frac{4(1)^3}{12} + 4(0.5 - 4.39)^2 \Rightarrow$$

$$I_x = 129.1178 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \sum \frac{hb^3}{12} + A(dx)^2 \Rightarrow I_y = \frac{7(1)^3}{12} + 7(0.5 - 3)^2 + \frac{7(1)^3}{12} + 7(5.5 - 3)^2 + \frac{4^3}{12} + 4(0)^2 \Rightarrow$$

$$I_y = 94 \text{ cm}^4$$

Determinación de producto de momentos de inercia.

$$I_{xy} = \sum \bar{X}\bar{Y}A \Rightarrow I_{xy} = (-2.5)(-0.89)(7) + (2.5)(-0.89)(7) + 0(-2.33)(4) \Rightarrow I_{xy} = 0 \text{ cm}$$

Determinación de los momentos de inercia máximas.

$$\text{Como } I_{xy} = 0 \Rightarrow I_{x'} = I_x \Rightarrow I_{x'} = 129.1178 \text{ cm}^4$$

$$I_{y'} = I_y \Rightarrow I_{y'} = 94 \text{ cm}^4$$

---

# CAPITULO I

## CONCEPTO DE ESFUERZO

---

### 1.1.- INTRODUCCIÓN

El principal objetivo del estudio de resistencia de materiales es dar al ingeniero los medios para analizar y diseñar diferentes maquinas y estructuras portantes. Tanto el análisis como el diseño de una estructura, implican la determinación de esfuerzos y deformaciones. Este primer capitulo esta dedicado al concepto de tensión simple, que es el estado de un cuerpo, estirado por la acción de fuerzas que lo solicitan, ver figura 1.1

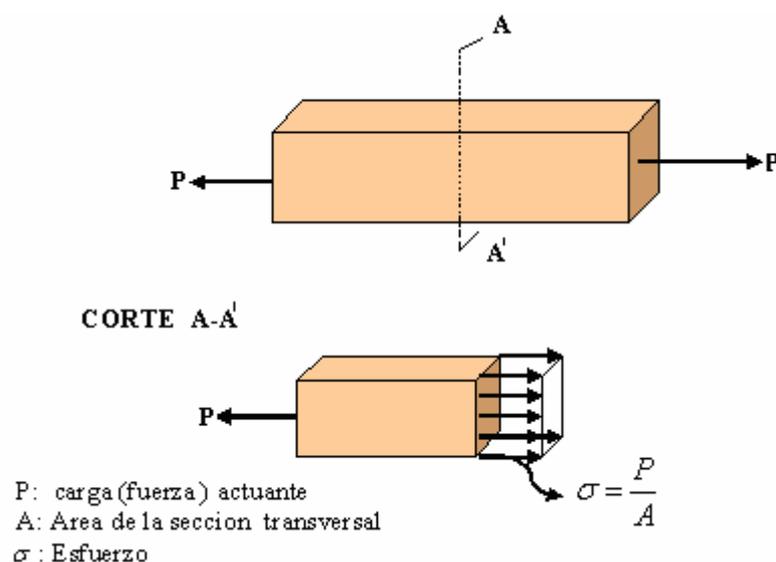


Figura 1.1

### 1.2.- CARGA AXIAL (ESFUERZO NORMAL)

Se dice que una barra está sometido a carga axial, cuando la dirección de la carga corresponde al eje de la barra, la fuerza interna es por lo tanto normal al plano de la sección y el esfuerzo es descrito como un esfuerzo normal. Así, la ecuación de la tensión normal de un elemento sometido a carga axial es:

$$\sigma = P / A$$

Un signo positivo nos indicara un esfuerzo de tracción y un signo negativo nos indicara un esfuerzo de compresión.

$$\sigma = + P / A$$

$$\sigma = - P / A$$

### 1.3.- CARGA SOMETIDO A ESFUERZO (TRACCIÓN - COMPRESIÓN)

#### 1.3.1.- TRACCIÓN

El elemento de la figura 1.2, está sometido a esfuerzo de tracción, cuando la carga **P** tiende a alargar al elemento.

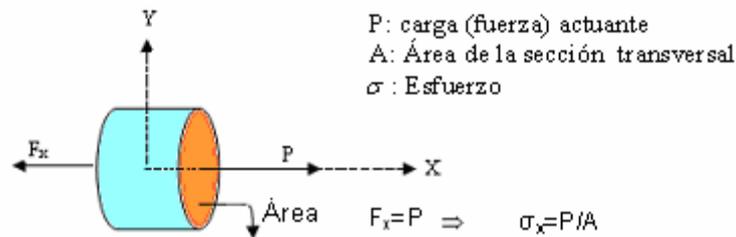


Figura 1.2

#### 1.3.2.- COMPRESIÓN

El elemento de la figura 1.3, esta sometido a esfuerzo de compresión, cuando la carga **P** tiende a encoger al elemento.

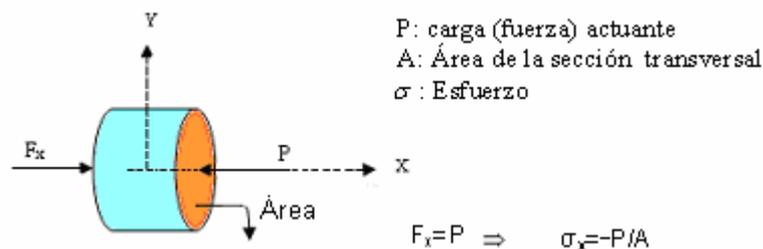
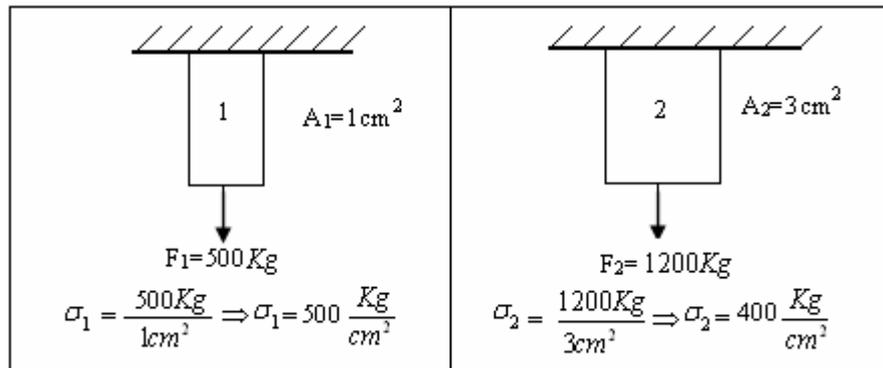


Figura 1.3

El esfuerzo en dicha sección se designa con la letra griega “ $\sigma$ ” (sigma), se obtiene dividiendo la magnitud de la carga “**P**” entre el área de la sección transversal “**A**”.

Por otra parte teniendo dos elementos 1 y 2 de la figura 1.4 veremos, de qué depende el esfuerzo, si los elementos son de secciones transversales y cargas diferentes, los mismos sometidos a esfuerzos de tracción.

Por mas que  $F_2 > F_1$  se ve que  $\sigma_1 > \sigma_2$



**Figura 1.4**

El elemento 1 y 2 se rompe o no bajo la carga actuante, depende no sólo del valor encontrado para la fuerza **F**, también depende del valor de la sección transversal de la barra y del material que está hecho.

### 1.4.- SISTEMAS DE UNIDADES

#### EQUIVALENCIAS EXACTAS ENTRE LAS UNIDADES DEL SISTEMA INGLES (US) Y EL SISTEMA TÉCNICO (ST)

MAGNITUDES	US	ST	UNIDADES
Fuerza	1 lb	= 0.4536	Kgf
	1 kip	= 453.6	Kgf
Fuerza longitud	1 lb/ft	= 1.4862	Kgf/m
	1 kip/ft	= 1486.2	Kgf/m
Esfuerzo y presión	1 lb/in <sup>2</sup> (psi)	= 0.07031	Kgf/cm <sup>2</sup>
	1 lb/ft <sup>2</sup> (psf)	= 4.8825	Kgf/m <sup>2</sup>
	1 lb/in <sup>2</sup> (ksi)	= 70.3081	Kgf/cm <sup>2</sup>
Momentote de fuerza	1 lb . in	= 4882.5	Kgf/m <sup>2</sup>
	1 lb .ft	= 0.01152	Kgf.m
	1 kip . in	= 11.5216	Kgf.m
	1 kip .ft	= 138.257	Kgf.m
Trabajo y energía	1 ft . lb	= 0.13826	Kgf.m

#### EQUIVALENCIAS EXACTAS ENTRE LAS UNIDADES PRINCIPALES DEL SISTEMA INGLES (US) Y EL SISTEMA INTERNACIONAL (SI)

MAGNITUDES	US	SI	SI	US		
Longitud	1 in	= 2.54	Cm	1 cm	= 0.3937	In
	1 ft	= 30.48	Cm	1 m	= 3.281	Ft
Área	1 in <sup>2</sup>	= 6.452	Cm <sup>2</sup>	1 cm <sup>2</sup>	= 0.1550	In <sup>2</sup>
	1 ft <sup>2</sup>	= 929.03	Cm <sup>2</sup>	1 cm <sup>2</sup>	= 10.764	Ft <sup>2</sup>
Volumen	1 in <sup>3</sup>	= 16.39	Cm <sup>3</sup>	1 cm <sup>3</sup>	= 0.0610	In <sup>3</sup>
	1 ft <sup>3</sup>	= 0.028	m <sup>3</sup>	1 m <sup>3</sup>	= 35.336	Ft <sup>3</sup>
Fuerza	1 lb	= 4.448	N	1 N	= 0.2248	Lb
	1 kip	= 4.448	KN	1 KN	= 0.2248	Kip
Fuerza /longitud	1 lb/ft	= 14.59	N/m	1 N/m	= 0.0685	Lb/ft
	1 kip/ft	= 14.59	KN/m	1 kN/m	= 0.685	kip/ft
Esfuerzo ( y presión)	1 lb/in <sup>2</sup>	= 6.895	kPa	1 kPa	= 0.1450	Lb/in <sup>2</sup>
	1 kip/ft <sup>2</sup>	= 47.88	Pa	1 Pa	= 0.02088	kip/ft <sup>2</sup>
	1 kip/in <sup>2</sup>	= 6.895	MPa	1 MPa	= 0.1450	kip/in <sup>2</sup>
	1 kip/ft <sup>2</sup>	= 47.88	kPa	1 KPa	= 0.02088	kip/ft <sup>2</sup>
Momento de fuerza	1 lb . in	= 0.113	N.m	1 N . m	= 8.8495	Lb . in
	1 lb . ft	= 1.356	N.m	1 N . m	= 0.7376	Lb . ft
	1 kip .in	= 0.113	Kn.m	1 KN . m	= 8.8495	kip . in
	1 kip . ft	= 1.3558	KN.m	1 KN . m	= 0.7376	kip . ft

## 1.5.- PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES

Para un diseño de algún elemento estructural o componente de maquina, el diseñador debe predecir el comportamiento del material frente a las acciones externas para los cuales ha sido concebido.

Es de vital importancia e imprescindible conocer el comportamiento del material, es decir de sus propiedades mecánicas.

Bueno, como se tiene tantos materiales, y como cada uno de estos tiene comportamiento diferente unas de otras, lo que se ha hecho es dividir en dos grupos, estos grupos son: MATERIALES DÚCTILES y MATERIALES FRÁGILES

Es entonces que para el conocimiento de propiedades de los materiales, muchos autores han optado el ensayo de ESFUERZO DEFORMACION, para un material de acero de bajo contenido de carbono, porque éste es más representativo para un material dúctil por su gran deformación plástica.

## 1.6.- PROCEDIMIENTO DEL ENSAYO

### 1.6.1.-ENSAYO DUCTIL

#### a) ENSAYO DE TRACCIÓN DE MATERIAL DUCTIL

##### Laboratorio

Aparato hidráulico con mordazas sea de tracción o compresión

Se debe tener una probeta de material de sección cilíndrica o rectangular como se muestra en la figura 1.5

- Se debe tener un extensómetro de precisión (para medir o calibrar las longitudes variantes en cada instante de aumento de carga).
- Un medidor de diámetros de precisión
- Un monitor que grafique la curva esfuerzo deformación, por medio de un sistema de coordenadas en cual se graficará la curva esfuerzo deformación, representando en el eje de las abscisas la deformación y en el eje de las ordenadas el esfuerzo.

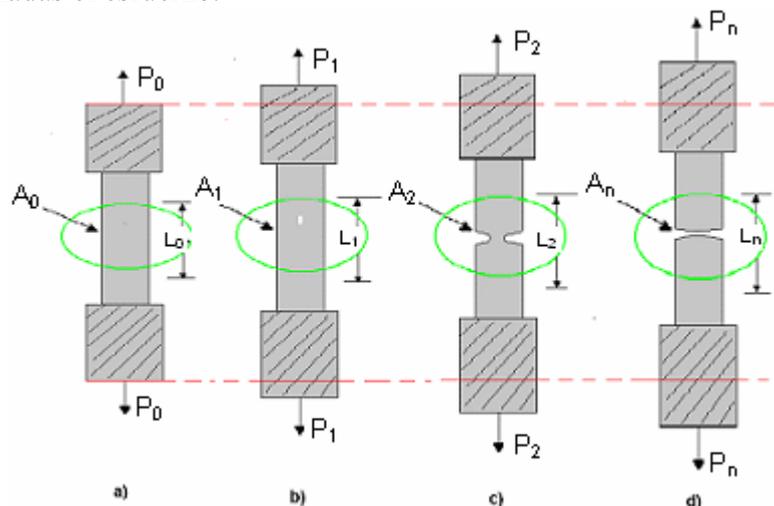


Figura 1.5

Comportamiento de la probeta durante el ensayo.

- Estado original.
- Empezando a cargar.
- Entrando a la zona plástica.
- El material se rompe.

1.6.1.1.- DIAGRAMA ESFUERZO – DEFORMACIÓN

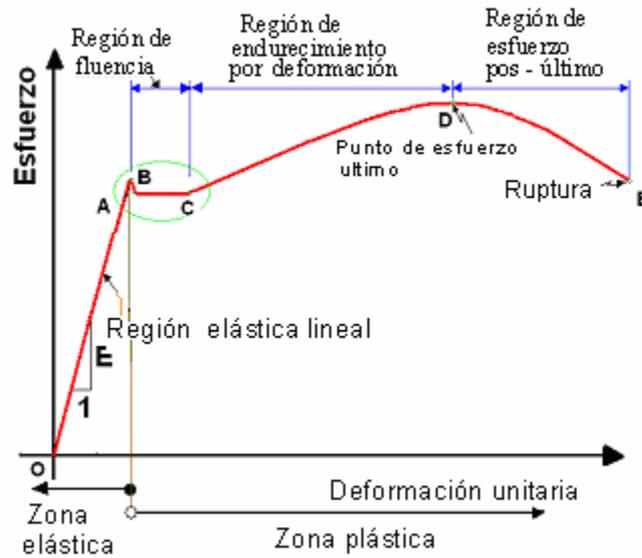


Figura 1.6

1.6.1.2.- PROCEDIMIENTO

- ZONA ELÁSTICA

Cargado del punto “O” al punto “A” (hasta el limite de proporcionalidad).

$$0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_A$$

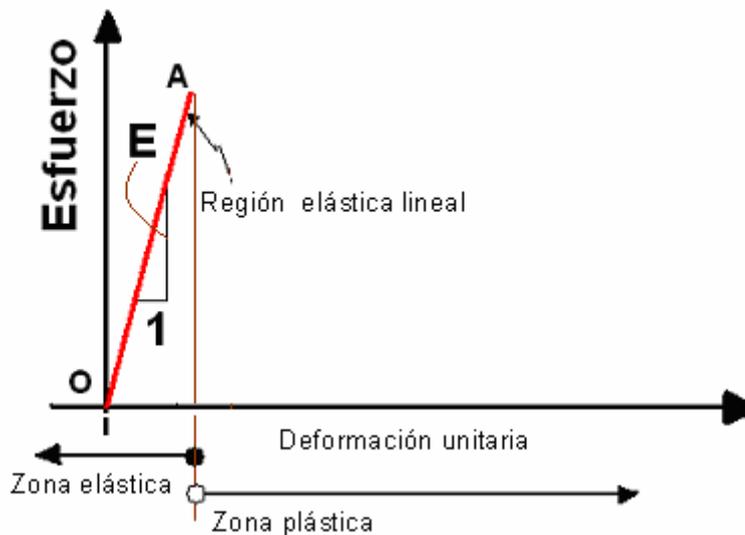


Figura 1.7

Una vez que está la probeta situado en las mordazas, se procede al cargado de cargas sucesivas de tracción, tal que la deformación partiendo de cero llega hasta el punto “A” ver figura 1.7, cuya trayectoria descrita por el monitor es lineal en consecuencia el esfuerzo es proporcional a la deformación, lo que ocurre al material es un comportamiento elástico, que significa que si se lo descarga en ese rango incluyendo el punto “A”, retornará a su estado original sin ningún cambio en su longitud ( $L_0$ ).

**Cargado del punto “A” al punto “B” (hasta el limite elástico)**

$$\epsilon_A < \epsilon \leq \epsilon_B$$

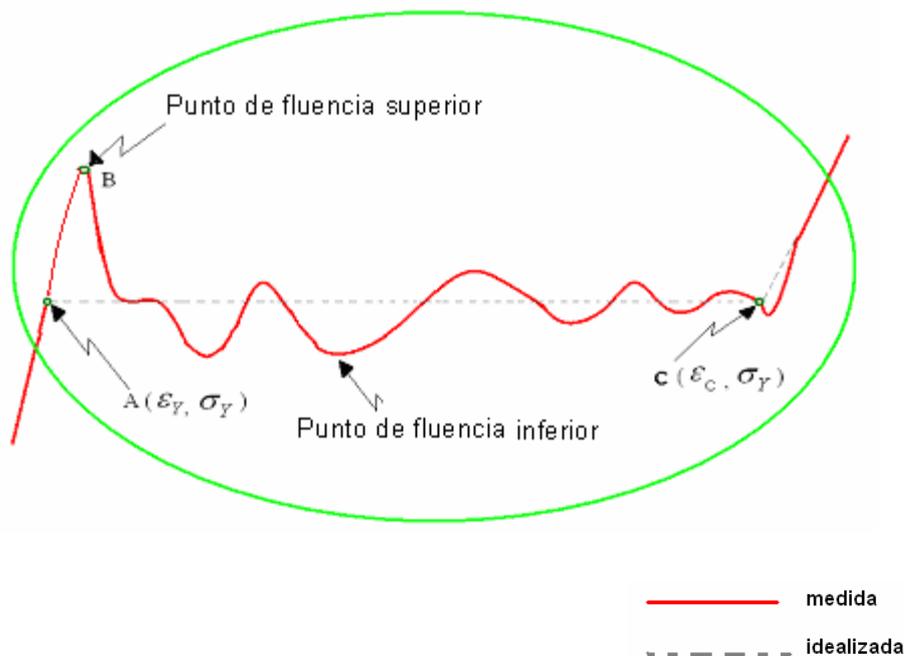
Se sigue cargando constantemente, y el material va deformándose, pero ya no es proporcional el esfuerzo a la deformación, porque ocurre que desde el punto “A” hasta el punto “B”, la trayectoria ya no es lineal es diferente, pero sigue en el rango elástico. Ver figura 1.8

• **ZONA PLÁSTICA**

Región de fluencia.

**Cargado del punto “B” al punto “C”**

$$\epsilon_B < \epsilon < \epsilon_C$$



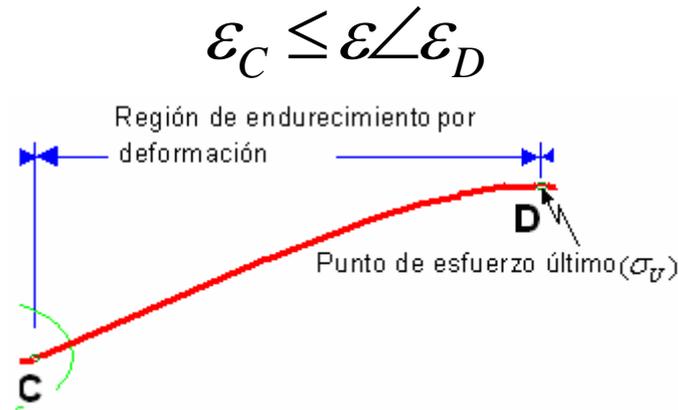
**Figura 1.8**

Una vez desprendido del punto “B” el material presenta un incremento significativo de la de formación con poco o ningún aumento de carga alguna, y la trayectoria descrita por el monitor es de forma zigzag, ver figura 1.8, éste es el tramo de fluencia, en el cual se ve punto de fluencia superior y punto de fluencia inferior, de este rango se toma el promedio y se lo idealiza como una línea recta (ver línea segmentada paralela a la abscisa en la fig. 1.8), a lo cual corresponde esfuerzo de fluencia “ $\sigma_y$ ”.

Esto significa que si se descarga en cualquier punto del rango de fluencia, el material no retorna a su estado original de longitud, quedando así una elongación.

Región de endurecimiento por deformación.

**Cargado del punto “C” al punto “D”**

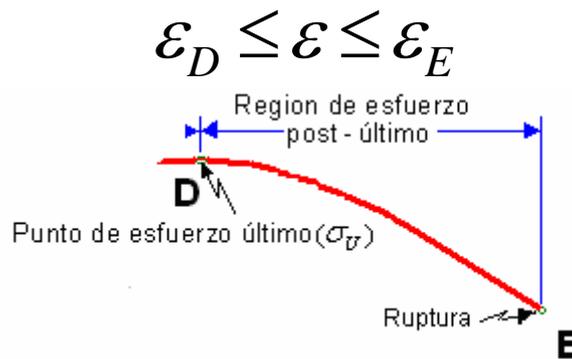


**Figura 1.9**

En ésta región reiniciamos el cargado con la carga de tracción, y el monitor describe una pendiente brusca hasta alcanzar el punto “D” el cual es la resistencia máxima o esfuerzo ultimo “( $\sigma_U$ )”. Ver Figura 1.9

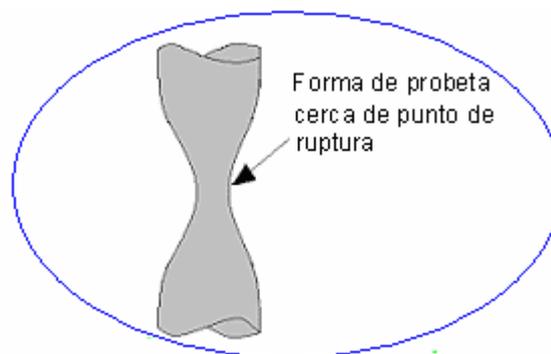
Región de esfuerzo post-ultimo (extricción)

**Cargado del punto “D” al punto “E”**



**Figura 1.10**

Desprendido del punto “D” se necesitará cargas menores para continuar deformando, y en éste rango denominado post-ultimo ver figura 1.10, se presenta el fenómeno de la extricción que es un estrechamiento en la sección transversal, como se puede ver en la figura 1.11



**Figura 1.11**

Una vez llegado al punto “E” el material se rompe, ver Figura 1.12

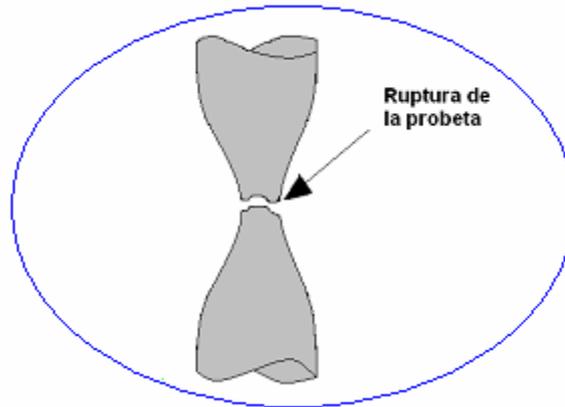


Figura 1.12

Concluimos de este ensayo que los principales causantes de la ruptura en los materiales dúctiles son los esfuerzos cortantes.

**1.6.1.3.- CURVA ESFUERZO DEFORMACIÓN UNITARIA (TRACCIÓN)**

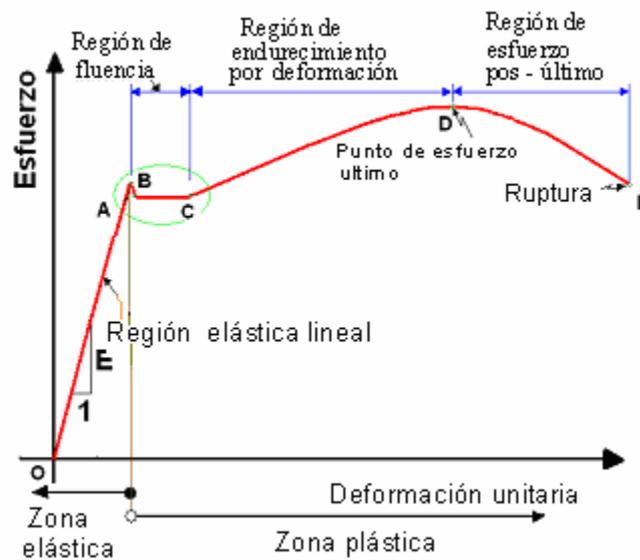


Figura 1.13

**b).- ENSAYO DE COMPRESIÓN DE MATERIAL DUCTIL**

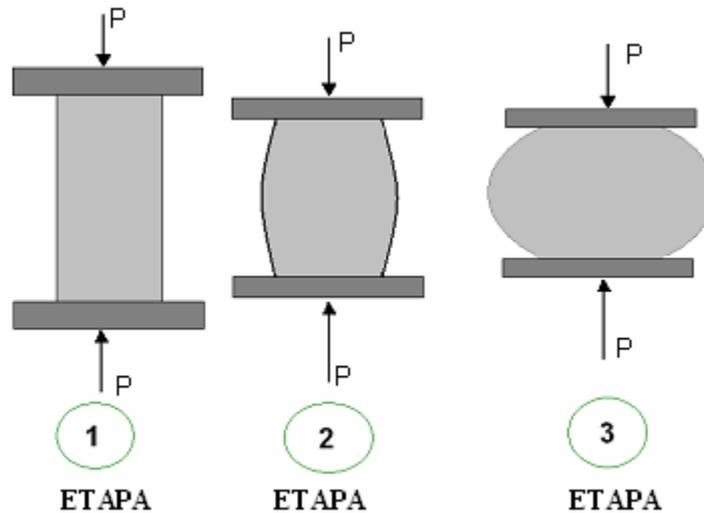
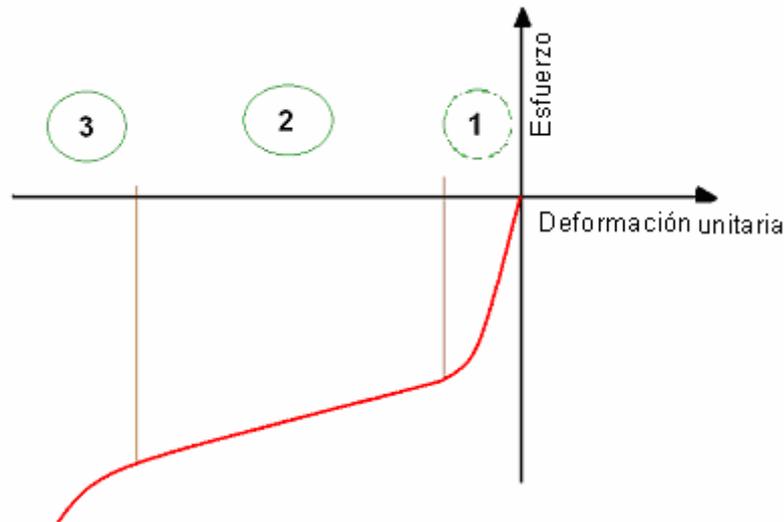


Figura 1.14

**b.1).- CURVA ESFUERZO DEFORMACIÓN UNITARIA EN COMPRESIÓN**



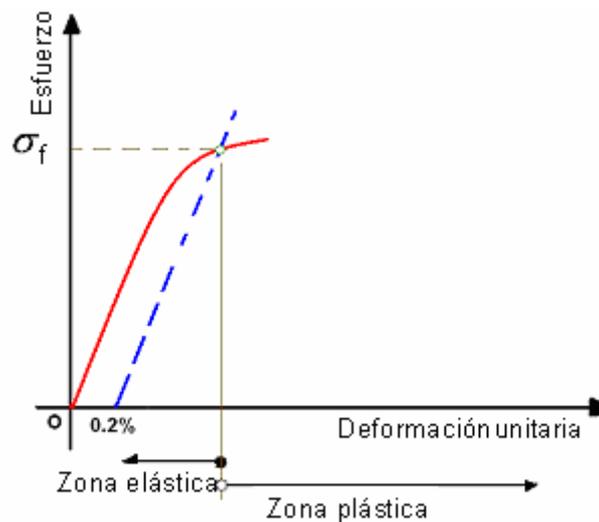
**Figura 1.15**

**ETAPA 1.-** Es el inicio de la compresión, de tal manera que la probeta se comporta de manera elástica, y está en la línea de la proporcionalidad, que significa que si se deja de comprimir la probeta retornara a su estado original.

**ETAPA 2.-** Es la etapa en la cual la probeta empieza a fluir, es aquí que la pendiente disminuye conforme va aumentando el esfuerzo y se inicia la zona plástica, significa que si se deja de comprimir en esta etapa, la probeta no retorna a su estado original, quedando una deformación residual.

**ETAPA 3.-** En esta, la probeta va deformándose más y adquiere una pendiente mucho más pronunciada quedando aplanada la probeta.

Muchos autores indican que en varios materiales es difícil de distinguir el punto de fluencia, es por ello que se acude a un artificio de paralela. Consiste en trazar una paralela a la porción rectilínea línea de proporcionalidad de tal manera que corte a la abscisa en 0.2%, se toma este valor que es arbitrario y muchos lo hacen, el otro extremo cortara a la curva en un punto y ese es el punto de fluencia del material. Figura. 1.16.



**Figura 1.16**

### 1.6.2.- ENSAYO FRÁGIL

El procedimiento de ensayo frágil es similar al dúctil, con la diferencia de que el material frágil tiene muy poca deformación plástica presentándose de inmediato la ruptura ver figura 1.17, con ausencia del fenómeno de extricción.

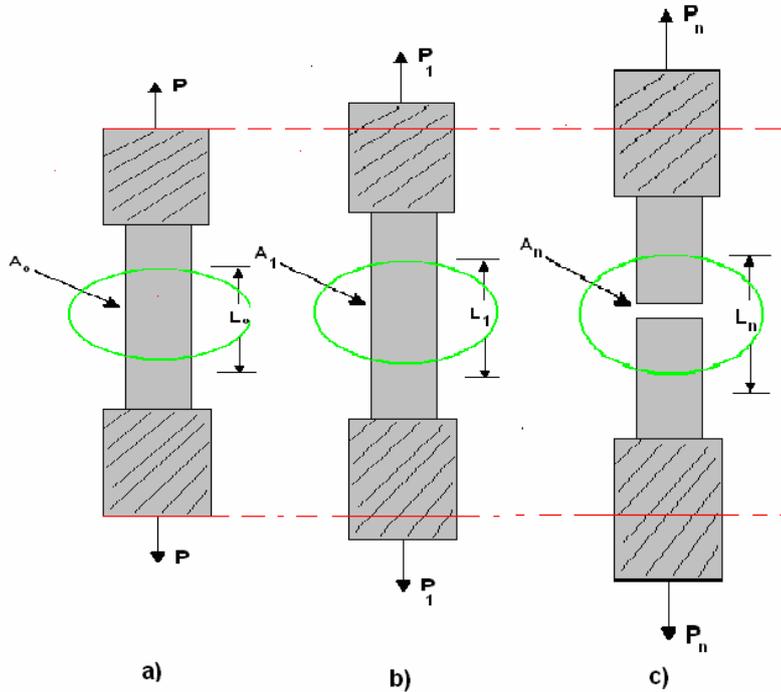
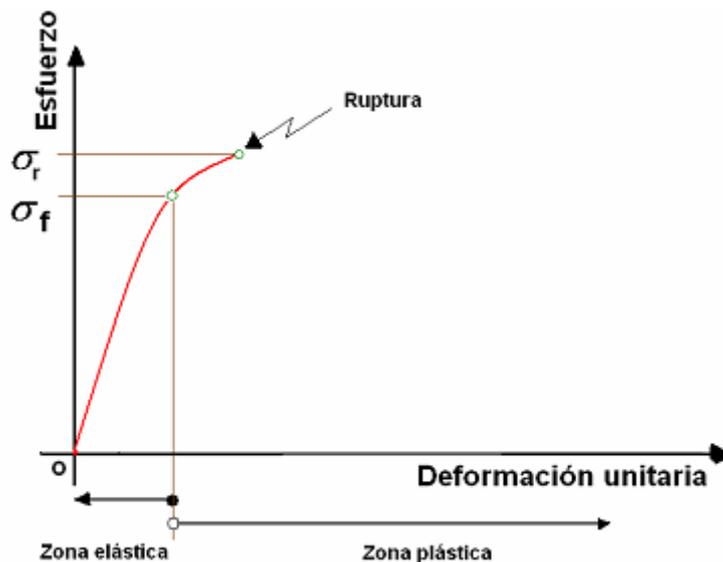


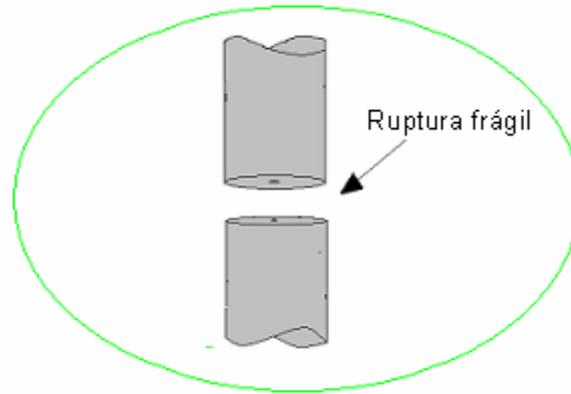
Figura 1.17

Comportamiento de la probeta durante el ensayo.

- a) Estado original
- b) Empezando a cargar
- c) Entrando a la zona plástica y se rompe

#### 1.6.2.1.-CURVA ESFUERZO DEFORMACIÓN FRÁGIL

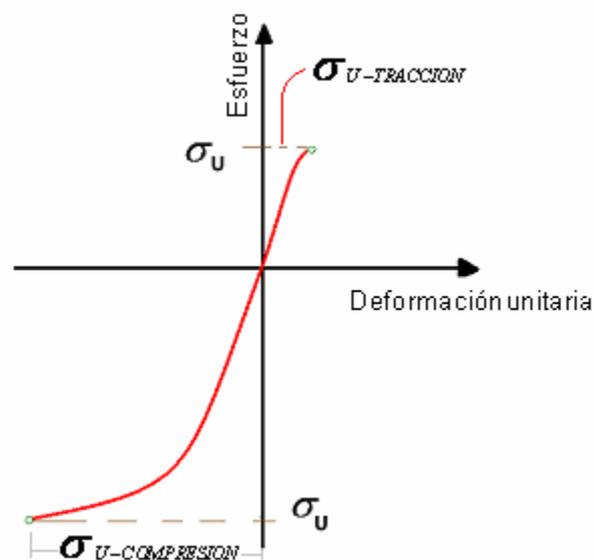




**Figura 1.18**

Viendo la figura 1.18, la ruptura ocurre en una superficie perpendicular a la carga. Concluimos que los principales causantes de la ruptura en los materiales frágiles son los esfuerzos normales.

### 1.6.3.-CURVA ESFUERZO DEFORMACIÓN (TRACCIÓN- COMPRESIÓN)



**Figura 1.19**

El esfuerzo como una función de la deformación para ensayo de tracción y compresión en materiales frágiles.

Según los ensayos de tracción y compresión para materiales frágiles dio como resultado, que el esfuerzo último en tracción es mucho menor que al esfuerzo ultimo de compresión.

$$\sigma_{U-COMPRESION} \gg \sigma_{U-TRACCION}$$

### 1.7.- CURVA REAL Y APARENTE

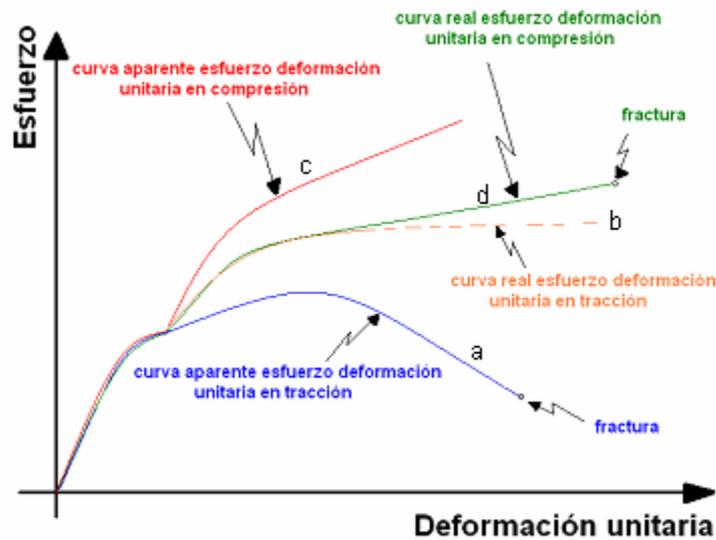


Figura 1.20

Las cuatro curvas son obtenidas del mismo ensayo, el común de estas curvas es que coinciden hasta el límite elástico, luego se separan a excepción de las curvas reales.

**a).- Curva aparente de esfuerzo deformación unitaria en tracción.-** El cálculo de esfuerzo se lo realiza al dividir la carga con el área de la sección transversal original. La pendiente de la región post-última esta en depresión a comparación con la real de tracción.

**b).- Curva real de esfuerzo deformación unitaria en tracción.-** El cálculo de esfuerzo se lo realiza al dividir la carga con el área decreciente de la sección transversal.

La pendiente de la región post-última esta ligeramente pronunciada.

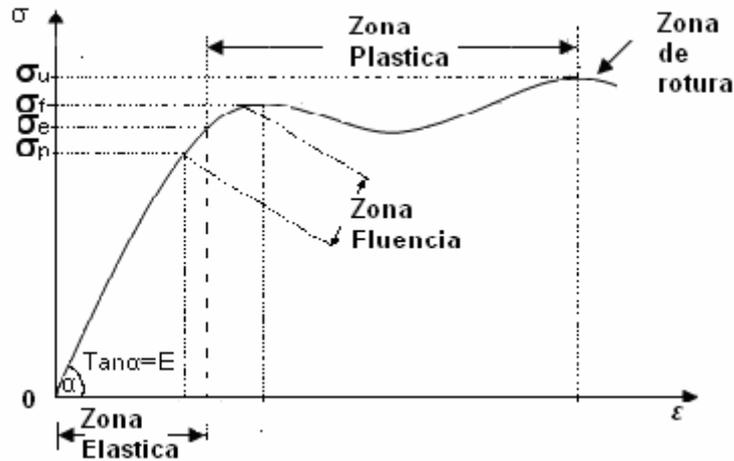
**c).- Curva aparente de esfuerzo deformación unitaria en compresión.-** El cálculo de esfuerzo se lo realiza al dividir la carga con el área de la sección transversal original.

La pendiente de la región post-última bruscamente pronunciada

**d).- Curva real de esfuerzo deformación unitaria en compresión.-** El cálculo de esfuerzo se lo realiza al dividir la carga con el área creciente de la sección transversal.

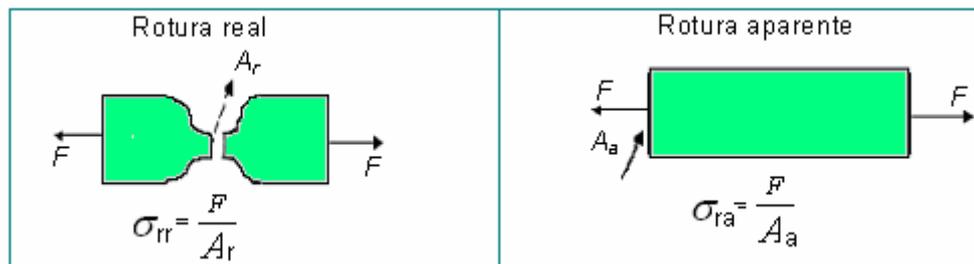
La pendiente de la región post-última esta ligeramente pronunciada

**1.8.- RESUMEN DIAGRAMA ESFUERZO – DEFORMACIÓN**



**Figura 1.21**

- a).- **El límite de proporcionalidad** de un material se define como el máximo valor del esfuerzo para el cual este es proporcional a la deformación unitaria. Por debajo del cual si se deja de aplicar la carga, entonces vuelve a su estado inicial.
- b).- **El límite elástico** de un material es definido como el máximo valor de un esfuerzo que se puede aplicar sin causar una deformación unitaria permanente.
- c).- **El límite de fluencia** es aquel punto en el que aparece un considerable alargamiento sin ningún aumento de carga. Más allá del punto de fluencia el material se deforma sin necesidad de aumentar ninguna carga.
- d).- **El límite último o esfuerzo ultimo**, es el punto máximo de la ordenada de la curva.
- e).- **Punto de rotura**, se presentan dos casos, el de la rotura aparente y de la rotura real, ver figura 1.22



**Figura 1.22**

Para realizar un análisis sobre el dimensionamiento se tendrá que verificar que la tensión “σ” no debe de exceder a la tensión admisible  $\bar{\sigma}$ , siendo esta tensión la división del esfuerzo debido a fluencia sobre el factor de seguridad (n).

Por tanto se tiene  $\sigma \leq \bar{\sigma} \Rightarrow \sigma = \frac{P}{A} \leq \bar{\sigma} \dots\dots\dots (1.1)$

Para  $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_f}{n} = \frac{\sigma_r}{n_r}$ , siempre:  $n_r > n_f > 1$

---

**CLASE DIALOGADA DEL TEMA**  
**(CUESTIONARIO)**

**1.- Que es momento flector?**

R.- Son componentes que miden la resistencia del cuerpo a curvarse o flexar con respecto a los ejes.

**2.- Que es el momento torsor?**

R.- Son componentes que miden la resistencia a la torsión del sólido considerado.

**3.- Que es una fuerza axial?**

R.- Es un componente que mide la acción de estirar o empujar sobre la sección.

**4.- Bajo hipótesis se puede aplicar la ecuación (1.1).**

R.- Cuando el material es homogéneo, de sección constante, la tensión de trabajo debe ser menor que el de admisible.

**5.- Cuales son los criterios de dimensionamiento que existe?**

R.- A la resistencia, rigidez, fatiga, aplastamiento.

**6.- A que criterio de dimensionamiento pertenece la ecuación (1.1).**

R.- A la resistencia.

**7.-En que zona se tiene que dimensionar?**

R.- En la zona elástica.

**8.- Que dice la ley de Hooke?**

R.- Que el esfuerzo es directamente proporcional a la deformación.

**9.- En que parte de la sección, la fuerza tiene que actuar para que exista una tensión uniforme?**

R.- En el centro de gravedad de la sección

**10.- A mayor factor de seguridad, hay mayor seguridad o menor seguridad?**

R.- Mayor seguridad y mayor costo.

**11.- ¿Qué es dureza?**

**R.-** Es la resistencia u oposición de un material a rayado por otro.

Donde haya fricción tiene que haber dureza  
Donde haya dureza tiene que haber fricción

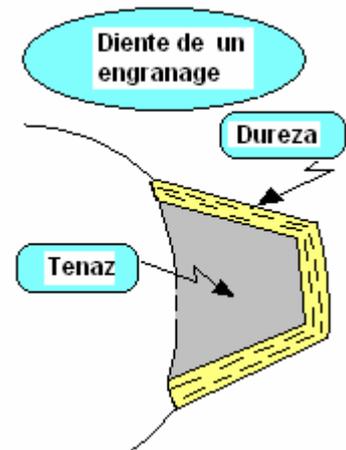
Donde haya impacto tiene que haber tenacidad  
Donde haya tenacidad tiene que haber impacto

Donde haya fricción más impacto  
Tiene que haber



Dureza superficial  
Tenacidad del alma

Esto se logra con templado a temperatura



ser

**12.- ¿Qué es resistencia?**

**R.-**

**13.- ¿Qué es el esfuerzo de trabajo?**

**R.-** Es a la carga a la cual realmente hace su servicio de función.

**14.- ¿Cuándo falla un material?**

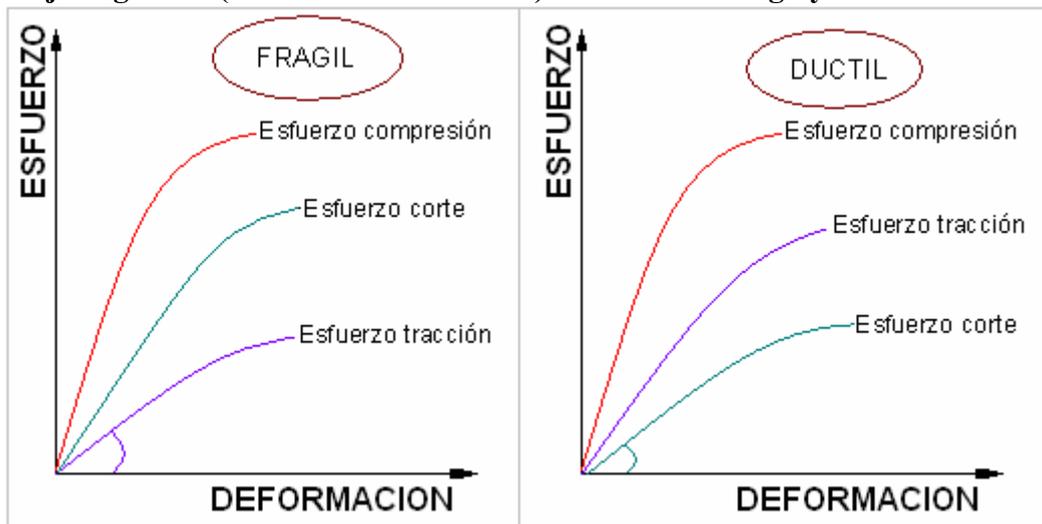
**15.- ¿Qué es ductilidad?**

**R.-** Es cuando el material tensionado se comporta como hilos. Capacidad de deformarse

**16.- ¿Qué es maleabilidad?**

**R.-** Es cuando el material que al doblarlo se comporta como laminas.

**8.- Dibuje la grafica (esfuerzo- deformación) del material frágil y dúctil.**

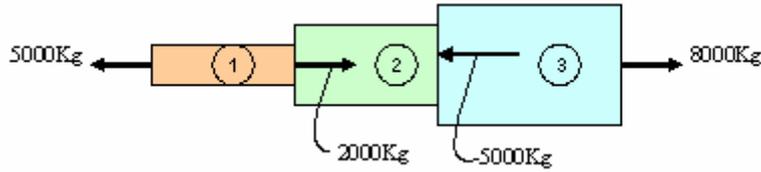


Materiales frágiles (Cerámicas, Vidrios, algunos plásticos, etc.)

Materiales dúctiles (Acero, Aluminio, bronce, etc.).

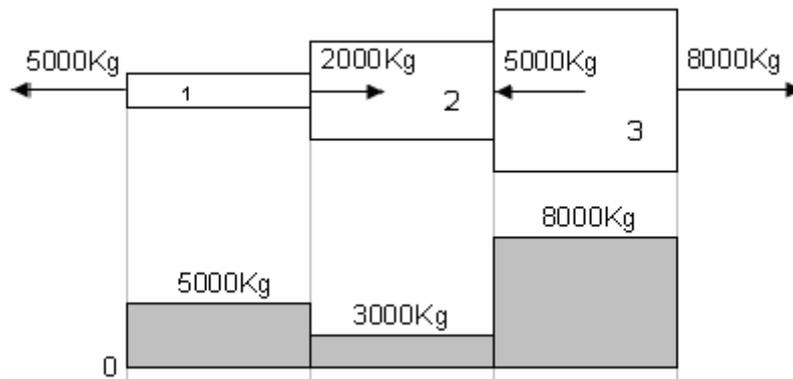
**PROBLEMAS RESUELTOS DE TENSIONES NORMALES**

**PROBLEMA 1.1.-** Para la estructura mostrada en la figura, determinar las tensiones de cada bloque. Donde  $A_1 = 2 \text{ cm}^2$ ,  $A_2 = 5 \text{ cm}^2$ ,  $A_3 = 8 \text{ cm}^2$ .



Solución:

Como no se sabe que fuerza actúan sobre cada uno de los bloques, se tendrá que realizar un diagrama de fuerzas internas.



Por definición de esfuerzos tenemos ( $\sigma = F/A$ )

$$\sigma_1 = F_1/A_1 \rightarrow \sigma_1 = \frac{5000Kg}{2cm^2} \rightarrow \boxed{\sigma_1 = 2500 \text{ Kg/cm}^2}$$

$$\sigma_2 = F_2/A_2 \rightarrow \sigma_2 = \frac{3000Kg}{5cm^2} \rightarrow \boxed{\sigma_2 = 600 \text{ Kg/cm}^2}$$

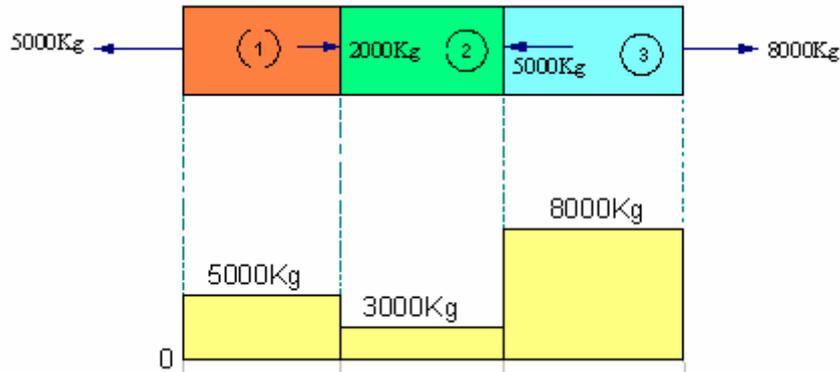
$$\sigma_3 = F_3/A_3 \rightarrow \sigma_3 = \frac{8000Kg}{8cm^2} \rightarrow \boxed{\sigma_3 = 1000 \text{ Kg/cm}^2}$$

**PROBLEMA 1.2.-** Para la estructura mostrada en la figura, determinar las tensiones de cada bloque. Donde  $A_1 = A_2 = A_3 = 2\text{cm}^2$ .



Solución:

Como no se sabe que fuerza actúan sobre cada uno de los bloques, se tendrá que realizar un diagrama de fuerzas internas.



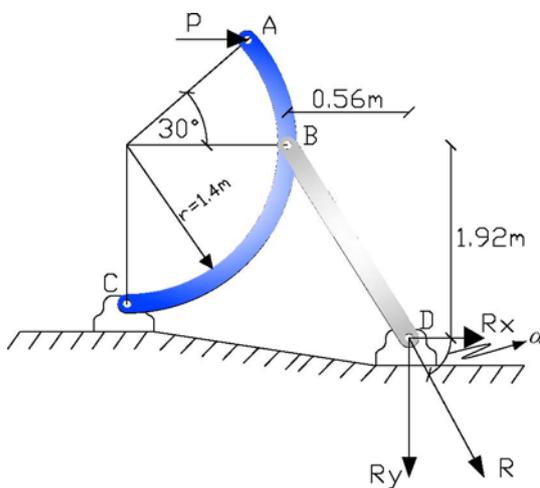
Por definición de tensiones tenemos ( $\sigma=F/A$ ).....ecuación (1.1)

$$\sigma_1 = F_1/A_1 \rightarrow \sigma_1 = \frac{5000\text{Kg}}{2\text{cm}^2} \rightarrow \boxed{\sigma_1 = 2500 \text{ Kg/cm}^2}$$

$$\sigma_2 = F_2/A_2 \rightarrow \sigma_2 = \frac{3000\text{Kg}}{2\text{cm}^2} \rightarrow \boxed{\sigma_2 = 1500 \text{ Kg/cm}^2}$$

$$\sigma_3 = F_3/A_3 \rightarrow \sigma_3 = \frac{8000\text{Kg}}{2\text{cm}^2} \rightarrow \boxed{\sigma_3 = 4000 \text{ Kg/cm}^2}$$

**PROBLEMA 1.3.-** Sabiendo que la porción central del eslabón BD, tiene una sección uniforme de  $800 \text{ mm}^2$ , halle la magnitud de la carga  $P$  para la cual el esfuerzo normal en esa porción de BD sea de  $50 \text{ MPa}$ .



$$\tan \alpha = \frac{1.92}{0.56}$$

$$\alpha = 73.74$$

$$\sigma_{BD} = \frac{R}{A} \Rightarrow R = \sigma_{BD} A \Rightarrow R = (50)(800) \Rightarrow$$

$$R = 40 \text{ KN}$$

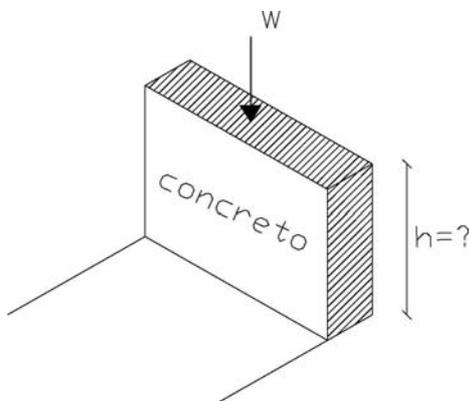
$$\Sigma M_C = 0$$

$$P(1.4 + 1.4 \sin 30) + R_y(1.4 + 0.56) -$$

$$R_x(1.92 - 1.4) = 0$$

$$P = -33.1 \text{ KN} \Rightarrow P = 33.1 \text{ KN}$$

**PROBLEMA 1.4.-** Cual es la altura a la cual una pared de concreto puede ser construida, si se especifica que el esfuerzo de ruptura del material es de  $2400 \text{ psi}$ . Con un factor de seguridad de 4 y con un peso específico del concreto de  $150 \text{ lb/ pie}^3$ , ( $\text{psi} = \text{Lb/pulg}^2$ ).

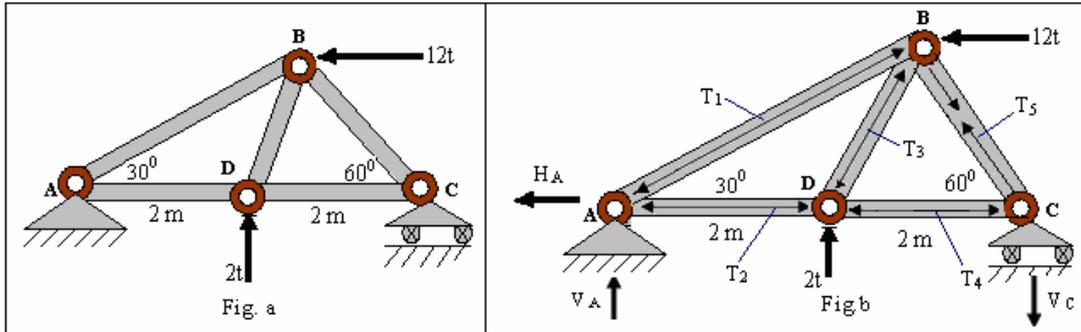


$$\sigma_r = \frac{W}{A} \Rightarrow \sigma_r = \frac{\gamma V}{A} \Rightarrow \sigma_r = \frac{\gamma Ah}{A}$$

$$\sigma_r = \gamma * h \Rightarrow h = \frac{\sigma_r}{\gamma} \Rightarrow h = \frac{86400 \text{ lb/ pie}^2}{150 \text{ lb/ pie}^3} \Rightarrow$$

$$h = 576 \text{ pies}$$

**PROBLEMA 1.5.-** Dimensionar la barra BD sabiendo que  $\sigma_f=4200\text{kg/cm}^2$  con factor de seguridad de 2 en tracción y tiene un factor de seguridad de 3 en compresión, además tomar en cuenta que es de acero y de sección circular.



Solución.- Según la Fig. b, se tiene:

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow (-2)(2t) - (2 \text{ Sen } 60^\circ) (12t) + 4 V_C = 0 \rightarrow \boxed{V_C = 6.2 \text{ t}}$$

$$\Sigma M_C = 0 \rightarrow (2)(2t) - (2 \text{ Sen } 60^\circ) (12t) + 4 V_A = 0 \rightarrow \boxed{V_A = 6.2 \text{ t}}$$

**Análisis por nudos**

$$\text{Nudo C} \quad \Sigma F_y = 0 \rightarrow -V_C + T_5 \text{ Sen } 60^\circ = 0 \rightarrow T_5 = 7.16 \text{ t}$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow T_4 - T_5 \text{ Cos } 60^\circ = 0 \rightarrow T_4 = 3.58 \text{ t}$$

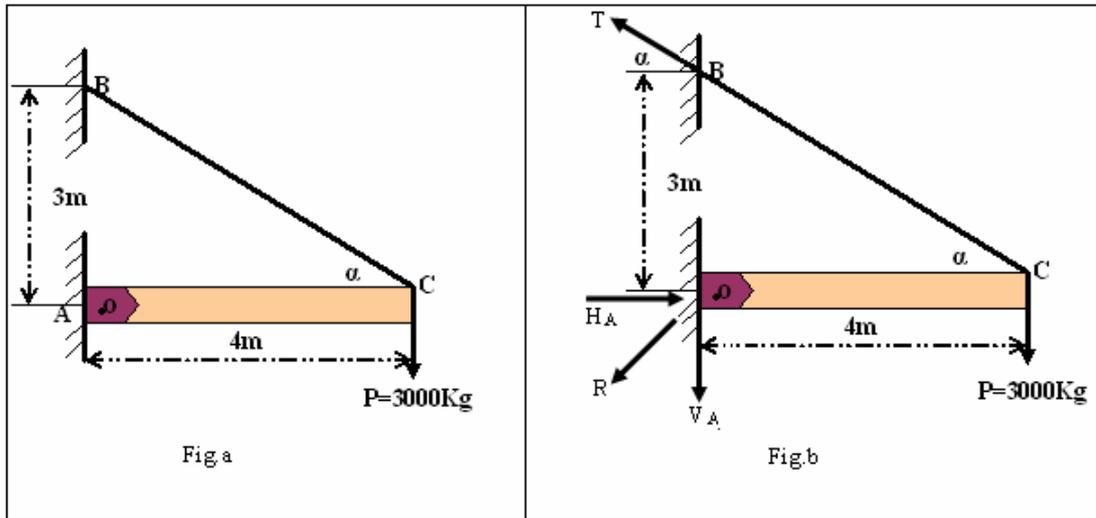
$$\text{Nudo B} \quad \Sigma F_y = 0 \rightarrow 2T - T_3 \text{ Cos } 30^\circ = 0 \rightarrow T_3 = 2.31 \text{ t de compresión}$$

Utilizando los conceptos de dimensionamiento tenemos:

$$\sigma_{BD} = T_3/A \leq \bar{\sigma} \rightarrow 4 * 2.31 * 10^3 / \pi \varnothing^2 \leq 4200/3 \rightarrow \varnothing \geq 1.45 \text{ cm}$$

$$\text{Normalizando tenemos} \quad \varnothing = \frac{5}{8}'' \rightarrow \boxed{\varnothing = 1.58 \text{ cm}}$$

**PROBLEMA 1.6.-** A partir de la fig.a. Calcular el diámetro del cable BC que soporta la barra AC, si  $\sigma_f=4200\text{kg/cm}^2$ ,  $P= 3000\text{Kg}$ . Con un factor de seguridad de 2.



Solución.- Con referencia a la figura b se tiene:

$\cos \alpha = 4/5$  del triángulo rectángulo ABC

$$\sum M_A = 0 \rightarrow (-3T \cos \alpha) + 4(3000\text{Kg}) = 0 \rightarrow (-3T (4/5) + 4(3000\text{Kg})) = 0 \rightarrow T = 5000\text{Kg}$$

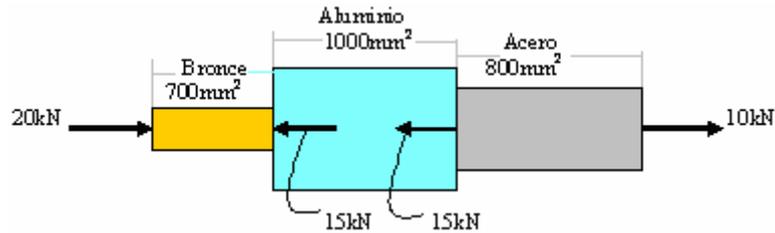
Utilizando los conceptos de dimensionamiento tenemos:

$$\sigma_{BC} = T/A \leq \bar{\sigma} \rightarrow 4(5000) / \pi \varnothing^2 \leq 4200/2 \rightarrow \varnothing \geq 1.74\text{cm}$$

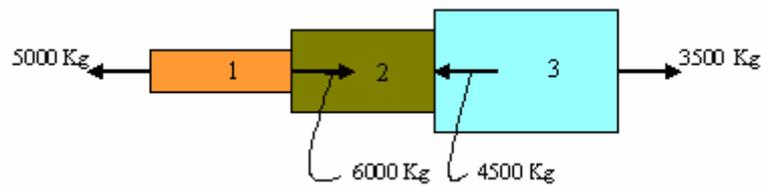
Normalizando tenemos  $\varnothing = 3/4'' \rightarrow \boxed{\varnothing = 1.905\text{cm}}$

**PROBLEMAS PROPUESTOS DE TENSIONES**

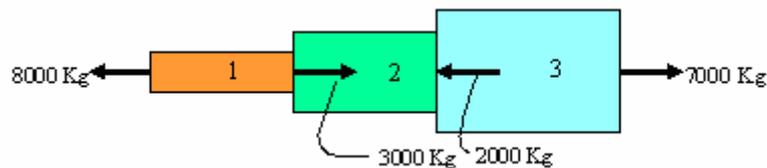
1.1.- Un tubo de aluminio esta rígidamente sujeto entre una barra de bronce y una barra de acero. Según se muestra en la figura. Las cargas axiales se aplican en las posiciones indicadas. Calcular el esfuerzo en cada material.



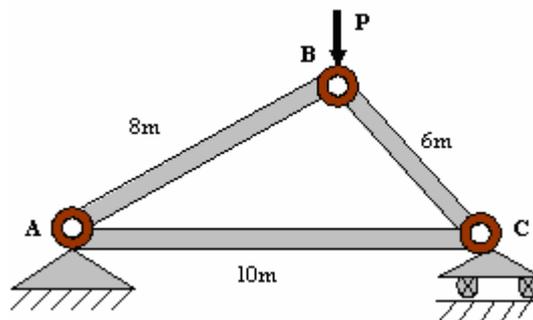
1.2.- Para la estructura mostrada en la figura determinar los esfuerzos de cada bloque. Donde:  $A_1 = 2.5 \text{ cm}^2$ ,  $A_2 = 5 \text{ cm}^2$  y  $A_3 = 7 \text{ cm}^2$



1.3.- Para la estructura mostrada en la figura determinar los esfuerzos de cada bloque. Para  $A_1 = 2 \text{ cm}^2$ ,  $A_2 = 5 \text{ cm}^2$  y  $A_3 = 8 \text{ cm}^2$ .

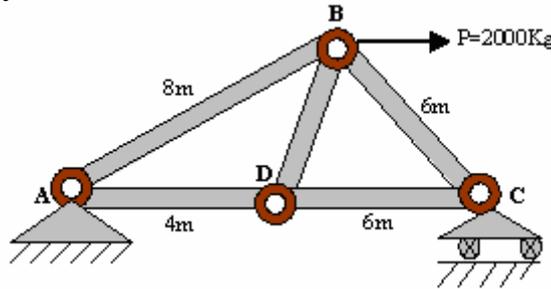


1.4.- Todas las barras de la estructura articulada de la figura, tienen una sección de 30mm por 60mm. Determine la máxima carga que puede aplicarse sin que los esfuerzos no excedan en las barras AB, BC y AC de 100MPa, 80MPa y 60MPa

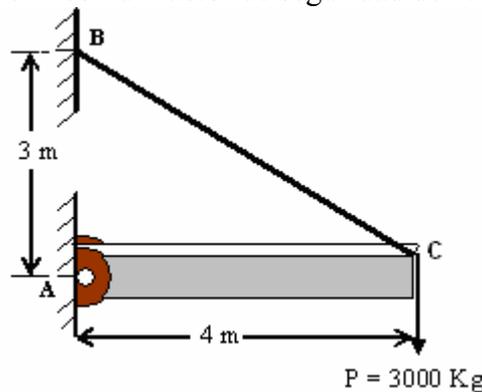


1.5.- Una columna de hierro fundido (o fundición) soporta una carga axial de compresión de 250kN. Determinar su diámetro interior si el exterior es de 200mm y el esfuerzo máximo no debe de exceder de 50MPa.

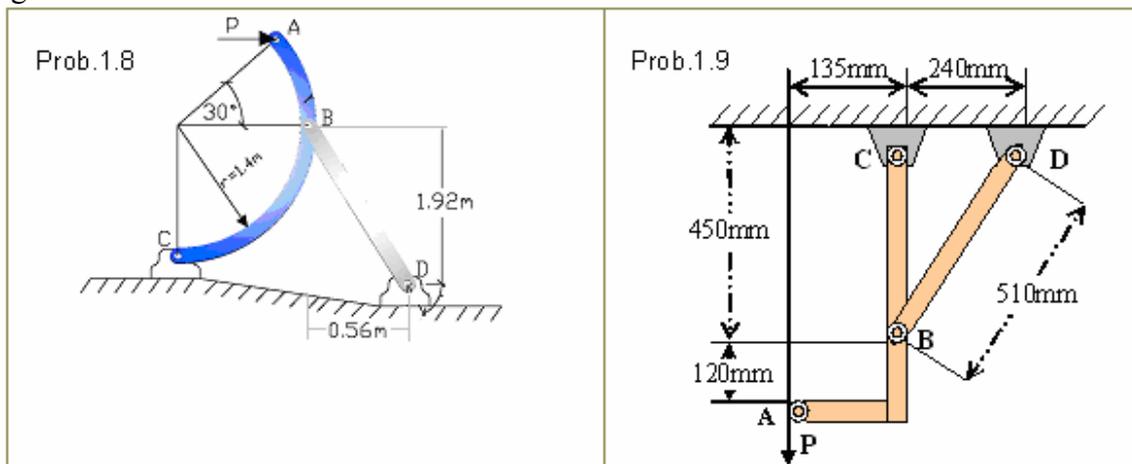
1.6.- Dimensionar la barra AB sabiendo que  $\sigma_f = 2600 \text{ kg/cm}^2$ , con factor de seguridad de 2 en tracción y tiene un factor de seguridad de 3 en compresión, además tomar en cuenta que es de acero y de sección circular.



1.7.- A partir de la figura presentada. Calcular el diámetro del cable BC que soporta la barra AC, si  $\sigma_f = 4200 \text{ kg/cm}^2$  con un factor de seguridad de 2.

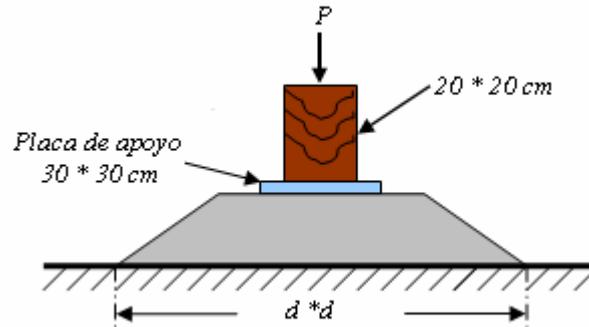


1.8.- Sabiendo que la porción central del eslabón BD tiene una sección uniforme de  $600 \text{ mm}^2$ , halle el esfuerzo de la porción BD, si la magnitud de la carga  $P = 40 \text{ kN}$  de radio igual 1.4m.

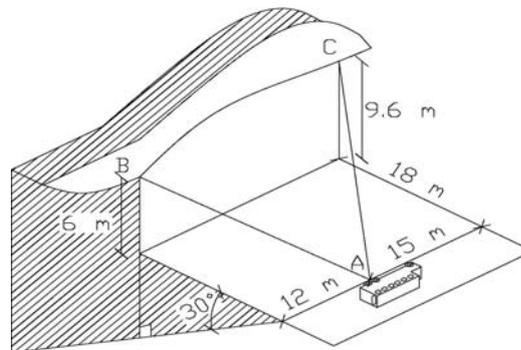


1.9.- Sabiendo que la porción central del eslabón BD tiene una sección uniforme de  $800 \text{ mm}^2$ , halle la magnitud de la carga "P" para la cual el esfuerzo normal en esa porción de BD sea de 50MPa.

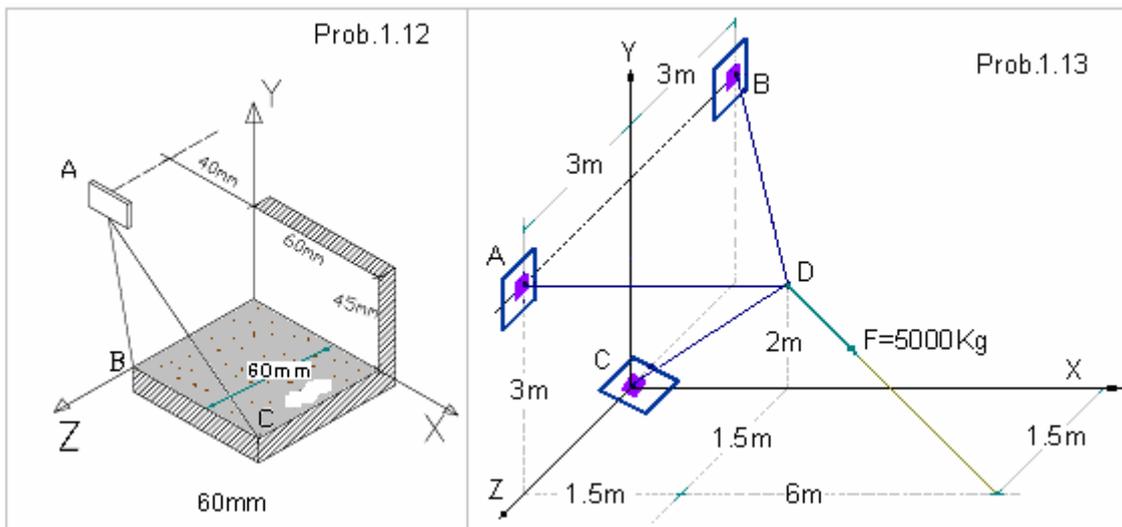
1.10.- Un soporte de madera escuadrada de 20 por 20cm descansa a través una placa de apoyo de acero de 30 por 30cm sobre una base de hormigón como se muestra en la figura. Determinar el valor de P si la tensión de compresión admisible en la madera es de  $110 \text{ kg/cm}^2$  y en el hormigón de  $50 \text{ kg/cm}^2$ . ¿Cual debe ser la dimensión d de apoyos de la base si la presión sobre el terreno no debe de exceder de  $4 \text{ kg/cm}^2$ ?



**1.11.-** Para mover un camión se conectan dos cables en A y se estiran por medio de dos grúas colocadas en B y en C, como se muestra en la figura sabiendo que la tensión en cada cable es de 10 KN en AB y 7.5 KN en AC. Determinar la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas que ejercen en A. Y dimensionar el cable AB si  $\bar{\sigma} = 1050 \text{ N/cm}^2$ .

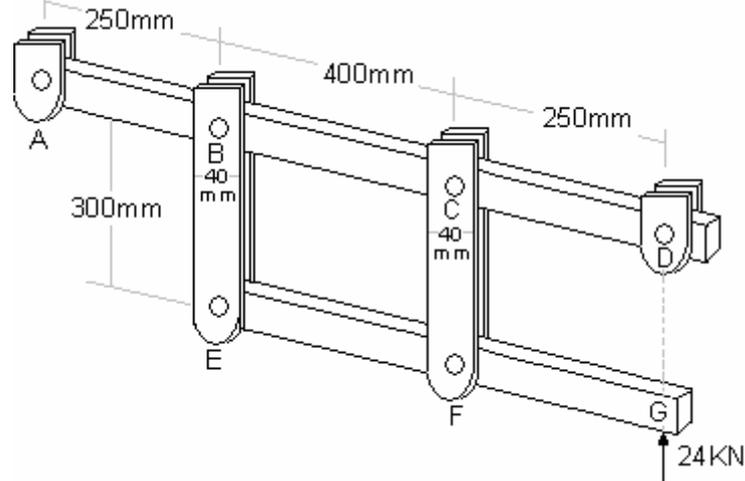


**1.12.-** Sabiendo que la tensión en los cables AB y AC es de 510Kg y 425Kg respectivamente. Determinar la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los dos cables y dimensionar los cables si:  $\bar{\sigma} = 1050 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$

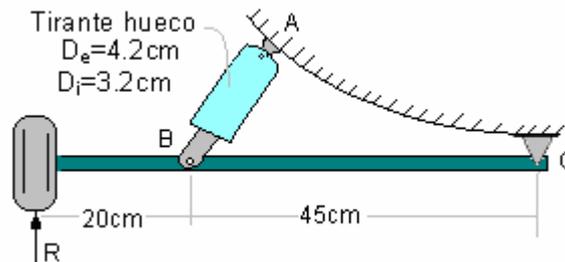


**1.13.-** Calcular el diámetro de los 3 cables que se unen en un punto D y sostienen una carga de 5000kg. Como se ilustra en la figura. Si el esfuerzo admisible de trabajo para los cables es  $1050 \text{ kg/cm}^2$ .

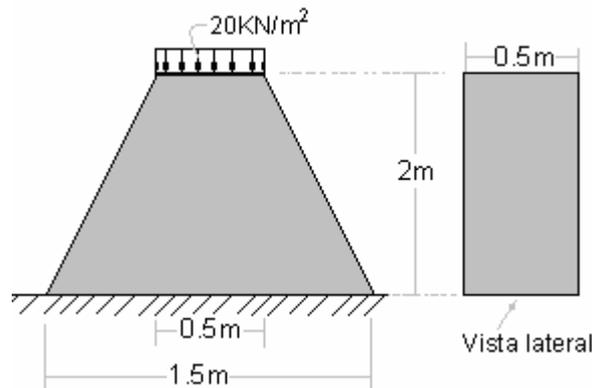
1.14.- Cada uno de los cuatro eslabones verticales que conectan a los dos miembros horizontales tienen una sección transversal rectangular de 10 x 40mm y cada pasador, 14mm de diámetro. Calcule el máximo valor del esfuerzo normal medio causado por la carga de 24KN en los eslabones que conectan. a).- Los puntos B y E b).- Los puntos C y F.



1.15.- Un tren de aterrizaje de una avioneta. Determinar la tensión de compresión en el terrapuntas AB producida en el aterrizaje por una reacción del terreno  $R=2000\text{Kg}$ . AB forma un ángulo de  $53^\circ$  con BC. Sol:  $620\text{Kg}/\text{cm}^2$ .



1.16.- La zapata de concreto que se muestra en la figura, esta cargada en su parte superior con una carga uniformemente distribuida de  $20\text{KN}/\text{m}^2$ . Investigue el estado de esfuerzo en un nivel a 1m arriba de la base. El concreto tiene un peso específico de aproximadamente  $25\text{KN}/\text{m}^3$ . Sol:  $28.8\text{KN}/\text{m}^2$ .



## CAPITULO II TENSIÓN CORTANTE

---

### 2.1.- TENSIÓN CORTANTE SIMPLE

La tensión cortante simple, a diferencia de la tensión de tracción y compresión, está producida por fuerzas que actúan paralelamente al plano que las soporta. La tensión cortante puede denominarse tensión tangencial.

Los esfuerzos cortantes ocurren en pernos, pasadores y remaches usados para unir diversos elementos estructurales y componentes de la maquinas.

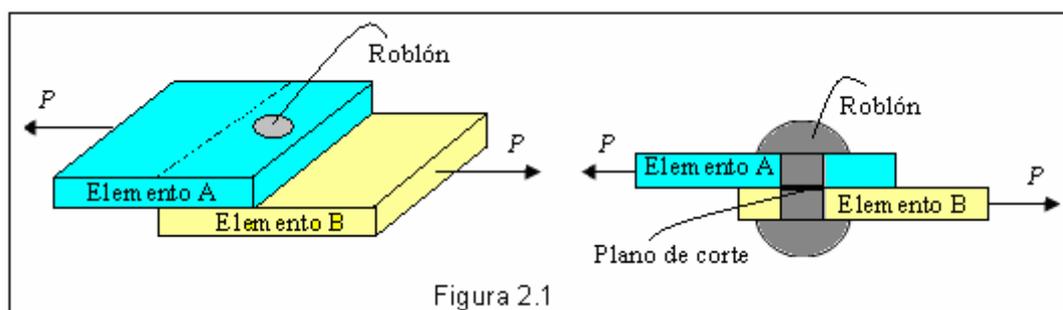
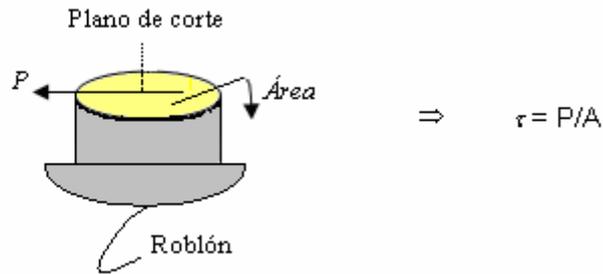


Figura 2.1

Considerándose por ejemplo los elementos A y B unidos por un roblón ver (fig.2.1), si los elementos están sometidos a fuerzas de tracción, de magnitud  $P$ , se desarrollaran esfuerzos en la sección del remache que corresponde al plano de corte.

El esfuerzo cortante ( $\tau$ ) tau, se obtiene según la ecuación  $\tau = \frac{P}{A} \left[ \frac{Kg}{cm^2} \right]$  ver fig.2.2.

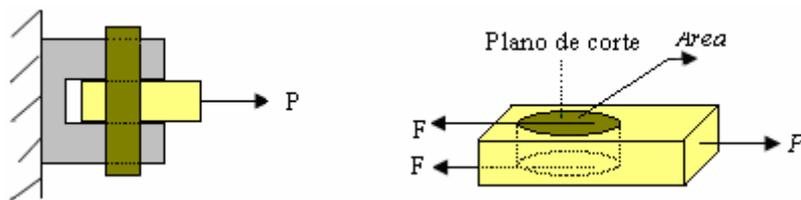


**Figura 2.2**

Las unidades de medida son al igual que la tensión interna del capítulo 1

### 2.2.- TENSIÓN CORTANTE DOBLE

Para desarrollar la ecuación de la cortante doble nos basamos en un pasador que esta sometido a una fuerza P.



**Figura 2.3**

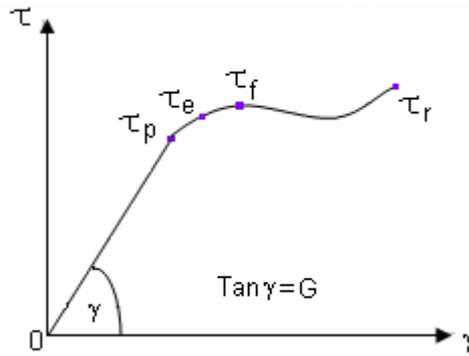
Desde el punto de vista, se realiza un análisis sobre la ecuación de  $\tau = F/A$  donde nuestro problema es calcular su equivalencia de la fuerza F.

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow P - F - F = 0 \rightarrow P = 2F \rightarrow F = P/2$$

Sustituyendo esta última ecuación tenemos la siguiente expresión matemática que nos permite calcular el valor del esfuerzo cortante.

$$\tau = P/2A$$

Grafica del comportamiento de la tensión cortante ( $\tau$ ) Vs deformación unitaria ( $\gamma$ ).



**Figura 2.3**

$$\bar{\tau} = \frac{\tau_f}{n_f} = \frac{\tau_r}{n_r} \quad \text{Para } n_r > n_f > 1$$

### 2.3.- DIMENSIONAMIENTO

Para efectos de dimensionamiento se realiza una generalización de la ecuación de la cortante de la forma siguiente.

$$\tau = V/A \leq \bar{\tau} \dots\dots\dots (2.1)$$

Donde:

- “V” es la fuerza cortante tangencial a la sección
- “A” es la sección crítica de los remaches, pasadores y pernos.
- “ $\tau$ ” tensión cortante.
- “ $\bar{\tau}$ ” tensión cortante admisible.

### PREGUNTAS SOBRE EL TEMA

**1.- Cuales son las condiciones para aplicar la ecuación (2.1)?**

**R.-** Sección constante, la fuerza “V” tiene que ser tangencial al plano de corte, la tensión cortante de trabajo tiene que ser menor a la tensión admisible.

**2.- Los pasadores se tienen que dimensionar a: Tracción o tensión cortante?**

**R.-** Tensión cortante.

**3.- Por que los diámetros se tienen que normalizar?**

**R.-** Por que el resultado que se obtiene de los cálculos no existe en el mercado.

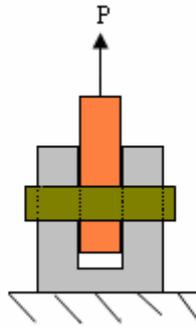
**4.- Si sobre un remache actúa una reacción horizontal y otra vertical: cual se utiliza para dimensionar?**

**R.-** Ninguna de ellos, se tendrá que utilizar la resultante de las dos reacciones.

---

**PROBLEMAS RESUELTOS DE TENSIONES CORTANTES**

**PROBLEMA 2.1.-** Determinar el esfuerzo cortante de una conexión, sea perno, pasador o remache de la siguiente, con una fuerza  $P = 40\text{kN}$  y un diámetro del pasador  $d=25\text{ mm}$ .



Solución.

Aplicando la ecuación de la cortante tenemos:

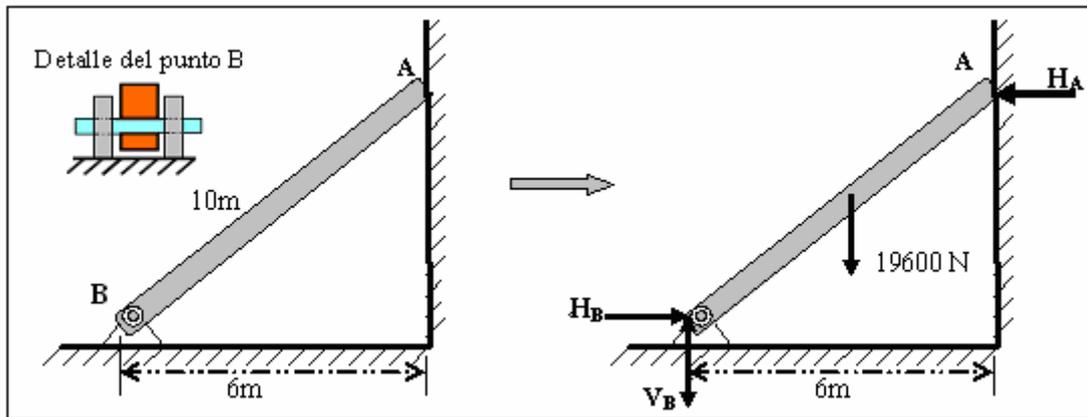
$$A = \frac{\pi}{4} \phi^2 \rightarrow A = \frac{\pi}{4} * (25 \text{ mm})^2 \rightarrow A = 490.87 \text{ mm}^2$$

$$A = 490.87 * 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\tau = \frac{P}{2A} \rightarrow \tau = \frac{50000}{2 * 490.87 * 10^{-6}}$$

$$\tau = 50.93 \text{ MPa}$$

**PROBLEMA 2.2.-** La masa de la barra homogénea AB mostrada en la figura, es de 2000Kg, la masa esta apoyada mediante un perno en B y mediante una superficie vertical lisa en A. Determine el diámetro mas pequeño que se puede usarse en B, si su esfuerzo cortante esta limitado por 60MPa.



Solución

Como existe su masa de la barra entonces existirá un peso que va a actuar en el centro dicha barra.

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow 3 * 19600 - H_A * 8 = 0 \Rightarrow H_A = 7350 N$$

$$\sum H = 0 \rightarrow -H_A + H_B = 0 \rightarrow H_B = 7350 N$$

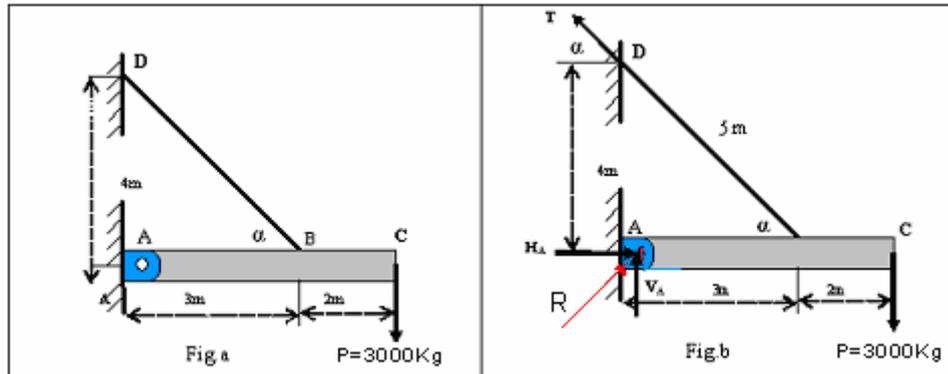
$$\sum V = 0 \rightarrow 19600 + V_B = 0 \rightarrow V_B = 19600 N$$

$$R = \sqrt{7350^2 + 19200^2} \rightarrow R = 20558.76 N$$

*Dimensionamiento*

$$\tau = \frac{R}{2A} \leq \bar{\tau} \rightarrow \frac{20558.76}{\frac{2\pi d^2}{4}} \leq 60 * 10^6 \rightarrow d = 14.9 mm$$

**PROBLEMA 2.3.-** A partir de la fig.a presentada. Calcular el diámetro del pasador A que soporta la barra AC a cortante doble, si  $\sigma_f = 4200 \text{ kg/cm}^2$  y  $\tau_f = 0.5\sigma_f$  con un factor de seguridad de 2.



Solución.- En base a la fig.a b se tiene:

$\cos \alpha = 4/5$  del triángulo rectángulo ABC

$$\sum M_A = 0 \rightarrow (-4T \cos \alpha) + 5(3000 \text{Kg}) = 0 \rightarrow -4T (3/5) + 5(3000 \text{Kg}) = 0 \rightarrow T = 6250 \text{Kg}$$

$$\sum V = 0 \rightarrow V_A + T \text{ Sen} \alpha - 3000 = 0 \rightarrow V_A = -2000 \text{Kg}$$

$$\sum H = 0 \rightarrow H_A - T \cdot \cos \alpha = 0 \rightarrow H_A = 3750 \text{Kg}$$

$$R = \sqrt{3750^2 + 2000^2} \rightarrow R = 4250 \text{Kg}$$

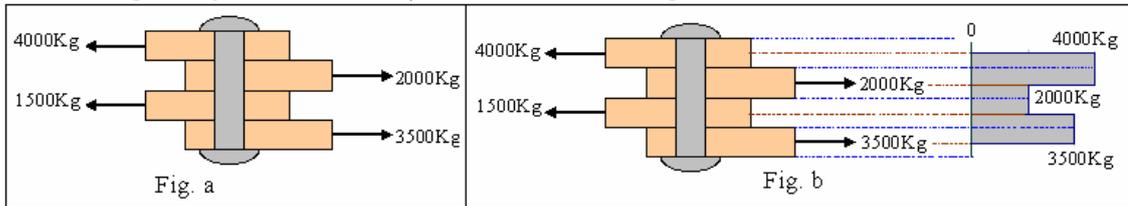
Utilizando los conceptos de la teoría tenemos

$$\tau = \frac{R}{2A} \leq \tau \rightarrow \tau = \frac{4250}{\frac{2 * \pi \phi^2}{4}} \leq 1050 \rightarrow \phi \geq 1.605 \text{cm}$$

Normalizando tenemos  $\phi = 3/4'' \rightarrow$

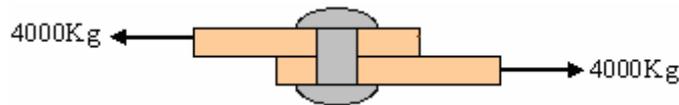
$\phi = 1.905 \text{cm}$
--------------------------

**PROBLEMA 2.4.-** Calcular el diámetro del perno que tiene que soportar la acción de las fuerzas axiales que se presentan en la fig.a, para cuyo efecto se tiene los esfuerzos de  $\sigma_f=4200\text{kg/cm}^2$  y un  $\tau_f=0.5 \sigma_f$ , con un factor de seguridad de 2



Solución

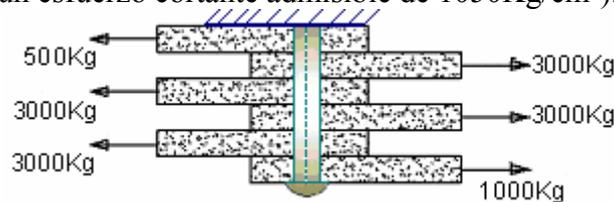
Primero se tiene que realizar un diagrama de fuerzas, para determinar el valor de la fuerza cortante como se observa en la fig.b, de los cuatro placas solo se transforma en dos placas.



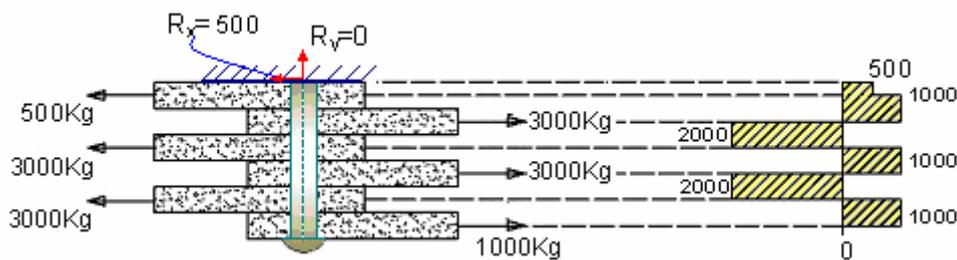
$$\bar{\tau} = \frac{\tau_f}{n} \Rightarrow \bar{\tau} = \frac{0.5 * 4200}{2} \Rightarrow \bar{\tau} = 1050 \therefore \tau = \frac{F_c}{A} \leq \bar{\tau} \rightarrow \frac{4000}{\frac{\pi \phi^2}{4}} \leq 1050 \rightarrow \phi \geq 2.2024\text{cm}$$

Normalizando tenemos  $\phi \geq 2.202\text{cm} \Rightarrow \phi = 1'' \Rightarrow \phi = 2.54\text{cm}$

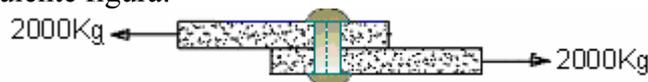
**PROBLEMA 2.5.-** Calcular el diámetro del remache que tiene que soportar la acción de las fuerzas axiales, para cuyo efecto se tiene los esfuerzos admisibles ( $2100\text{Kg/cm}^2$  esfuerzo normal y un esfuerzo cortante admisible de  $1050\text{Kg/cm}^2$ ).



Solución: Realizando el diagrama de fuerzas se tiene que:



Se reduce a la siguiente figura:

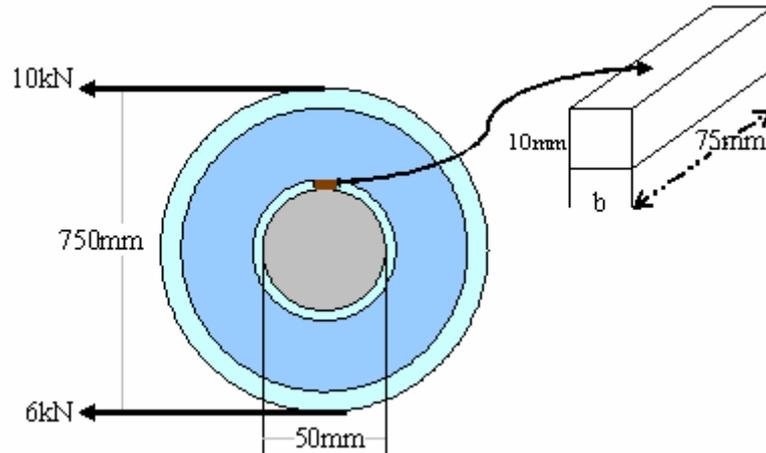


$$\tau = \frac{V}{A} \leq \bar{\tau} \Rightarrow \frac{4 * 2000\text{Kg}}{\pi \phi^2} \leq 1050 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} \Rightarrow \phi \geq 1.557\text{cm}$$

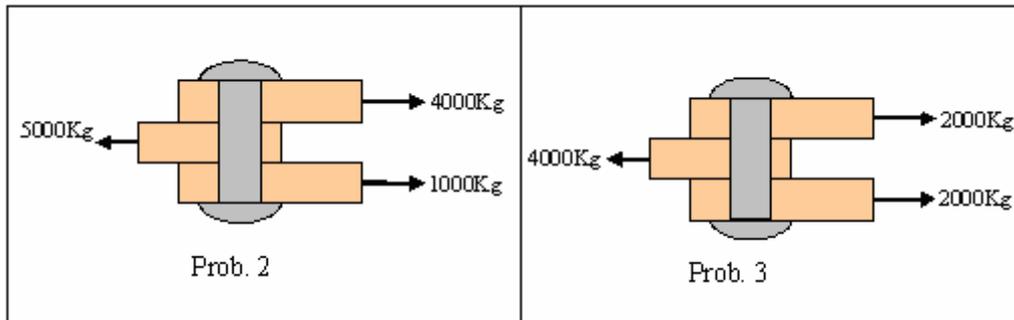
Normalizando  $\phi \geq 1.557\text{cm} \Rightarrow \phi = \frac{3}{4}'' \Rightarrow \phi = 1.905\text{cm}$

**PROBLEMAS PROPUESTOS DE TENSIONES CORTANTES**

2.1.- Una polea de 750mm sometida a la acción de las fuerzas que indica la figura, esta montada mediante una cuña en un eje de 50mm de diámetro. Calcule el ancho b de la cuña si tiene 75mm de longitud y el esfuerzo cortante admisible es de 70MPa.

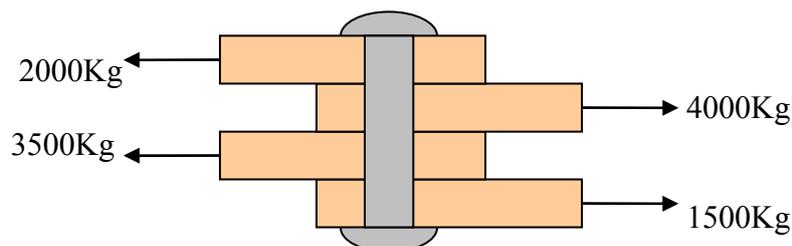


2.2.- Para un esfuerzo admisible de trabajo de  $\bar{\sigma} = 2100\text{Kg/cm}^2$  y  $\bar{\tau} = 0.5\bar{\sigma}$ . Calcule el diámetro del remache.

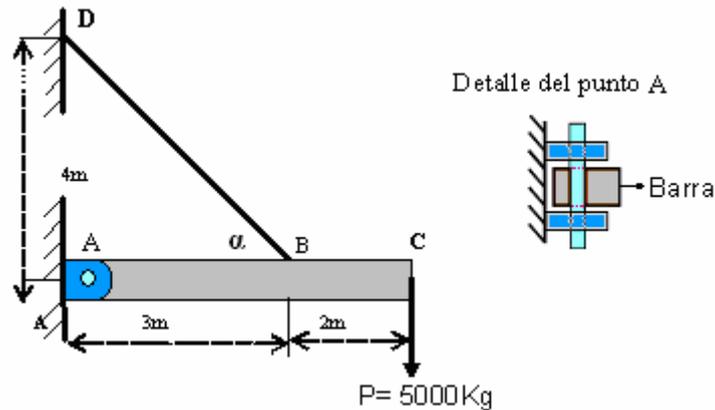


2.3.- Para un esfuerzo admisible de trabajo de  $\bar{\sigma} = 2100\text{Kg/cm}^2$  y  $\bar{\tau} = 0.5\bar{\sigma}$ . Calcule el diámetro del remache.

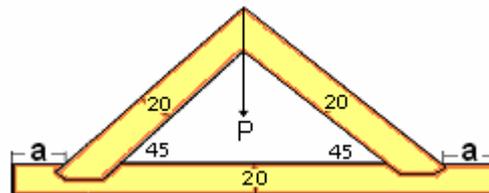
4.4.- Calcular el diámetro del remache que tiene que soportar la acción de las fuerzas axiales que se presentan en la figura adjunta, para cuyo efecto se tiene los esfuerzos de  $\sigma_f = 4200\text{kg/cm}^2$  y un  $\tau_f = 0.5 \sigma_f$  con un factor de seguridad de 2.



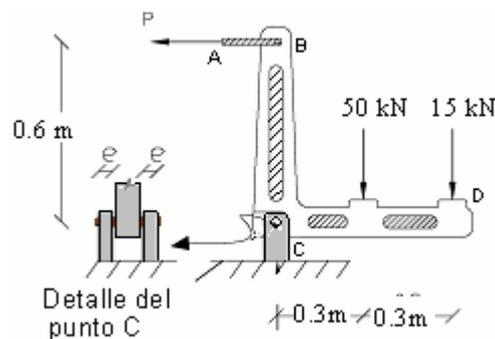
2.5.- A partir de la figura presentada. Calcular el diámetro del pasador A que soporta la barra AC a cortante simple, si  $\sigma_f = 2100 \text{ kg/cm}^2$  y un  $\tau_f = 0.5\sigma_f$  con un factor de seguridad de 3.



2.6.- Determinar la longitud "a" requerida en la estructura mostrada, considerando que el esfuerzo cortante de trabajo es de  $350 \text{ kg/cm}^2$ . Las dimensiones de las barras es de  $10 \times 20 \text{ cm}$  y el ángulo que forman las barras con la horizontal es de  $45^\circ$  y  $P = 3500 \text{ Kg}$ .



- 2.7.- Se aplican dos fuerzas a la pieza BCD, tal como se muestra en la figura. Calcular:
- El diámetro de la barra AB si el esfuerzo ultimo es de 600 MPa, con un factor de seguridad de 3.
  - El diámetro del pasador C si el esfuerzo cortante ultimo es de 350 MPa, con el mismo factor de seguridad del anterior inciso.
  - Determinar el espesor del soporte de la pieza en C, sabiendo que el esfuerzo de aplastamiento admisible es de 300 MPa.



---

## CAPITULO III ESFUERZO Y DEFORMACIÓN BAJO CARGA AXIAL

---

### DETERMINACION DE LAS DEFORMACIONES ELASTICAS PRODUCIDAS POR CARGAS DE TRACCION Y COMPRESION

#### 3.1.- INTRODUCCION

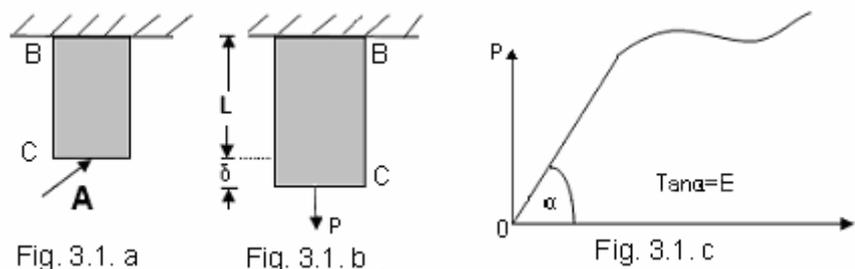
En el capitulo 1 se analizaron las tensiones debido a las cargas aplicadas a una estructura o maquina.

En este capitulo se discutirá acerca de las deformaciones de un elemento estructural, tal como una barra o una platina sometida a carga axial.

Primero se definirá deformación normal unitaria  $\epsilon$  en el elemento como la del esfuerzo  $\sigma$  versus la deformación unitaria  $\epsilon$ , a medida que la fuerza aplicada al elemento aumenta, se obtendrá un diagrama de *esfuerzo – deformación* para el material utilizado. De tal diagrama se pueden determinarse algunas propiedades importantes del material. Tales como su modulo de elasticidad y si el material es frágil o dúctil.

#### 3.2.- DEFORMACIÓN NORMAL BAJO CARGA AXIAL

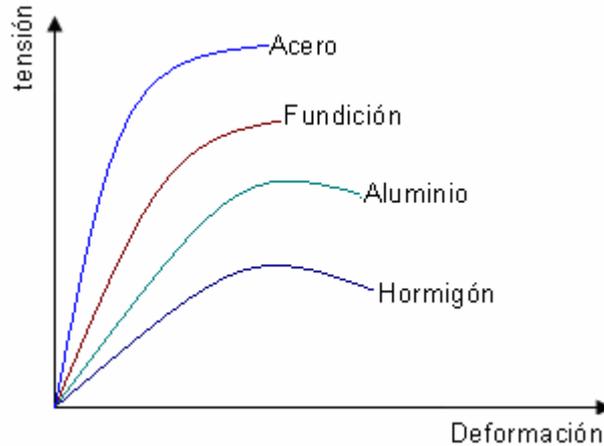
Sea una barra BC, de longitud L. y sección transversal A que esta suspendida de B (Fig.3.1.a). Si se aplica una fuerza **P** en el extremo C, la barra se alarga (fig.3.1.b).elaborando una grafica de la magnitud de **P** contra la deformación  $\delta$  (delta), se obtiene un determinado diagrama de carga – deformación (fig.3.1.c)



Se observa que si se produce un alargamiento  $\delta$  en la barra BC por medio de la fuerza **P**. Se define deformación normal unitaria en una barra bajo carga axial como el alargamiento por unidad de longitud de dicha barra. Representado por  $\epsilon$  (epsilon) se tiene.

$$\epsilon = \delta/L \dots\dots\dots (3.1)$$

**3.3.- COMPARACIÓN DE DIAGRAMAS DE DISTINTOS MATERIALES**



**Figura 3.2**

**3.4.- LEY DE HOOKE**

La mayor parte de las estructuras se diseñan para sufrir pequeñas deformaciones, que involucran solo la parte lineal del diagrama esfuerzo – deformación. Para la parte inicial del diagrama anterior, el esfuerzo  $\sigma$  es directamente proporcional a la deformación  $\epsilon$  y puede escribirse

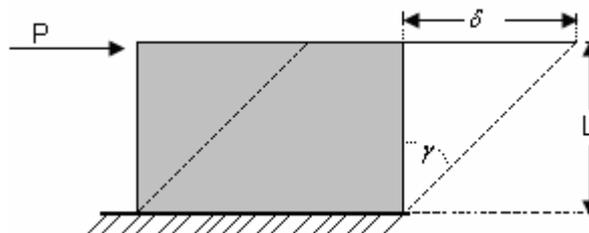
$$\delta = FL/AE \rightarrow (\delta/L) = (F/A)(1/E) \rightarrow \epsilon = \sigma(1/E) \rightarrow \sigma = E \epsilon \dots\dots\dots (3.2)$$

Esta relación es la ley de Hooke, llamada así en honor del matemático Inglés Robert Hooke (1635 – 11703). El coeficiente **E** se llama modulo de elasticidad propio de cada material o también llamado modulo de Young en honor del científico Inglés Thomas Young (1773 – 1829).

Como la deformación unitaria  $\epsilon$  no tiene dimensiones, el modulo **E** se expresa en las mismas unidades del esfuerzo.

**3.5.- DEFORMACIÓN TANGENCIAL**

Las fuerzas cortantes producen una deformación angular, de la misma manera que las fuerzas axiales originan deformaciones longitudinales, pero con una diferencia fundamental. Un elemento sometido a tensión experimenta un alargamiento, mientras que un elemento a una fuerza cortante, no varia la longitud de sus lados, manifestándose por el contrario un cambio de forma de rectángulo a paralelogramo, como se observa en la figura 3.3.



**Figura 3.3**

$\tan \gamma = \frac{\delta}{L} \Rightarrow \tan \gamma \approx \gamma \Rightarrow \gamma = \frac{\delta}{L}$  La ley de Hooke también es valida en la cortadura, existe una relación lineal entre la deformación tangencial y la tensión cortante dada por.

$$\tau = G\gamma \dots\dots\dots(3.3)$$

$$\delta = \frac{P*L}{A*G} \Rightarrow \delta = \tau \frac{L}{G} \Rightarrow \frac{\delta}{L} = \frac{\tau}{G} \therefore \tau = G*\epsilon \dots\dots\dots(3.4)$$

En donde G es el modulo de elasticidad de la cortante llamada” módulo de rigidez”. Existe otra relación de suma importancia entre las constantes G, E y  $\mu$  (coeficiente de poisson) para un material dada.

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \dots\dots\dots(3.5)$$

**3.6.- DIMENSIONAMIENTO A LA RIGIDEZ**

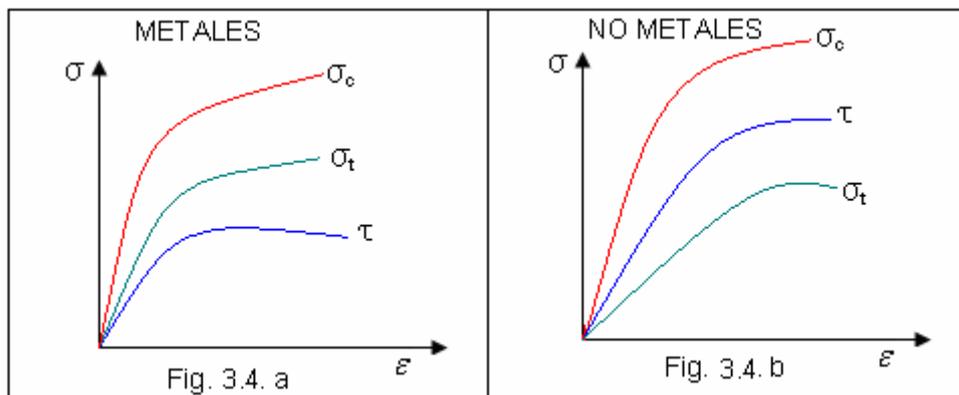
Para efectos de dimensionamiento se realiza una generalización de la ecuación de la rigidez llamada deformación de la siguiente manera.

$$\delta = FL/AE \leq \bar{\delta} \dots\dots\dots(3.6)$$

Esta ecuación solo se aplica bajo las siguientes condiciones:

- La fuerza que actúa sobre la sección tiene que ser constante.
- El material tiene que ser homogéneo.
- La sección tiene que ser constante en toda la longitud.

**3.7.- DIFERENCIAS DE LA GRAFICA DE ESFUERZO – DEFORMACIÓN DE LOS METALES Y NO METALES**



Aplicando los conceptos de la ley de Hooke al punto 3.5 se tiene una grafica visualizada del comportamiento de la tensión cortante ( $\tau$ ) Vs deformación unitaria ( $\gamma$ ).

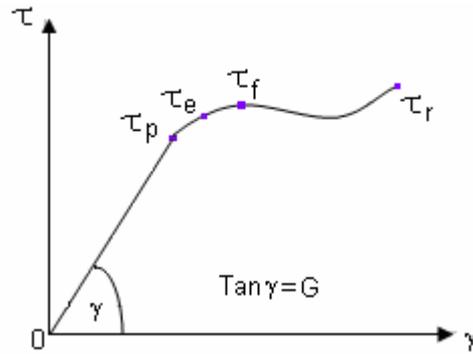


Figura 3.5

$$\bar{\tau} = \frac{\tau_f}{n_f} = \frac{\tau_r}{n_r} \quad \text{Para } n_r > n_f > 1$$

### 3.8.- ECUACIONES PARA DEFORMACIONES TRANSVERSALES

	$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \mu\sigma_y}{E}$ $\varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \mu\sigma_x}{E}$
	$\varepsilon_x = \frac{-\sigma_x - \mu\sigma_y}{E}$ $\varepsilon_y = \frac{\sigma_y + \mu\sigma_x}{E}$
	$\varepsilon_x = \frac{-\sigma_x + \mu\sigma_y}{E}$ $\varepsilon_y = \frac{-\sigma_y + \mu\sigma_x}{E}$
	$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x + \mu\sigma_y}{E}$ $\varepsilon_y = \frac{-\sigma_y - \mu\sigma_x}{E}$

---

### 3.9.- ALGUNOS CONCEPTOS BASICOS SOBRE LOS MATERIALES

#### (CUESTIONARIO)

##### 1.- Cuando se dice que los materiales son dúctiles?

R.- Se dice que un material es dúctil cuando tiene deformaciones plásticas de gran magnitud antes de romperse.

##### 2.- Cuando se dice que los materiales son frágiles?.

R.- Ciertos materiales, como el hierro fundido, el acero rico en carbono y la mampostería, que presentan relativamente poca deformación plástica antes de fracturarse, se denominan frágiles.

##### 3.- Que significa envejecimiento?.

R.- El término envejecimiento se refiere a un cambio gradual en las propiedades de los materiales que pueden ocurrir con el tiempo.

Estos cambios pueden suceder de manera más rápida a temperaturas elevadas. El envejecimiento puede ser parte del proceso normal de un material, como en el caso del curado del hormigón.

##### 4.- Cuando se dice que un material es frágil?

R.- Se dice que un material es frágil o quebradizo cuando se rompe o se fractura antes de presentar una deformación plástica significativa. La tiza es un material quebradizo muy conocido.

Los materiales de mampostería, ladrillos, concreto y piedras- también son frágiles.

##### 5.- Cuando se dice que un material es dúctil?.

R.- Se dice que un material es dúctil si puede soportar una deformación plástica significativa antes de romperse. Un material que no es dúctil o maleable se denomina frágil.

##### 6.- Que es la elasticidad?

R.- La elasticidad es un modelo del comportamiento de los materiales y se basa en la presunción (sospecha) de que el esfuerzo es una función univoca de la deformación. Si se asume que el esfuerzo es una función lineal de la deformación, el modelo se denomina linealmente elástico. De lo contrario se llama elástico no lineal.

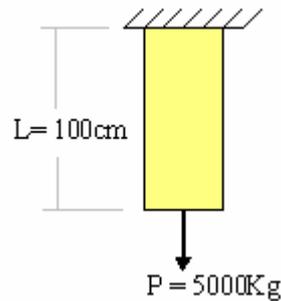
##### 7.- Que es plasticidad?

R.- La plasticidad de un modelo del comportamiento de los materiales con base en la presunción (sospecha) de que existe un esfuerzo de fluencia y que se puede desarrollar una deformación plástica o permanente cuando se alcanza el esfuerzo de fluencia. La relación entre el esfuerzo y la deformación plástica se denomina *regla de flujo*

---

**PROBLEMAS RESUELTOS DE ESFUERZO - DEFORMACIÓN**

**PROBLEMA 3.1.-** A partir de la figura mostrada determinar, la deformación máxima de la sección circular: Si el  $\sigma_f = 2100 \text{ kg/cm}^2$ , con un factor de seguridad de 2 y  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ .



**Solución**

Se conoce todos los datos para hallar la deformación, al excepción de la sección, por lo tanto lo primero que se calculara el diámetro de la sección con la ecuación de esfuerzo.

$$\sigma = P/A \leq \bar{\sigma} \rightarrow (5000 \text{Kg} \div A) \leq (2100 \div 2) \rightarrow A \geq 4.762 \text{ cm}^2$$

$$(\pi \div 4) * (\varnothing^2) \geq 4.762 \text{ cm}^2 \rightarrow \varnothing \geq 2.46 \text{ cm}$$

Normalizando tenemos  $\varnothing = 1'' \rightarrow$

$\varnothing = 2.54 \text{ cm}$
---------------------------------

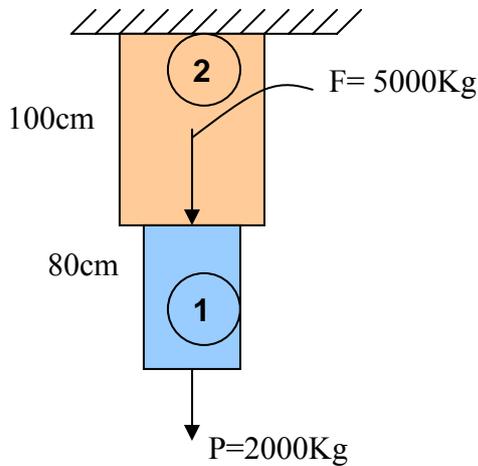
$$A = (\pi \div 4) * (2.54)^2 \rightarrow A = 5.067 \text{ cm}^2$$

Calculo de la deformación máxima

$$\delta = FL/AE \rightarrow \delta = (5000 \times 100) \div (5.067 \times 2.1 \times 10^6) \rightarrow$$

$\delta = 0.047 \text{ cm.}$
------------------------------

**PROBLEMA 3.2.-** Para el sistema que se muestra a continuación. Calcular la deformación total y el esfuerzo máximo. Considerando que  $A_1 = 1.5 \text{ cm}^2$ ,  $E_1 = 1.5 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y  $A_2 = 4 \text{ cm}^2$ ,  $E_2 = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ .

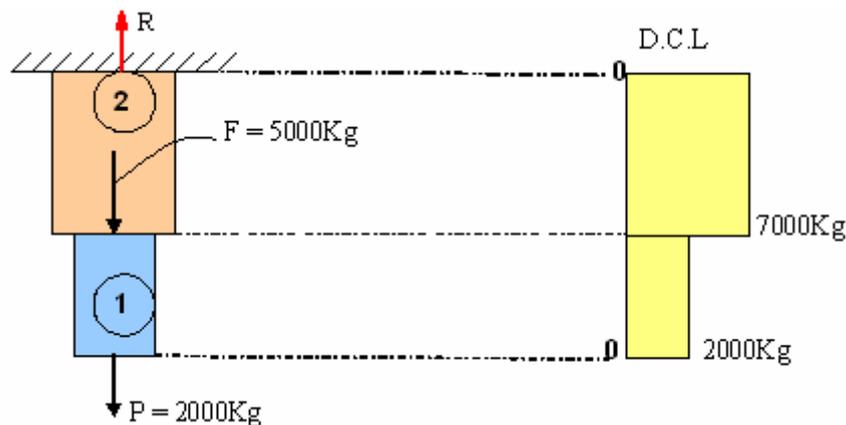


**Solución**

Para solucionar este ejercicio se tiene que seguir los siguientes Pasos:

- 1.- Equilibrar el sistema con un  $R = 7000\text{Kg}$ .
- 2.- Realizar un diagrama de De esfuerzos internos.
- 3.- El esfuerzo máximo se presenta donde actúa la fuerza R

Diagrama de esfuerzos internos de los bloques.



$$\delta_1 = F_1 L_1 / A_1 E_1 \rightarrow \delta_1 = (2000 \times 80) \div (1.5 \times 1.5 \times 10^6) \rightarrow \delta_1 = 0.0711 \text{ cm.}$$

$$\delta_2 = F_2 L_2 / A_2 E_2 \rightarrow \delta_2 = (7000 \times 100) \div (4 \times 2.1 \times 10^6) \rightarrow \delta_2 = 0.0833 \text{ cm.}$$

$$\delta_T = \delta_1 + \delta_2 \rightarrow \delta_T = 0.0711 \text{ cm.} + 0.0833 \text{ cm.} \rightarrow$$

$$\delta_T = 0.1544 \text{ cm.}$$

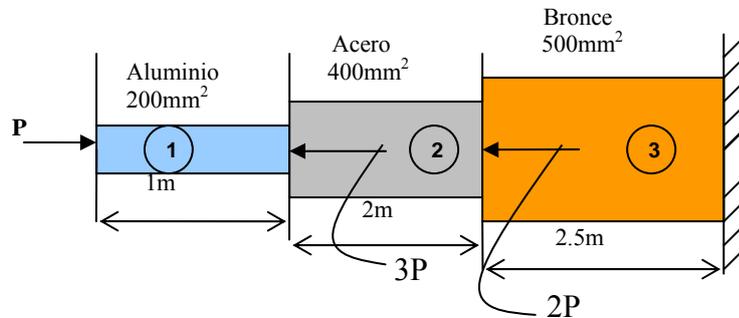
Calculo del esfuerzo máximo:

$$R = 2000\text{Kg} + 5000\text{Kg} \rightarrow R = 7000\text{Kg}$$

$$\sigma_{\max} = R / A_2 \rightarrow (7000 \text{ Kg} \div 4 \text{ cm}^2) \rightarrow$$

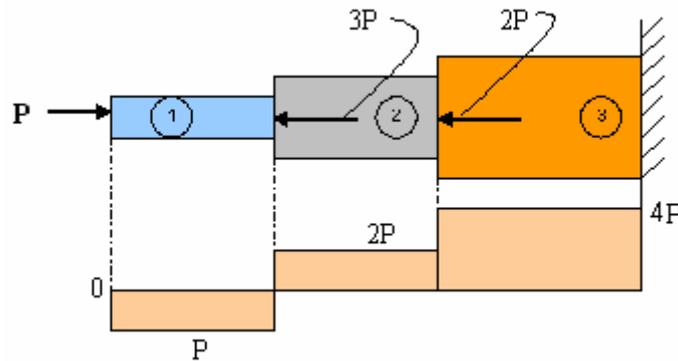
$$\sigma_{\max} = 1750 \text{ kg/cm}^2$$

**PROBLEMA 3.3.-** Un tubo de acero se encuentra rápidamente sujeto por un perno de aluminio y por otro de bronce, tal como se muestra en la figura. Las cargas axiales se aplican en los puntos indicados. Calcule la deformación total del sistema, sin que no exceda un esfuerzo de 80MPa en el aluminio,  $E_{al}=70$  GPa; de 150MPa en el acero  $E_{ac}=200$ GPa y de 100MPa en el bronce  $E_{br}=83$  GPa.



Solución

Como no se sabe que fuerza actúan sobre cada uno de los bloques se tendrá que realizar un diagrama de esfuerzos internos.



$$\sigma_{al}=P/A_{al} \leq \bar{\sigma} \rightarrow \sigma_{al}=(P \div 200 \text{ mm}^2) \leq 80\text{MPa} \rightarrow P \leq 16000 \text{ N}$$

$$\sigma_{ac}=2P/A_{ac} \leq \bar{\sigma} \rightarrow \sigma_{ac}=(2P \div 400 \text{ mm}^2) \leq 15\text{MPa} \rightarrow P \leq 30000 \text{ N}$$

$$\sigma_{br}=4P/A_{br} \leq \bar{\sigma} \rightarrow \sigma_{br}=(4P \div 500 \text{ mm}^2) \leq 100\text{MPa} \rightarrow P \leq 12500 \text{ N}$$

Por lo tanto el valor de P máximo del sistema es:  $P_{m\acute{a}x} = 12500 \text{ N}$

$$\delta_{al}=F_{al}L_{al}/A_{al}E_{al} \rightarrow \delta_{al}=(12500 \times 1) \div (2 \times 10^{-4} \times 70 \times 10^9) \rightarrow \delta_{al}=0.08\text{cm.}$$

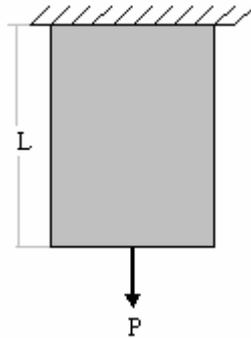
$$\delta_{ac}=F_{ac}L_{ac}/A_{ac}E_{ac} \rightarrow \delta_{ac}=(25000 \times 2) \div (4 \times 10^{-4} \times 200 \times 10^9) \rightarrow \delta_{ac}=0.0625\text{cm.}$$

$$\delta_{br}=F_{br}L_{br}/A_{br}E_{br} \rightarrow \delta_{br}=(50000 \times 2.5) \div (5 \times 10^{-4} \times 83 \times 10^9) \rightarrow \delta_{br}=0.3012\text{cm.}$$

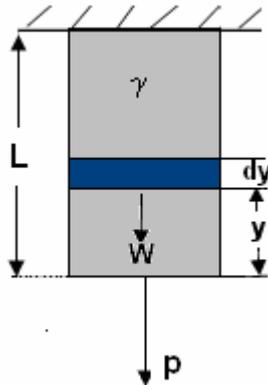
La deformación total es la suma de todas las deformaciones

$$\delta_T = -\delta_{al} + \delta_{ac} + \delta_{br} \rightarrow \delta_T = -0.089 + 0.0625 + 0.3012 \rightarrow \delta_T = 0.2747\text{cm.}$$

**PROBLEMA 3.4.-** Una varilla de acero de sección constante  $300 \text{ mm}^2$  y un longitud de  $150\text{m}$ , se suspende verticalmente de uno de sus extremos y soporta una carga  $P = 29\text{kN}$  que suspende de su extremo inferior. Si su peso propio ( $\gamma$ ) de la varilla es de  $9000 \text{ N/m}^3$  y  $E = 200 \text{ GPa}$ .  
Calcular la deformación máxima de la varilla.



Como existe su peso propio de la varilla, no se puede aplicar la ecuación de la deformación ( $\delta = FL/AE$ ), se tiene que realizar por integración.



$$F_y = P + W \rightarrow F_y = P + \gamma V \rightarrow F_y = P + \gamma A y$$

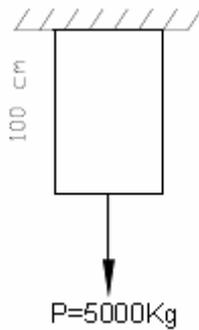
$$d\delta = F_y dy / AE \rightarrow \int_0^\delta d\delta = \int_0^L \langle p + \gamma Ay \rangle dy / AE \rightarrow$$

$$\delta_T = PL/AE + \gamma L^2/2E$$

$$\delta_T = (29000 \times 150) \div (300 \times 10^{-6} \times 200 \times 10^9) + (9000 \times 150^2) \div (2 \times 200 \times 10^9)$$

$$\delta_T = 0.073\text{m.}$$

**PROBLEMA 3.5.-** A partir de la figura determinar, el diámetro de la barra de acero de sección circular: si  $\sigma_f = 2100 \text{ Kg/cm}^2$  y  $\bar{\delta} = L/1000$  en cm con un factor de seguridad de 2 y  $E = 2.1 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$



Por resistencia  $\sigma = \frac{P}{A} \leq \bar{\sigma} \Rightarrow \phi \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi \bar{\sigma}}} \Rightarrow \phi \geq \sqrt{\frac{8(5000)}{\pi(2100)}}$

$\phi \geq 2.46 \text{ cm}$

Por deformación  $\delta = \frac{PL}{AE} \leq \bar{\delta} \Rightarrow \frac{(5000)(100)}{\left(\frac{\pi}{4}\phi^2\right)(2.1 \cdot 10^6)} \leq \frac{100}{1000}$

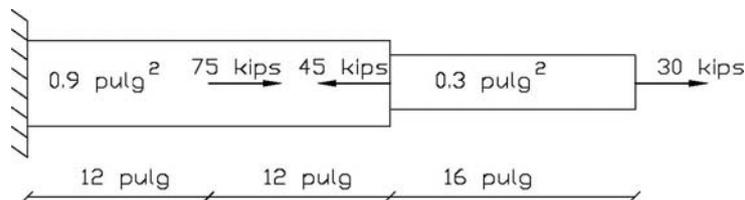
$\phi \geq 1.74 \text{ cm}$

Se escoge el mayor diámetro y se normaliza :

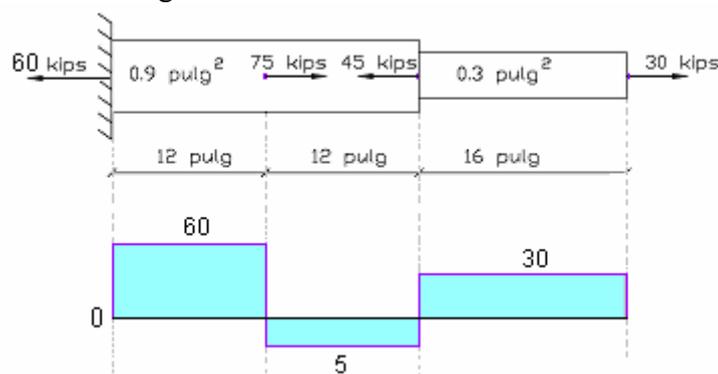
$\phi \geq 2.46 \text{ cm} \Rightarrow \text{sea}$

$\phi = 1'' \Rightarrow \phi = 2.54 \text{ cm}$

**PROBLEMA 3.6.-** Halle la deformación de la barra de acero mostrada en la figura sometido bajo la acción de las cargas dadas  $E = 29 \cdot 10^6 \text{ psi}$



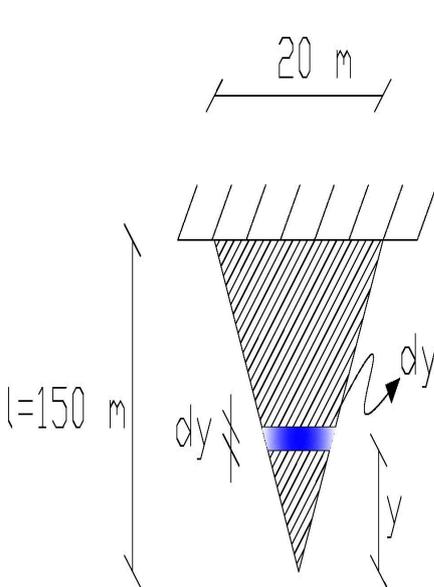
Solución: Realizando un diagrama tenemos.



$$\delta_T = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \Rightarrow \delta_T = \frac{(60 \cdot 10^3)(12)}{(0.9)E} - \frac{(15 \cdot 10^3)(12)}{(0.9)E} + \frac{(30 \cdot 10^3)(16)}{(0.3)E}$$

$\delta_T = 75.9 \cdot 10^{-3} \text{ pulg}$

**PROBLEMA 3.7.-** Una barra cónica de sección circular esta suspendida verticalmente de longitud de 150m., el diámetro de la base es de 20 m., el modulo de elasticidad es de  $2.1 \cdot 10^6 \text{Kg./cm}^2$ . Con un peso propio de  $18000 \text{Kg./m}^3$ . ¿Calcular el alargamiento de la barra?



Deformación  $d\delta = \frac{P_y dy}{A_x E}$

$A_x =$  Es variable

Carga debida al peso propio  $P_y = \gamma \cdot V_x$

Volumen del cono  $V_x = \frac{\pi}{3} r_x^2 y \Rightarrow P_y = \frac{\pi}{3} \gamma r_x^2 y$

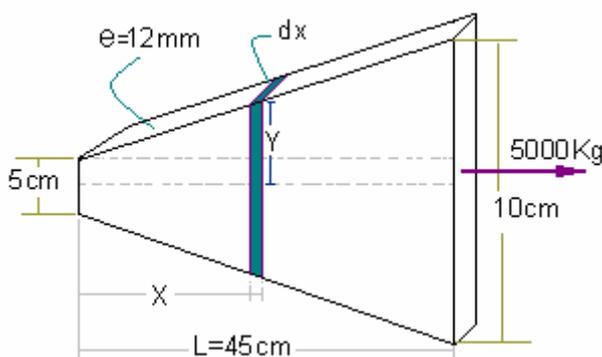
Area es  $A_x = \pi r_x^2$

$$\int_0^\delta d\delta = \int_0^l \frac{((\pi/3)\gamma r_x^2 y) dy}{(\pi r_x^2) E} \Rightarrow \delta = \frac{\gamma}{3E} \int_0^l y dy$$

$$\Rightarrow \delta = 3.214 \cdot 10^{-6} \text{ mm}$$

$$\delta = \frac{(0.018)(1.5)^2}{(6)(2.1 \cdot 10^6)} \Rightarrow \delta = 3.214 \cdot 10^{-6}$$

**PROBLEMA 3.8.-** Una placa de acero delgada tiene la forma trapezoidal de espesor de 12mm, y varia uniformemente desde un ancho de 50mm.hasta 100mm.con una longitud de 450mm, lo cual esta aplicada con una carga axial de 5 toneladas. Calcular la deformación de la placa para un  $E=2.1 \cdot 10^6 \text{kg/cm}^2$ .



**Solución.**

$$\frac{5-2.5}{45} = \frac{Y-2.5}{x} \Rightarrow Y = \frac{2.5}{45}x + 2.5$$

$$A_x = e(2Y) \Rightarrow A_x = 2eY$$

$$A_x = 2 \cdot 1.2Y \Rightarrow A_x = \frac{6}{45}x + 6$$

$$\Delta\delta = \frac{P dx}{A_x E} \Rightarrow \int_0^\delta \Delta\delta = \int_0^L \frac{P dx}{((6/45)x + 6) E}$$

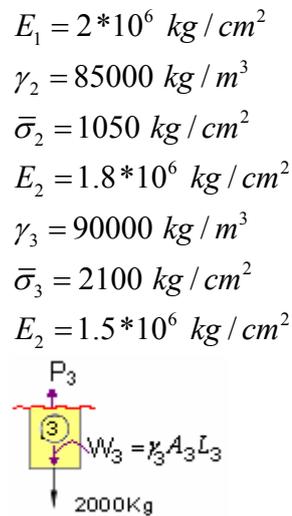
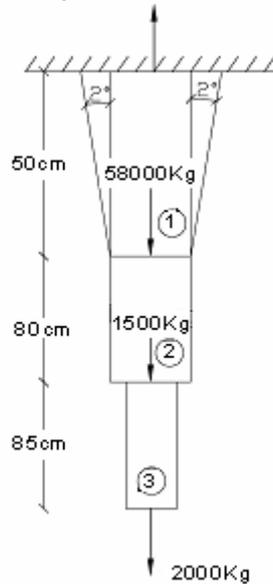
$$\delta = \frac{P}{E} \int_0^{45} \frac{dx}{((6x/45) + 6)} \dots \dots \text{Integrando}$$

$$\delta = \frac{5000}{2.1 \cdot 10^6} \left[ \frac{45}{6} \ln \left( \frac{6x}{45} + 6 \right) \right]_0^{45}$$

$$\delta = \frac{5000}{2.1 \cdot 10^6} \frac{45}{6} [\ln(12) - \ln(6)]$$

$$\delta = \frac{5000 \cdot 45}{2.1 \cdot 10^6} \ln(2) \Rightarrow \delta = 0.124 \text{ mm}$$

**PROBLEMA 3.9.-** Para el sistema que se muestra a continuación ¿calcular la deformación total y el esfuerzo normal máximo?



$$E_1 = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$\gamma_2 = 85000 \text{ kg/m}^3$$

$$\bar{\sigma}_2 = 1050 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_2 = 1.8 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$\gamma_3 = 90000 \text{ kg/m}^3$$

$$\bar{\sigma}_3 = 2100 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_2 = 1.5 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

Solución.

$$\sigma_3 = \frac{P_3}{A_3} \Rightarrow \sigma_3 = \frac{2000 + 7.65A_3}{A_3} \leq 2100 \Rightarrow \phi_3 \geq 1.103 \text{ cm} \Rightarrow \phi_3 = \frac{1}{2}$$

$$A_3 = \frac{\pi}{4} * \phi^2 \Rightarrow A_3 = \frac{\pi}{4} * (1.27)^2 \Rightarrow A_3 = 1.2667 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{P_2}{A_2} \Rightarrow \sigma_2 = \frac{3509.69 + 6.8A_2}{A_2} \leq 1050 \Rightarrow \phi_2 \geq 2.07 \text{ cm} \Rightarrow \phi_2 = 1''$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4} * \phi^2 \Rightarrow A_2 = \frac{\pi}{4} * (1.54)^2 \Rightarrow A_2 = 1.86265 \text{ cm}^2$$

$$D = 2(50 \tan 2) + 2.54 \Rightarrow D = 6.032 \text{ cm} \Rightarrow D = 2 \frac{5}{8}''$$

$$\therefore A_{\max} = \frac{\pi}{4} (6.6675)^2 \Rightarrow A_{\max} = 34.915 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{\max} = \frac{R}{A_{\max}} \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{61522.36}{34.915 \text{ cm}^2} \Rightarrow \sigma_{\max} = 1762.06 \text{ kg/cm}^2$$

Cálculo de deformaciones

$$\delta_1 = \frac{4RL_1}{\pi E_1 D \phi_2} \quad ; \quad \delta_2 = \frac{P_2 L_2}{A_2 E_2} \quad ; \quad \delta_3 = \frac{P_3 L_3}{A_3 E_3}$$

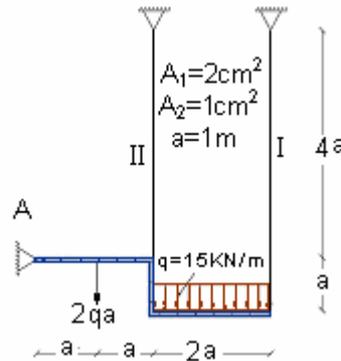
$$\delta_T = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

$$\delta_T = \frac{(4)(61544.15)(50)}{\pi (2 \cdot 10^6)(6.6675)(2.54)} + \frac{(3544.15)(80)}{(1.86265)(1.8 \cdot 10^6)} + \frac{(2009.69)(85)}{(1.2667)(1.5 \cdot 10^6)} \Rightarrow$$

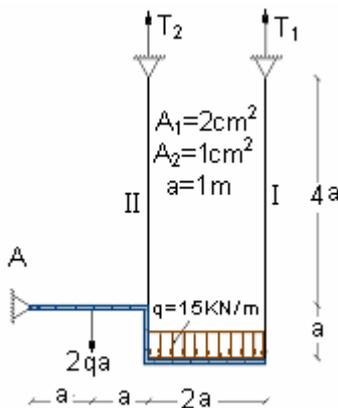
$$\delta_T = 0.21 \text{ cm}$$

**RESOLUCIÓN DE SISTEMAS ESTATICAMENTE INDETERMINADOS**

**PROBLEMA 3.10.-** Para el sistema que se muestra, calcular los esfuerzos normales en las barras elásticas ( $E=$ constante)



Solución.



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -2aT_2 - 4aT_1 + 2qa^2 + 30a(3a) = 0$$

$$2T_2 + 4T_1 = 2qa + 90a$$

$$2T_2 + 4T_1 = 2(15)(1) + 90(1)$$

$$T_2 + 2T_1 = 60 \dots\dots(1)$$

Análisis por deformación

$$\frac{\delta_2}{2a} = \frac{\delta_1}{4a} \Rightarrow \delta_1 = 2\delta_2$$

$$\frac{(T_1)(6a)}{(2)E} = \frac{(2)(T_2)(4a)}{(1)E}$$

$$T_1 = \frac{8}{3}T_2 \dots\dots(2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$T_2 + 2\left(\frac{8}{3}T_2\right) = 60 \Rightarrow T_2 = 9.47 \text{ KN}$$

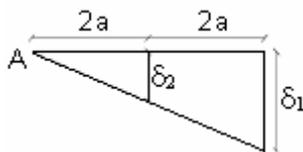
$$T_1 = 25.25 \text{ KN}$$

Cálculo de los esfuerzos

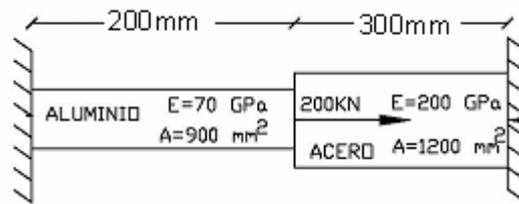
$$\sigma_1 = \frac{T_1}{A_1} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{25.25 \text{ KN}}{2 \text{ cm}^2} \Rightarrow \sigma_1 = 12.625 \text{ KN/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{T_2}{A_2} \Rightarrow \sigma_2 = \frac{9.47 \text{ KN}}{1 \text{ cm}^2} \Rightarrow \sigma_2 = 9.47 \text{ KN/cm}^2$$

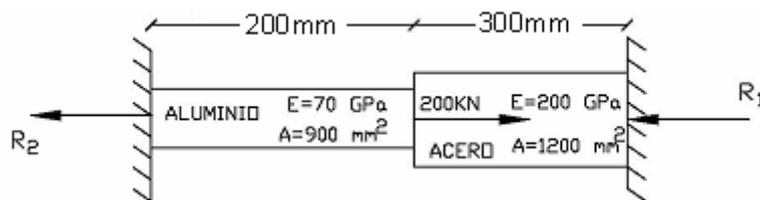
Análisis de la deformación de la barra



**PROBLEMA 3.11.-** La barra representada en la figura esta firmemente empotrada en sus extremos. Determinar los esfuerzos en cada material.



Solución :



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_1 + R_2 = 200 \text{ kN} \dots\dots\dots (1)$$

Por deformaciones se tiene  $\delta_1 = 0 \Rightarrow \delta_{\text{aluminio}} - \delta_{\text{acero}} = 0 \Rightarrow \delta_{\text{aluminio}} = \delta_{\text{acero}}$

$$\frac{(R_1)(30)}{(1200)(200)} = \frac{R_2(20)}{(900)(70)} \Rightarrow R_1 = 2.54 R_2 \dots\dots\dots (2)$$

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2) se tiene

$$R_1 = 143.5024 \text{ kN}$$

$$R_2 = 56.497 \text{ kN}$$

Cálculo de los esfuerzos

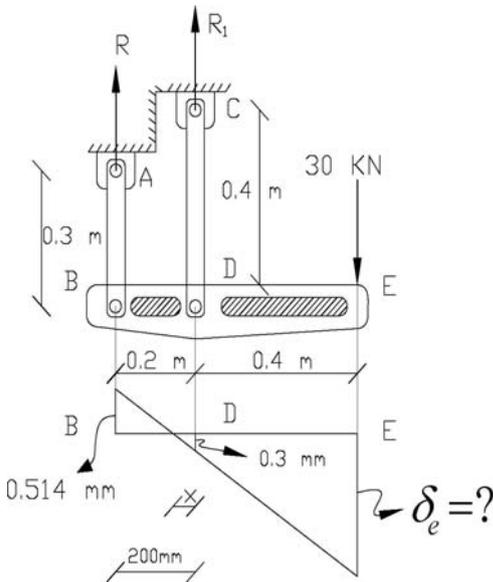
$$\sigma_{\text{alum}} = \frac{R_2}{A} \Rightarrow$$

$$\sigma_{\text{alum}} = \frac{56.497 \text{ kN}}{900 * 10^{-3} \text{ m}^2} \Rightarrow \sigma_{\text{alum}} = 62.8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{acero}} = \frac{R_1}{A} \Rightarrow$$

$$\sigma_{\text{acero}} = \frac{143.5024}{1200 * 10^{-6}} \Rightarrow \sigma_{\text{acero}} = 120 \text{ MPa}$$

**PROBLEMA 3.12.-** Barra rígida BDE se apoya en dos conectores AB y CD. El conector AB es de aluminio de 70 GPa con 500 mm<sup>2</sup>, el conector CD es de acero de 200GPa con 600 mm<sup>2</sup>, para cierta carga. Hallar la deformación en el punto E



Se considera momento positivo en el sentido Horario

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -0.2R_1 + 0.6(30) = 0 \Rightarrow R_1 = 90 \text{ KN}$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow 0.2R + 0.4(30) = 0 \Rightarrow R = -60 \text{ KN}$$

Cálculo de deformaciones

$$\text{Barra: AB} \Rightarrow \delta_1 = \frac{RL}{AE} \Rightarrow \delta_1 = \frac{(60)(300)}{(70 \cdot 10^9)(500 \cdot 10^{-6})}$$

$$\delta_1 = 0.514 \text{ mm}$$

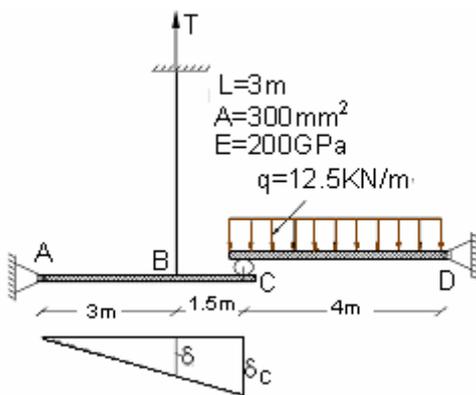
$$\text{Barra: CD} \Rightarrow \delta_2 = \frac{RL}{AE} \Rightarrow \delta_2 = \frac{(90000)(0.4)}{(200 \cdot 10^9)(600 \cdot 10^{-6})}$$

$$\delta_2 = 0.3 \text{ mm}$$

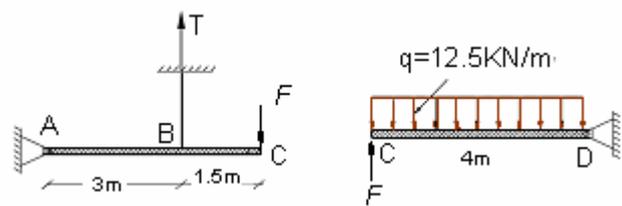
$$\frac{0.514}{200-x} = \frac{0.3}{x} \Rightarrow x = 73.71 \text{ mm}$$

$$\frac{\delta_e}{400+x} = \frac{0.3}{73.71} \Rightarrow \delta_e = 1.928 \text{ mm}$$

**PROBLEMA 3.13.-** Para el sistema mostrado las barras achuradas son rígidas. Calcular el desplazamiento vertical del punto C.



El punto C tiene una fuerza F ficticia que actúa ambos lados



$$\text{En el tramo CD } \sum M_D = 0 \Rightarrow -2(50) + 4F = 0 \Rightarrow$$

$$F = 25 \text{ KN}$$

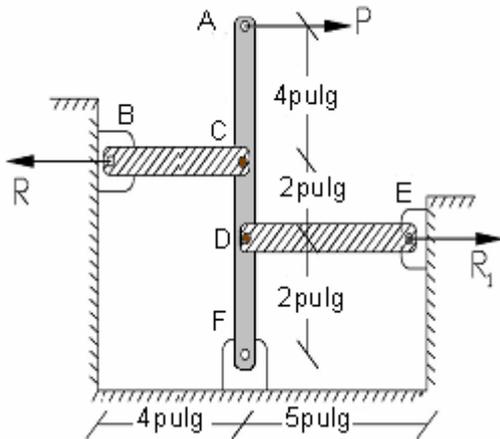
$$\text{En el tramo AC } \sum M_A = 0$$

$$3T + 4.5F = 0 \Rightarrow T = 37.5 \text{ KN}$$

$$\frac{\delta}{3} = \frac{\delta_c}{4.5} \Rightarrow \delta_c = \frac{4.5}{3} \left( \frac{37500}{300 \cdot 10^{-6}} \right) \left( \frac{3}{200 \cdot 10^9} \right)$$

$$\delta_c = 2.81 \text{ mm}$$

**PROBLEMA 3.14.-** Los conectores BC y DE son de acero ( $E=29*10^6$  psi) y tienen  $\frac{1}{2}$  pulg. de ancho y  $\frac{1}{4}$  pulg. de espesor. Halle la fuerza en cada conector cuando se aplica una fuerza  $P = 600$  lb.al elemento rígido AF, Calcular también la deformación en el punto A



$$\Sigma M_F = 0 \Rightarrow -4R - 2R_1 + 8P \Rightarrow 2R + R_1 = 2400 \dots (1)$$

Por deformaciones

$$\frac{\delta}{4} = \frac{\delta_1}{2} \Rightarrow \delta = 2\delta_1 \Rightarrow \frac{R(4)}{AE} = \frac{2R_1(5)}{AE}$$

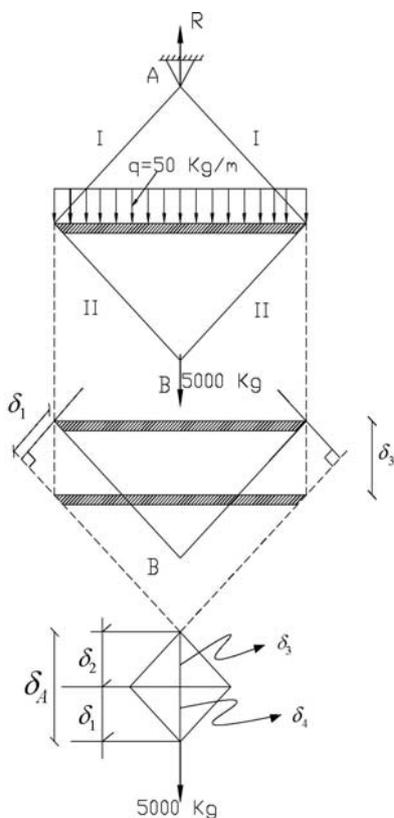
$$R = \frac{5}{2}R_1 \dots (2) \quad \text{Resolviendo (1) y (2)}$$

$$\Rightarrow R_1 = 400 \text{ lb} \quad R = 1000 \text{ lb}$$

$$\frac{\delta}{4} = \frac{\delta_A}{2} \Rightarrow \delta_A = 2\delta \Rightarrow \delta_A = \frac{(2)(1000)(4)}{\left(\frac{1}{2} * \frac{1}{4}\right)(29 * 10^6)}$$

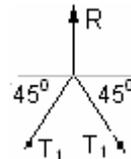
$$\delta_A = 2.21 * 10^{-3} \text{ pulg}$$

**PROBLEMA 3.15.-** Para el sistema que se muestra, calcular el desplazamiento del punto A. todos los módulos son iguales y las secciones también son iguales de  $2 \text{ cm}^2$  y  $E=2.1*10^6 \text{ kg/cm}^2$ .



$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow R - 5000 - (50)(3\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow R = 5212.132 \text{ kg}$$

Para el nodo B y A se trata de fuerzas concurrentes



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_1 = \frac{R}{2\text{sen}45} \Rightarrow T_1 = 3685.534 \text{ kg}$$

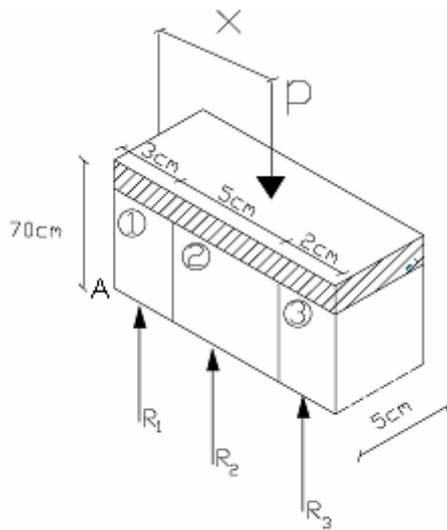
$$T_2 = 3535.534 \text{ kg}$$

Del gráfico de tiene  $\delta_3 = \frac{\delta_1}{\cos 45}$  y  $\delta_4 = \frac{\delta_1}{\cos 45}$

$$\delta_A = \frac{1 * 3}{\cos 45} \left[ \frac{(3685.534) + 3535.534}{(2)(2.1 * 10^6)} \right] \Rightarrow \delta_A = 0.0073 \text{ cm}$$

$$\delta_A = 0.073 \text{ mm}$$

**PROBLEMA 3.16.-** Un miembro compuesto de 3 barras prismáticas es comprimido por una carga P a cierta distancia X. Se pide calcular el valor de P y el valor de X, a partir de la siguiente figura.



$$E_1 = 2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_2 = 7 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_3 = 1.4 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$L_1 = L_2 = L_3$$

$$\bar{\sigma}_1 = 1400 \text{ kg/cm}^2$$

$$\bar{\sigma}_2 = 700 \text{ kg/cm}^2$$

$$\bar{\sigma}_3 = 1050 \text{ kg/cm}^2$$

$$x = ?$$

$$P = ?$$

Por equilibrio esático  $\Rightarrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow P = R_1 + R_2 + R_3 \dots \dots \dots (1)$

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -1.5R_1 - 5.5R_2 - 9R_3 + xP = 0 \Rightarrow x = \frac{1.5R_1 + 5.5R_2 + 9R_3}{P} \dots \dots \dots (2)$

Por deformaciones se tiene que  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3$

$\therefore \delta_1 = \delta_2 \Rightarrow \frac{R_1 l}{(15)(2.1 \cdot 10^6)} = \frac{R_2 l}{(25)(7 \cdot 10^6)} \Rightarrow R_1 = 1.8R_2 \dots \dots \dots (3)$

$\delta_1 = \delta_3 \Rightarrow \frac{R_1 l}{(15)(2.1)} = \frac{R_3 l}{(10)(1.4)} \Rightarrow R_1 = 2.25R_3 \dots \dots \dots (4)$

Como  $\sigma_1 = \frac{R_1}{A_1} \leq \bar{\sigma}_1 \Rightarrow R_1 = A_1 \bar{\sigma}_1 \Rightarrow R_1 = (15 \text{ cm}^2)(1400) \text{ kg/cm}^2 \Rightarrow R_1 = 21000 \text{ kg}$

Sustituyendo  $R_1 = 21000$  en (3)  $\Rightarrow R_2 = \frac{21000}{1.8} \Rightarrow R_2 = 11666.67 \text{ Kg}$

Verificamos  $\sigma_2 = \frac{R_2}{A_2} \leq \bar{\sigma}_2 \Rightarrow \frac{11666.67}{25} \leq 700 \Rightarrow 466.67 \leq 700 \dots \dots \dots \text{ok.}$

Sustituamos  $R_1 = 21000$  en (4)  $\Rightarrow R_3 = \frac{21000}{2.25} \Rightarrow R_3 = 9333.33 \text{ kg}$

Verificamos  $\sigma_3 = \frac{R_3}{A_3} \leq \bar{\sigma}_3 \Rightarrow \frac{9333.33}{10} \leq 1050 \Rightarrow 933.33 \leq 1050 \dots \dots \dots \text{ok!}$

$\therefore P = R_1 + R_2 + R_3 \Rightarrow P = 21000 + 11666.67 + 9333.33 \Rightarrow P = 42000 \text{ kg}$

$x = \frac{(1.5)(21000) + (5.5)(11666.67) + (9)(9333.33)}{42000} \Rightarrow x = 4.28 \text{ cm}$

**PROBLEMAS PROPUESTOS DE ESFUERZO - DEFORMACIÓN**

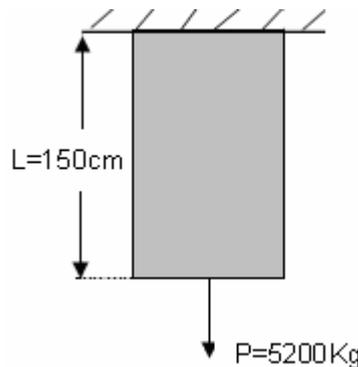
**3.1.-** Una barra cónica de sección circular esta suspendida verticalmente de longitud de 150m, el diámetro de la base es de 20mm,  $E = 1.5 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$ . con un peso propio de  $200000 \text{Kg/m}^3$ . Calcular el alargamiento de la barra.

**3.2.-** Una barra prismática de longitud  $L$ , sección transversal  $A$ , se suspende verticalmente de un extremo. Llamando  $M$  a su masa total, calcular la deformación de la barra.

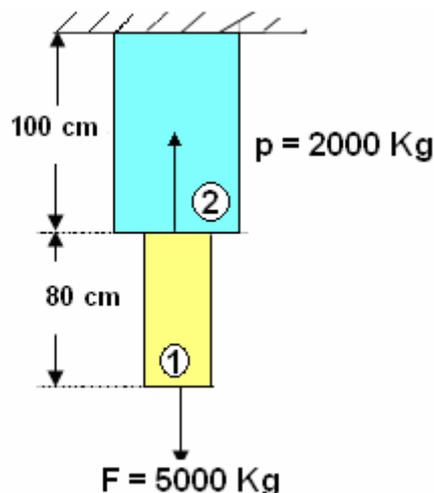
**3.3.-** Una varilla de longitud  $L$  y sección circular tiene un diámetro que varia linealmente desde  $D$  de un extremo hasta  $d$  en el otro. Determinar el alargamiento que le producirá una fuerza  $P$  de tensión.

**3.4.-** Una barra de sección circular que varia linealmente desde un diámetro “ $D$ ” en un extremo hasta otro menor “ $d$ ” en el opuesto, se suspende verticalmente de su extremo mas ancho. Si la densidad del material es “ $\rho$ ”, determinar el alargamiento debido a su peso propio. Aplicar el resultado a la deformación del alargamiento de un sólido de forma cónica suspendido de su base.

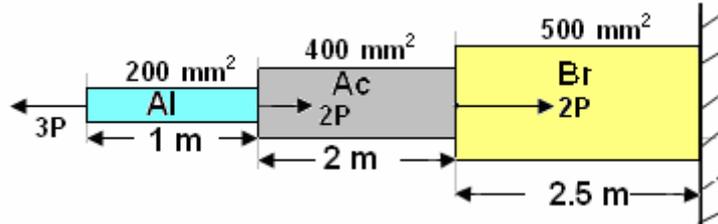
**3.5.-** A partir de la figura mostrada determinar, la deformación máxima de la sección circular: Si el  $\sigma_f = 2100 \text{kg/cm}^2$ , con un factor de seguridad de 2 y  $E = 2.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$ .



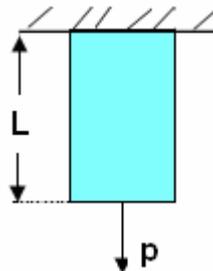
**3.6.-** Para el sistema que se muestra a continuación. Calcular la deformación total y el esfuerzo máximo. Considerando que  $A_1 = 1.6 \text{ cm}^2$ ,  $E_1 = 1.5 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$  y  $A_2 = 4 \text{ cm}^2$ ,  $E_2 = 2.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$ .



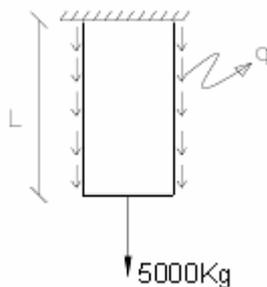
**3.7.-** Un tubo de acero se encuentra rápidamente sujeto por un perno de aluminio y por otro de bronce, tal como se muestra en la figura. Las cargas axiales se aplican en los puntos indicados. Calcule la deformación total del sistema, sin que no exceda un esfuerzo de 180MPa en el aluminio,  $E_{al}=70$  GPa; de 150MPa en el acero  $E_{ac}=200$ GPa y de 100MPa en el bronce  $E_{br}=83$ GPa.



**3.8.-** Una varilla de acero de sección constante  $300\text{mm}^2$  y un longitud de 120m, se suspende verticalmente de uno de sus extremos y soporta una carga de  $P = 30\text{kN}$  que suspende de su extremo inferior. Si su peso propio ( $\gamma$ ) de la varilla es de  $90000\text{ N/m}^3$  y  $E = 200$  GPa. Calcular la deformación máxima de la varilla.



**3.9.-** Calcular el esfuerzo máximo y la deformación máxima del bloque que se muestra a continuación.



$$q = 8000 \text{ kg / m}$$

$$L = 100 \text{ cm}$$

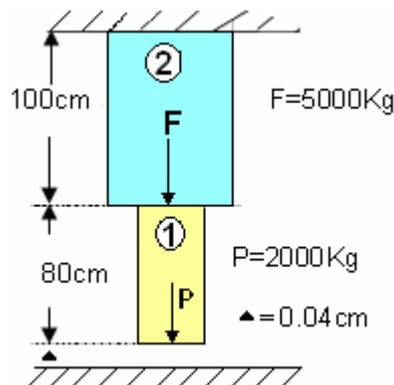
$$E = 1.5 * 10^6 \text{ kg / cm}^2$$

$$A = 10 \text{ cm}^2$$

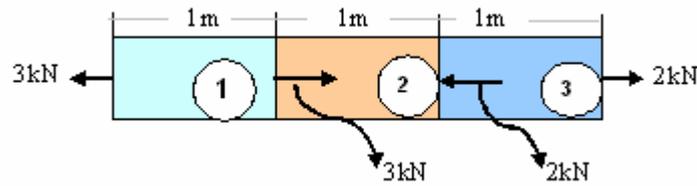
$$\sigma_{\max} = ?$$

$$\delta_{\max} =$$

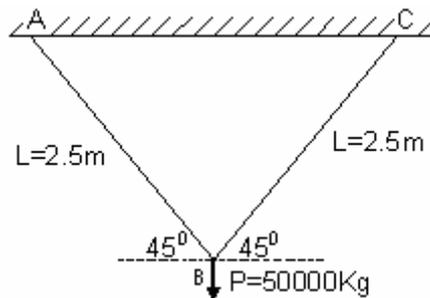
**3.10.-** Dos bloques están suspendidas como se muestra en la figura, donde  $A_1 = 1.6\text{cm}^2$ ,  $E_1 = 1 * 10^6\text{kg/cm}^2$  y  $A_2 = 2.5 \text{ cm}^2$ ,  $E_2 = 2 * 10^6\text{kg/cm}^2$ . Calcular los esfuerzos de ambos bloques.



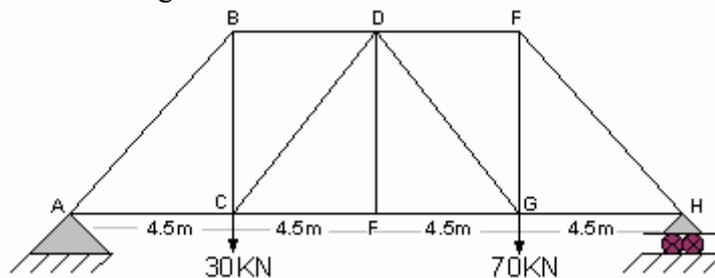
**3.11.-** Tres bloques están unidos como se muestra en la figura. Don de los esfuerzos admisibles de trabajos son:  $\sigma_1 = 120\text{MPa}$ , con  $E_1 = 83\text{GPa}$ ,  $\sigma_2 = 140\text{MPa}$ , con  $E_2 = 200\text{GPa}$  y  $\sigma_3 = 80\text{MPa}$ , con  $E_3 = 70\text{GPa}$ . Determinar la deformación total.



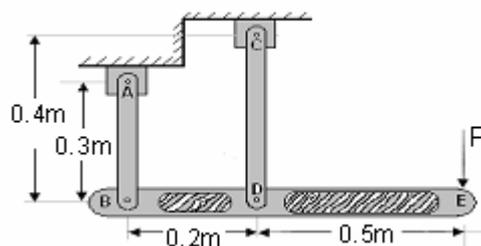
**3.12.-** Dos barras de acero idénticas están unidas por medio de un pasador y soportan una carga de  $50000\text{Kg}$ , como se muestra en la figura. Halle la sección de las barras necesaria para que la tensión normal en ellas no sea mayor de  $\sigma_t = 1200\text{kg/cm}^2$ . Hallar también el desplazamiento vertical del punto B para  $E = 2.1 \cdot 10^6\text{kg/cm}^2$ .



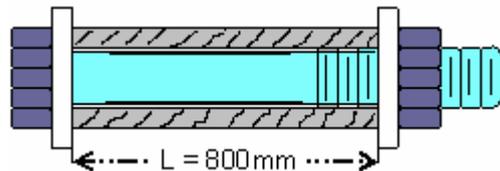
**3.13.-** La armadura de la figura que soporta las cargas de  $30\text{KN}$  y  $70\text{KN}$  con un esfuerzo de trabajo de  $\sigma_t = 1200\text{kg/cm}^2$ , determinar la sección necesaria de las barras DE y AC. Hallar el alargamiento de la barra DC en toda su longitud de  $6\text{m}$ . Cuyo modulo de elasticidad es de  $E = 2.1 \cdot 10^6\text{kg/cm}^2$ .



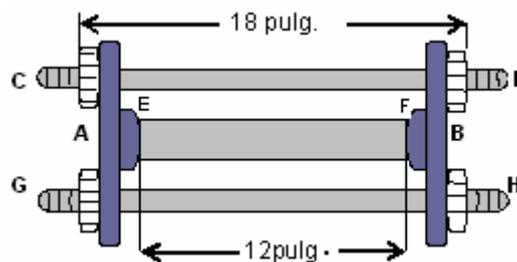
**3.14.-** Para la barra rígida BDE se apoya en dos conectores de aluminio AB y CD. Con  $70\text{GPa}$  y tienen una sección de  $600\text{mm}^2$ , halle la mayor carga P que puede suspenderse del punto E, si la deformación en ese punto no debe de pasar de  $0.004\text{m}$ .



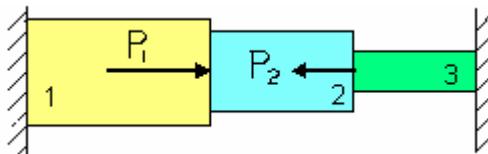
**3.15.-** Un tornillo de acero que sujeta, mediante unas arandelas y tuerca, un tubo o manguito de bronce. El paso del tornillo es de 0.80mm, la sección recta del tubo de bronce es de  $900\text{mm}^2$  y la del tornillo de acero es de  $450\text{mm}^2$ . se aprieta la tuerca hasta conseguir en el manguito de bronce un esfuerzo de compresión de  $30\text{MPa}$ . Determinar el esfuerzo del bronce si a continuación se le da a la tuerca una vuelta más. ¿Cuántas vueltas habrá que dar ahora en sentido contrario para reducir tal esfuerzo a cero?



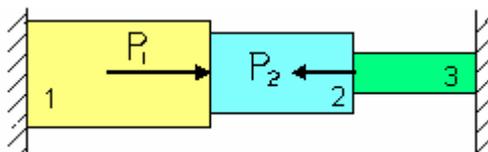
**3.16.-** Las fundiciones rígidas A y B están conectadas por dos pernos CD y GH de acero con diámetro de  $\frac{3}{4}$ " y están en contacto con los extremos de una barra de aluminio EF con diámetros de 1.5 pulg. Cada perno tiene rosca simple con un paso de 0.1 pulg. Y después de colocadas, las tuercas en D y H se aprietan un cuarto de vuelta. Sabiendo que el  $E_{ac} = 29 \cdot 10^6$  psi y  $E_{al} = 10.1 \cdot 10^6$  psi, halle el esfuerzo normal en la barra.



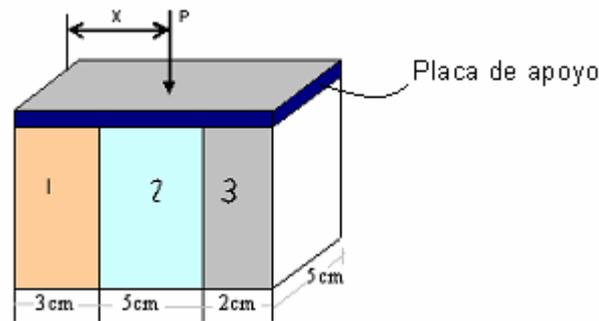
**3.17.-** Una varilla esta formada de tres partes distintas, como se indica en la figura, y soporta unas fuerzas axiales de  $P_1 = 5000\text{Kg}$  y  $P_2 = 2000\text{Kg}$ . Determinar los esfuerzos en cada material si los extremos están firmemente empotrados en unos muros rígidos e indeformables. Para lo cual se conoce:  $A_1 = 2A_2 = 3A_3$ ,  $L_1 = L_2 = L_3$ ,  $E_1 = 1.2 \cdot 10^5 \text{kg/cm}^2$ ,  $E_2 = 1.8 \cdot 10^5 \text{kg/cm}^2$   $E_3 = 2.1 \cdot 10^6 \text{kg/cm}^2$  y el diámetro de la barra tres es de 1cm.



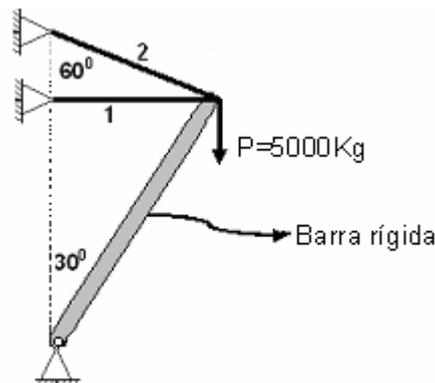
**3.18.-** Una varilla esta formada de tres partes distintas, como se indica en la figura, y soporta unas fuerzas axiales de  $P_1 = 5000\text{Kg}$  y  $P_2 = 2000\text{Kg}$ . Determinar los diámetros en cada material si los extremos están firmemente empotrados en unos muros rígidos e indeformables. Para lo cual se conoce:  $A_1 = 2A_2 = 3A_3$ ,  $L_1 = L_2 = L_3$ ,  $E_1 = 1.2 \cdot 10^5 \text{kg/cm}^2$ ,  $E_2 = 1.8 \cdot 10^5 \text{kg/cm}^2$   $E_3 = 2.1 \cdot 10^6 \text{kg/cm}^2$  y los esfuerzos admisibles son:  $\sigma_1 = 600\text{kg/cm}^2$ ,  $\sigma_2 = 800\text{kg/cm}^2$  y  $\sigma_3 = 1200\text{kg/cm}^2$ .



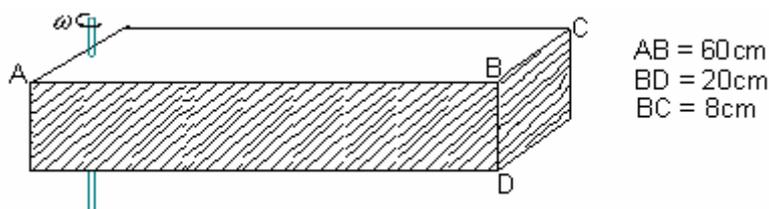
**3.19.-** Un miembro compuesto de tres bloques prismáticos es comprimido por una carga **P** a cierta distancia **X**. se pide calcular el valor de dicha carga **P** y la distancia **X** con los siguientes datos:  $E_1=2.1 \cdot 10^6 \text{kg/cm}^2$ ,  $E_2=7 \cdot 10^5 \text{kg/cm}^2$  y  $E_3= 1.4 \cdot 10^6 \text{kg/cm}^2$  y los esfuerzos admisibles son:  $\sigma_1=2100 \text{kg/cm}^2$ ,  $\sigma_3=700 \text{kg/cm}^2$  y  $\sigma_2=1050 \text{kg/cm}^2$ .



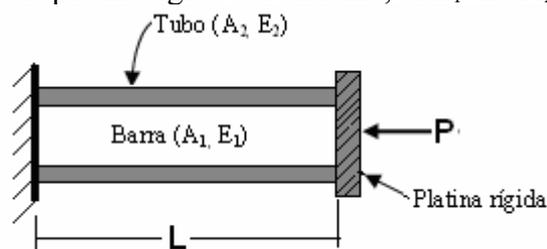
**3.20.-** Para la figura mostrada: Calcular el diámetro de los cables 1 y 2, para ello se tiene que  $A_2=2.25A_1$ ,  $E_1=0.7 E_2$  y los esfuerzos admisibles son:  $\sigma_1=1100 \text{kg/cm}^2$  y  $\sigma_2=1050 \text{kg/cm}^2$ .



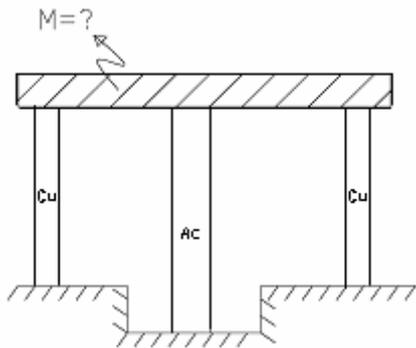
**3.21.-** Calcular el alargamiento producido en la barra AB debido a la fuerza centrífuga en el momento en que el esfuerzo unitario máximo de tracción es de  $1000 \text{kg/cm}^2$ ,  $E=2 \cdot 10^6 \text{kg/cm}^2$ , en sección recta y un peso específico de  $8 \text{kg/dm}^3$ .



**3.22.-** Una barra de longitud **L**, sección transversal de área  $A_1$  y modulo de elasticidad  $E_1$ , ha sido colocado en el interior de un tubo de igual longitud **L** pero de área  $A_2$  y modulo  $E_2$  (ver la figura). ¿Cual es la deformación de la barra y del tubo cuando se ejerce una fuerza **P** sobre la platina rígida del extremo, si  $A_1=2.5A_2$  y  $E_1=1.6E_2$ .

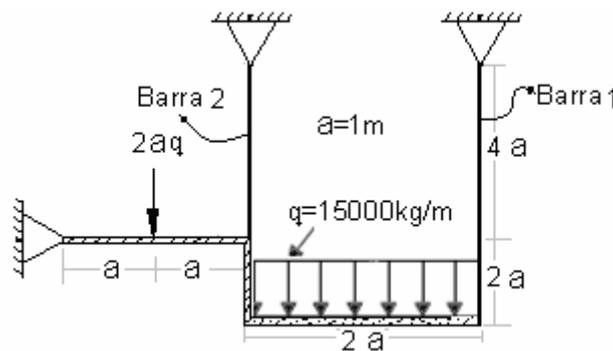


**3.23.-** Un bloque completamente rígido de masa  $M$  se apoya en tres varillas situadas en un mismo plano, como indica la figura. Calcular el valor máximo de  $M$ .

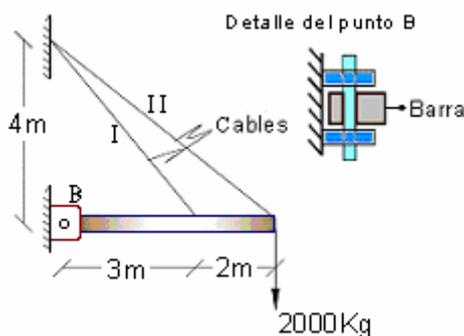


Cobre	Acero
$L=160 \text{ mm}$	$L=240 \text{ mm}$
$A=900 \text{ mm}^2$	$A=1200 \text{ mm}^2$
$E=120 \text{ GPa}$	$E=200 \text{ GPa}$
$\bar{\sigma}=70 \text{ MPa}$	$\bar{\sigma}=140 \text{ MPa}$

**3.24.-** Para la figura mostrada: Calcular el diámetro de los cables 1 y 2, para ello se tiene que  $A_2=1.5A_1$ ,  $E_1=0.7E_2$  y los esfuerzos admisibles son:  $\bar{\sigma}_1=1100 \text{ kg/cm}^2$  y  $\bar{\sigma}_2=1050 \text{ kg/cm}^2$ .



**3.25.-** Hallar las dimensiones de los dos cables y el diámetro del pasador B, para lo cual tiene que cumplirse las condiciones dadas a continuación. Los cables son del mismo material.



Dimensionar los cables

$$\phi_1 = ?$$

$$\phi_2 = ?$$

$$\bar{\sigma} = 1050 \text{ kg/cm}^2$$

$$\bar{\tau} = 0.5\bar{\sigma}$$

$$A_1 = 2A_2$$

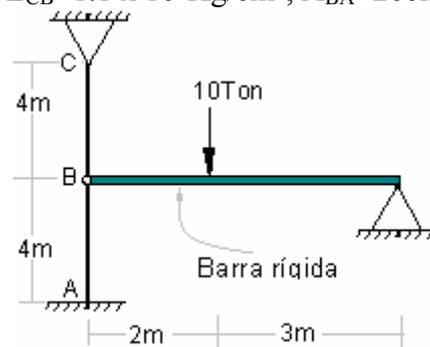
Pasador:

$$\bar{\sigma} = 2100 \text{ kg/cm}^2$$

$$\bar{\tau} = 0.5\bar{\sigma}$$

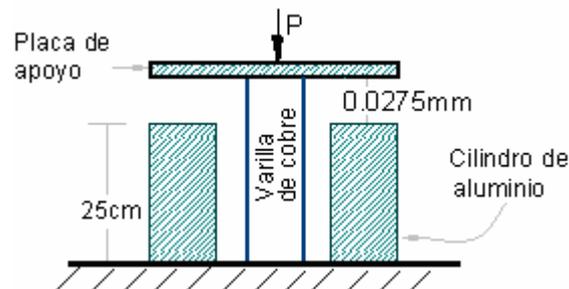
$$\phi = ?$$

**3.26.-** Para el sistema mostrado en la figura, determinar el alargamiento de la articulación B.  $A_{CB}=5\text{cm}^2$ ,  $E_{CB}=1.1 \times 10^6\text{Kg/cm}^2$ ,  $A_{BA}=20\text{cm}^2$ ,  $E_{BA}=2 \times 10^6\text{Kg/cm}^2$ .

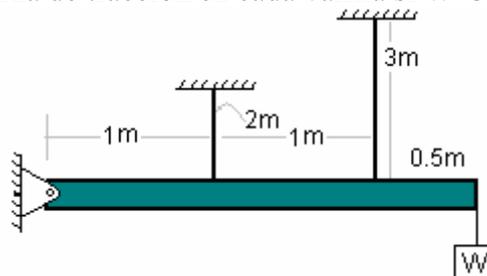


**3.27.-** Una varilla de cobre se introduce en un cilindro hueco de aluminio. La varilla sobresale 0.0275mm, como se indica en la figura. Determinar la carga máxima P que se puede aplicar al conjunto por intermedio de la placa de apoyo con los datos que se especifican seguidamente.

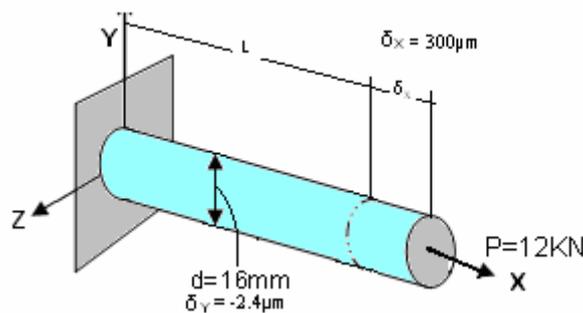
Cobre:  $12\text{mm}^2$ ,  $E=12 \times 10^5\text{Kg/cm}^2$  y  $\bar{\sigma}=1400\text{Kg/cm}^2$ .  
Aluminio:  $20\text{mm}^2$ ,  $E=7 \times 10^5\text{Kg/cm}^2$  y  $\bar{\sigma}=750\text{Kg/cm}^2$ .



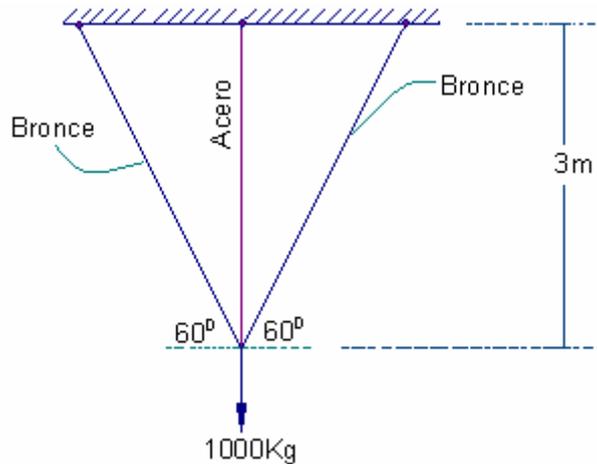
**3.28.-** Una viga perfectamente rígida está articulada en un extremo y suspendida de dos varillas de igual sección y material, pero de distinta longitud, como se indica en la figura. Determinar la fuerza de tracción en cada varilla si  $W=3300\text{Kg}$ .



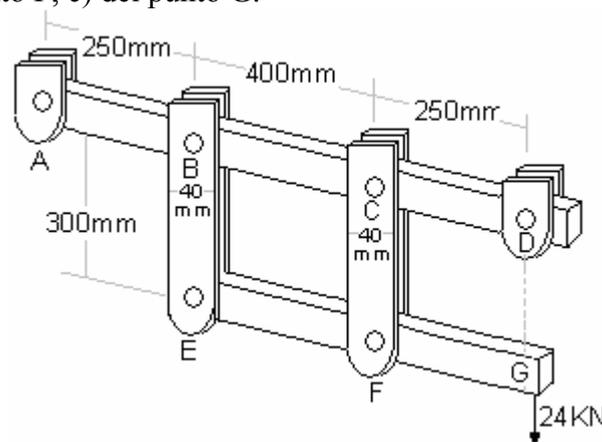
**3.29.-** Una barra de  $L=45\text{cm}$  de longitud y de 16mm de diámetro, hecha de material homogéneo e isotropo, se alarga  $300\mu\text{m}$  y su diámetro decrece  $2.4\mu\text{m}$  al ser sometido a una fuerza axial de 12kN. Calcular el módulo de elasticidad y la relación del módulo de poisson del material.



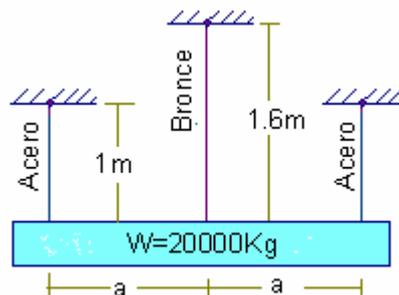
**3.30.-** Tres varillas, situadas en un mismo plano, soportan conjuntamente una fuerza de 1000Kg, como se indica en la figura. Suponiendo que antes de aplicar la carga ninguna de las tres estaba ni floja, ni con tensión. Determinar las tensiones que aparecen en cada una.  $E_{\text{acero}}=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$  y  $E_{\text{bronce}}=8.4 \times 10^5 \text{Kg/cm}^2$ .



**3.31.-** Cada uno de los cuatro eslabones verticales que unen los dos elementos horizontales esta hecho de aluminio ( $E=70\text{GPa}$ ) y tienen una sección uniforme rectangular de 10 x 40mm. Para la carga mostrada, halle los desplazamientos: a) del punto E, b) del punto F, c) del punto G.



**3.32.-** Los extremos inferiores de las barras de la figura, están al mismo nivel antes de colgar de ellas un bloque rígido que pesa 20000Kg. Las barras de acero tienen una sección de  $6\text{cm}^2$  y  $E_{\text{acero}}=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ . La barra de bronce tiene una sección de  $9\text{cm}^2$  y  $E_{\text{bronce}}=8.4 \times 10^5 \text{Kg/cm}^2$ . Determinar la tensión en las tres barras.



## CAPITULO IV

# VARIACIÓN DE TENSIONES INTERNAS

### 4.1.- INTRODUCCIÓN

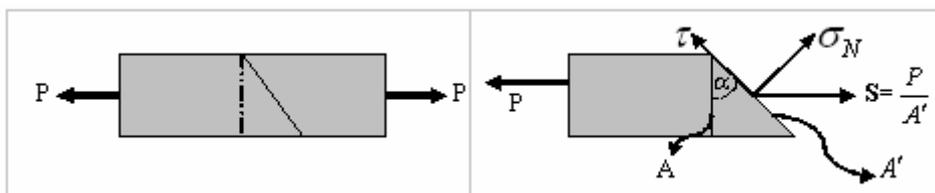
Las variaciones de los esfuerzos internos se basan en un concepto muy importante que es el círculo de Mohr, las ecuaciones obtenidas de la transformación de un esfuerzo en el plano lo introdujo el ingeniero alemán Otto Mohr (1835 – 1918) y se conoce como Círculo de Mohr para esfuerzo plano.

### 4.2.- ESFUERZO EN UN PUNTO

Se define esfuerzo en un punto por las componentes que actúan en varias direcciones en el espacio, se puede representar por los esfuerzos que actúan en varias direcciones sobre un elemento diferencial de volumen que rodea el punto considerado.

Cuyos esfuerzos se denotaran  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$ . Pero además existen tensiones máximas y mínimas, como también cortante máximo. Para su determinación existen dos métodos que son: el método gráfico y el método analítico.

### 4.3.- MÉTODO GRÁFICO PARA SU DETERMINACION DE LAS TENSIONES MÁXIMAS



Del capítulo 1 recordemos  $\sigma_x = \frac{P}{A}$  y  $\text{Sen}2\alpha = 2 * \text{Sen}\alpha * \text{Cos}\alpha$

$$\text{Cos}\alpha = \frac{A}{A'} \Rightarrow A' = \frac{A}{\text{Cos}\alpha} \quad \text{Como el esfuerzo } S = \frac{P}{A'} \Rightarrow S = \frac{P * \text{Cos}\alpha}{A}$$

$$\sigma_N = S * \text{Cos}\alpha \Rightarrow \sigma_N = \frac{P * \text{Cos}\alpha * \text{Cos}\alpha}{A} \Rightarrow \sigma_N = \sigma_x \text{Cos}^2\alpha \dots\dots\dots(4.1)$$

$$\tau = S * \text{Sen}\alpha \Rightarrow \tau = \frac{P * \text{Cos}\alpha * \text{Sen}\alpha}{A} \Rightarrow \tau = \frac{\sigma_x * \text{Sen}2\alpha}{2} \dots\dots\dots(4.2)$$

Del estudio de la trigonometría nosotros recordamos que las identidades trigonométricas tenemos que:

$$\text{Cos}2\alpha = \text{Cos}^2\alpha - \text{Sen}^2\alpha \dots\dots\dots(4.3)$$

$$\text{Sen}^2\alpha + \text{Cos}^2\alpha = 1 \dots\dots\dots(4.4)$$

$$\text{Combinando las ecuaciones (4.3) y (4.4) tenemos } \text{Cos}^2\alpha = \frac{\text{Cos}2\alpha + 1}{2} \dots\dots(4.5)$$

$$\text{Sustituyendo la ecuación (4.5) en (4.1) tenemos } \sigma_N = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x * \text{Cos}2\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\sigma_N - \frac{\sigma_x}{2} = \frac{\sigma_x * \text{Cos}2\alpha}{2} \Rightarrow \left( \sigma_N - \frac{\sigma_x}{2} \right)^2 = \left( \frac{\sigma_x}{2} \right)^2 * \text{Cos}^2 2\alpha \dots\dots\dots(4.6)$$

$$\text{De la ecuación (4.2) tenemos } \tau^2 = \left( \frac{\sigma_x}{2} \right)^2 * \text{Sen}^2 2\alpha \dots\dots\dots(4.7)$$

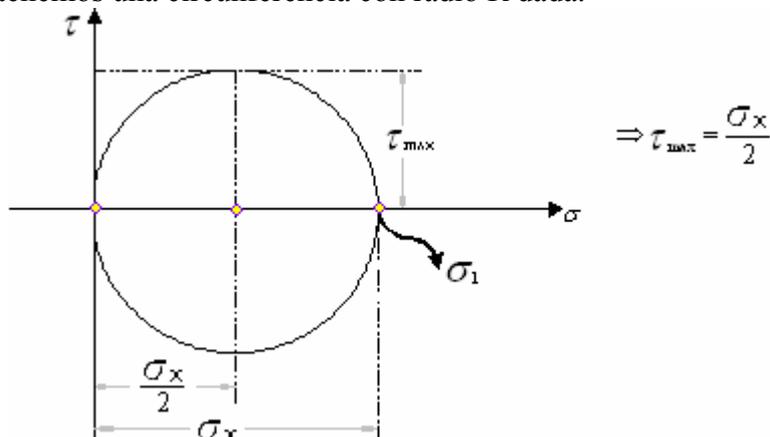
Sumando miembro a miembro las dos ecuaciones (4.6) + (4.7) tenemos

$$\left( \sigma_N - \frac{\sigma_x}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left( \frac{\sigma_x}{2} \right)^2 * (\text{Sen}^2 2\alpha + \text{Cos}^2 2\alpha) \quad \text{Según la ecuación (4.4) se tiene}$$

$$\left( \sigma_N - \frac{\sigma_x}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left( \frac{\sigma_x}{2} \right)^2 \quad \text{que es exactamente la ecuación de una circunferencia de}$$

$$\text{centro } \left( \frac{\sigma_x}{2}; 0 \right) \text{ y de radio } R = \frac{\sigma_x}{2}$$

Graficando tenemos una circunferencia con radio R dada.



$$\sigma_1 = \sigma_x \Rightarrow \sigma_{\text{max}} \quad \text{Existe un esfuerzo máximo, al igual que la cortante máxima.}$$

El círculo de Mohr permite determinar las componentes del esfuerzo en términos de un sistema de coordenadas, haciendo girar a través de un ángulo específico. Uno se puede preguntar por que se analiza este método en una época cuando las computadoras hacen que la mayoría de los métodos gráficos parezcan obsoletos. La razón es que el Círculo de Mohr permite visualizar las soluciones de las dos ecuaciones y además permite entender sus propiedades, hasta un punto que no es posible con otros enfoques.

#### 4.4.- COMO SE USA EL CÍRCULO DE MOHR Y LUEGO COMO FUNCIONA

Supóngase que se conocen las componentes  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$  y se quiere determinar los esfuerzos máximos  $(\sigma_1)$  y mínimos  $(\sigma_2)$  al igual que la cortante máxima  $(\tau_{max})$  se tendrá que seguir los siguientes pasos:

**Paso 1.-** Establecer un sistema de ejes horizontal y vertical con esfuerzos normal medido a lo largo del eje horizontal y el esfuerzo cortante medido a lo largo del eje vertical.

El esfuerzo normal positivo se mide a la derecha y el esfuerzo cortante positivo se mide según el sentido de las manecillas del reloj.

**Paso 2.-** Se grafican dos puntos de coordenadas  $(\sigma_x; \tau_{xy})$  y  $(\sigma_y; \tau_{yx})$ .

**Paso 3.-** Se dibuja una línea recta que conecte los dos puntos, la intersección de dicha línea con el eje horizontal (eje de esfuerzos) genera el centro del círculo  $(\sigma_0)$ .

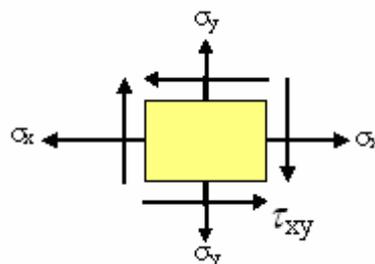
Se traza el círculo con centro  $(\sigma_0)$  y que además pase por los puntos  $(\sigma_x; \tau_{xy})$  y  $(\sigma_y; \tau_{yx})$ .

**Paso 4.-** Se ubica los ejes  $(x; y)$  dependiendo las coordenadas de los esfuerzos, la abertura entre el eje horizontal de esfuerzos y los ejes  $(x; y)$  será  $2\alpha$  y el complemento con la línea de cortante máximo será de  $2\beta$ .

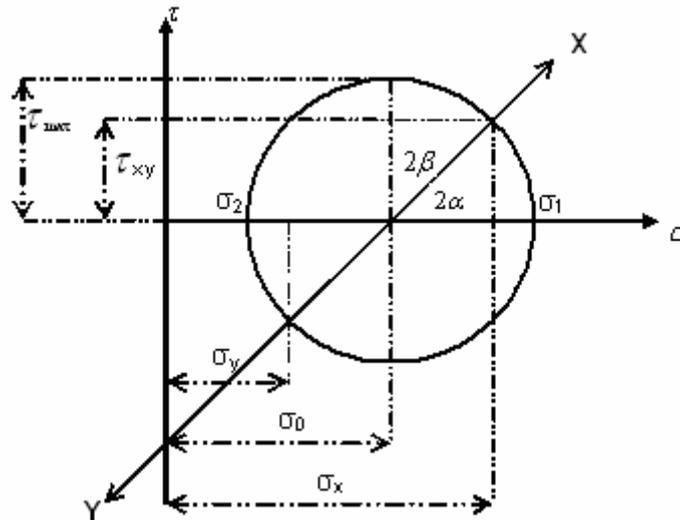
**Paso 5.-** Se busca los esfuerzos máximos  $(\sigma_1)$  y mínimos  $(\sigma_2)$  al igual que la cortante máxima  $(\tau_{max})$ , las direcciones de los planos principales  $\alpha$  y  $\beta$

#### 4.5.- DESARROLLO DE LAS ECUACIONES DE CÍRCULO DE MOHR

Considerando un elemento diferencial de una sección cualquiera, además que uno de los esfuerzos es mayor que el otro tenemos  $(\sigma_x > \sigma_y)$ .



Aplicando los 5 pasos mencionados anteriormente se tiene la grafica completa.



Con referencia a la grafica del círculo de mohr se tiene las ecuaciones generales de los esfuerzos máximos y mínimos.

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad \text{Centro de la circunferencia}$$

$$\sigma_1 = \sigma_0 + R \Rightarrow \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \dots\dots\dots(4.8)$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 - R \Rightarrow \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \dots\dots\dots(4.9)$$

$$\tau_{max} = R \Rightarrow \tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \dots\dots\dots(4.10)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \Leftrightarrow 2\alpha + 2\beta = 90^\circ \dots\dots\dots(4.11)$$

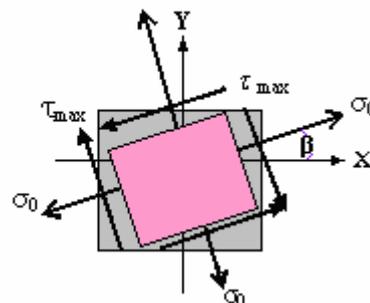
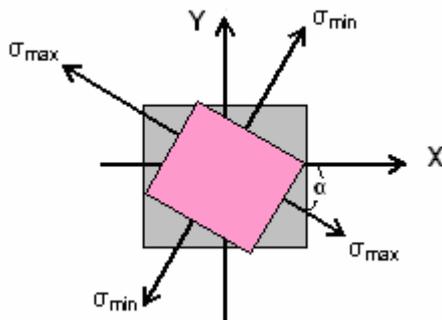
**PARA DIMENSIONAMIENTO**

$$\sigma_{max} = \sigma_1 \leq \bar{\sigma} \dots\dots\dots(4.12)$$

$$\tau_{max} = R \leq \bar{\tau} \dots\dots\dots(4.13)$$

Plano de esfuerzos máximos  
Siempre “ $\tau = 0$ ”

Plano de cortantes máximos  
No siempre “ $\sigma = 0$ ”



---

**PREGUNTAS TEORICAS PARA EL ESTUDIANTE**

**1.-Cual es el rango que de valores de coeficiente de poisson ( $\mu$ )?**

**R.-** El rango de Valores es de  $0 < \mu < 1/2$  para cualquier material de ingeniería.

**2.- Que valores mas corrientes de ( $\mu$ ) se suele utilizar para el acero?**

**R.-** Los valores que se utiliza son de 0.25 a 0.30

**3.- Para que sirve el circulo de Mohr?**

**R.-** Para visualizar las soluciones de las ecuaciones (4.8), (4.9), (4.10) y (4.11).A demás permite entender sus planos principales.

**4.- En los planos principales de los esfuerzo, cual es el valor máximo de la tensión cortante?**

**R.-** Su valor máximo es siempre cero (0).

**5.- En los planos principales de las tensiones cortantes máximas, el valor de la tensión es cero?**

**R.-** No siempre es cero (0), por que existe tensión normal que es el centro de la circunferencia.

**6.- Para dimensionamiento a la resistencia, que ecuaciones se tiene que utilizar?**

**R.-** Siempre se tiene que dimensionar con las tensiones máximas: en este caso con las ecuaciones (4.12) y (4.13).

**7.- Que tensión soportan mas los materiales frágiles?**

**R.-** Soportan más a la compresión

**8.- Que tensión soportan menos los materiales frágiles?**

**R.-** Soportan menos a la tracción.

**9.- Que tensión soportan mas los materiales dúctiles?**

**R.-** Soportan más a la compresión.

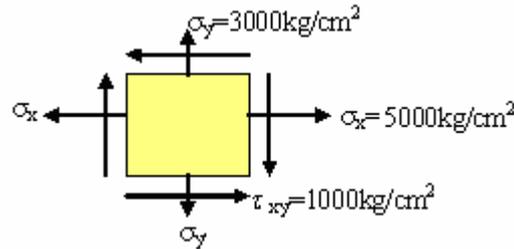
**10.- Que tensión soportan menos los materiales dúctiles?**

**R.-** Soportan menos a la tensión cortante.

**PROBLEMAS RESUELTOS DE CÍRCULO DE MORH**

**PROBLEMA 4.1.-** Para el elemento mostrado en la figura. Determinar:

- Los esfuerzos máximos, esfuerzos mínimos y la cortante máximo.
- Dibujar el gran círculo de morh.
- Dibujar los planos principales de esfuerzos y cortantes máximos



- Los esfuerzos máximos, esfuerzos mínimos y la cortante máximo

$$\sigma_{\max} = \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) + \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

$$\sigma_{\max} = \left( \frac{5000 + 3000}{2} \right) + \sqrt{\left( \frac{5000 - 3000}{2} \right)^2 + (1000)^2} \Rightarrow \sigma_{\max} = 4000 + 1414.21$$

$$\sigma_{\max} = 5414.21 \frac{Kg}{cm^2}$$

$$\sigma_{\min} = \left( \frac{5000 + 3000}{2} \right) - \sqrt{\left( \frac{5000 - 3000}{2} \right)^2 + (1000)^2} \Rightarrow \sigma_{\min} = 4000 - 1414.21$$

$$\sigma_{\min} = 2585.79 \frac{Kg}{cm^2}$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{xy})^2} \Rightarrow \tau_{\max} = \sqrt{\left( \frac{5000 - 3000}{2} \right)^2 + (1000)^2} \Rightarrow$$

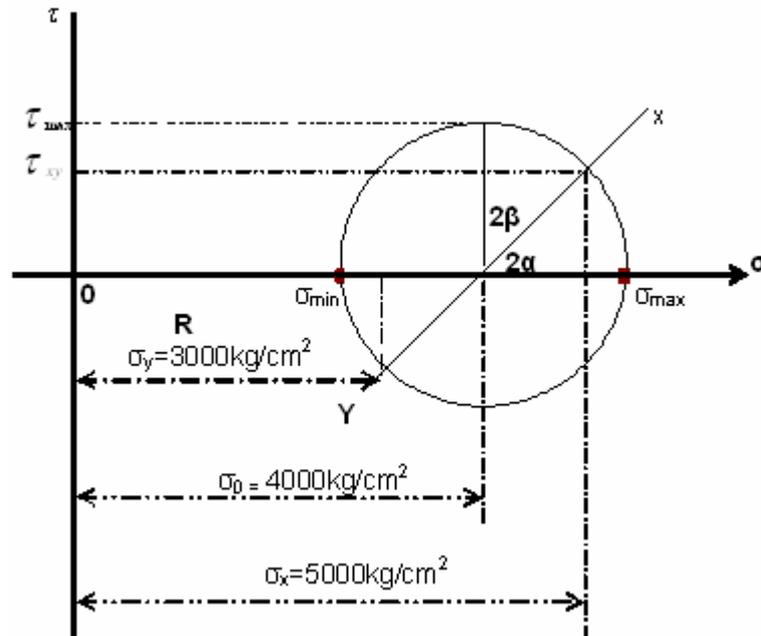
$$\tau_{\max} = 1414.21 \frac{Kg}{cm^2}$$

Determinación de las direcciones de los planos  $\alpha$  y  $\beta$

$$\text{Sen}2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{R} \Rightarrow \text{Sen}2\alpha = \frac{1000}{1414.21} \Rightarrow \alpha = 22.5^\circ$$

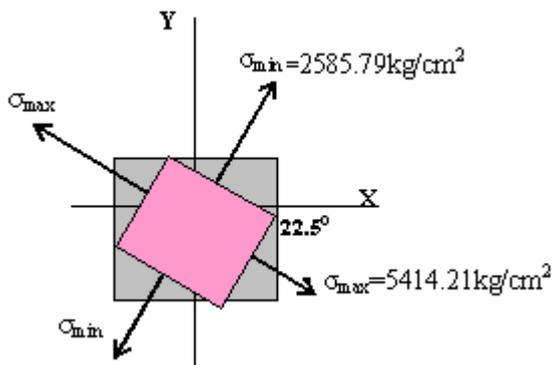
$$2\alpha + 2\beta = 90^\circ \Rightarrow 2 * 22.5^\circ + 2\beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 22.5^\circ$$

b).- Dibujo del circulo de morh

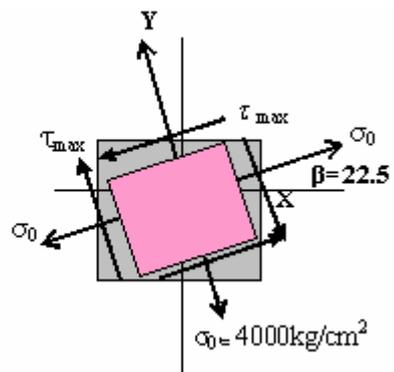


c).- Dibujo de los planos principales de esfuerzos y cortantes máximos

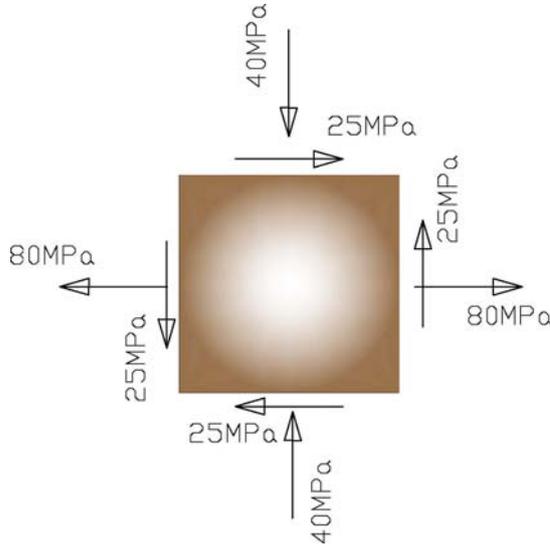
Plano de esfuerzos máximos



Plano de cortantes máximos



**PROBLEMA 4.2.-** El estado de esfuerzos mostrados en el plano ocurre en un punto critico de una maquina. Como resultado de varias pruebas de tensión tal como se muestra en la figura, Calcular el factor de seguridad si el esfuerzo cortante a la fluencia es de 125MPa.



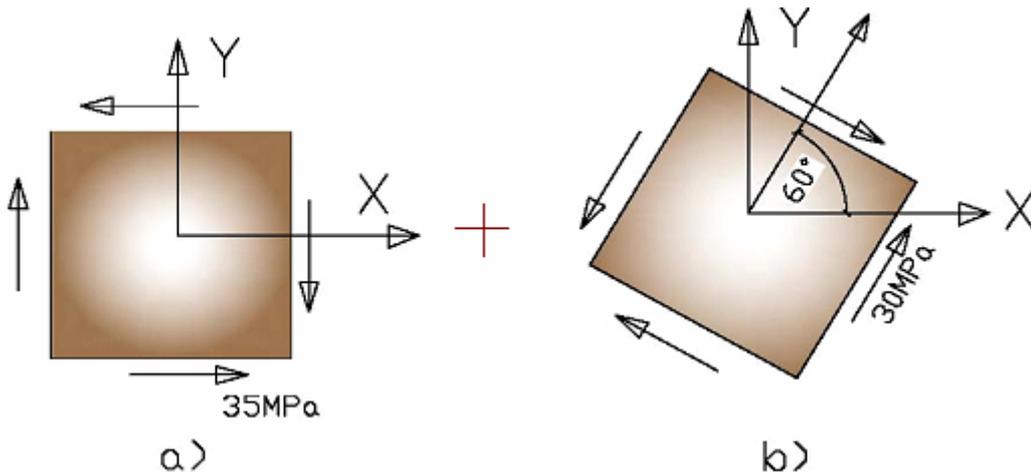
$$n = \frac{\tau_f}{\tau_{\max}} \quad n : \text{Factor de seguridad}$$

$$\tau_{\max} = R \Rightarrow \tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{80+40}{2}\right)^2 + 25^2} \Rightarrow$$

$$\tau_{\max} = 65 \text{ MPa}$$

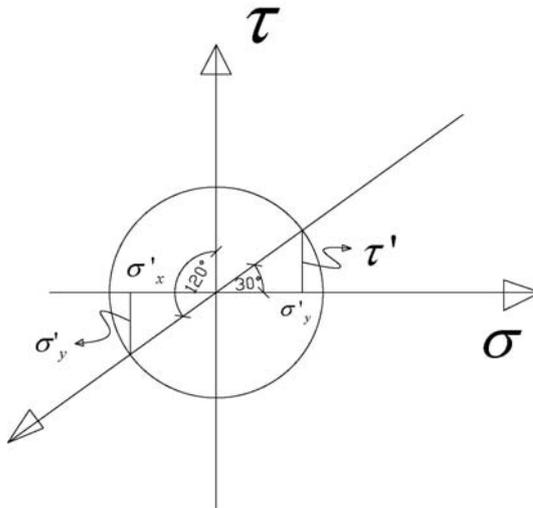
$$\therefore n = \frac{125}{65} \Rightarrow n = 1.92 \Rightarrow n = 2$$

**PROBLEMA 4.3.-** En un punto de un cuerpo, el estado de esfuerzo es el resultado de dos estados separados que se muestran en las figuras a) y b). Calcular el estado de esfuerzo que resulta de la acción simultanea de esos dos estados. ( $\sigma_{\max} = ?$  ,  $\sigma_{\min} = ?$  y  $\tau_{\max} = ?$  )



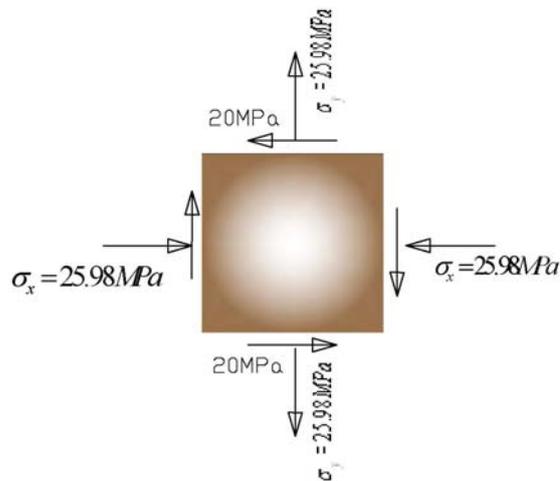
Solución:

Del grafico b) se tiene los siguientes resultados



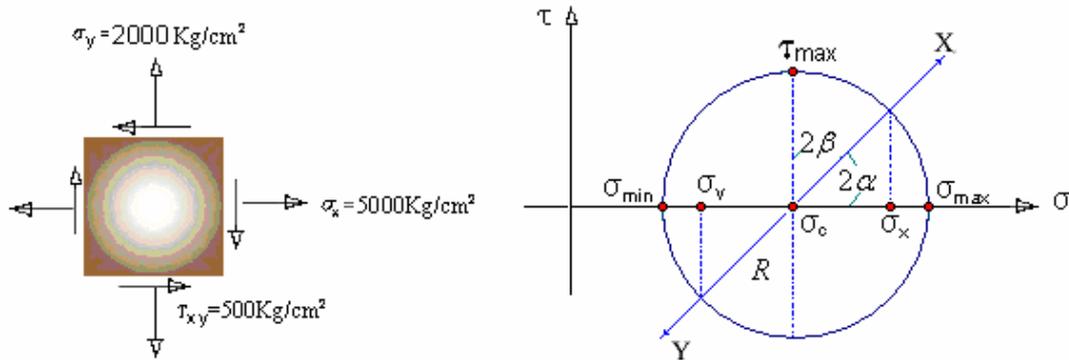
$$\begin{aligned} \tau' &= R \sin(30) \Rightarrow \tau' = 30 \sin(30) \Rightarrow \tau' = 15 \\ \sigma'_x &= -R \cos(30) \Rightarrow \sigma'_x = -30 \cos(30) \Rightarrow \\ \sigma'_x &= -25.98 \\ \sigma'_y &= R \cos(30) \Rightarrow \sigma'_y = 30 \cos(30) \Rightarrow \\ \sigma'_y &= 25.98 \end{aligned}$$

Realizando la suma de los esfuerzos se tiene:



$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_{\max} &= 0 + \sqrt{\left(\frac{-25.98 - 25.98}{2}\right)^2 + 20^2} \\ \sigma_{\max} &= 0 \pm 32.8 \text{ MPa} \Rightarrow \sigma_{\max} = 32.8 \text{ MPa} \\ &\sigma_{\min} = -32.8 \text{ MPa} \\ &\tau_{\max} = 32.8 \text{ MPa} \end{aligned}$$

**PROBLEMA 4.4.-**Para el elemento mostrado en la siguiente figura. Determinar los esfuerzos máximos y mínimos, así también se pide calcular las deformaciones en dirección X y en dirección Y para un  $E=2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$  y un coeficiente de poisson de 0.3, donde las longitudes en X es de 50cm., y en dirección Y es de 40cm.



$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow$$

$$\sigma_{\max} = \frac{5000 + 2000}{2} + \sqrt{\left(\frac{5000 - 2000}{2}\right)^2 + 500^2} \Rightarrow \sigma_{\max} = 5081.14 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow$$

$$\sigma_{\min} = \frac{5000 + 2000}{2} - \sqrt{\left(\frac{5000 - 2000}{2}\right)^2 + 500^2} \Rightarrow \sigma_{\min} = 1918.86 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \Rightarrow$$

$$\tau_{\max} = \frac{5081.14 - 1918.86}{2} \Rightarrow \tau_{\max} = 1581.14 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Sen}2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{\tau_{\max}} \Rightarrow 2\alpha = 18.43 \Rightarrow \alpha = 9.22^\circ \Rightarrow$$

$$2\alpha + 2\beta = 90^\circ \Rightarrow 2\beta = 71.57 \Rightarrow \beta = 35.78^\circ$$

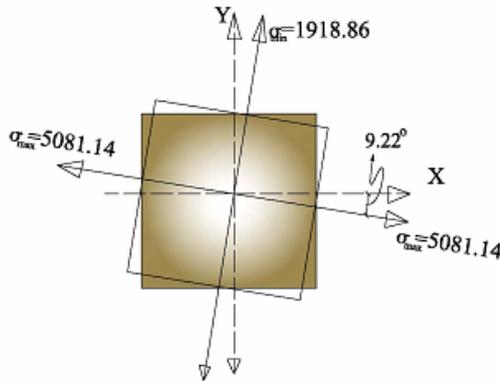
Determinación de las deformaciones

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \mu\sigma_y}{E} \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{5000 - (0.3)(2000)}{2.1 \cdot 10^6} \Rightarrow \varepsilon_x = 2.095 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \delta_x = 0.105 \text{ cm}$$

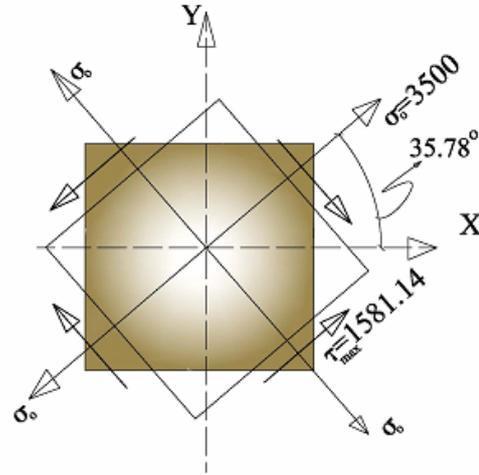
$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \mu\sigma_x}{E} \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{2000 - (5000)(0.3)}{2.1 \cdot 10^6} \Rightarrow \varepsilon_y = 2.381 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \delta_y = 9.524 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

Determinación de los planos principales

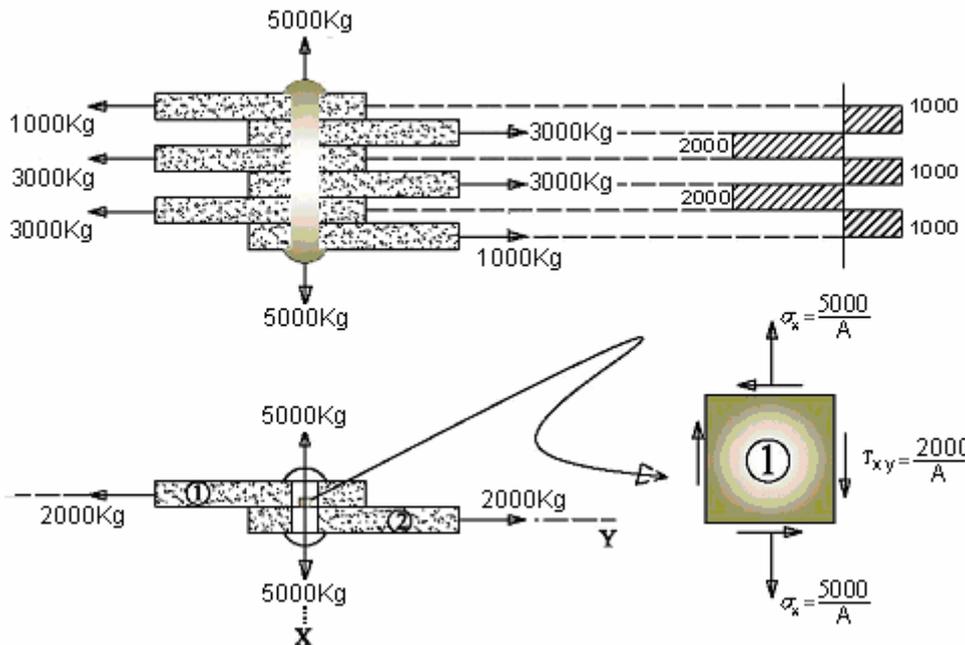
Determinación de los planos principales,  
plano de esfuerzo máximo



Plano de cortantes máximos



**PROBLEMA 4.5.-** Calcular el diámetro del remache que tiene que soportar la acción de las fuerzas axiales, para cuyo efecto se tiene los esfuerzos admisibles ( $2100\text{Kg/cm}^2$  esfuerzo normal y un esfuerzo cortante admisible de  $1050\text{Kg/cm}^2$ ).



$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \leq 2100$$

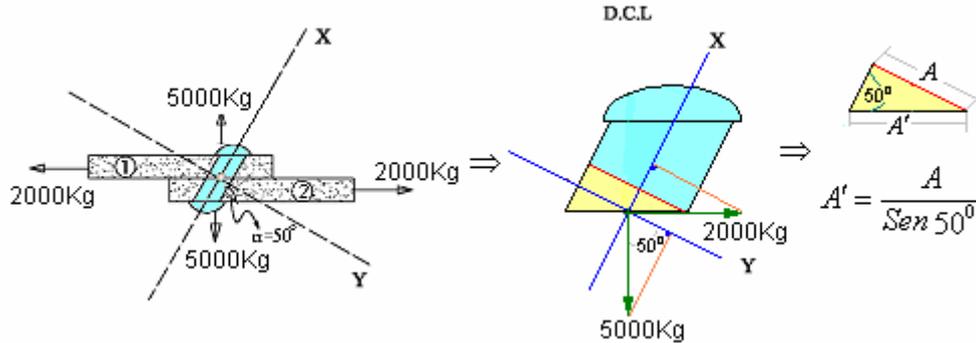
$$\frac{5000 + 0}{2A} + \sqrt{\left(\frac{5000 - 0}{2A}\right)^2 + \left(\frac{2000}{A}\right)^2} \leq 2100$$

$$\frac{2500}{A} + \frac{3201.56}{A} \leq 2100 \Rightarrow \phi_1 \geq 1.86 \text{ cm}$$

$$\tau_{\max} = R \leq 1050 \Rightarrow \frac{3201.56}{A} \leq 1050 \Rightarrow \phi_2 \geq 1.97 \text{ cm}$$

Normalizando  $\phi \geq 1.97 \text{ cm} \Rightarrow \phi = 1" \Rightarrow \phi = 2.54 \text{ cm}$

**PROBLEMA 4.6.-** Dimensionar el remache de la unión para un esfuerzo de trabajo de  $1050 \text{ kg/cm}^2$  y un cortante de trabajo de  $350 \text{ kg/cm}^2$ .



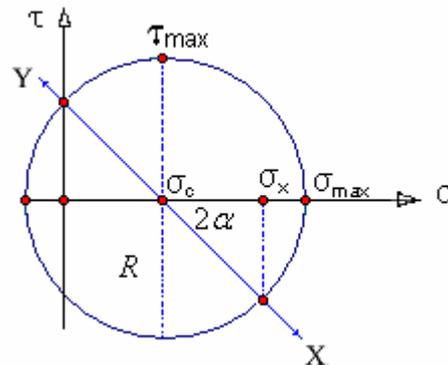
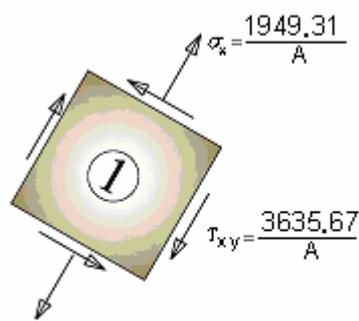
De la gráfica de D.C.L se tiene

$$\sigma_x = \frac{5000 * \text{Sen} 50^0}{A'} - \frac{2000 * \text{Cos} 50^0}{A'} \Rightarrow \sigma_x = \frac{5000 * \text{Sen}^2 50^0}{A} - \frac{2000 * \text{Sen} 50^0 * \text{Cos} 50^0}{A}$$

$$\sigma_x = \frac{1949.313}{A}$$

$$\tau_{xy} = \frac{5000 * \text{Cos} 50^0}{A'} + \frac{2000 * \text{Sen} 50^0}{A'} \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{5000 * \text{Cos} 50^0 * \text{Sen} 50^0}{A} + \frac{2000 * \text{Sen}^2 50^0}{A}$$

$$\tau_{xy} = \frac{3635.67}{A}$$



$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow R = \sqrt{\left(\frac{1949.313}{2A}\right)^2 + \left(\frac{3635.67}{A}\right)^2} \Rightarrow R = \frac{3764.05}{A}$$

$$\text{sen} 2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{R} \Rightarrow 2\alpha = 74.99^0 \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 90^0 \Rightarrow 2\beta = 15.01^0$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_0 + R \leq \bar{\sigma} \Rightarrow \frac{1949.313}{2A} + \frac{3764.05}{A} \leq 1050$$

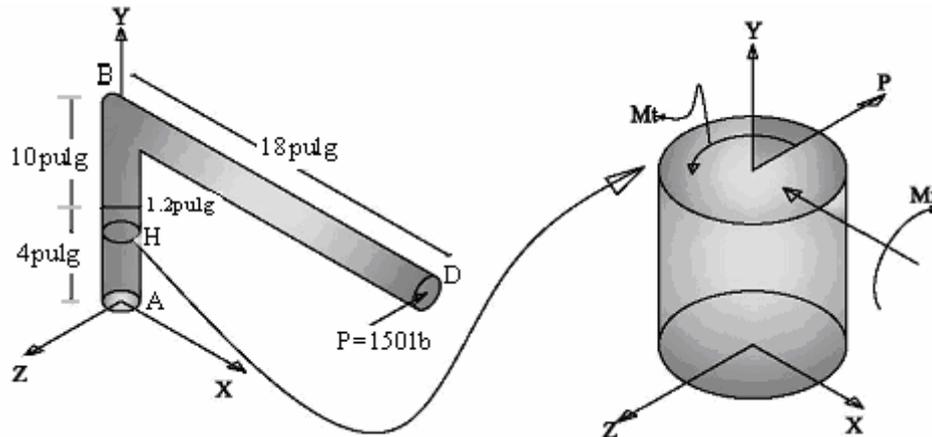
$$\frac{4 * (4738.704)}{\pi \phi_1} \leq 1050 \Rightarrow \phi_1 \geq 2.397 \text{ cm}$$

$$\tau_{\max} = R \leq \bar{\tau} \Rightarrow \frac{4 * (3764.05)}{\pi \phi_2} \leq 350 \Rightarrow \phi_2 \geq 3.7004 \text{ cm}$$

Normalizando  $\phi_2 \geq 3.7004 \text{ cm}$  Tenemos

$$\emptyset = 1 \frac{1}{2}'' \Rightarrow \emptyset = 3.81 \text{ cm}$$

**PROBLEMA 4.7.-**Una fuerza única horizontal de 150 lb. se aplica el extremo D, de la palanca ABD. Sabiendo que la porción AB de la palanca tiene un diámetro de 1.2 pulg., calcular los esfuerzos máximos principales en el punto H.



Determinación de momentos

$$M_t = (18 \text{ pulg})(150 \text{ lb}) \Rightarrow M_t = 2700 \text{ lb.pulg}$$

$$M_x = (10 \text{ pulg})(150 \text{ lb}) \Rightarrow M_x = 1500 \text{ lb.pulg}$$

Determinación de los esfuerzos

$$\sigma_y = \frac{M_y * Y}{I} \Rightarrow \sigma_y = \frac{(1500)(0.6)(64)}{\pi(1.2)^4} \Rightarrow \sigma_y = 8842 \text{ lb/pulg}^2$$

$$\sigma_x = \frac{M_y * X}{I} \Rightarrow \sigma_x = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{M_t * R}{I_p} \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{(2700)(0.6)(32)}{\pi(1.2)^4} \Rightarrow \tau_{xy} = 7957.75 \text{ lb/pulg}^2$$

Determinación de los esfuerzos máximos y mínimos

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{8842}{2} + \sqrt{\left(\frac{8842}{2}\right)^2 + (7957.75)^2}$$

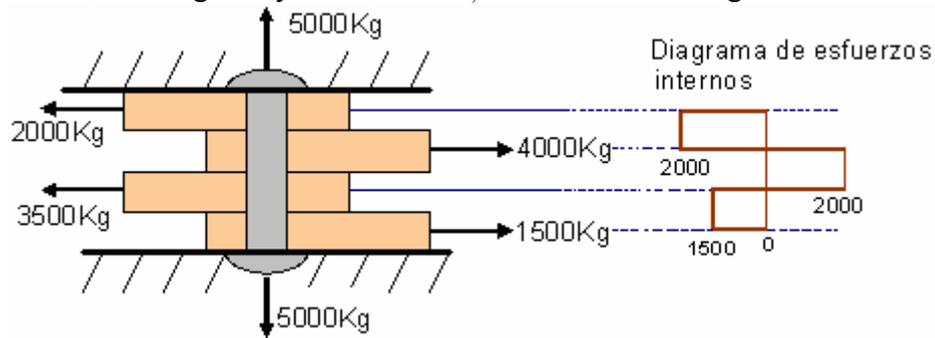
$$\sigma_{\max} = 13524.35 \text{ lb/pulg}^2$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow \sigma_{\min} = \frac{8842}{2} - \sqrt{\left(\frac{8842}{2}\right)^2 + (7957.75)^2}$$

$$\sigma_{\min} = -4682.35 \text{ lb/pulg}^2$$

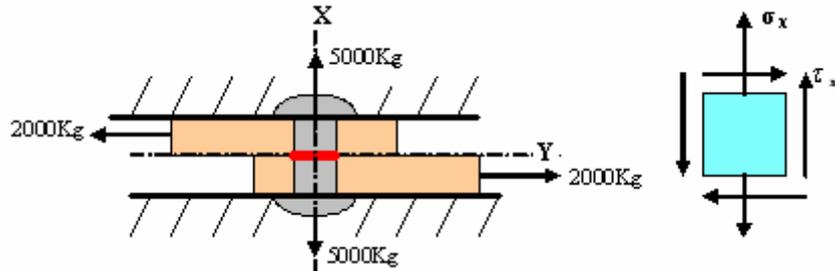
$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow \tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{8842}{2}\right)^2 + (7957.75)^2} \Rightarrow \tau_{\max} = 9103.35 \text{ lb/pulg}^2$$

**PROBLEMA 4.8.-** Calcular el diámetro del perno que tiene que soportar la acción de las fuerzas axiales que se presentan en la figura adjunta, para cuyo efecto se tiene los esfuerzos de  $\sigma_f=4200\text{kg/cm}^2$  y un  $\tau_f=0.5\sigma_f$ , con un factor de seguridad de 2.



Solución

Del diagrama de esfuerzos internos se tiene



$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \leq \bar{\sigma}$$

$$\frac{5000}{2A} + \sqrt{\left(\frac{5000}{2A}\right)^2 + \left(\frac{2000}{2A}\right)^2} \leq 2100 \Rightarrow \phi \geq 1.77\text{ cm}$$

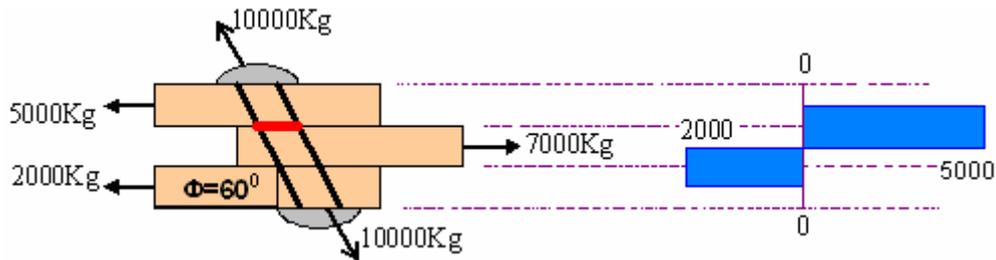
$$\tau_{\max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \leq \bar{\tau}$$

$$\sqrt{\left(\frac{5000}{2A}\right)^2 + \left(\frac{2000}{2A}\right)^2} \leq 1050 \Rightarrow \phi \geq 1.807\text{ cm}$$

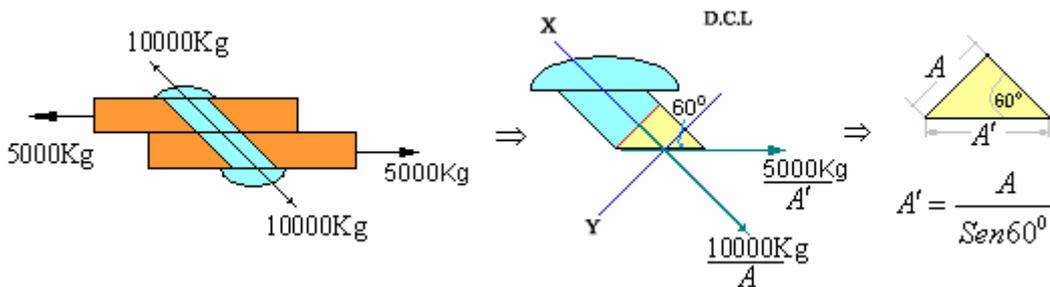
Normalizando  $\phi \geq 1.807\text{ cm}$  Tenemos

$$\phi = \frac{3}{4} \Rightarrow \phi = 1.905\text{ cm}$$

**PROBLEMA 4.9.-** Calcular el diámetro del remache que tiene que soportar la acción de las fuerzas axiales que se presentan en la figura adjunta, para cuyo efecto se tiene los esfuerzos de  $\sigma_f=4200\text{kg/cm}^2$  y un  $\tau_f=0.5\sigma_f$ , con un factor de seguridad de 3.



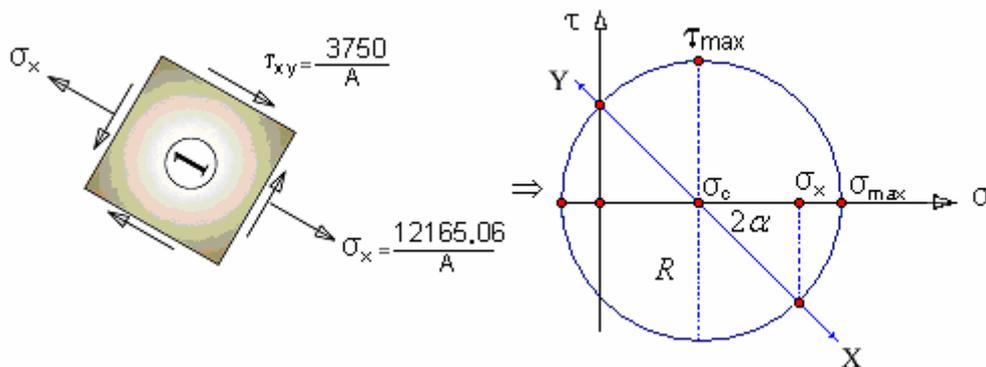
Solución: Después de realizar un diagrama de esfuerzos internos se tiene.



De la gráfica de D.C.L se tiene

$$\sigma_x = \frac{10000}{A} + \frac{5000 \cdot \cos 60^\circ}{A'} \Rightarrow \sigma_x = \frac{10000}{A} + \frac{5000 \cdot \cos 60^\circ \cdot \text{Sen} 60^\circ}{A} \Rightarrow \sigma_x = \frac{12165.06}{A}$$

$$\tau_{xy} = \frac{5000 \cdot \text{Sen} 60^\circ}{A'} \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{5000 \cdot \text{Sen} 60^\circ \cdot \text{Sen} 60^\circ}{A} \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{3750}{A}$$



$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \Rightarrow R = \sqrt{\left(\frac{12165.06}{2A}\right)^2 + \left(\frac{3750}{A}\right)^2} \Rightarrow R = \frac{7145.605}{A}$$

$$\text{sen} 2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{R} \Rightarrow 2\alpha = 31.65^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 90^\circ \Rightarrow 2\beta = 58.35^\circ$$

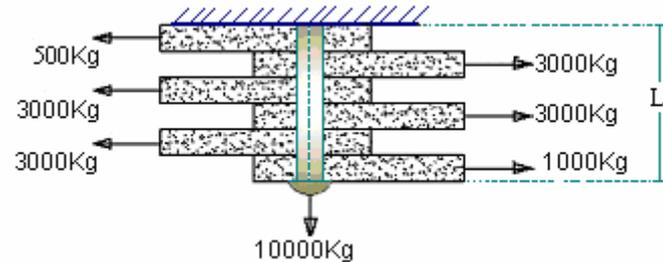
$$\sigma_{max} = \sigma_0 + R \leq \bar{\sigma} \Rightarrow \frac{12165.06}{2A} + \frac{7145.605}{A} \leq 1400 \Rightarrow \phi \geq 3.498\text{cm}$$

$$\tau_{max} = R \leq \bar{\tau} \Rightarrow \frac{7145.605}{A} \leq 700 \Rightarrow \phi \geq 3.605\text{cm}$$

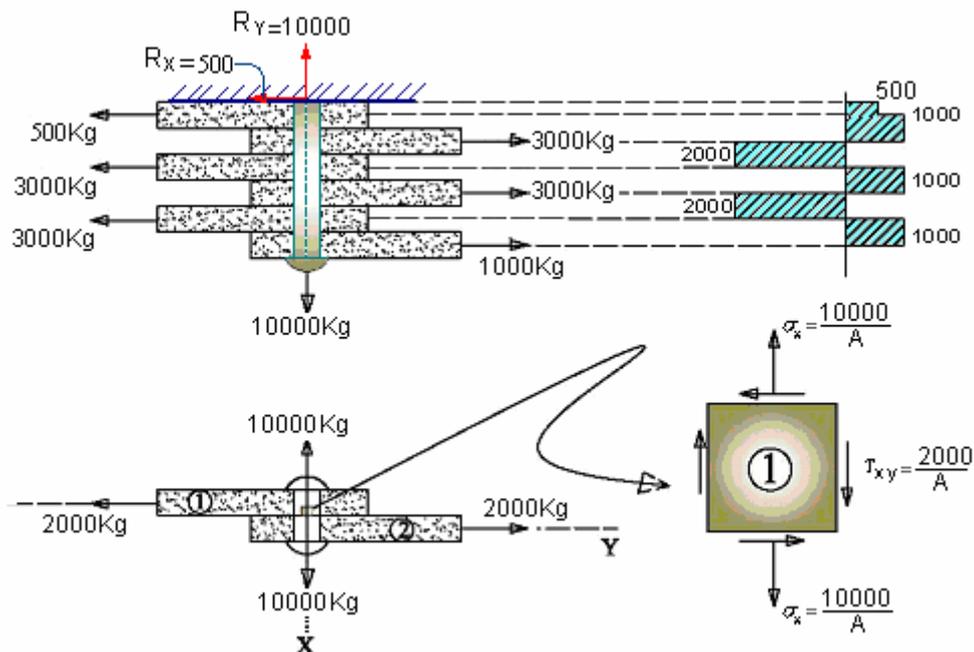
$$\text{Normalizando } \phi \geq 3.605\text{ cm Tenemos } \Rightarrow \phi = 1\frac{1}{2}'' \Rightarrow \phi = 3.81\text{ cm}$$

**PROBLEMA 4.10.-** Calcular el diámetro del remache que tiene que soportar la acción de las fuerzas axiales, para cuyo efecto se tiene los esfuerzos admisibles:

$$\bar{\sigma} = 2100 \text{Kg/cm}^2, \bar{\tau} = 1050 \text{Kg/cm}^2 \text{ y } \bar{\delta} = \frac{L}{2000} (\text{cm}). E = 2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2.$$



Solución



$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \leq 2100$$

$$\frac{10000 + 0}{2A} + \sqrt{\left(\frac{10000 - 0}{2A}\right)^2 + \left(\frac{2000}{A}\right)^2} \leq 2100$$

$$\frac{5000}{A} + \frac{5385.165}{A} \leq 2100 \Rightarrow \phi_1 \geq 2.51 \text{ cm}$$

$$\tau_{\max} = R \leq 1050 \Rightarrow \frac{5385.165}{A} \leq 1050 \Rightarrow \phi_2 \geq 2.5554 \text{ cm}$$

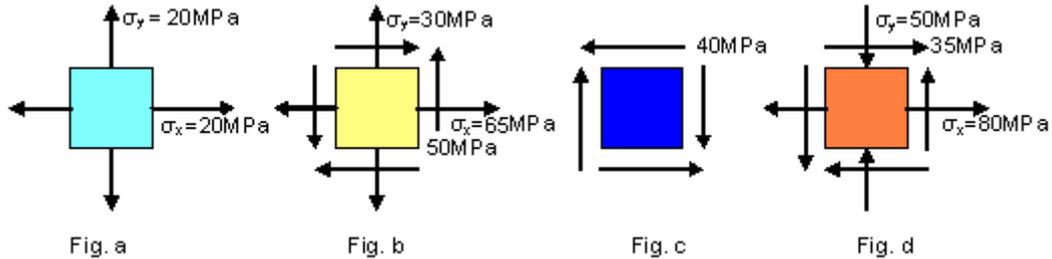
$$\delta = \frac{F * L}{A * E} \leq \bar{\delta} \Rightarrow \frac{10000 * L}{\frac{\pi \phi^2}{4} * 2.1 \times 10^6} \leq \frac{L}{2000} \Rightarrow \phi \geq 3.4822 \text{ cm}$$

$$\text{Normalizando } \phi \geq 3.482 \text{ cm} \Rightarrow \phi = 1 \frac{1}{2} \text{''} \Rightarrow \phi = 3.81 \text{ cm}$$

**PROBLEMAS PROPUESTOS DE CÍRCULO DE MORH**

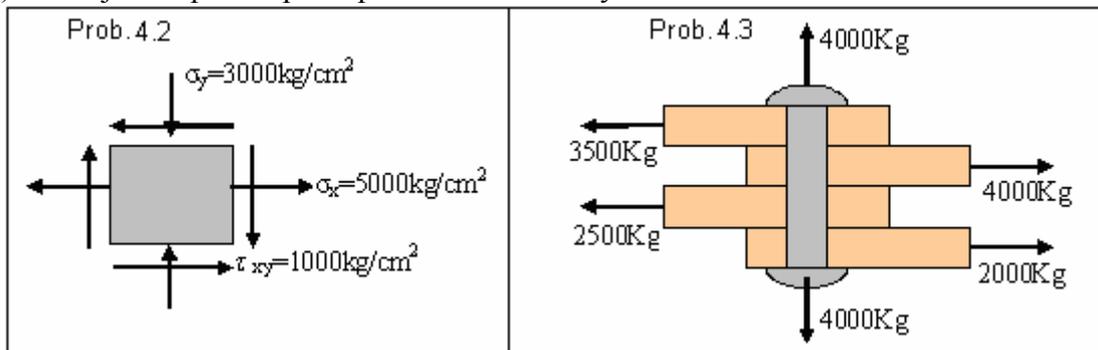
4.1.- Para el elemento mostrado en la figura. Determinar:

- a).- Los esfuerzos máximos, esfuerzos mínimos y la cortante máximo.
- b).- Dibujar el gran círculo de morh.
- c).- Dibujar los planos principales de esfuerzos y cortantes máximos



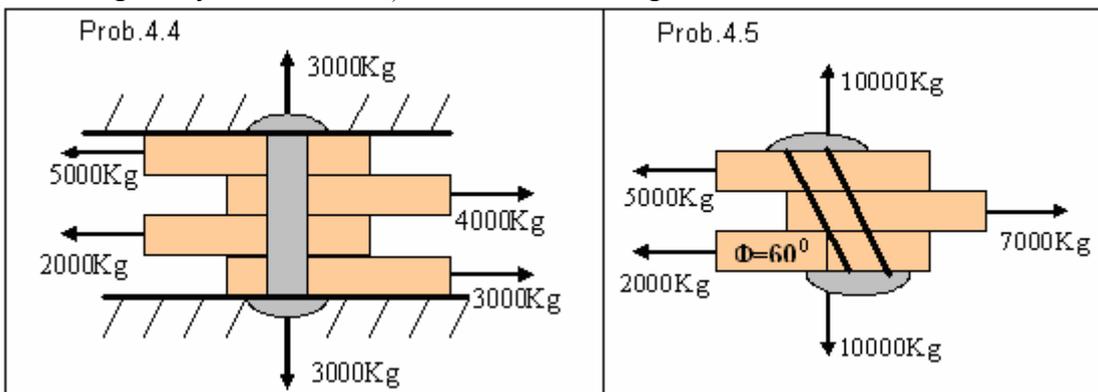
4.2.- Para el elemento mostrado en la figura. Determinar:

- a).- Los esfuerzos máximos, esfuerzos mínimos y la cortante máximo.
- b).- Dibujar el gran círculo de morh.
- c).- Dibujar los planos principales de esfuerzos y cortantes máximos



4.3.- Calcular el diámetro del remache que tiene que soportar la acción de las fuerzas axiales que se presentan en la figura adjunta, para cuyo efecto se tiene los esfuerzos de  $\sigma_f = 4200 \text{ kg/cm}^2$  y un  $\tau_f = 0.5\sigma_f$ , con un factor de seguridad 2.

4.4.- Calcular el diámetro del remache que tiene que soportar la acción de las fuerzas axiales que se presentan en la figura adjunta, para cuyo efecto se tiene los esfuerzos de  $\sigma_f = 4200 \text{ kg/cm}^2$  y un  $\tau_f = 0.5\sigma_f$ , con un factor de seguridad 2.

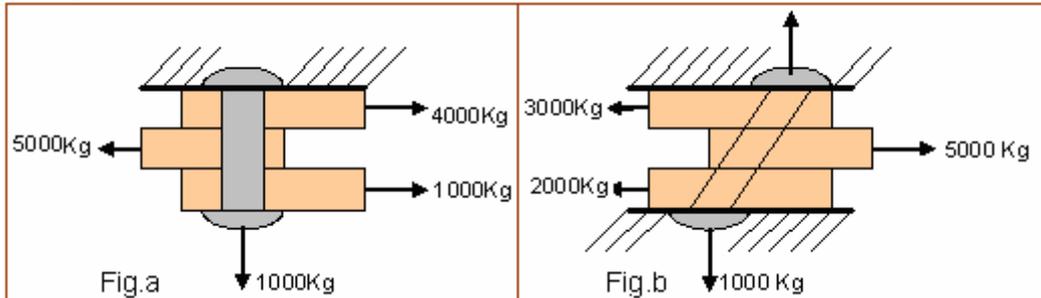


4.5.- Calcular el diámetro del perno que tiene que soportar la acción de las fuerzas axiales que se presentan en la figura adjunta, para cuyo efecto se tiene los esfuerzos de  $\sigma_f = 4200 \text{ kg/cm}^2$  y un  $\tau_f = 0.5\sigma_f$ , con un factor de seguridad 3.

**4.6.-** Si se conoce el esfuerzo admisible de trabajo de  $2200\text{Kg/cm}^2$  y un cortante admisible de  $1100\text{Kg/cm}^2$ . Calcule el diámetro del perno.

a).- Sin sobrepasar  $\bar{\delta} = \frac{L}{1000}(\text{cm})$ , con  $E=2.1 \cdot 10^6\text{Kg/cm}^2$ .

b).- Con un ángulo de inclinación de  $60^\circ$ , y  $\sigma_f=4200\text{kg/cm}^2$  y un  $\tau_f=0.5\sigma_f$  con un factor de seguridad de 3.

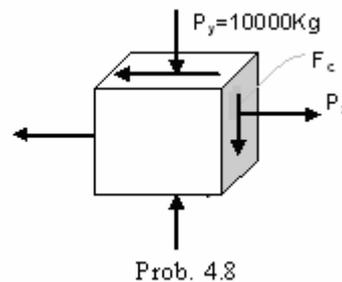
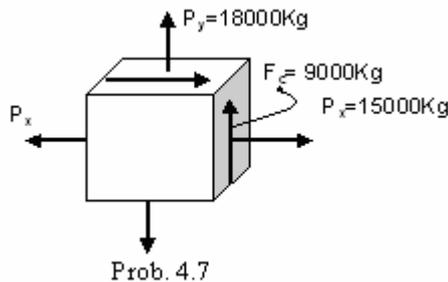


**4.7.-** A partir de las figuras, se pide determinar:

a) Los esfuerzos máximos, mínimos y la cortante máxima.

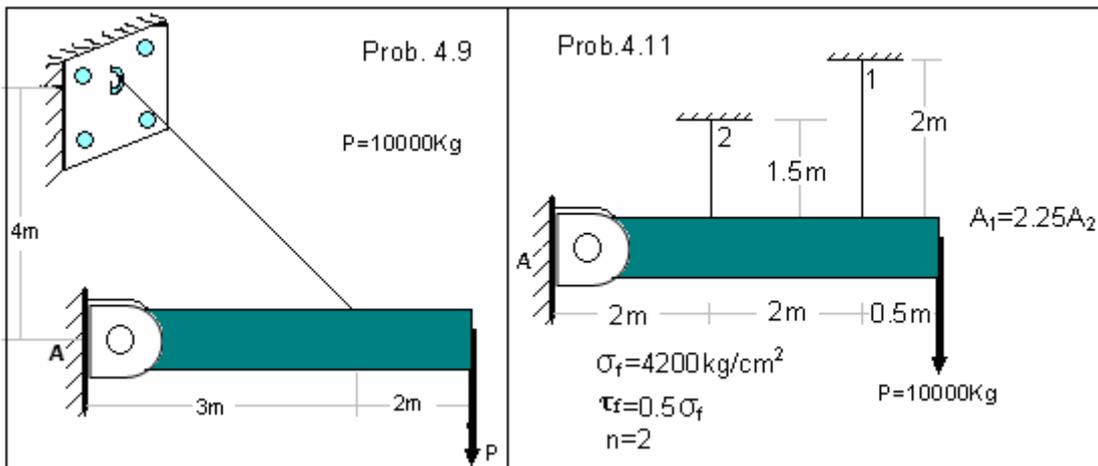
b) Graficar los planos principales de esfuerzos máximos y cortantes máximos.

Cuyas dimensiones son base, alto y ancho de (3,3 y 2) cm.



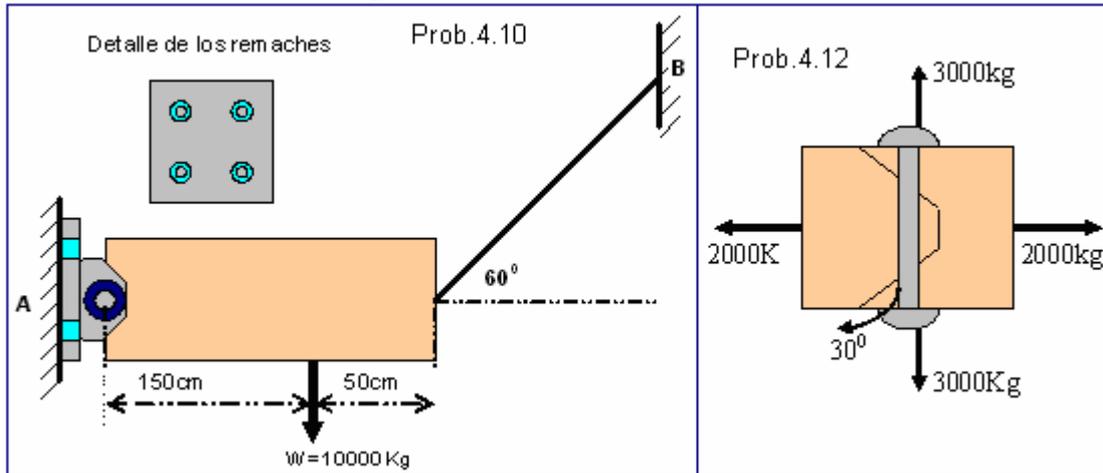
**4.8.-** Realizando una prueba en una construcción se encontró un esfuerzo admisible de  $1800\text{Kg/cm}^2$  y un esfuerzo cortante admisible de  $650\text{Kg/cm}^2$ . La fuerza axial  $P_x=8000\text{Kg}$  y la fuerza paralelo al plano de corte  $F_c=6000\text{Kg}$ . Calcular las deformaciones unitarias  $\epsilon_x$  y  $\epsilon_y$  si  $b=2a$ , el modulo de elasticidad de  $E=1.5 \cdot 10^6\text{Kg/cm}^2$  y con un modulo cortante de  $1.8 \cdot 10^6\text{Kg/cm}^2$ . Para base, alto y ancho de (b, b y a).

**4.9.-** Para la figura mostrada. Se pide determinar: a) El diámetro del pasador en el punto A. b) El diámetro de los remaches en la plancha y el diámetro del cable para ello los esfuerzos de trabajo son: Esfuerzo normal de  $2100\text{Kg/cm}^2$ . y un esfuerzo cortante de 50 % de esfuerzo normal.



**4.10.-** Para la figura representada se pide dimensionar:

- El diámetro del perno del pasador A.  $\sigma_f=2100\text{kg/cm}^2$ ,  $\tau_f=0.5\sigma_f$  y  $n=3$
- El diámetro del cable con  $\sigma_f=2800\text{kg/cm}^2$ ,  $\tau_f=0.5\sigma_f$  y un  $n=2$
- El diámetro de los remaches la unión de la figura para un  $\sigma_f=4200\text{kg/cm}^2$  y un  $\tau_f=0.5\sigma_f$  con un factor de seguridad de 3.

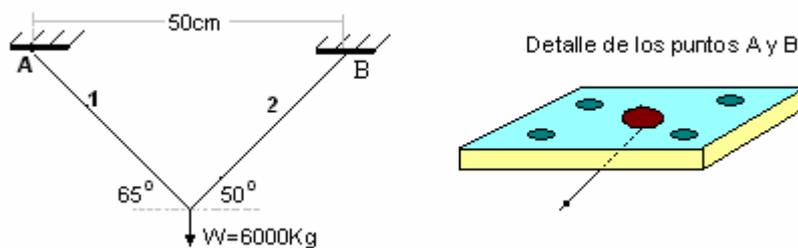


**4.11.-** Para la figura mostrada. Calcular: a) El diámetro del pasador en el punto A.  
b) Los diámetros de los cables, considerando que los cables son del mismo material pero de longitudes distintas.

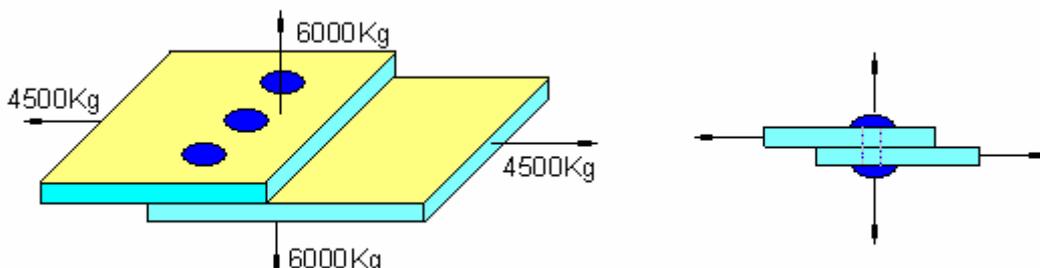
**4.12.-** Encontrar los esfuerzos normal y cortante máximos de la figura para un diámetro del remache de  $\frac{3}{4}$  de pulgada.

**4.13.-** Para la figura presentada a continuación se pide dimensionar:

- El diámetro de los remaches en los puntos A y B.  $\sigma_f=4200\text{kg/cm}^2$ ,  $\tau_f=0.5\sigma_f$   $n=2$
- Hallar las deformaciones de los cables si  $\sigma_1=\sigma_2=2100\text{kg/cm}^2$  si  $n=2$ .



**4.14.-** Calcular el diámetro del roblón si:  $\sigma_f=4200\text{kg/cm}^2$ ,  $\tau_f=0.5\sigma_f$  y  $n=2$ .



## **CAPITULO V**

# **RECIPIENTES DE PARED DELGADA**

---

### **5.1.- INTRODUCCIÓN**

Los recipientes de pared delgada constituyen una aplicación importante del análisis de esfuerzo plano. Como sus paredes oponen poca resistencia a la flexión, puede suponerse que las fuerzas internas ejercidas sobre una parte de la pared son tangentes a la superficie del recipiente.

Las paredes de un recipiente a presión de pared delgada ideal actúan como una membrana (es decir, las paredes resisten flexión).

### **5.2.- OBJETIVOS**

- Conocer que tipo de tensiones genera la presión.
- Criterios de dimensionamiento.

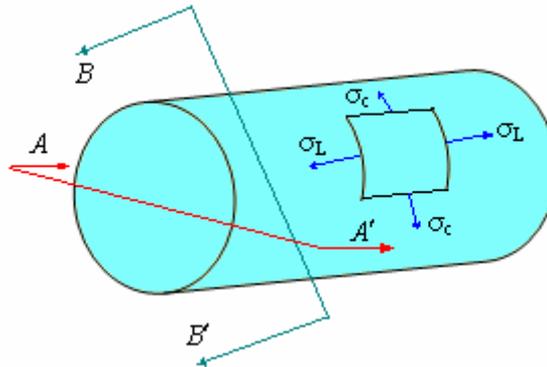
### **5.3.- DEDUCCIÓN DE LAS TENSIONES CIRCUNFERENCIALES Y TANGENCIALES**

Cuando la pared del recipiente es “delgada”, la distribución del esfuerzo a través de su espesor ( $e$ ) no varía de manera significativa y por lo tanto se supondrá que es uniforme o constante.

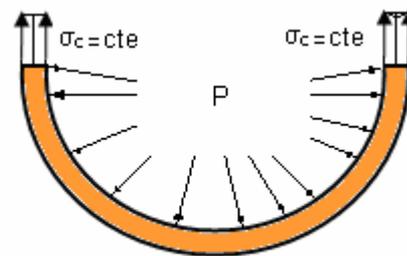
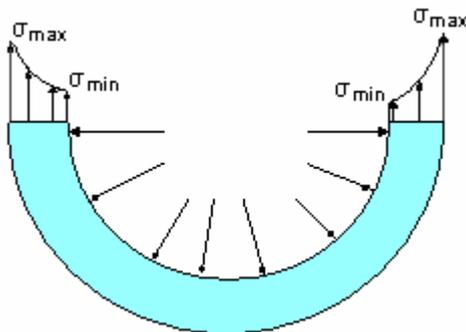
Con esta suposición, se analizará ahora el estado de esfuerzos en recipientes de presión cilíndrica y esférica de pared delgada.

En ambos casos se entiende que la presión dentro del recipiente es la presión manométrica, puesto que mide la presión por encima de la presión atmosférica, la que se supone que existe, tanto en el interior como en el exterior de la pared del cilindro.

Sea un cilindro de pared delgada de diámetro “D” y de longitud “L” sometido a una cierta presión.

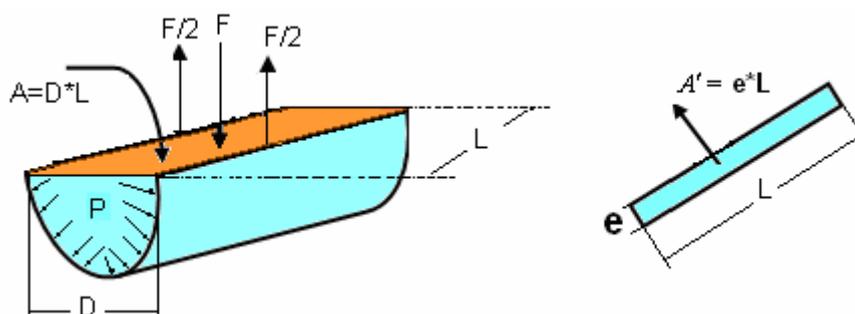


Diferencia del comportamiento de los esfuerzos en las paredes de los cilindros.  
**Cilindros de pared gruesa**                      **Cilindros de pared delgada**



**5.4.- TENSION CIRCUNFERENCIAL**

Para su análisis se realiza un corte A – A' el la distancia mas larga que en este caso la distancia mas larga resulta ser el diámetro de la circunferencia.

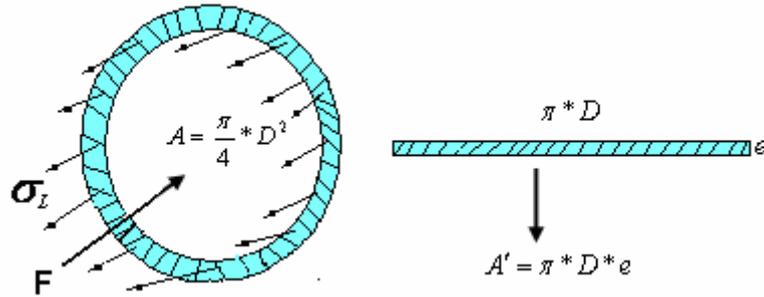


Por hidrúlica I se conoce que  $P = \frac{F}{A} \Rightarrow F = P * A \Rightarrow F = P * D * L$

$$\sigma_c = \frac{F/2}{A'} \Rightarrow \sigma_c = \frac{P * D * L}{2 * e * L} \Rightarrow \sigma_c = \frac{P * D}{2e} \dots\dots\dots(5.1)$$

**5.5.- TENSION LONGITUDINAL**

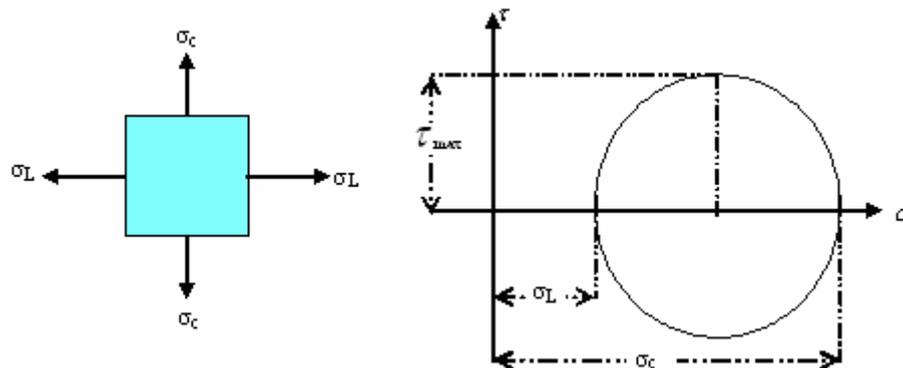
Para su análisis se realiza un corte  $B - B'$



$$\sigma_L = \frac{F}{A'} \Rightarrow \sigma_L = \frac{P * \pi/4 * D^2}{\pi * D * e} \Rightarrow \sigma_L = \frac{P * D}{4e} \dots\dots\dots(5.2)$$

**5.6.-TENSIONES PRINCIPALES PARA EL CILINDRO DE PARED DELGADA**

Se toma un elemento en el cilindro, con las respectivas tenciones tal como se observa a continuación.



Para su dimensionamiento se toma los esfuerzos máximos.

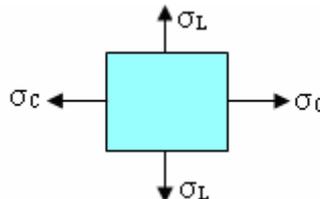
$$\sigma_{max} = \sigma_c = \frac{P * D}{2e} \leq \bar{\sigma} \dots\dots\dots(5.3)$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_c - \sigma_L}{2} \leq \bar{\tau} \dots\dots\dots(5.4)$$

Donde:

- P = Presión (Kg/cm<sup>2</sup>)
- D = Diámetro del cilindro (cm.)
- e = Espesor del cilindro (cm.)

Ecuaciones para las deformaciones unitarias para los cilindros.



$$\epsilon_c = \frac{\sigma_c - \mu\sigma_L}{E} \quad \text{Deformación unitaria en dirección circunferencial.}$$

$$\epsilon_L = \frac{\sigma_L - \mu\sigma_c}{E} \quad \text{Deformación unitaria en dirección longitudinal.}$$

---

**PREGUNTAS TEÓRICAS PARA EL ESTUDIANTE**

**1.- Que diferencia hay entre cilindros de pared gruesa y de pared delgada?**

**R.-** En cilindros de pared gruesa, la distribución de tensiones no es uniforme, mientras en los cilindros de pared delgada la distribución de tensiones es casi uniforme.

**2.- Existe tensión cortante en los cilindros de pared delgada?**

**R.-** No existe la tensión cortante, pero hay una tensión máxima a  $45^{\circ}$ .

**3.- Que es el esfuerzo de trabajo?**

**R.-** Es el esfuerzo real que soporta el material bajo la acción de unas cargas, y no debe sobrepasar al esfuerzo admisible ( $\bar{\sigma}$ ).

**4.- Bajo que criterio se realiza el corte  $A - A'$  ?**

**R.-** Se realiza con la finalidad de conseguir mayor tensión circunferencial, y siempre se tiene que hacer el corte en la distancia mas larga.

**5.- Que son las fuerzas internas?**

**R.-** Son aquellas que mantienen unidas las partículas que conforma en cuerpo rígido.

**6.- Que son las fuerzas externas?**

**R.-** Son las responsables del comportamiento externo del cuerpo rígido, las fuerzas externas causaran que el cuerpo se mueva o aseguran que éste permanezca en reposo.

**7.- Que son los cables?**

**R.-** Son elementos flexibles capaces de soportar únicamente tensión y que están diseñados para soportar cargas concentradas.

**8.- Cuales son los dos criterios de dimensionamiento del espesor del cilindro en una gata hidráulica?**

**R.-** Se tendrán que dimensionar a la Resistencia y a la rigidez.

**9.- Cuales son las dos ecuaciones para dimensionar a la resistencia los cilindros de pared delgada?**

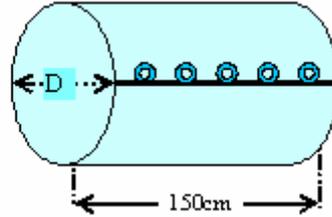
**R.-** Las dos ecuaciones que se tiene que utilizar son (5.3) y (5.4).

**10.- Cual es la relación geométrica que define la diferencia entre cilindro de pared gruesa y delgada.**

**R.-** La relación es  $\frac{e}{D_i} \leq \frac{1}{20}$  para que sea de pared delgada.

**PROBLEMAS RESUELTOS DE CILINDROS DE PARED DELGADA**

**PROBLEMA 5.1.-** Calcular el espesor del cilindro, el diámetro final, a si mismo se pide determinar el numero de remaches, para una presión de  $5\text{Kg/cm}^2$ , con un diámetro de 100cm. Para cuyo efecto se tiene  $\sigma_f=2100\text{kg/cm}^2$ ,  $\tau_f=0.5\sigma_f$ ,  $E=2.1*10^6\text{kg/cm}^2$ , factor de seguridad de 2 y el modulo de poisson de  $\mu=0.3$ .



Dimensionamiento del espesor del cilindro

$$\sigma_{\max} = \sigma_c = \frac{P * D}{2e} \leq \bar{\sigma} \Rightarrow e \geq \frac{5 * 100}{2 * 1050} \Rightarrow e \geq 0.238\text{cm}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_c - \sigma_L}{2} \leq \bar{\tau} \Rightarrow e \geq \frac{5 * 100}{8 * 525} \Rightarrow e \geq 0.119\text{cm}$$

El mayor espesor y normalizando tenemos  $e = \frac{1}{8}'' \Rightarrow e = 0.3175\text{cm}$

Determinación de los esfuerzos circunferencial y longitudinal

$$\sigma_c = \frac{P * D}{2e} \Rightarrow \sigma_c = \frac{5 * 100}{2 * 0.3175} \Rightarrow \sigma_c = 787.4 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_L = \frac{P * D}{4e} \Rightarrow \sigma_L = \frac{5 * 100}{4 * 0.3175} \Rightarrow \sigma_L = 393.7 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

Determinación de las deformaciones unitarias

$$\epsilon_c = \frac{\sigma_c - \mu * \sigma_L}{E} \Rightarrow \epsilon_c = \frac{787.4 - 0.3 * 393.7}{2.1 * 10^6} \Rightarrow \epsilon_c = 3.1871 * 10^{-4}$$

Determinación del diámetro final del cilindro

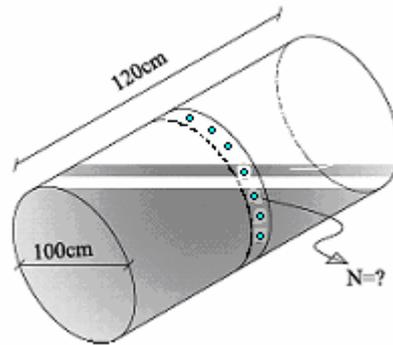
$$L_{FC} = L + \delta_c \Rightarrow \pi * D_F = \pi * D + \pi * D * \epsilon_c \Rightarrow D_F = D * (1 + \epsilon_c) \Rightarrow$$

$$D_F = 100.032\text{cm}$$

Determinación de número de remaches del cilindro para  $\phi = \frac{1}{2}''$

$$\tau = \frac{F_p}{N * A} \leq \bar{\tau} \Rightarrow N \geq \frac{P * D * L}{2 * \pi / 4 * \phi^2 * \bar{\tau}} \Rightarrow N \geq 56.39 \Rightarrow N = 57$$

**PROBLEMA 5.2.-** Calcular el espesor del cilindro y las longitudes finales, tanto circunferencial y longitudinal, a si también calcular el numero de roblones, si la presión interna que actúa es de 5Kg/cm<sup>2</sup> y el diámetro del cilindro es de 100cm., ver figura.



$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &= 2100 \text{ Kg/cm}^2 \\ \bar{\tau} &= 1050 \text{ Kg/cm}^2 \\ E &= 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2 \\ \mu &= 0.3\end{aligned}$$

Dimensionamiento del espesor del cilindro

$$\sigma_c = \frac{PD}{2e} \leq \bar{\sigma} \Rightarrow e \geq \frac{(5)(100)}{(2)(2100)} \Rightarrow e \geq 0.119 \text{ cm}$$

$$\tau_{\max} = \frac{PD}{8e} \leq \bar{\tau} \Rightarrow e \geq \frac{(5)(100)}{(8)(1050)} \Rightarrow e \geq 0.059 \text{ cm} \quad \text{Sea} \quad e = \frac{1}{16} \Rightarrow e = 0.159 \text{ cm}$$

Cálculo de los esfuerzos circunferenciales y longitudinales

$$\sigma_c = \frac{PD}{2e} \Rightarrow \sigma_c = \frac{(5)(100)}{(0.159)(2)} \Rightarrow \sigma_c = 1572.33 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_L = \frac{PD}{4e} \Rightarrow \sigma_L = \frac{(5)(100)}{(0.159)(4)} \Rightarrow \sigma_L = 786.16 \text{ kg/cm}^2$$

Determinación de las deformaciones unitarias

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_c - \mu\sigma_L}{E} \Rightarrow \varepsilon_c = \frac{1572.33 - (0.3)(786.16)}{2.1 \times 10^6} \Rightarrow \varepsilon_c = 6.3642 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_L = \frac{\sigma_L - \mu\sigma_c}{E} \Rightarrow \varepsilon_L = \frac{786.16 - (0.3)(1572.33)}{2.1 \times 10^6} \Rightarrow \varepsilon_L = 1.4974 \times 10^{-4}$$

Determinación de las longitudes finales circunferencial y longitudinal

$$L_{f(L)} = l + \delta_L \Rightarrow L_{f(L)} = l + \varepsilon_L l \Rightarrow L_{f(L)} = l(1 + \varepsilon_L)$$

$$L_{f(L)} = 120(1 + 1.4974 \times 10^{-4}) \Rightarrow L_{f(L)} = 120.018 \text{ cm}$$

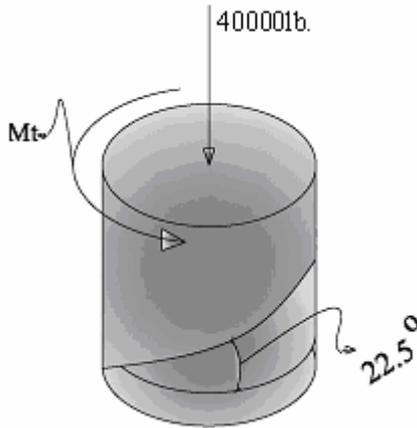
$$L_{f(C)} = \pi D + \delta_C \Rightarrow L_{f(C)} = \pi D + \varepsilon_C \pi D \Rightarrow L_{f(C)} = \pi D(1 + \varepsilon_C)$$

$$L_{f(C)} = \pi(100)[1 + 6.3642 \times 10^{-4}] \Rightarrow L_{f(C)} = 314.36 \text{ cm}$$

$$\tau = \frac{F_r}{NA_p} \leq \bar{\tau} \Rightarrow \frac{P \frac{\pi}{4} D^2}{N \frac{\pi (\phi_p)^2}{4}} \leq 1050 \Rightarrow N \geq \frac{(5)(100)^2}{1050 * \pi * (\phi_p)^2}$$

$$N \geq 37.9 \Rightarrow N = 38 \text{ para } \phi_p = 1/4''$$

**PROBLEMA 5.3.-** Una tubería de acero de 12pulg. De diámetro exterior esta fabricada en platina de 1/4 de pulg. Y soldada lo largo de una elipse que forma un ángulo de 22.5° con un plano perpendicular al eje de la tubería. Sabiendo que actúa una fuerza axial de 40000lb. y un troqué de 80000lb.pulg se aplica como dirección normal y tangencial a la soldadura .



Determinación de las tensiones presentes

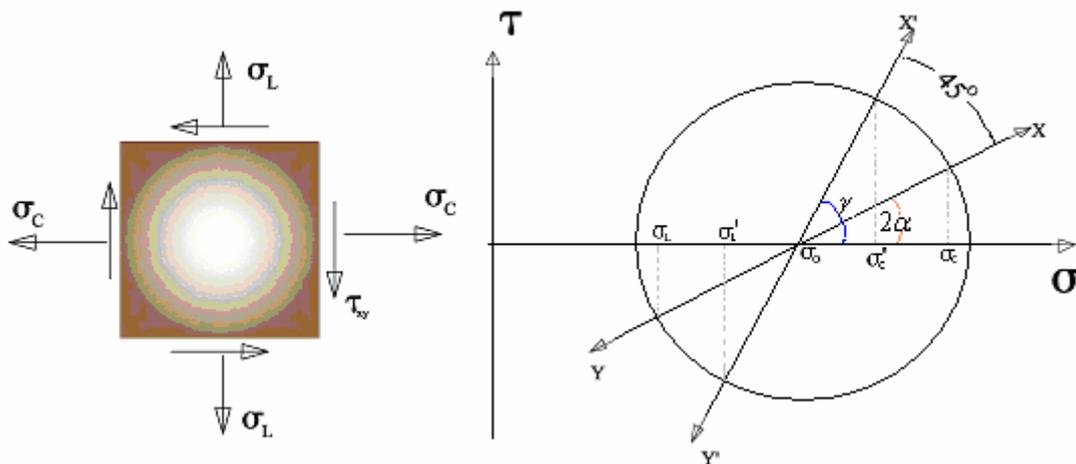
$$\text{PRESION} \Rightarrow P = \frac{40000 * 4}{\pi * (11.5)^2} \Rightarrow P = 385.1 \frac{lb}{pu\lg^2}.$$

$$\sigma_c = \frac{P * d_i}{2e} \Rightarrow \sigma_c = \frac{385.1 * 11.5}{2 * \frac{1}{4}} \Rightarrow \sigma_c = 8857.3 \frac{lb}{pu\lg^2}.$$

$$\sigma_L = \frac{P * d_i}{4e} \Rightarrow \sigma_L = \frac{385.1 * 11.5}{4 * \frac{1}{4}} \Rightarrow \sigma_L = 4428.65 \frac{lb}{pu\lg^2}.$$

$$\tau = \frac{M_T * R}{\pi * d_i^3 / 32} \Rightarrow \tau = \frac{80000 * 6 * 32}{\pi * 11.5^4} \Rightarrow \tau = 279.54 \frac{lb}{pu\lg^2}.$$

Ubicación de los esfuerzos



$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_c - \sigma_L}{2}\right)^2 + \tau^2} \Rightarrow R = \sqrt{\left(\frac{8857.3 - 4428.65}{2}\right)^2 + 279.54^2} \Rightarrow R = 2232$$

$$\sin 2\alpha = \frac{\tau}{R} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{279.54}{2232} \Rightarrow 2\alpha = 7.14^\circ$$

$$\sigma' = \frac{\sigma_c + \sigma_L}{2} + R \cos \gamma \Rightarrow \sigma' = \frac{8857.3 + 4428.65}{2} + 2232 \cos(45 + 7.14) \Rightarrow$$

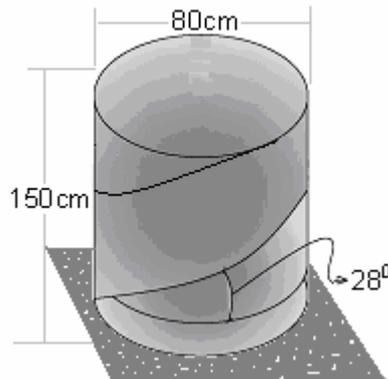
$$\sigma' = 8012.83 \text{ lb} / \text{pu} \lg^2$$

$$\sigma'' = \frac{\sigma_c + \sigma_L}{2} - R \cos \gamma \Rightarrow \sigma'' = \frac{8857.3 + 4428.65}{2} - 2232 \cos 52.14 \Rightarrow$$

$$\sigma'' = 5273.12 \text{ lb} / \text{pu} \lg^2$$

$$\tau' = R \sin \gamma \Rightarrow \tau' = 2232 * \text{Sen}52.14 \Rightarrow \tau' = 1762.2 \text{ lb} / \text{pu} \lg^2$$

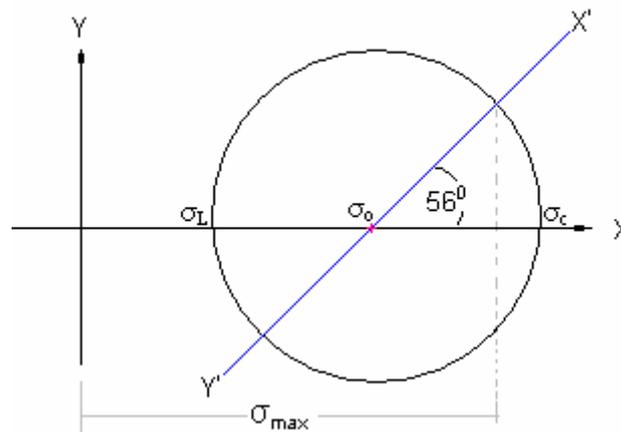
**PROBLEMA 5.4.-** La parte cilíndrica del tanque de aire comprimido, esta soldada en hélice la cual forma un ángulo de  $28^\circ$  con la horizontal .determinar el espesor del cilindro, si la presión manométrica es de  $8\text{Kg/cm}^2$ , sabiendo que el esfuerzo normal admisible perpendicular a la soldadura es de  $2100\text{Kg/cm}^2$ .



Solución

$$\sigma_c = \frac{p \cdot D}{2e} \Rightarrow \sigma_L = \frac{p \cdot D}{4e}$$

Con los esfuerzos graficar el círculo de morh.



$$\sigma_{\max} = \sigma_0 + R \cos 56^\circ \leq \bar{\sigma} \Rightarrow \frac{PD}{2e} + \frac{PD}{4e} + \frac{PD}{2e} - \frac{PD}{4e} * \cos 56^\circ \leq \bar{\sigma}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{PD(3 + \cos 56^\circ)}{8e} \leq \bar{\sigma} \Rightarrow e \geq \frac{8 \cdot 80 \cdot (3 + \cos 56^\circ)}{8 \cdot 2100} \Rightarrow e \geq 0.1356 \text{ cm}$$

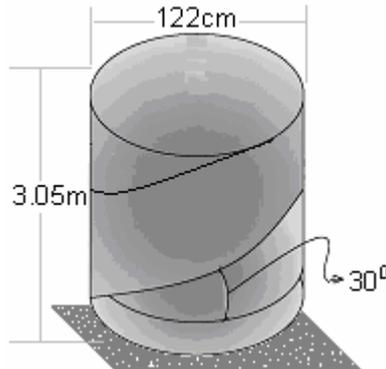
$$\sigma_{\max} = \sigma_0 - R \cos 56^\circ \leq \bar{\sigma} \Rightarrow \frac{PD}{2e} + \frac{PD}{4e} - \frac{PD}{2e} - \frac{PD}{4e} * \cos 56^\circ \leq \bar{\sigma}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{PD(3 - \cos 56^\circ)}{8e} \leq \bar{\sigma} \Rightarrow e \geq \frac{8 \cdot 80 \cdot (3 - \cos 56^\circ)}{8 \cdot 2100} \Rightarrow e \geq 0.093 \text{ cm}$$

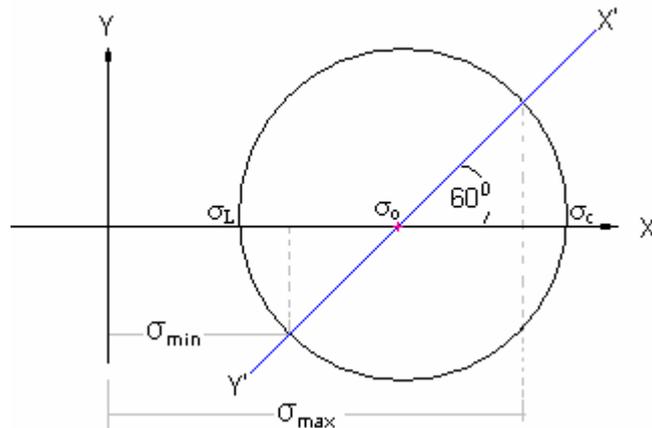
Se toma el mayor de los espesores

Sea  $e = \frac{1}{16} \Rightarrow e = 0.15875 \text{ cm}$  .....solución

**PROBLEMA 5.5.-** La parte cilíndrica del tanque de aire esta comprimido mostrado es de platina de 3/8 de pulgada soldada en hélice la cual forma un ángulo de 30° con la horizontal. Halle la máxima presión manométrica admisible, sabiendo que el esfuerzo normal admisible perpendicular a la soldadura es de 1200Kg/cm<sup>2</sup>.



Solución



$$\sigma_{\max} = \sigma_0 + R \cos 60^\circ \leq \bar{\sigma} \Rightarrow \frac{PD}{2e} + \frac{PD}{4e} + \frac{PD}{2e} - \frac{PD}{4e} * \cos 60^\circ \leq \bar{\sigma}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{PD(3 + \cos 60^\circ)}{8e} \leq \bar{\sigma} \Rightarrow P \leq \frac{8 * 0.9525 * 1200}{122 * (3 + \cos 60^\circ)} \Rightarrow P \leq 21.414 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

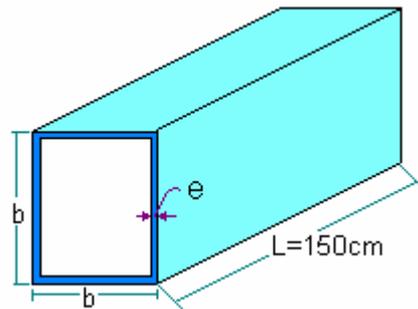
$$\sigma_{\max} = \sigma_0 - R \cos 60^\circ \leq \bar{\sigma} \Rightarrow \frac{PD}{2e} + \frac{PD}{4e} - \frac{PD}{2e} - \frac{PD}{4e} * \cos 60^\circ \leq \bar{\sigma}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{PD(3 - \cos 60^\circ)}{8e} \leq \bar{\sigma} \Rightarrow P \leq \frac{8 * 0.9525 * 1200}{122 * (3 - \cos 60^\circ)} \Rightarrow P \leq 29.98 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

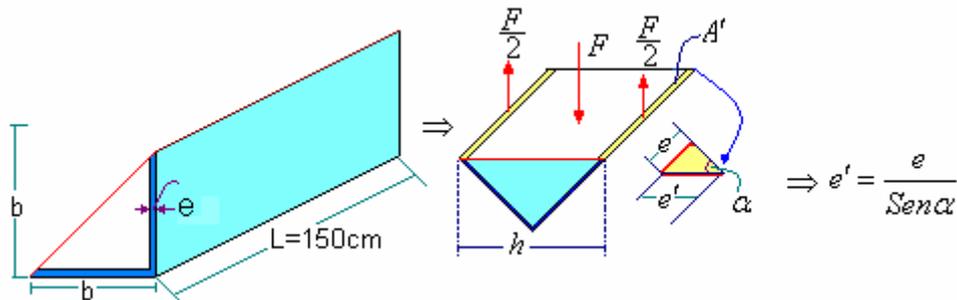
Se toma el menor valor de las presiones para que sea máxima.

Sea  $P \leq 21.414 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} \Rightarrow P = 21.41 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$  .....solución

**PROBLEMA 5.6.-** Determinar el espesor de la plancha, las longitudes finales, para cuyo efecto se tiene los esfuerzos de  $\sigma_f=2100\text{kg/cm}^2$ ,  $\tau_f=0.5 \sigma_f$ ,  $n=2$ . Si la presión interna es de  $5\text{kg/cm}^2$ ,  $E=2.1*10^6\text{kg/cm}^2$ ,  $b=80\text{cm}$   $\mu=0.3$ .



Solución:



Dimensionamiento del espesor del cilindro

$$\sigma_c = \frac{F}{2A'} \Rightarrow \sigma_c = \frac{PhL}{2e'L} \Rightarrow \sigma_c = \frac{Pb}{2e} \leq \bar{\sigma} \Rightarrow e \geq \frac{(5)(80)}{(2)(1050)} \Rightarrow e \geq 0.19 \text{ cm}$$

$$\sigma_L = \frac{p*b*b}{4b*b} \Rightarrow \sigma_L = \frac{p*b}{4e}$$

$$\tau_{\max} = \frac{Pb}{8e} \leq \bar{\tau} \Rightarrow e \geq \frac{(5)(80)}{(8)(525)} \Rightarrow e \geq 0.095 \text{ cm} \quad \text{Sea} \quad e = \frac{1}{8} \Rightarrow e = 0.3175 \text{ cm}$$

Cálculo de los esfuerzos circunferenciales y longitudinales

$$\sigma_c = \frac{Pb}{2e} \Rightarrow \sigma_c = \frac{(5)(80)}{(2)(0.3175)} \Rightarrow \sigma_c = 629.92 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_L = \frac{Pb}{4e} \Rightarrow \sigma_L = \frac{(5)(80)}{(4)(0.3175)} \Rightarrow \sigma_L = 314.96 \text{ kg/cm}^2$$

Determinación de las deformaciones unitarias

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_c - \mu\sigma_L}{E} \Rightarrow \varepsilon_c = \frac{629.92 - (0.3)(314.96)}{2.1*10^6} \Rightarrow \varepsilon_c = 2.54968*10^{-4}$$

$$\varepsilon_L = \frac{\sigma_L - \mu\sigma_c}{E} \Rightarrow \varepsilon_L = \frac{314.96 - (0.3)(629.92)}{2.1*10^6} \Rightarrow \varepsilon_L = 5.9992*10^{-5}$$

Determinación de las longitudes finales circunferencial y longitudinal

$$L_{f(L)} = l + \delta_L \Rightarrow L_{f(L)} = l + \varepsilon_L l \Rightarrow L_{f(L)} = l(1 + \varepsilon_L)$$

$$L_{f(L)} = 150(1 + 5.9992*10^{-5}) \Rightarrow L_{f(L)} = 150.009 \text{ cm}$$

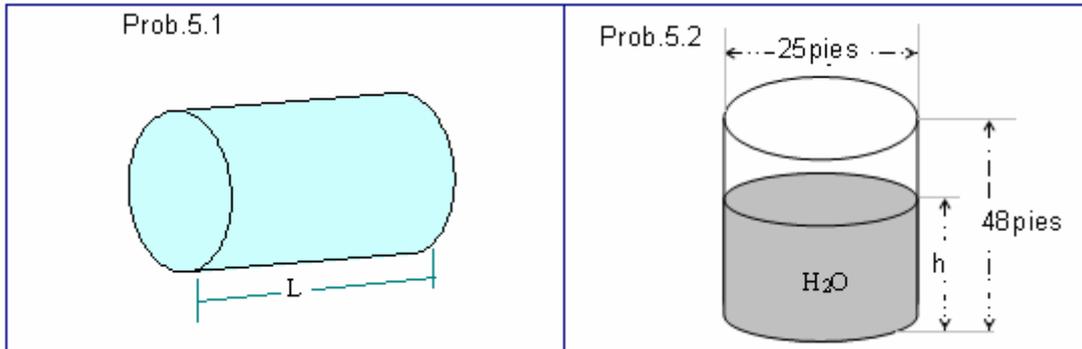
$$L_{f(C)} = 4b + \delta_C \Rightarrow L_{f(C)} = 4b + \varepsilon_C 4b \Rightarrow L_{f(C)} = 4b(1 + \varepsilon_C)$$

$$L_{f(C)} = 4(80)[1 + 2.54968*10^{-4}] \Rightarrow L_{f(C)} = 320.0816 \text{ cm}$$

**PROBLEMAS PROPUESTOS DE CILINDROS DE PARED DELGADA**

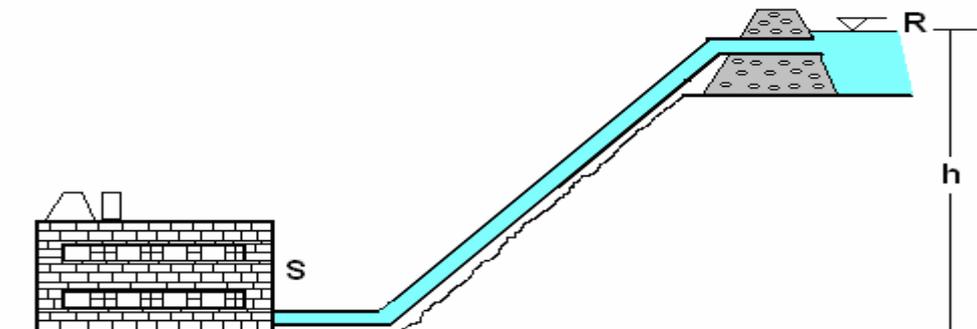
**5.1.-** Considere un recipiente a presión cerrada cilíndrica de acero, como se muestra en la figura. El radio del cilindro es de 1000mm y el espesor de las paredes de 10mm:

- Determine los esfuerzos circunferencial y longitudinal, causados por una presión interna de 0.80MPa.
- Calcule el cambio en el diámetro del cilindro causado por la presión para  $E=200\text{GPa}$  y el modulo de poisson de  $\mu=0.25$ .



**5.2.-** El tanque cilíndrico de almacenamiento no presurizado que se muestra en la figura, tiene un espesor de pared de  $\frac{3}{16}$ " y está hecho de acero con resistencia última a tensión de 60ksi. Hasta que altura  $h$  puede llenarse con agua, si se desea un factor de seguridad de 4 ( $\gamma$  del agua =  $1000\text{Kg/}$

**5.3.-** Una tubería de carga de 750mm de diámetro exterior y 12mm de espesor conecta a un embalse R con una estación generadora S. si  $h = 300\text{m}$ , halle los esfuerzos normal y cortante máximos en la tubería en condiciones prácticas, tomando en cuenta que (densidad  $\text{H}_2\text{O} = 1000\text{Kg/m}^3$ ).



**5.4.-** Un contenedor esférico de gas hecho de acero tiene 5m de diámetro exterior y 10mm de espesor uniforme. Si la presión interna es de 400KPa. Halle los esfuerzos máximos normal y cortante en el contenedor.

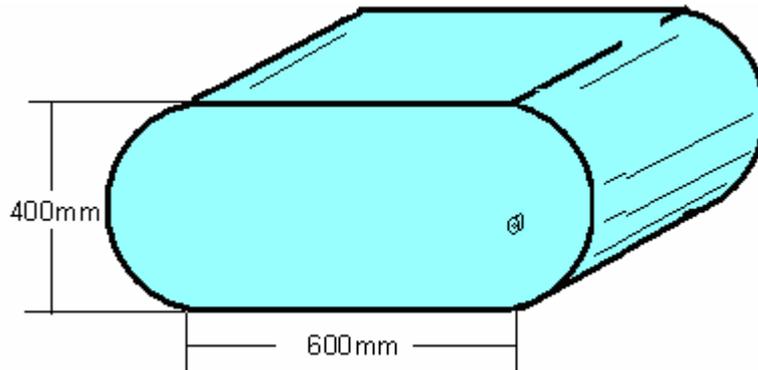
**5.5.-** Un recipiente esférico de 10 pulg. de diámetro interno y  $\frac{1}{4}$  pulgada de espesor está hecho de acero con 600ksi de resistencia última a tensión. Halle el factor de seguridad con respecto a la falla por tensión cuando la presión manométrica es de 80ksi.

**5.6.-** Demuestre que el esfuerzo longitudinal en un cascarón esférico de pared delgada, de diámetro  $D$  y espesor  $t$ , sujeto a una presión interna  $P$ , está dado por:  $\sigma = \frac{pD}{4t}$

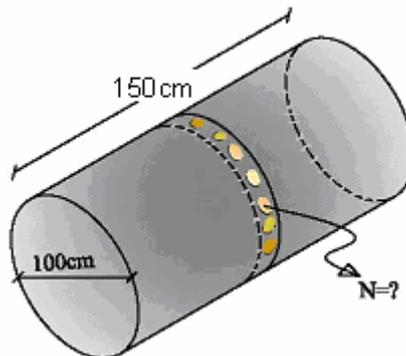
**5.7.-** Un recipiente cilíndrico a presión está fabricado de placas de acero que tiene un espesor de 20mm. El diámetro del recipiente es 500mm y su  $L=3\text{m}$ . Determine la máxima presión interna que puede aplicarse si el esfuerzo en el acero está limitado a 140MPa.

**5.8.-** Un depósito cilíndrico de agua de eje vertical tiene 80mm de diámetro y 12m de altura. Si ha de llenarse hasta el borde, determinar el mínimo espesor de las placas que lo componen si el esfuerzo está limitado a  $400000 \text{Kg/m}^2$ .

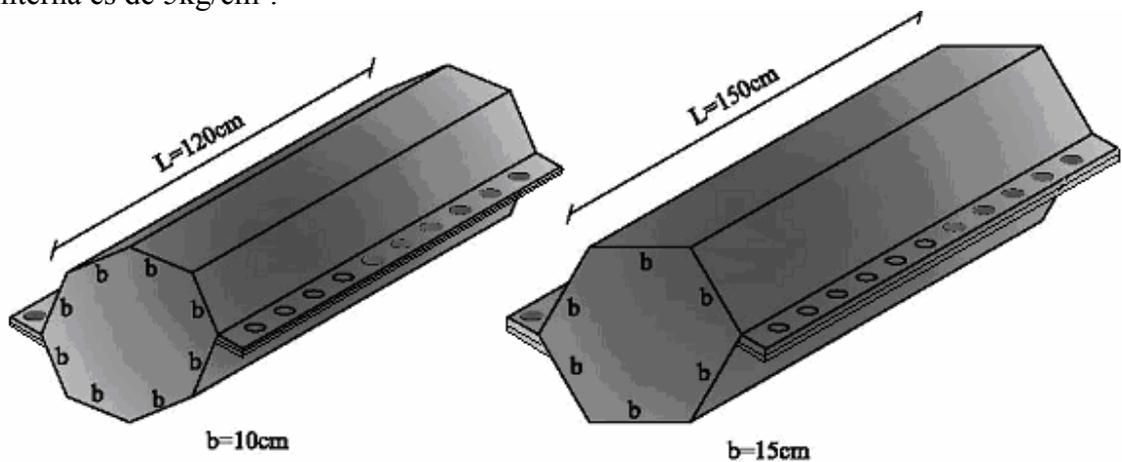
**5.9.-** El depósito de la figura se construye con placa de 10mm de acero. Calcular la tensión cortante máxima que originará una presión interior de  $1.2 \text{MPa}$



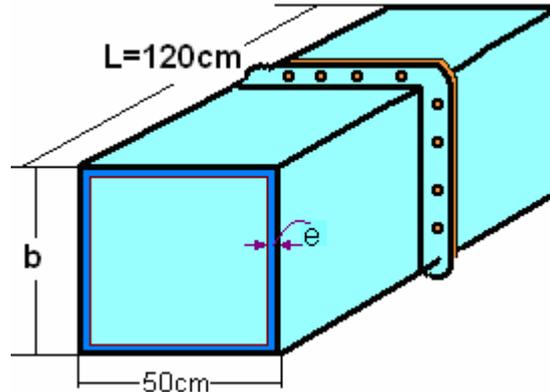
**5.10.-** Determinar el espesor de la plancha cilíndrica, el diámetro final y el número de remaches, para cuyo efecto se tiene los esfuerzos de  $\sigma_f = 4200 \text{kg/cm}^2$  y  $\tau_f = 0.5\sigma_f$ , con un factor de seguridad 2. Si la presión interna es de  $5 \text{kg/cm}^2$ ,  $E = 2.1 \cdot 10^6 \text{kg/cm}^2$  y  $\mu = 0.3$ .



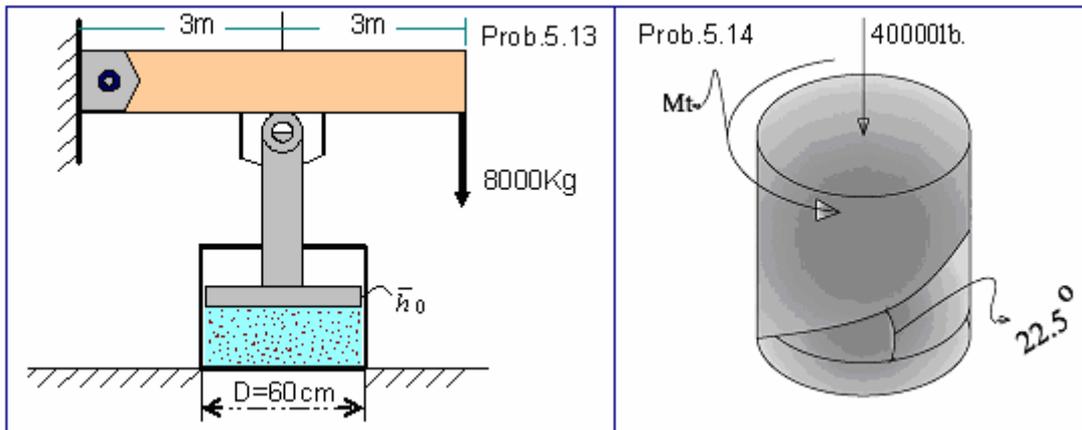
**5.11.-** Calcular el espesor del espiral y el número de remaches, para cuyo efecto se tiene los esfuerzos de  $\sigma_f = 4200 \text{kg/cm}^2$  y  $\tau_f = 0.5\sigma_f$ , con un factor de seguridad 3. Si la presión interna es de  $5 \text{kg/cm}^2$ .



**5.12.-** Determinar el espesor de la plancha, las longitudes finales y el numero de remaches, para cuyo efecto se tiene los esfuerzos de  $\sigma_f=2100\text{kg/cm}^2$ ,  $\tau_f=0.5 \sigma_f$ ,  $n=2$ . Si la presión interna es de  $5\text{kg/cm}^2$ ,  $E=2.1 \cdot 10^6\text{kg/cm}^2$ ,  $b=80\text{cm}$   $\mu=0.3$ .

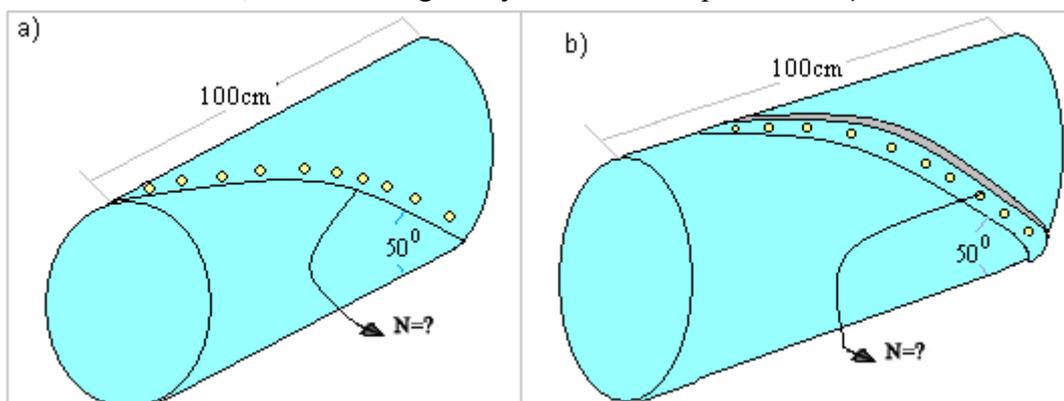


**5.13.-** Calcular el espesor del cilindro, para cuyo efecto se tiene que un  $\sigma_f=4200\text{kg/cm}^2$  y un  $\tau_f=0.5\sigma_f$  con un factor de seguridad de 2,  $E=2.1 \cdot 10^6\text{kg/cm}^2$  y el modulo de poisson de  $\mu=0.3$ .  $\bar{h}_0=0.15\text{mm}$ .



**5.14.-** Un recipiente presurizado de 12 de diámetro exterior esta hecho de platina acero de 1/4 pulgada soldada en hélice que forma un de  $22.5^\circ$  con respecto a la horizontal como se muestra en la figura. Si la presión manométrica interior es de 250 psi y se aplica una fuerza axial  $P=40000\text{lb}$  y un torque de  $80000\text{lb} \cdot \text{pulg}$ . Calcular el esfuerzo y la cortante en dirección normal y tangencial a la soldadura.

**5.15.-** Determinar el espesor de la plancha cilíndrica, las longitudes finales circunferencial, longitudinal y el número de remaches, con la inclinación de  $\varphi = 50^\circ$ , con  $\sigma_f=2100\text{kg/cm}^2$  y  $\tau_f=0.5 \sigma_f$ ,  $n=2$ . Si la presión interna es de  $5\text{kg/cm}^2$  con un diámetro  $D=80\text{cm}$ ,  $E=2.1 \cdot 10^6\text{kg/cm}^2$  y el modulo de poisson de  $\mu=0.3$ .



---

## CAPITULO VI FLEXIÓN EN VIGAS

---

### 6.1.- INTRODUCCIÓN

Este capítulo tiene mucha importancia para estudiar el comportamiento de vigas, debido a una fuerza puntual sobre ella, se basa a la grafica de esfuerzos normales, esfuerzos cortantes y el momento flector máximo. Para cuyo efecto se tendrá que seguir las siguientes hipótesis.

### 6.2.- HIPÓTESIS

- La sección transversal tiene que ser uniforme.
- El material tendrá que ser homogéneo y obedece a la ley de Hooke.
- Las cargas que actúan sobre la viga, tendrán que ser perpendiculares sobre la viga.
- El modulo de elasticidad a la tracción es aproximadamente igual al modulo de elasticidad al de compresión.
- El esfuerzo de trabajo tendrá que ser menor al esfuerzo admisible.

### 6.3.- OBJETIVOS

- Establecer que tipo de tensiones provoca la flexión.
- Establecer la ecuación que nos permita hallar el valor de las tensiones y las hipótesis bajo las cuales pueden aplicarse.
- Dimensionar vigas sobre tiras a flexión.
- El objetivo principal es como encontrar la ecuación del esfuerzo debido a

flexión que esta dada de la forma siguiente :  $\sigma = \frac{M * Y}{I}$

### 6.4.- TIPOS DE APOYOS EN LOS ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Los elementos estructurales generalmente se clasifican de acuerdo con los esfuerzos principales, por las cargas que los miembros deben soportar. Una viga soporta cargas que producen momentos de flexión.

Una columna es un miembro en el cual están presentes tanto momento de flexión, como fuerzas de tracción y las fuerzas de compresión. En la práctica se presentan tres tipos de apoyos ideales.

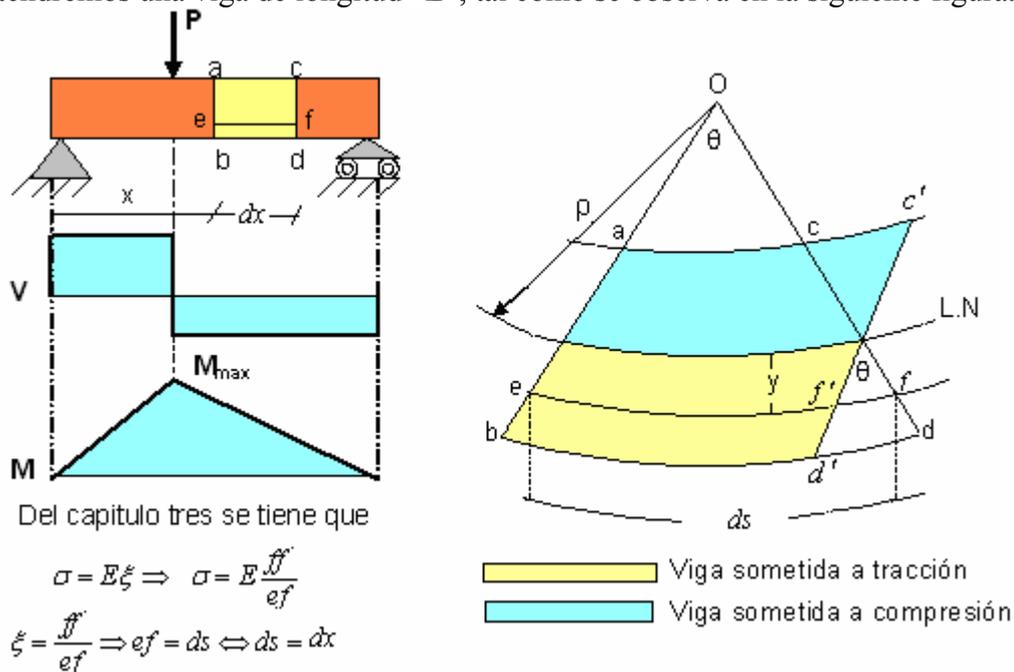
En la mayor parte de las situaciones prácticas las condiciones de apoyo de las estructuras pueden escribirse así en el siguiente cuadro.

ESQUEMA	REACCIONES	DENOMINACIONES	OBSERVACIONES	G. L
	$R_y$ ↑	Apoyo móvil rodillo	Una reacción — Una vertical	2
	$R_y$ ↑ $R_x$ →	Apoyo fijo pasador	Dos reacciones — Una vertical — Una horizontal	1
	$R_y$ ↑ $R_x$ → $M$ ↻	Empotramiento perfecto	Tres reacciones — Una vertical — Una horizontal — Un momento flector	0

G.L = Grados de libertad.

### 6.5.- DEDUCCIÓN DE ECUACION DE ESFUERZO A FLEXIÓN

Cuya deducción se realiza a base de las hipótesis mencionadas anteriormente, para el cual tendremos una viga de longitud “L”, tal como se observa en la siguiente figura.

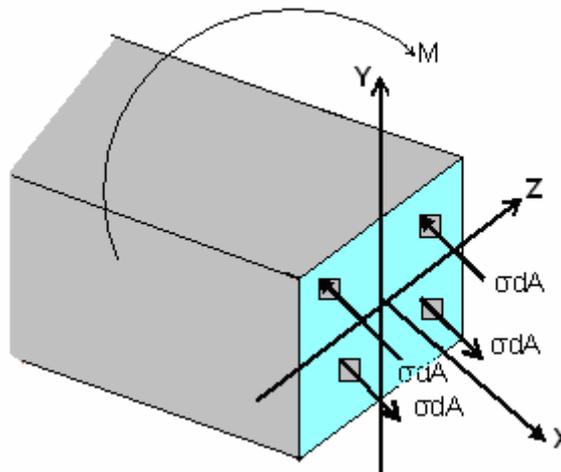


Por otra parte se tiene que  $\theta = \frac{ds}{\rho}$  y  $\theta = \frac{ff'}{y}$

Igualando ambas igualdades se tiene que  $\frac{ds}{\rho} = \frac{ff'}{y} \Rightarrow \frac{ff'}{ds} = \frac{y}{\rho}$

Sustituyendo esta última expresión en la ecuación  $\sigma = E \frac{ff'}{dx}$  se tiene

$$\sigma = E \frac{y}{\rho} \Rightarrow \frac{E}{\rho} = \frac{\sigma}{y} \dots\dots\dots (6.1)$$



$$\sum M_z = 0 \Rightarrow$$

$$M = \int \sigma dA * y \Rightarrow M = \int \frac{Ey}{\rho} dA * y \Rightarrow M = \frac{E}{\rho} \int y^2 dA$$

$$\text{Como } \int y^2 dA = I_{zz} \Rightarrow M = \frac{E}{\rho} I_{zz} \Rightarrow M = \frac{\sigma}{y} I_{zz}$$

Para su dimensionamiento se tendrá que considerar:

$$\sigma = \frac{M_{\max} * y_{\max}}{I_{zz}} \leq \bar{\sigma} \dots\dots\dots (6.2)$$

Donde:

$\sigma$  = Tensión debido a flexión ( $\frac{Kg}{cm^2}$ )

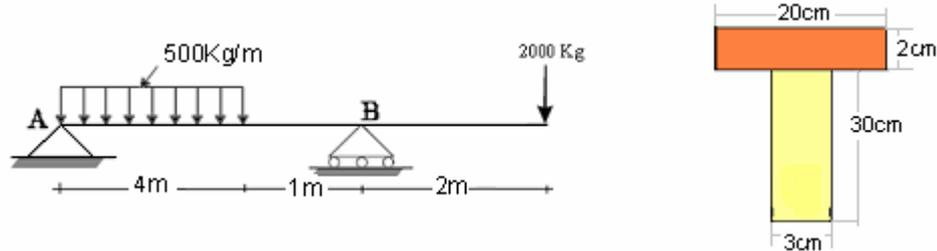
$y_{\max}$  = Es la distancia desde la línea neutra hasta el punto de tracción (cm).

$I_{zz}$  = Es el momento de inercia con respecto al eje ( $cm^4$ ).

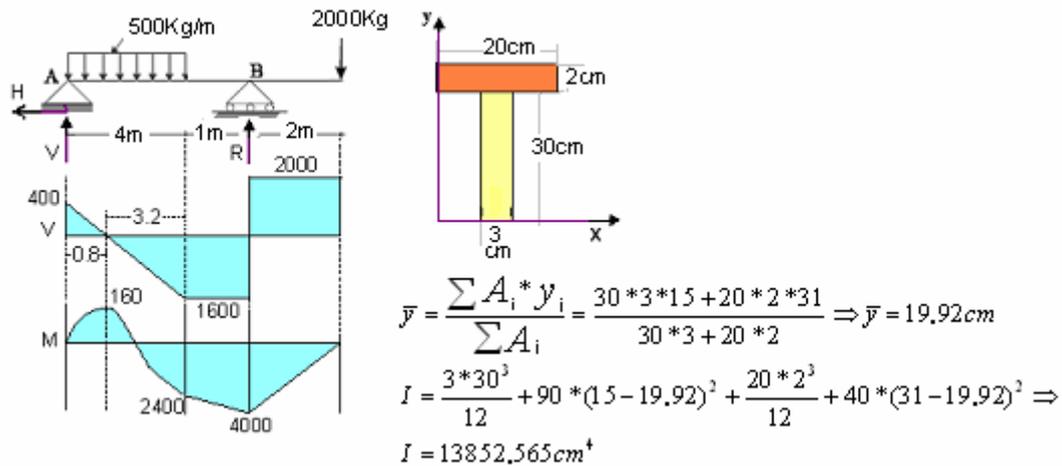
$M_{\max}$  = Momento flector máximo (Kg\*cm).

**PROBLEMAS RESUELTOS DE FLEXIÓN EN VIGAS**

**PROBLEMA 6.1.-** Calcular los esfuerzos máximos de tracción y de compresión de la sección transversal del perfil T.



Solución



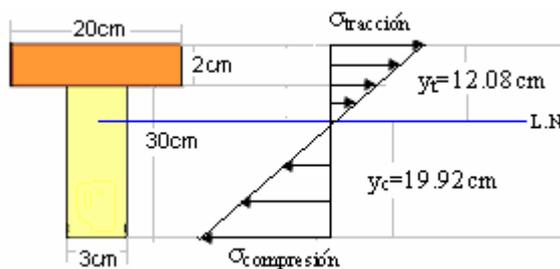
Calculo de las reacciones

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 500 \cdot 4 \cdot 2 - 5 \cdot R + 2000 \cdot 7 = 0 \Rightarrow R = 3600 \text{ Kg}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -500 \cdot 4 \cdot 3 - 5 \cdot V + 2000 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V = 400 \text{ Kg}$$

$$\text{Control } \sum V = 0 \Rightarrow V + R - 2000 - 500 \cdot 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

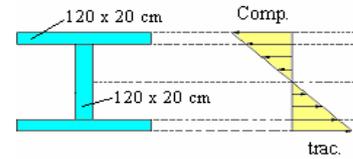
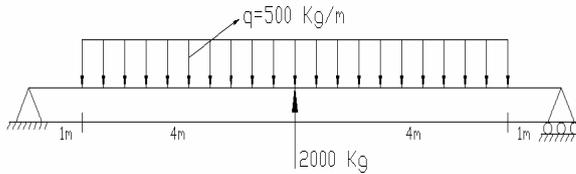
Análisis de los esfuerzos tanto a tracción, como esfuerzo a compresión



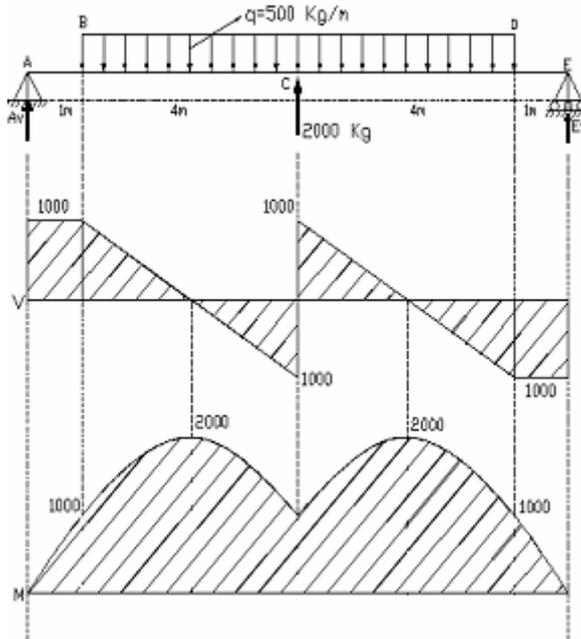
$$\sigma_{tracc} = \frac{M_{max} \cdot y_t}{I} \Rightarrow \sigma_{tracc} = \frac{400000 \cdot 12.08}{13852.565} \Rightarrow \sigma_{tracc} = 348.816 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_{comp.} = \frac{M_{max} \cdot y_c}{I} \Rightarrow \sigma_{comp.} = \frac{400000 \cdot 19.92}{13852.565} \Rightarrow \sigma_{comp.} = 575.2 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

**PROBLEMA 6.2.-** Determinar los esfuerzos Máximos de la sección transversal del perfil I de 120 x 20cm.



Solución



$$\sum M_A = 0$$

$$5(4000) - 5(2000) - 10E_V = 0$$

$$E_V = 1000 \text{ Kg}$$

$$\sum F_V = 0$$

$$A_V + 2000 + 1000 - 4000 = 0$$

$$A_V = 1000 \text{ Kg}$$

Cálculo de Momentos por Áreas:

$$M_B = 0 + A_1 = 1000$$

Por Semejanza de triángulos:

$$\frac{1000}{X} = \frac{4000}{4-X} \rightarrow X = 2$$

$$M_B' = 1000 + \frac{1}{2}(X)(1000) = 2000$$

$$M_C = 2000 - \frac{1}{2}(2)(1000) = 2000$$

$$M_C' = 1000 + \frac{1}{2}(2)(1000) = 2000$$

$$M_D = 2000 - \frac{1}{2}(2)(1000) = 1000$$

$$M_E = 1000 - 1(1000) = 0$$

Centro de masas en el eje "y"

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A} = \frac{120 \cdot 20 \cdot 10 + 120 \cdot 20 \cdot 80 + 120 \cdot 20 \cdot 150}{120 \cdot 20 + 120 \cdot 20 + 120 \cdot 20} = 80 \text{ cm}$$

Calculando la Inercia por el teorema de Steiner  $I = \sum [I_o + A_i \cdot \bar{y}_i^2]$ ;  $I_o = \frac{b \cdot h^3}{12}$

$$I = \frac{120 \cdot 20^3}{12} + 2400 \cdot (10 - 80)^2 + \frac{20 \cdot 120^3}{12} + 2400 \cdot (80 - 80)^2 + \frac{120 \cdot 20^3}{12} + 2400 \cdot (150 - 80)^2$$

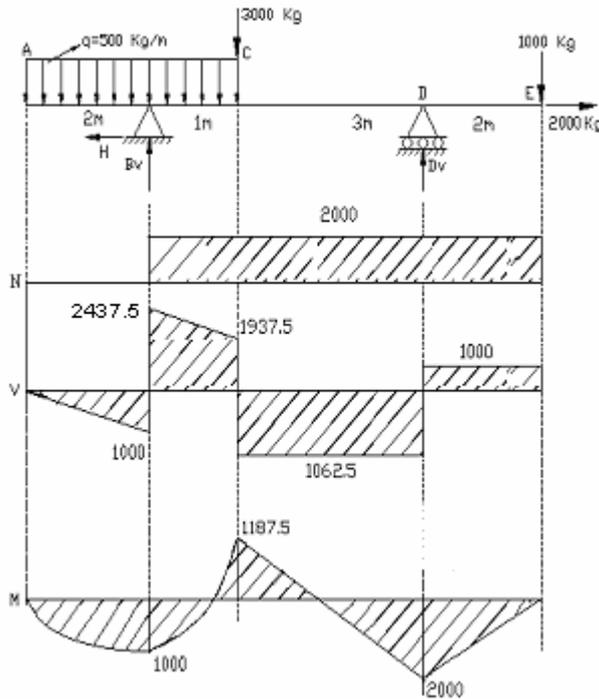
$$I = 26560000 \text{ cm}^4$$

$$\sigma = \frac{M t_{max} \cdot \bar{y}}{I}$$

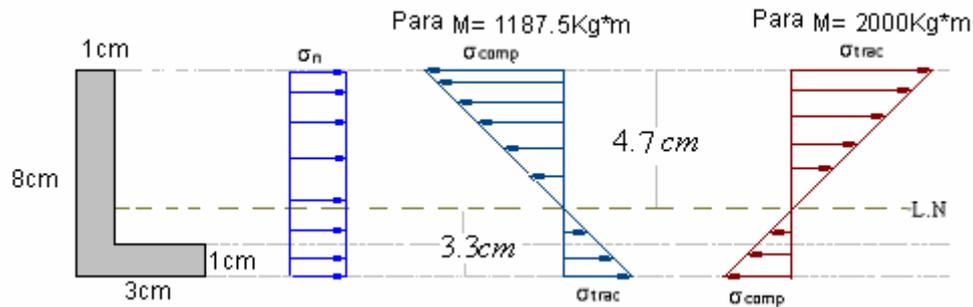
$$\sigma_{trac} = \frac{200000 \cdot 80}{26560000} = 0.602 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_{comp} = \frac{200000 \cdot 80}{26560000} = 0.602 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

**PROBLEMA 6.3.-** Determinar los esfuerzos Máximos de la sección transversal del perfil L de dimensiones dadas.



$$\begin{aligned} \sum F_H = 0 &\Rightarrow H = 2000 \text{ Kg} \\ \sum M_D = 0 & \\ 2000 \cdot 2 - 3000 \cdot 3 - 500 \cdot 3.5 - 1000 \cdot 5 + 4B_V = 0 & \\ B_V = 3437.5 \text{ Kg} & \\ \sum F_V = 0 &\Rightarrow -1500 - 3000 - 1000 + B_V + D_V = 0 \\ D_V = 2062.5 \text{ Kg} & \\ \text{Cálculo de Momentos por Áreas:} & \\ M_B = -\frac{1000 \cdot 2}{2} = -1000 & \\ M_C = -1000 + \left(\frac{2437.5 + 1937.5}{2}\right) \cdot 1 &\Rightarrow \\ M_C = 1187.5 & \\ M_D = 1187.5 - 1062.5 \cdot 3 = -2000 & \\ M_E = -2000 + 1000 \cdot 2 = 0 & \end{aligned}$$



Centro de gravedad de la sección transversal.

$$\bar{y} = \frac{3 \cdot 0.5 + 7 \cdot 4.5}{3 + 7} \Rightarrow \bar{y} = 3.3 \text{ cm}$$

Calculando la Inercia por el teorema de Steiner  $I = \sum [I_o + A_i \cdot \bar{y}_i^2]$ ;  $I_o = \frac{b \cdot h^3}{12}$

$$I = \frac{3 \cdot 1^3}{12} + 3 \cdot (3.3 - 0.5)^2 + \frac{1 \cdot 7^3}{12} + 7 \cdot (3.3 - 4.5)^2 \Rightarrow I = 62.43 \text{ cm}^4$$

Para  $M = 1187.5 \text{ Kg} \cdot \text{m}$

$$\sigma_{trac} = \frac{2000 \text{ Kg}}{10 \text{ cm}^2} + \frac{118750 \text{ Kg} \cdot \text{cm} \cdot 3.3 \text{ cm}}{62.43 \text{ cm}^4} = 6477.03 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

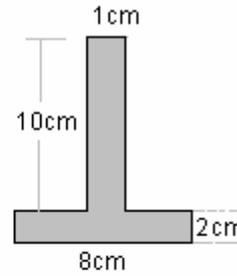
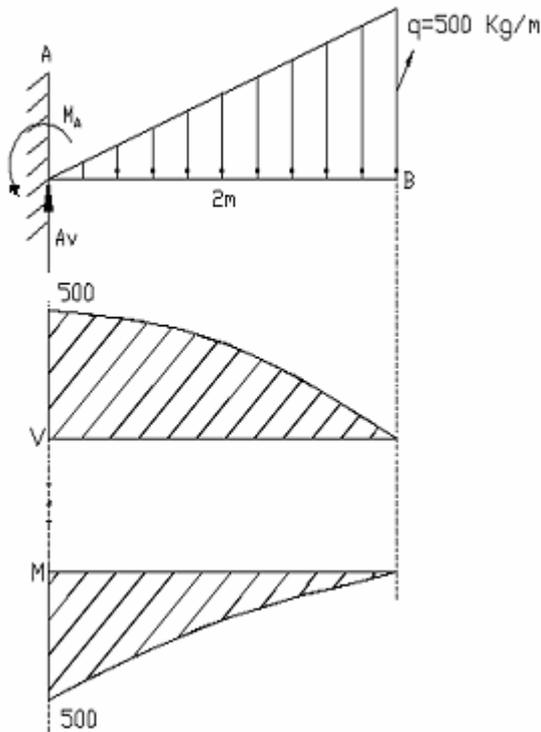
$$\sigma_{comp} = \frac{2000 \text{ Kg}}{10 \text{ cm}^2} - \frac{118750 \text{ Kg} \cdot \text{cm} \cdot 4.7 \text{ cm}}{62.43 \text{ cm}^4} = 8740.013 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

Para  $M = 2000 \text{ Kg} \cdot \text{m}$

$$\sigma_{trac} = \frac{2000 \text{ Kg}}{10 \text{ cm}^2} + \frac{200000 \text{ Kg} \cdot \text{cm} \cdot 4.7 \text{ cm}}{62.43 \text{ cm}^4} = 15256.86 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} \Rightarrow \sigma_{max} \text{ En tracción}$$

$$\sigma_{comp} = \frac{2000 \text{ Kg}}{10 \text{ cm}^2} - \frac{200000 \text{ Kg} \cdot \text{cm} \cdot 3.3 \text{ cm}}{62.43 \text{ cm}^4} = 10371.84 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} \Rightarrow \sigma_{max} \text{ En compresión}$$

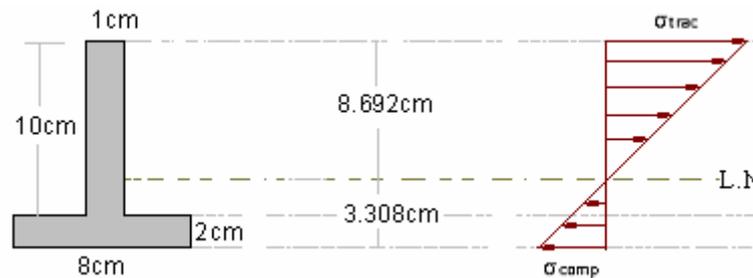
**PROBLEMA 6.4.-** Determinar los esfuerzos Máximos de la sección transversal del angular T invertida.



$$\begin{aligned} \sum F_H = 0 &\Rightarrow H = 0 \\ \sum F_V = 0 &\Rightarrow A_V = 500 \text{ Kg} \\ \sum M_A = 0 \\ 500 * 2 - M_A &= 0 \\ M_A &= 500 \text{ Kg} * \text{m} \end{aligned}$$

Centro de masas en el eje "y"

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i * y_i}{\sum A_i} = \frac{16 * 1 + 10 * 7}{16 + 10} = 3.308 \text{ cm}$$

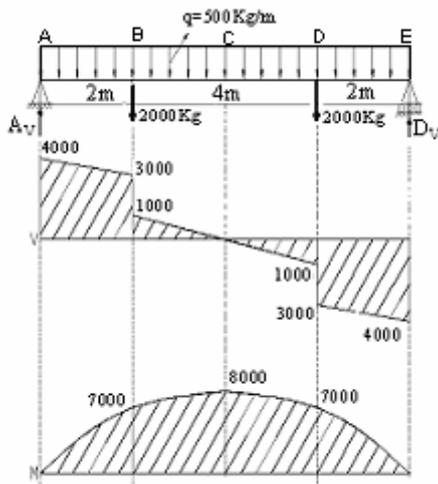


$$I = 5.33 + 16 * (3.308 - 1)^2 + 83.33 + 10 * (3.308 - 7)^2 = 310.2 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_{trac} = \frac{50000 \text{ Kg} * \text{cm} * 8.692 \text{ cm}}{310.2 \text{ cm}^4} = 1401.03 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} \Rightarrow \sigma_{max} \text{ En tracción}$$

$$\sigma_{comp} = \frac{50000 \text{ Kg} * \text{cm} * 3.308 \text{ cm}}{310.2 \text{ cm}^4} = 533.2 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} \Rightarrow \sigma_{max} \text{ En compresión}$$

**PROBLEMA 6.5.-** Determinar los esfuerzos Máximos de la sección transversal de angular C.



$$\sum F_H = 0 \rightarrow H = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$2000(2) + 4000(4) + 2000(6) - D_V(8) = 0$$

$$D_V = 4000 \text{ Kg}$$

$$\sum F_V = 0$$

$$A_V + 2000(2) - 4000 + 4000 = 0$$

$$A_V = 4000 \text{ Kg}$$

Cálculo de Momentos por Áreas:

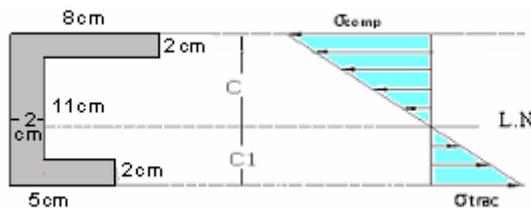
$$M_A = 0$$

$$M_B = 4000 + 3000 = 7000$$

$$M_C = 7000 + 1000 \cdot 2/2 = 8000$$

$$M_D = 8000 - 1000 \cdot 2/2 = 7000$$

$$M_E = 7000 - (3000 + 4000) = 0$$



Centro de masas en el eje y

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A} = \frac{(10)(1) + (22)(7.5) + 16(14)}{10 + 22 + 16} = 8.3125 \text{ cm}$$

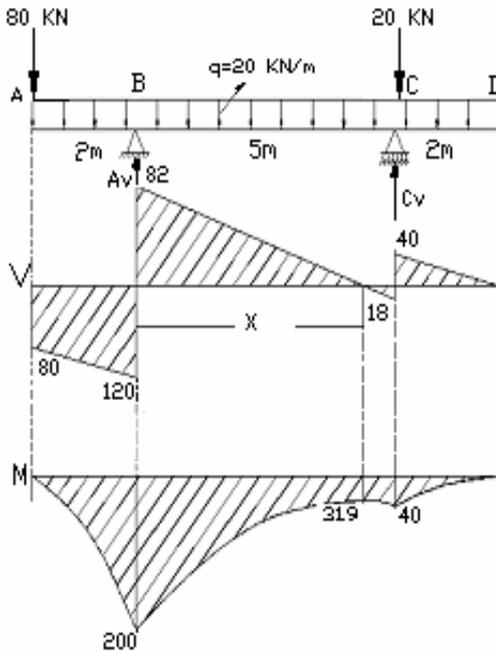
$$I = 3.33 + 10 \cdot (8.3125 - 1)^2 + 221.83 + 22 \cdot (8.3125 - 7.5)^2 + 5.33 + 16 \cdot (8.3125 - 14)^2 \Rightarrow I = 1297.3025 \text{ cm}^4$$

Determinación de los esfuerzos máximos

$$\sigma_{trac} = \frac{800000 \text{ Kg} \cdot \text{cm} \cdot 8.3125 \text{ cm}}{1297.3025 \text{ cm}^4} = 5126.02 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} \Rightarrow \sigma_{max} \text{ En tracción}$$

$$\sigma_{comp} = \frac{800000 \text{ Kg} \cdot \text{cm} \cdot 6.6875 \text{ cm}}{1297.3025 \text{ cm}^4} = 4123.94 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} \Rightarrow \sigma_{max} \text{ En compresión}$$

**PROBLEMA 6.6.-** Determinar los esfuerzos Máximos de la sección transversal.



$$\sum F_H = 0 \rightarrow H = 0$$

$$\sum M_B = 0$$

$$-80(2) - 40 + 100(2.5) + 20(5) + C_V(5) + 40(6) = 0$$

$$C_V = 78 \text{ KN}$$

$$\sum F_V = 0$$

$$-80 + B_V - 180 - 20 + 78 = 0$$

$$B_V = 202 \text{ KN}$$

Cálculo de Momentos por Áreas:

$$M_A = 0$$

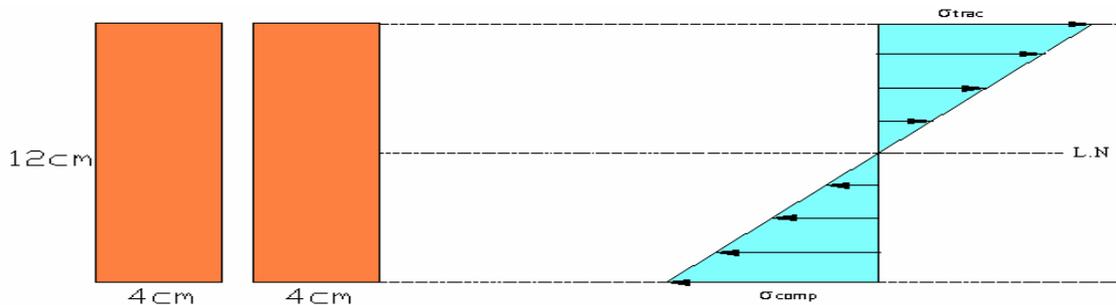
$$M_B = -2(80) - \frac{2(40)}{2} = -200$$

$$\frac{82}{X} = \frac{18}{X-5} \rightarrow X = 4.1 \text{ m}$$

$$M'_B = \frac{(4.1)(82)}{2} - (200) = -31.9$$

$$M_C = -31.9 - \frac{(0.9)(18)}{2} = -40$$

$$M_D = -40 + \frac{(2)(40)}{2} = 0$$



$$I = I_o(2) = \left( \frac{4(12)^3}{12} \right) (2) = 1152 \text{ cm}^4$$

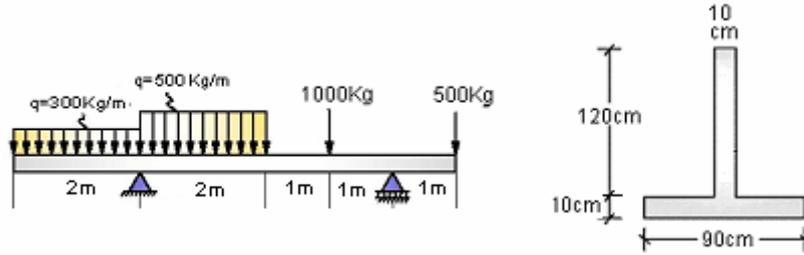
$$\sigma = \frac{Mt_{max} \cdot \bar{y}}{I}$$

Determinación de los esfuerzos máximos

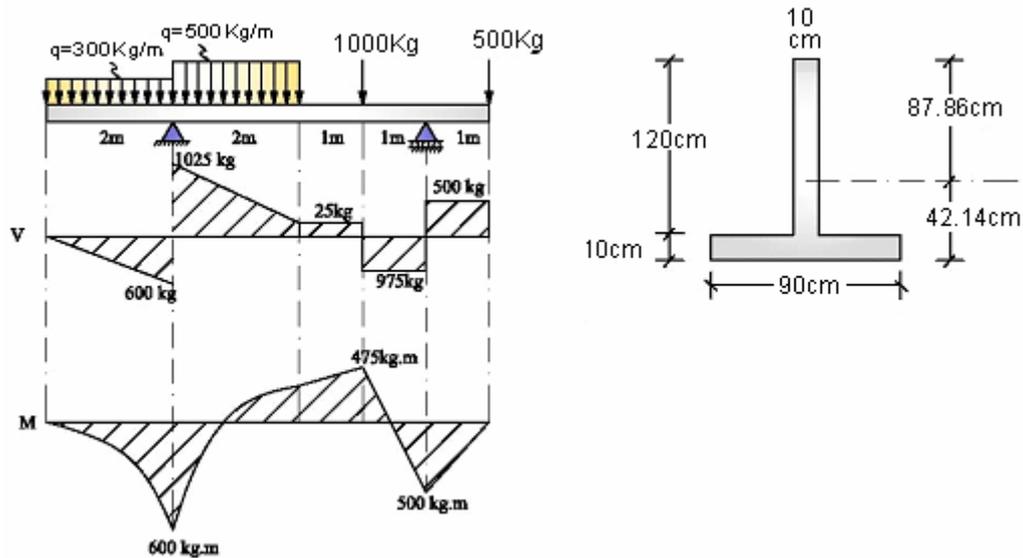
$$\sigma_{trac} = \frac{20000000 \text{ N} \cdot \text{cm} \cdot 6 \text{ cm}}{1152 \text{ cm}^4} = 1041.67 \text{ MPa} \Rightarrow \sigma_{max} \text{ En tracción}$$

$$\sigma_{comp} = \frac{20000000 \text{ Kg} \cdot \text{cm} \cdot 6 \text{ cm}}{1152 \text{ cm}^4} = 1041.67 \text{ MPa} \Rightarrow \sigma_{max} \text{ En compresión}$$

**PROBLEMA 6.7.**-Calcular el esfuerzo máximo a tracción y a compresión de la sección transversal del perfil T invertida de dimensiones dadas.



Solución



$$\bar{Y} = \frac{90(5) + 1200(70)}{90 + 1200} \Rightarrow \bar{Y} = 42.14 \text{ cm}$$

$$I_1 = \frac{90(10)^3}{12} + 900(42.14 - 5)^2 \Rightarrow I_1 = 1248941.64$$

$$I_2 = \frac{10(120)^3}{12} + 1200(70 - 42.14)^2 \Rightarrow I_2 = 2371915.52$$

$$I = I_1 + I_2 \Rightarrow I = 3620357.16 \text{ cm}^4$$

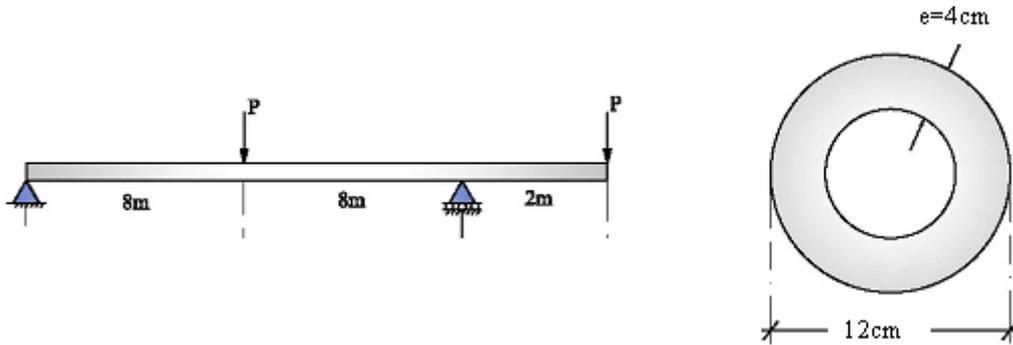
$$\sigma_{tracc.} = \frac{(60000)(87.86)}{3620357.16} \Rightarrow \sigma_{tracc.} = 1.456 \text{ kg/cm}^2 \dots\dots \text{Esfuerzo de tracción máxima}$$

$$\sigma_{comp.} = \frac{(60000)(42.14)}{3620357.16} \Rightarrow \sigma_{comp.} = 0.698 \text{ kg/cm}^2$$

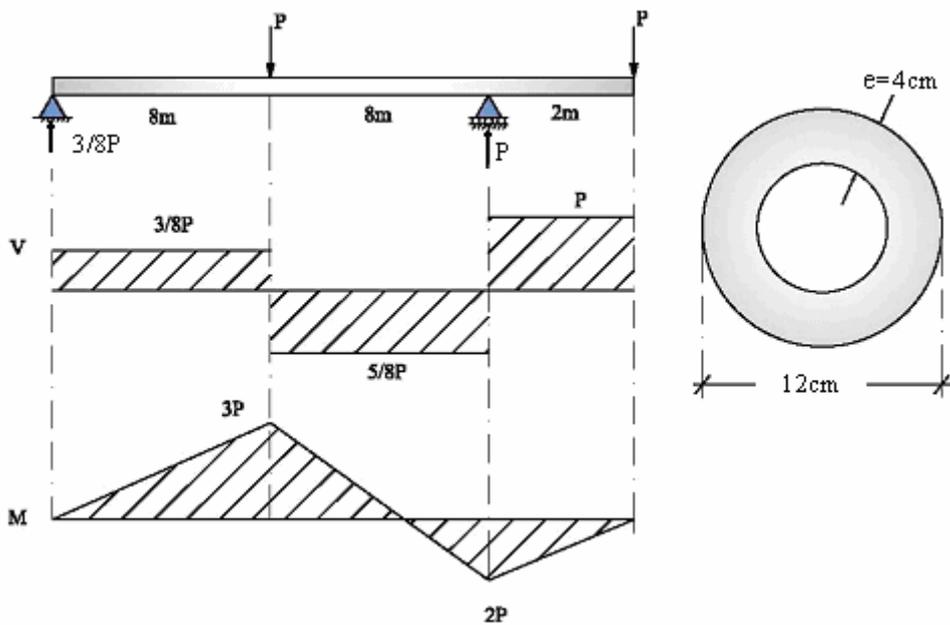
$$\sigma_{tracc.} = \frac{(47500)(42.14)}{3620357.16} \Rightarrow \sigma_{tracc.} = 0.553 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{comp.} = \frac{(47500)(87.86)}{3620357.16} \Rightarrow \sigma_{comp.} = 1.153 \text{ kg/cm}^2 \dots\dots \text{Esfuerzo de compresión máxima}$$

**PROBLEMA 6.8.**-Calcular la magnitud de la fuerza admisible P que actúa en la viga de la figura, para un esfuerzo de trabajo de  $1000\text{Kg/cm}^2$



Solución



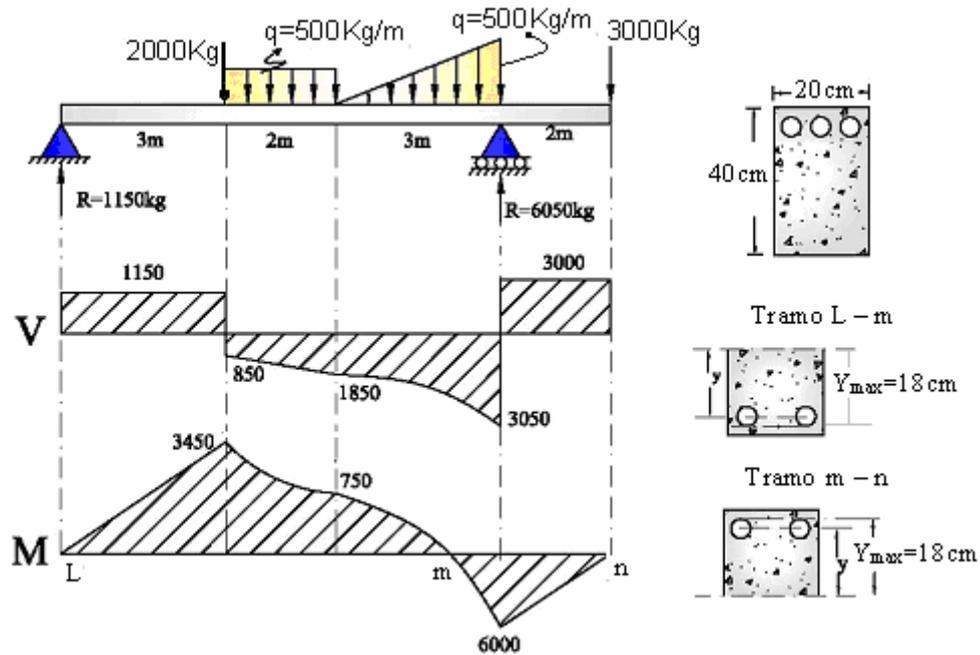
$$I = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{\pi (d-2e)^4}{64} \dots\dots\dots \text{Momento de inercia de una sección hueca}$$

$$I = \frac{\pi}{64} [12^4 - (12-8)^4] \Rightarrow I = 1005.31 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} * y_{\max}}{I} \leq \bar{\sigma} \Rightarrow \frac{(300P)(6)}{1005.31} \leq 1000$$

$$P \leq 558.51 \text{ kg} \Rightarrow P = 558.5 \text{ kg} \dots\dots\dots \text{Solución}$$

**PROBLEMA 6.9.**-Para la estructura mostrada, determinar el número de aceros longitudinales, diámetros y sus longitudes por tramos: Si  $\sigma_f=4200\text{Kg/cm}^2$ ,  $n=2$ . Para efectos de cálculo no considerar la tensión del hormigón.



$$I = \frac{\pi}{64} \phi^4 + A\bar{y}^2$$

$$\langle M \rangle = 1150x - 2000\langle x-3 \rangle - 250\langle x-3 \rangle^2 + 250\langle x-5 \rangle^2 - \frac{400}{9}\langle x-5 \rangle^3$$

$$\therefore 1150x - 2000(x-3) - 250(x-3)^2 + 250(x-5)^2 - \frac{400}{9}(x-5)^3 = 0$$

$$x = 5.40m$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} * y_{\max}}{NI} \leq \bar{\sigma}$$

Tramo L - m

$$\frac{(345000)(18)}{N \left[ \frac{\pi}{64} \phi^4 + \frac{\pi}{4} \phi^2 \left( 18 - \frac{\phi}{2} \right)^2 \right]} \leq 2100$$

$$\therefore N = 3$$

$$\phi = 1''$$

$$l_1 = 5.6m$$

Tramo m - n

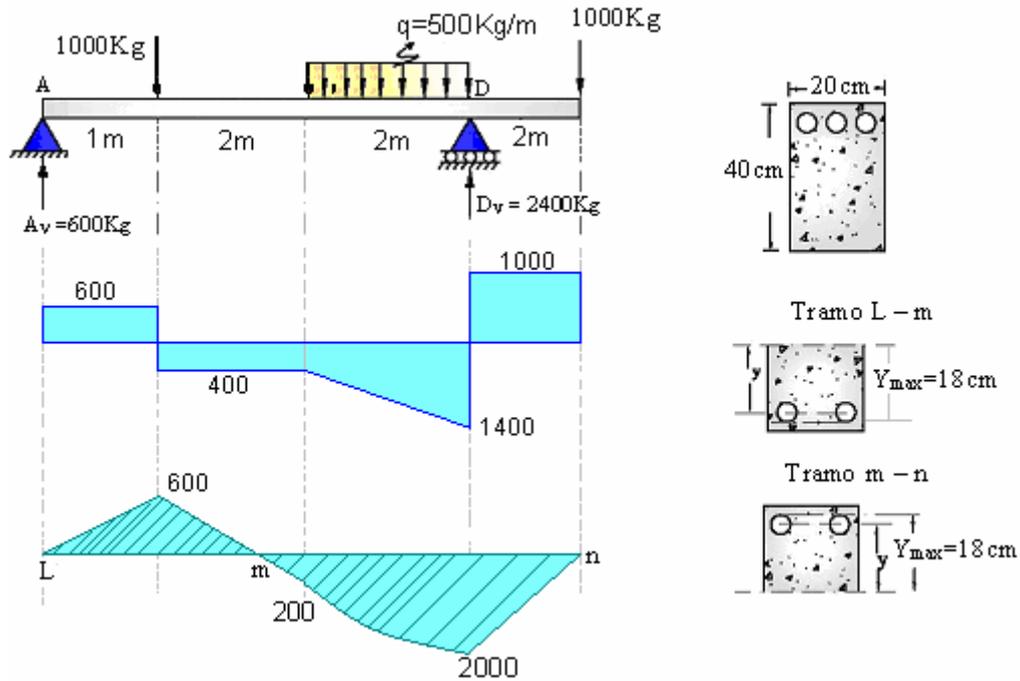
$$\frac{(600000)(18)}{N \left[ \frac{\pi}{64} \phi^4 + \frac{\pi}{4} \phi^2 \left( 18 - \frac{\phi}{2} \right)^2 \right]} \leq 2100$$

$$N = 3$$

$$\phi = 1\frac{1}{4}''$$

$$l_2 = 4.8m$$

**PROBLEMA 6.10.**-Para la estructura mostrada, determinar el número de aceros longitudinales, diámetros y sus longitudes por tramos: Si  $\sigma_f=4200\text{Kg/cm}^2$ ,  $n=2$ . Para efectos de cálculo no considerar la tensión del hormigón.



$$I = \frac{\pi}{64} \phi^4 + A\bar{y}^2$$

$$\langle M \rangle = 600x - 1000\langle x-1 \rangle - 250\langle x-3 \rangle^2 + 250\langle x-5 \rangle^2 + 2400\langle x-5 \rangle$$

$$\therefore 600x - 1000(x-1) = 0$$

$$x = 2.5\text{m}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} * y_{\max}}{NI} \leq \bar{\sigma}$$

Tramo L - m

Tramo m - n

$$\frac{(60000)(18)}{N \left[ \frac{\pi}{64} \phi^4 + \frac{\pi}{4} \phi^2 \left( 18 - \frac{\phi}{2} \right)^2 \right]} \leq 2100$$

$$\frac{(200000)(18)}{N \left[ \frac{\pi}{64} \phi^4 + \frac{\pi}{4} \phi^2 \left( 18 - \frac{\phi}{2} \right)^2 \right]} \leq 2100$$

$$\therefore N = 2$$

$$N = 3$$

$$\phi = \frac{1}{2}''$$

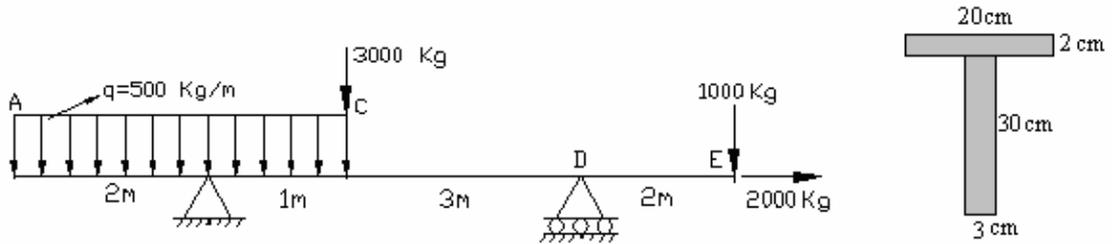
$$\phi = \frac{3}{4}''$$

$$l_1 = 2.7\text{m}$$

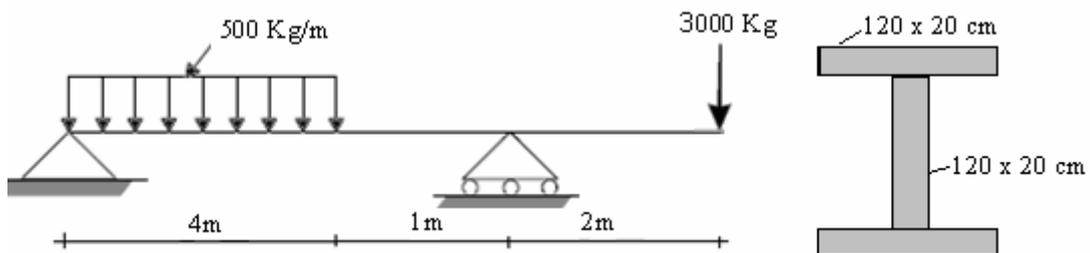
$$l_2 = 4.7\text{m}$$

**PROBLEMAS PROPUESTOS FLEXIÓN EN VIGAS**

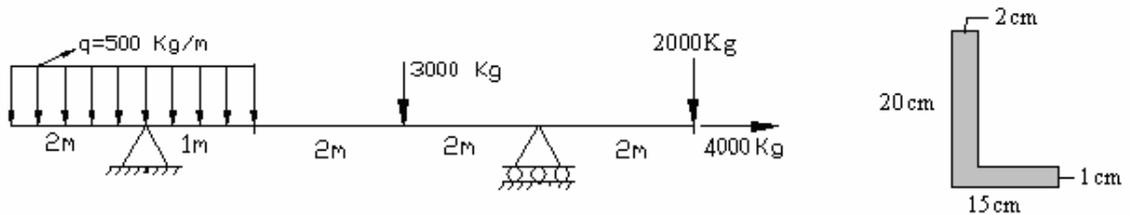
**6.1.-** Calcular los esfuerzos máximos de tracción y de compresión de la sección transversal del perfil T.



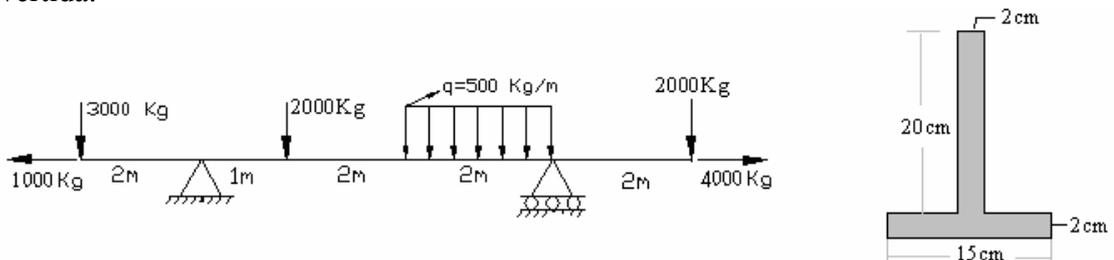
**6.2.-** Determinar esfuerzos Máximos de la sección transversal del perfil I de 120x20 cm.



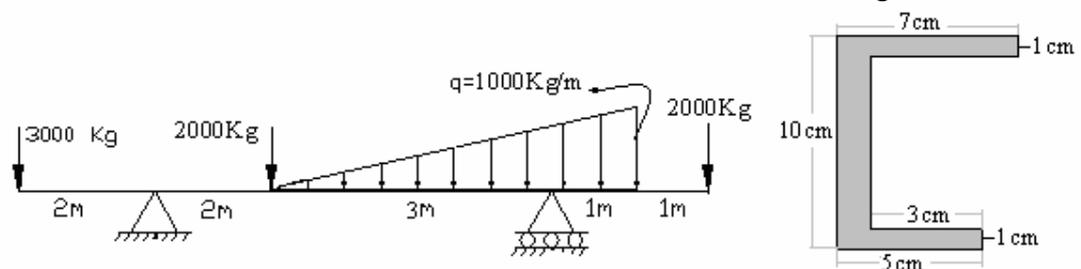
**6.3.-** Determinar los esfuerzos Máximos de la sección transversal del perfil L.



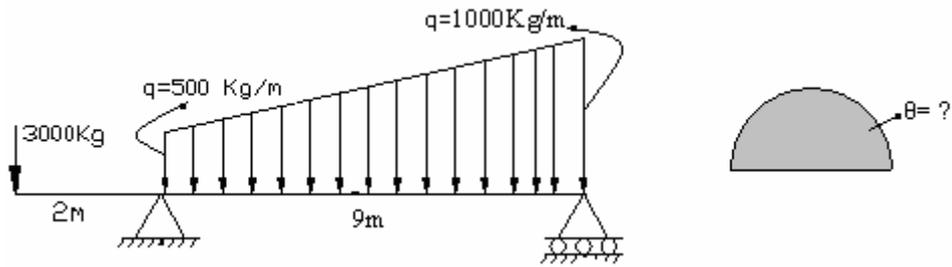
**6.4.-** Determinar los esfuerzos Máximos de la sección transversal del angular T invertida.



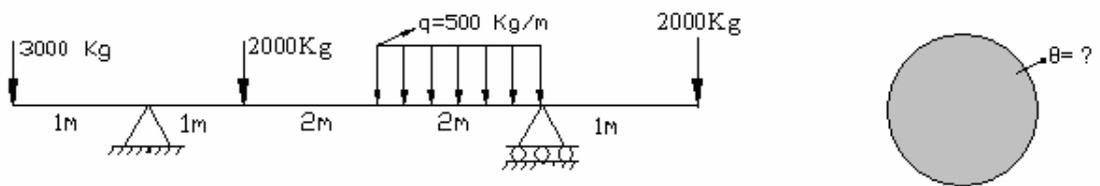
**6.5.-** Determinar los esfuerzos Máximos de la sección transversal del angular C.



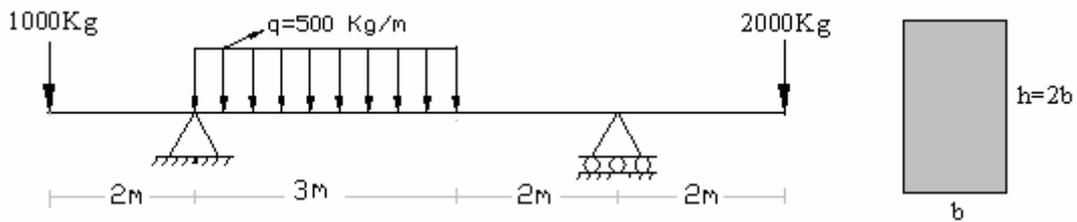
6.6.- Dimensionar la viga de sección transversal circular para  $\bar{\sigma}=2100 \text{ kg/cm}^2$ .



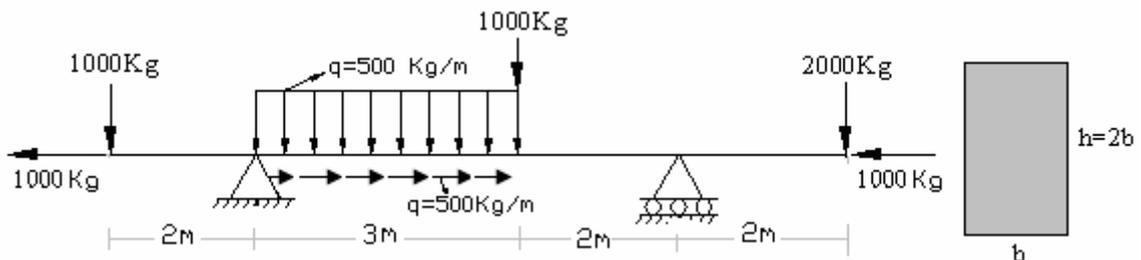
6.7.- Dimensionar la viga de sección transversal circular para  $\bar{\sigma}=2100 \text{ kg/cm}^2$ .



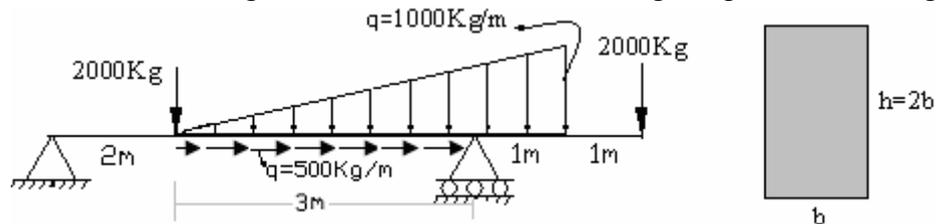
6.8.- Dimensionar la viga de sección transversal rectangular para  $\bar{\sigma}=1050 \text{ kg/cm}^2$ .



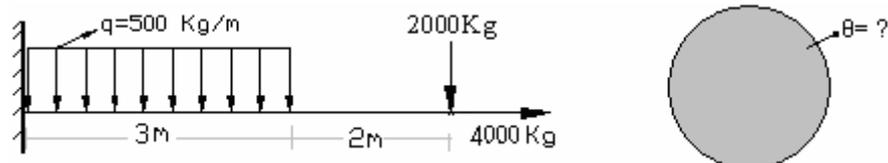
6.9.- Dimensionar la viga de sección transversal rectangular para  $\bar{\sigma}=2100 \text{ kg/cm}^2$ .



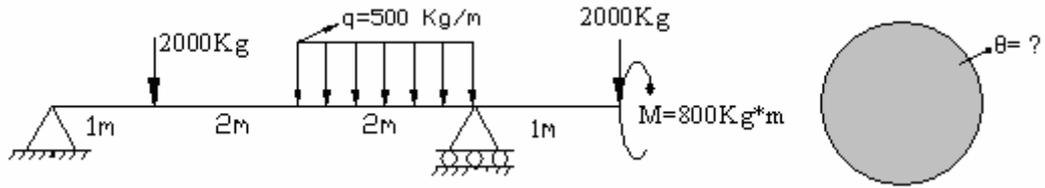
6.10.- Dimensionar la viga de sección transversal rectangular para  $\bar{\sigma}=1050 \text{ kg/cm}^2$ .



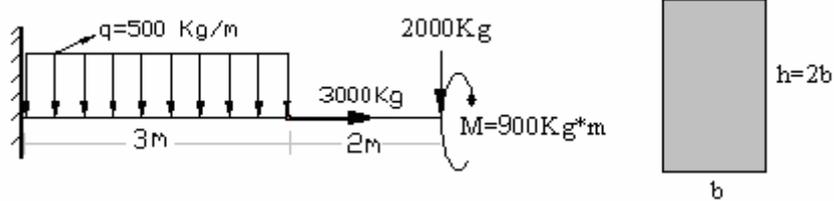
6.11.- Dimensionar la viga de sección transversal circular para  $\bar{\sigma}=2100 \text{ kg/cm}^2$ .



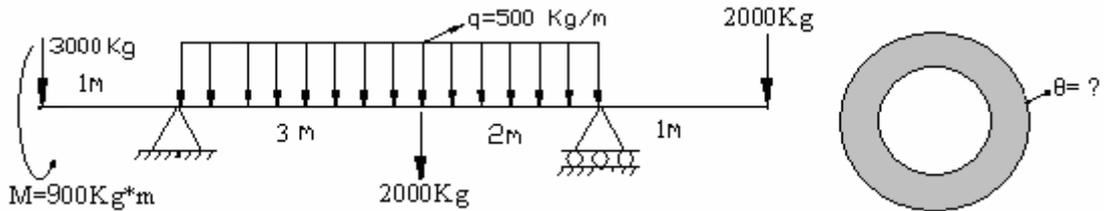
6.12.-Dimensionar la sección transversal de la viga,  $\sigma_f = 4200 \text{Kg/cm}^2$ ,  $n = 2$ .



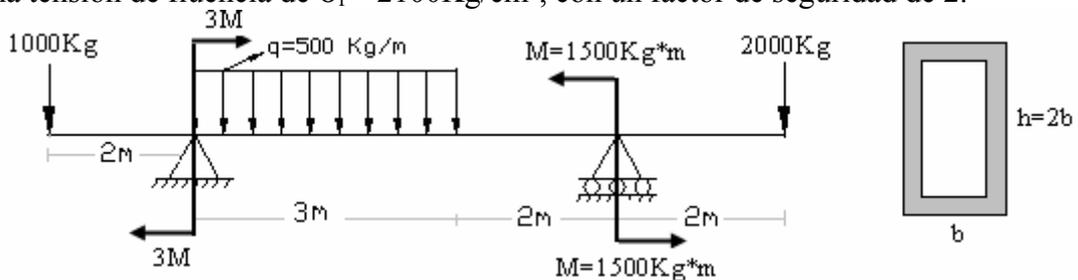
6.13.-Dimensionar la viga de sección transversal rectangular,  $\sigma_f = 2100 \text{Kg/cm}^2$ ,  $n = 3$ .



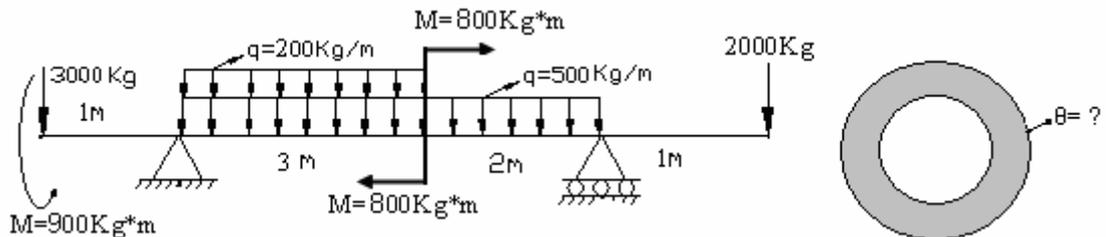
6.14.-Dimensionar la viga de sección transversal circular hueca de espesor de 30mm,  $\bar{\sigma} = 2100 \text{kg/cm}^2$ .



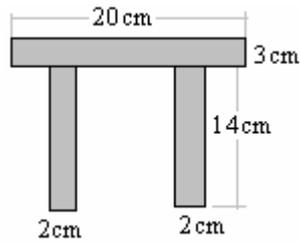
6.15.-Dimensionar la viga de sección transversal rectangular con espesor se 40mm, para una tensión de fluencia de  $\sigma_f = 2100 \text{Kg/cm}^2$ , con un factor de seguridad de 2.



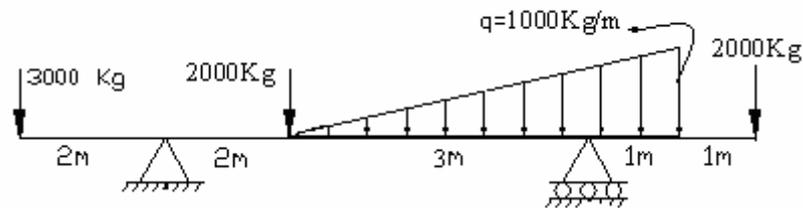
6.16.-Dimensionar la viga de sección circular hueca con espesor se 40mm, para una tensión de fluencia de  $\sigma_f = 4200 \text{Kg/cm}^2$ , con un factor de seguridad de 2.



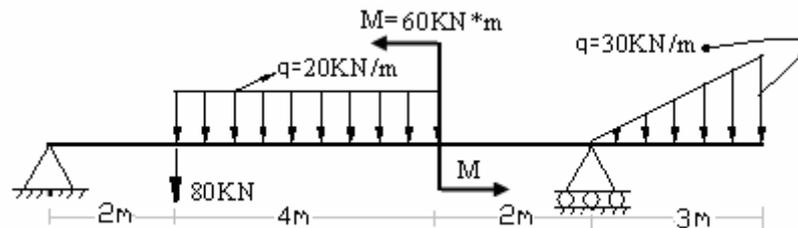
6.17.- Determinar el modulo resistente (S) de la sección transversal de la viga mostrada.



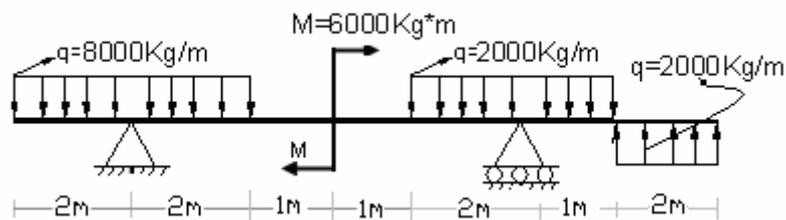
6.18.- Determinar el modulo resistente (S) de la sección transversal de la viga mostrada. Para una tensión de fluencia de  $\sigma_f = 4200 \text{ Kg/cm}^2$ , con un factor de seguridad de 2.



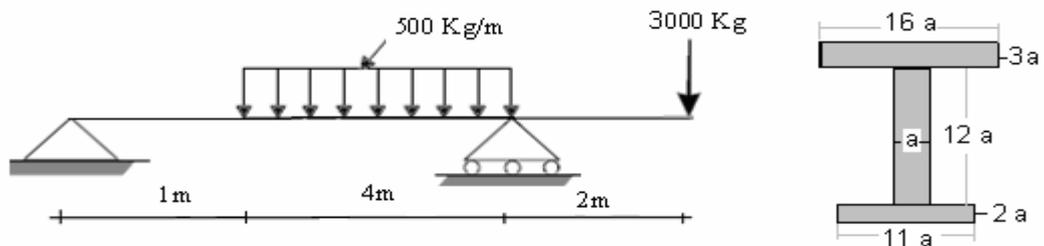
6.19.- Determinar el modulo resistente (S) de la sección transversal de la viga mostrada. Para una tensión de fluencia de  $\sigma_f = 200 \text{ GPa}$ , con un factor de seguridad de 2.



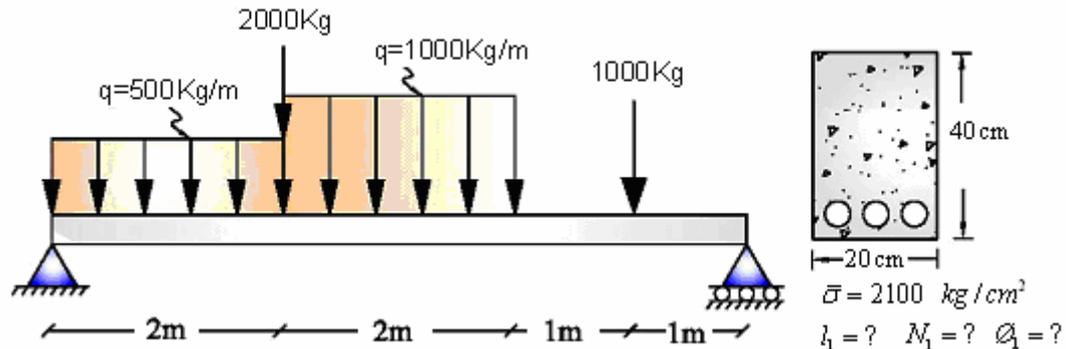
6.20.- Determinar el modulo resistente (S) de la sección transversal de la viga mostrada. Para una tensión de fluencia de  $\sigma_f = 4200 \text{ Kg/cm}^2$ , con un factor de seguridad de 3.



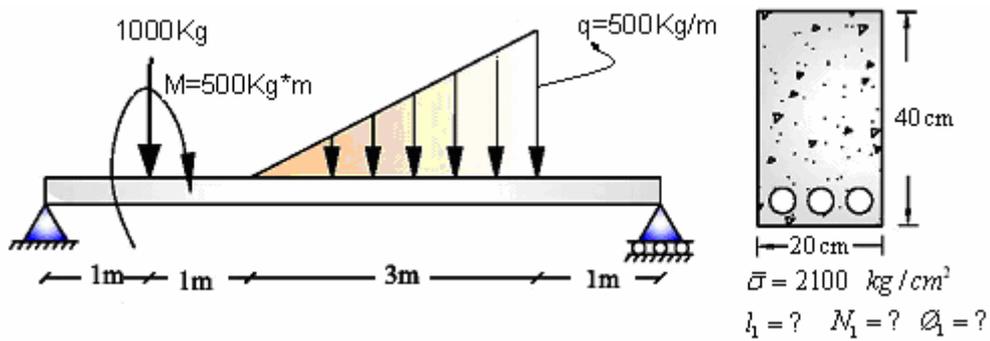
6.21.- Calcular las dimensiones para la sección transversal de la viga mostrada en la figura si:  $\sigma_{\text{trac.}} = 600 \text{ Kg/cm}^2$ ,  $\sigma_{\text{comp.}} = 1400 \text{ Kg/cm}^2$ .



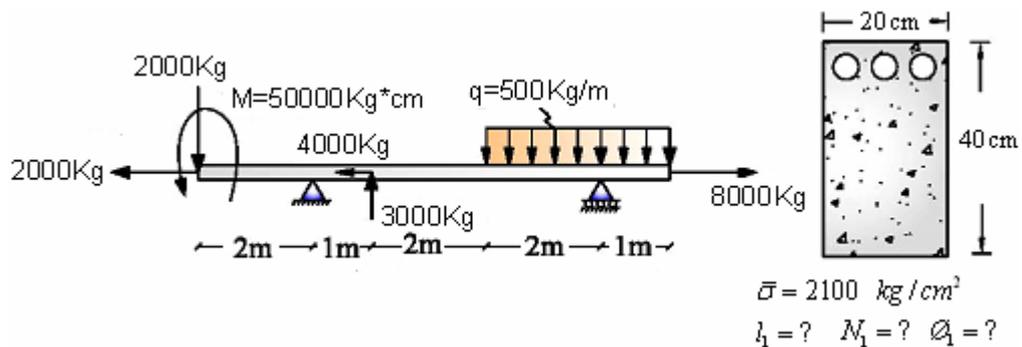
6.22.- Determinar el número de las barras de acero longitudinales, diámetros y sus longitudes por tramos. Para efectos de cálculo no considerar la tensión del hormigón.



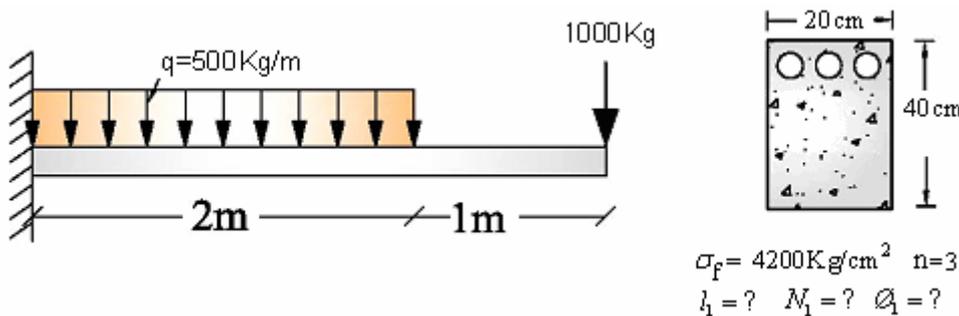
6.23.- Determinar el número de las barras de acero longitudinales, diámetros y sus longitudes por tramos. Para efectos de cálculo no considerar la tensión del hormigón.



6.24.- Determinar el número de las barras de acero longitudinales, diámetros y sus longitudes por tramos. Para efectos de cálculo no considerar la tensión del hormigón.



6.25.- Determinar el número de las barras de acero longitudinales, diámetros y sus longitudes por tramos. Para efectos de cálculo no considerar la tensión del hormigón.



---

## CAPITULO VII

# TENSIÓN CORTANTE EN VIGAS

---

### 7.1.- INTRODUCCIÓN

Este capítulo está dedicado al estudio de los cortantes en vigas causados por fuerzas cortantes transversales. Es considerado también el problema relacionado con unir partes longitudinales separadas de una viga por medio de tornillos, pegamento o soldadura. El capítulo se limita al análisis elástico, que es el que más se emplea para la resolución del tipo de problemas considerados.

### 7.2.- HIPÓTESIS

- La sección transversal tiene que ser uniforme.
- El material tendrá que ser homogéneo y obedece a la ley de Hooke.
- Las cargas que actúan sobre la viga, tendrán que ser perpendiculares sobre la viga.
- El módulo de elasticidad a la tracción es aproximadamente igual al módulo de elasticidad al de compresión.
- El esfuerzo cortante de trabajo tendrá que ser menor al esfuerzo cortante admisible.

### 7.3.- OBJETIVOS

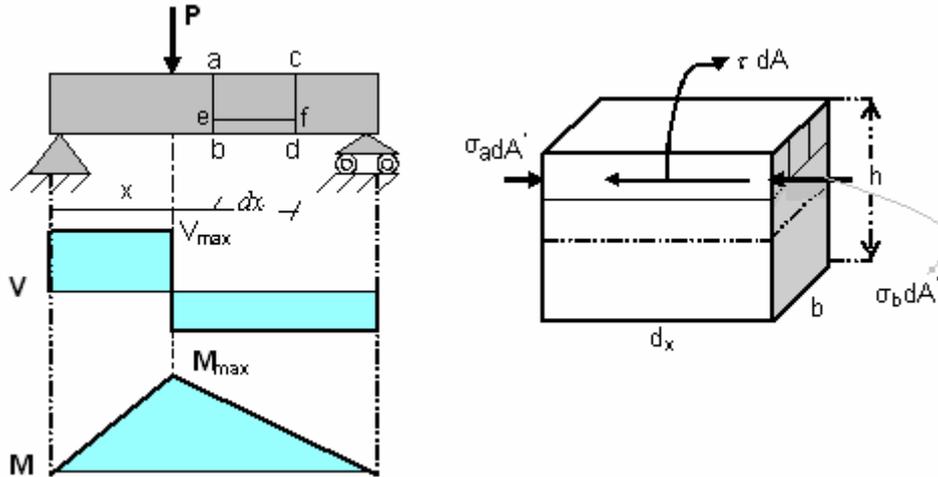
- Establecer la distribución de tensiones cortantes y su comportamiento en la viga.
- Hallar la ecuación que nos permita encontrar su valor en cualquier punto de la viga.
- Establecer los criterios de dimensionamiento.
- El objetivo principal es como encontrar la ecuación del esfuerzo cortante debido

a flexión que está dada de la forma siguiente :  $\tau = \frac{V * A'Y'}{I * b}$

**7.4.- DEDUCCIÓN DE ECUACIÓN DE ESFUERZO CORTANTE A FLEXIÓN**

Cuando se flexa una viga debido a la presencia de una carga, la experiencia muestra que existe un desplazamiento entre vías en la que produce limites cortantes a lo largo de la viga.

Cuya deducción se realiza a base de las hipótesis mencionadas anteriormente, para el cual tendremos una viga de longitud “L”, tal como se observa en la siguiente figura.



$\sigma_a dA' = \sigma_a dA' + \tau dA$  Aplicando las integrales ambos miembros tenemos.

$$\int_y^{h/2} \sigma_a dA' = \int_y^{h/2} \sigma_c dA' + \int_y^{h/2} \tau dA' \quad \text{Recordando que } \sigma_a = \frac{M_a * Y}{I}$$

$$\int_y^{h/2} \frac{M_a}{I} dA' = \int_y^{h/2} \frac{M_c}{I} dA' + \int_y^{h/2} \tau b dx \quad \Rightarrow \text{Operando tenemos}$$

$$\int_y^{h/2} \frac{M_a}{I} dA' - \int_y^{h/2} \frac{M_c}{I} dA' = \tau b dx \quad \Rightarrow \quad \frac{(M_a - M_c)}{I} \int_y^{h/2} y dA' = \tau b dx$$

$$\text{Como } M_a - M_c = dM \Rightarrow \text{tenemos } \frac{dM}{I * b * dx} \int_y^{h/2} y dA' = \tau$$

$$\text{Recordando que } \int_y^{h/2} y dA' = A' * y' \text{ y } \frac{dM}{dx} = V \text{ tenemos: } \tau = \frac{V * A' * Y'}{I * b}$$

$$\text{Para su dimensionamiento tenemos: } \tau = \frac{V_{\max} * A' * Y'}{I * b} \leq \bar{\tau} \dots\dots\dots(7.1)$$

Donde:

$$\tau = \text{Tensión cortante debido a flexión } \left( \frac{Kg}{cm^2} \right)$$

$V_{\max}$  = Es la vertical máxima que sale de la grafica de esfuerzos (Kg).

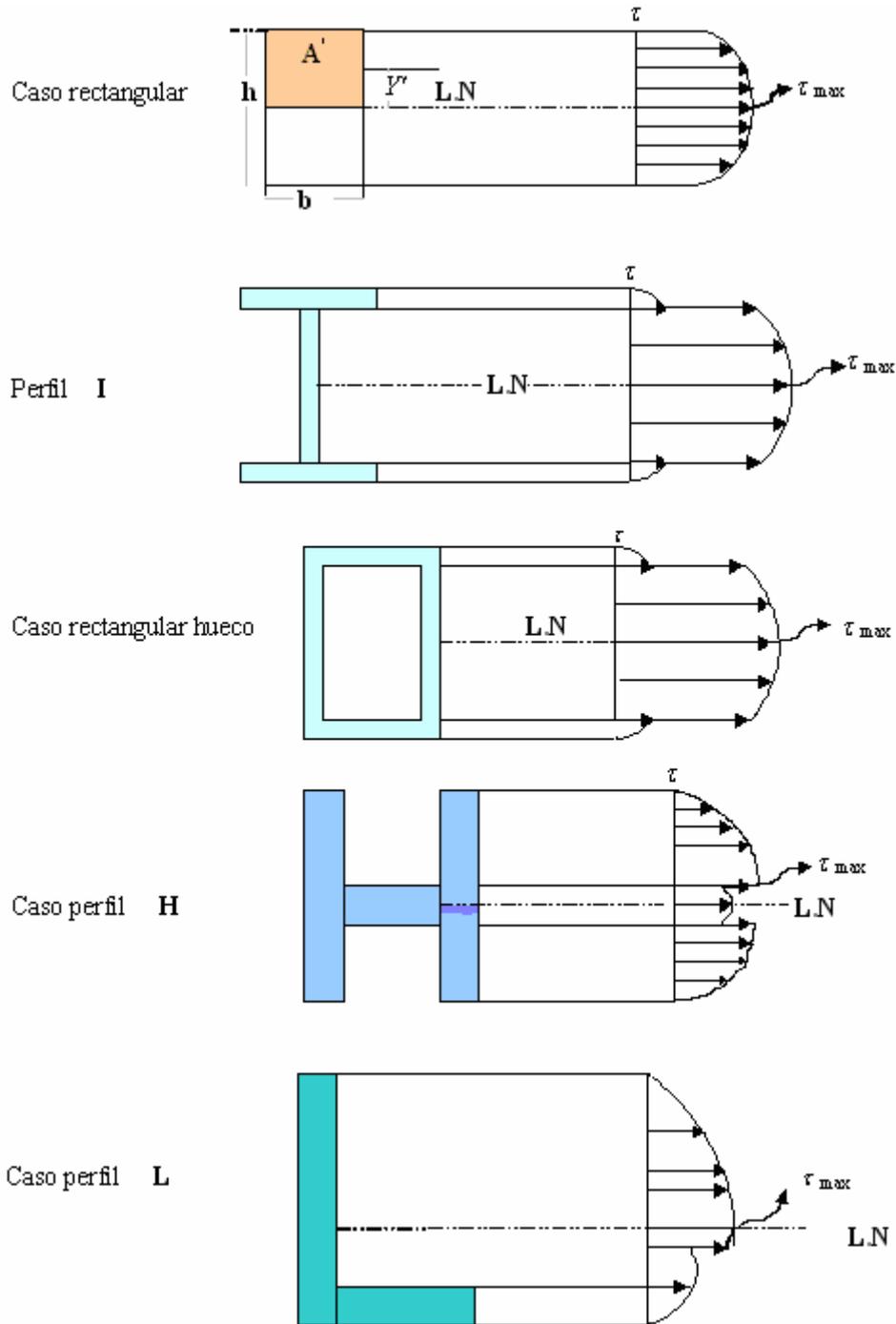
I = Es el momento de inercia con respecto al eje (cm<sup>4</sup>).

A' = Área a partir del punto de cálculo de esfuerzo cortante (cm<sup>2</sup>).

Y' = Distancia desde la línea neutra hasta el centro de A' (cm).

b = Base que varia de acuerdo al punto donde se quiere calcular (cm).

7.5.- GRÁFICAS DE LOS ESFUERZOS CORTANTES DE PERFILES

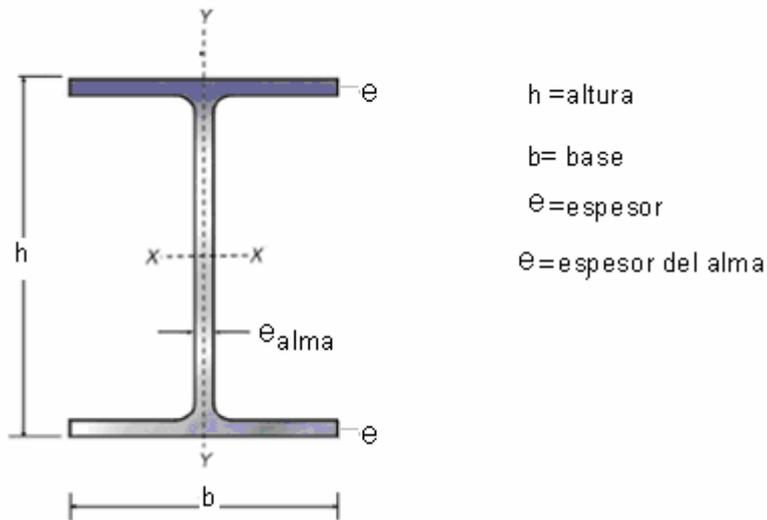


**7.6.- PERFILES (SECCIONES) DE ACERO**

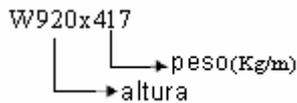
Los miembros estructurales mayormente utilizados son aquellos que tienen grandes momentos de inercia con relación a sus áreas.

**7.6.1.- PERFILES W**

Los perfiles I tienen esta propiedad, generalmente los perfiles de acero se designan por la forma de sus secciones transversales, estas vigas son de patín ancho (denominadas vigas W).

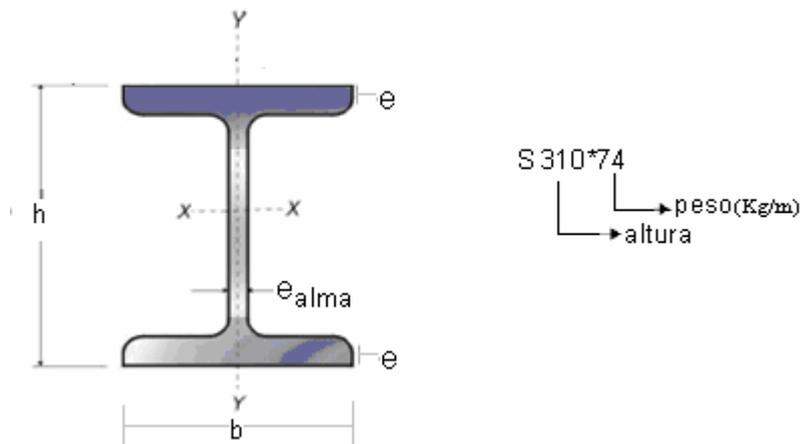


La simbología que es utilizada es:



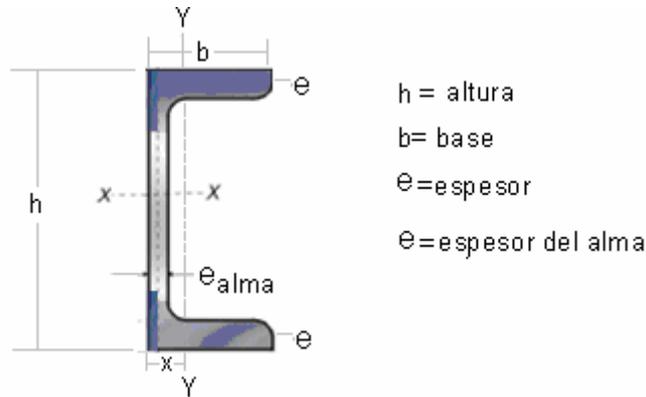
**7.6.2.- PERFILES S**

Es muy utilizado en diseño de puentes ya que estos facilitan el escurrimiento del agua o la nieve que esta en contacto con el perfil esto debido a la pendiente que este presenta.

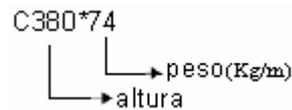


**7.6.3.- PERFILES C**

Los perfiles C, pueden usarse en la construcción de armaduras planas conectadas a placas de nudo con pernos, remaches o soldadura. Con (x, y) ejes del centro de gravedad.

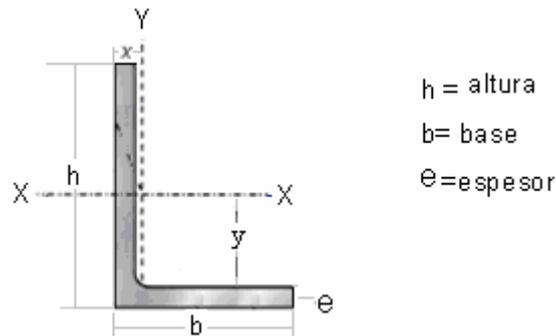


La simbología que es utilizada es:

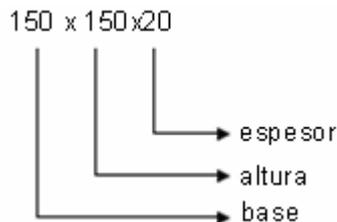


**7.6.4.- PERFILES L.**

Los perfiles L son los más comúnmente usados, para minimizar las cargas de viento o por razones estéticas. Con (x, y) ejes del centro de gravedad.



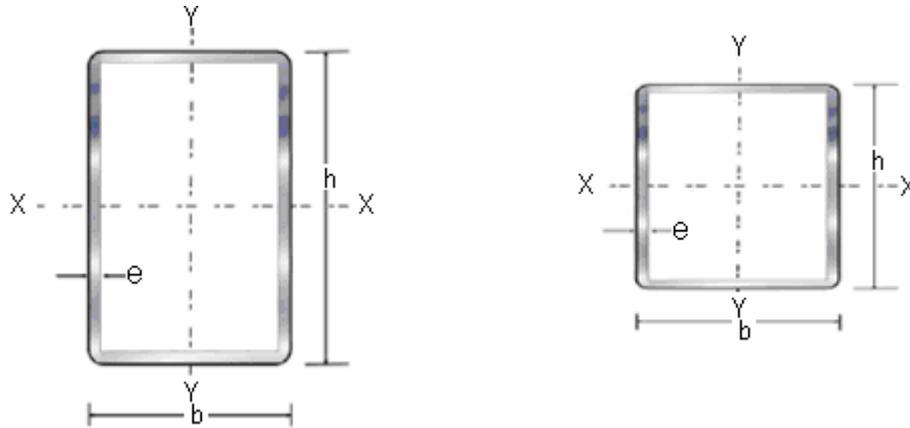
La simbología que es utilizada es:



---

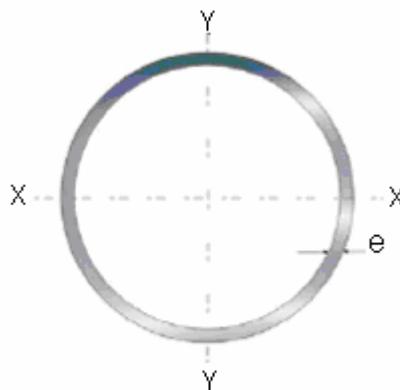
### 7.6.5.- PERFILES RECTANGULAR HSS

Los perfiles Rectangular y Cuadrado HSS son perfiles para uso expuesto, para minimizar las cargas de viento o por razones estéticas. Con (x, y) ejes del centro de gravedad.



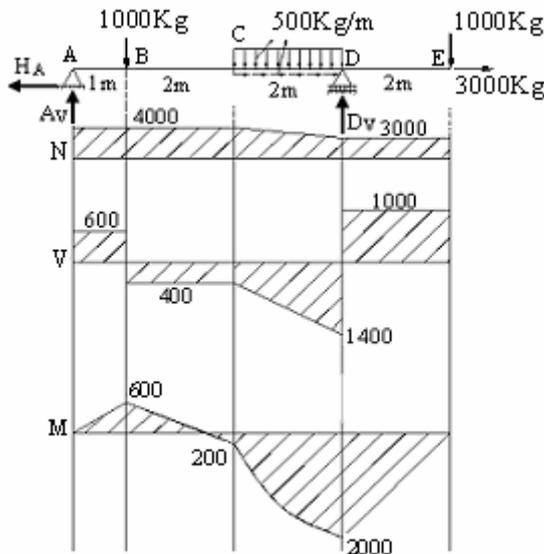
### 7.6.6.- PERFIL CIRCULAR HSS

Los perfiles Circular HSS o sección Tubular al igual que los perfiles Rectangular y Cuadrado HSS son utilizados para un uso expuesto. Con (x, y) ejes del centro de gravedad.



**PROBLEMAS RESUELTOS DE CORTANTE A FLEXIÓN EN VIGAS**

**PROBLEMA 7.1.-** Calcular las dimensiones necesarias de las secciones transversales de las vigas rectangular de  $h=2b$ , para una tensión admisible de  $2100\text{Kg/cm}^2$  y la tensión cortante máxima de las mismas.



$$\sum F_H=0 \rightarrow -H_A + 500 \cdot 2 + 3000=0 \rightarrow H_A=4000\text{Kg}$$

$$\sum M_A=0$$

$$1000 + 1000 \cdot 4 - 5 \cdot D_V + 1000 \cdot 7=0$$

$$D_V = 2400\text{Kg}$$

$$\sum F_V=0$$

$$A_V + D_V - 1000 - 500 \cdot 2 - 1000=0$$

$$A_V = 600\text{Kg}$$

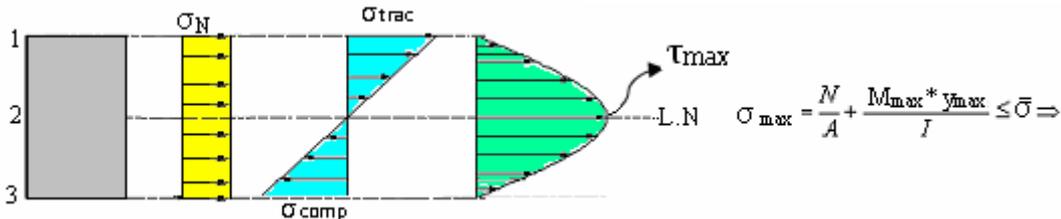
Cálculo de Momentos por Áreas:

$$M_A=0 \quad M_B=600\text{Kg}\cdot\text{m}$$

$$M_C=600 - 400 \cdot 2 \rightarrow M_C= -200\text{Kg}\cdot\text{m}$$

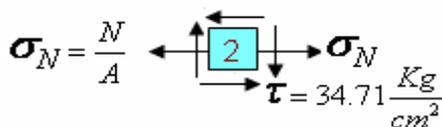
$$M_D= -200 - 1800 \rightarrow M_D= -2000\text{Kg}\cdot\text{m}$$

$$M_E= -2000 + 1000 \cdot 2 \rightarrow M_E=0$$



$$\frac{3000}{b \cdot h} + \frac{200000 \cdot \frac{h}{2}}{\frac{b \cdot h^3}{12}} \leq 2100 \Rightarrow b \geq 5.2276\text{cm} \Rightarrow b = 5.5\text{cm} \text{ y } h=11\text{cm}$$

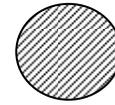
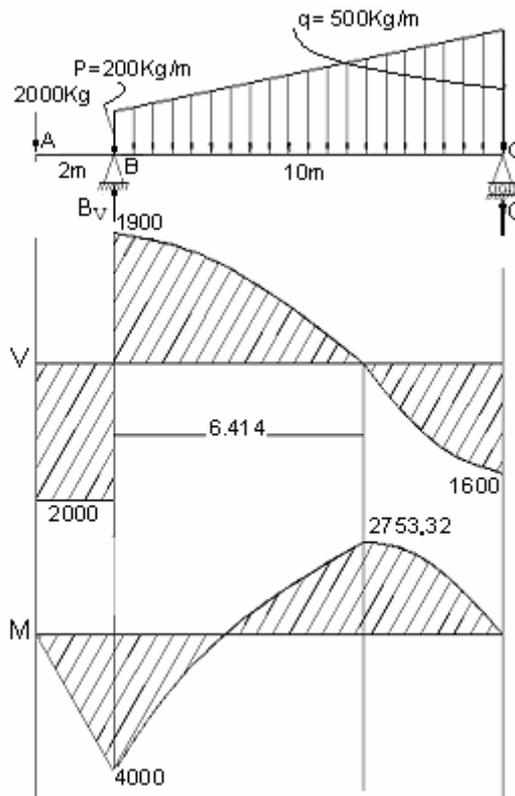
$$\tau = \frac{V \cdot A' \cdot \bar{Y}'}{I \cdot b} \Rightarrow \tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{A} \Rightarrow \tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{1400}{5.5 \cdot 11} \Rightarrow \tau = 34.71 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$



$$\tau_{Max} = \sqrt{\left(\frac{N}{2A}\right)^2 + \tau^2} \Rightarrow \tau_{Max} = \sqrt{\left(\frac{3000}{2 \cdot 5.5 \cdot 11}\right)^2 + 34.71^2} \Rightarrow$$

$$\tau_{Max} = 42.66 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} \dots \text{Solucion de tensión cortante máxima}$$

**PROBLEMA 7.2.-** Calcular la dimensión necesaria de la sección transversales de la viga y la tensión cortante máxima de la misma si  $\bar{\sigma} = 2100 \frac{Kg}{cm^2}$ .



$$\Sigma F_H = 0 \rightarrow H = 0$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$- 2000 \cdot 2 + 2000 \cdot 5 + 1500 \cdot \frac{20}{3} - 10 \cdot C_V = 0$$

$$C_V = 1600 \text{Kg}$$

$$\Sigma F_V = 0$$

$$B_V + C_V - 2000 - 1500 = 0$$

$$B_V = 3900 \text{Kg}$$

Cálculo de Momentos por ecuación singular.

$$M = - 2000X + 3900(X - 2) - 100(X - 2)^2 - 5(X - 2)^3$$

Verificación de la ecuación de momento singular.

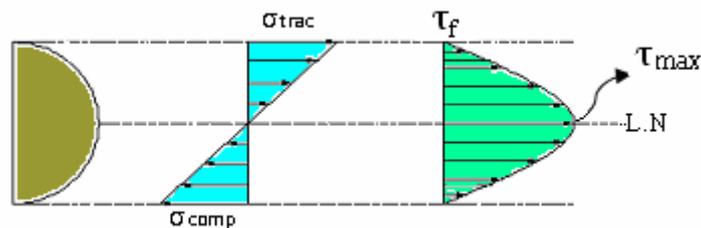
$$\text{Para } X=12\text{m} \rightarrow M=0$$

$$M = - 2000 \cdot 12 + 3900(10) - 100(10)^2 - 5(10)^3 = 0$$

$$\frac{dM}{dX} = V \Rightarrow -2000 + 3900 - 200(X - 2) - 15(X - 2)^2 = 0 \Rightarrow X = 8.414\text{m}$$

Para:  $X=8.414\text{m}$

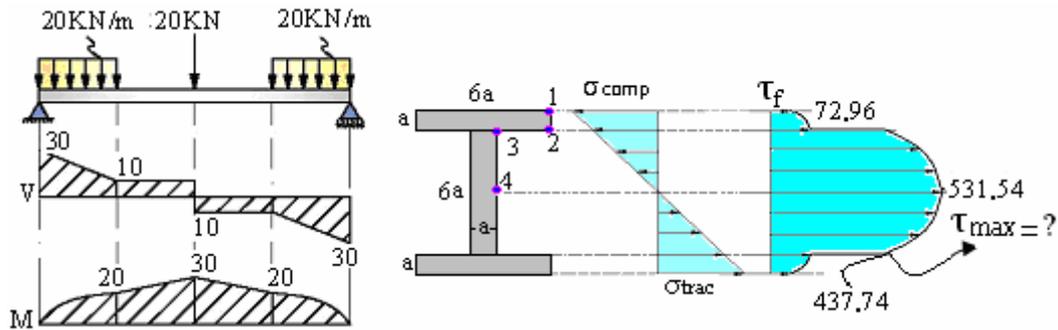
$$M = -2000 \cdot 8.414 + 3900 \cdot 6.414 - 100 \cdot 6.414^2 - 5 \cdot 6.414^3 = 2753.32$$



$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_{\max} \cdot y_{\max}}{I} \leq \bar{\sigma} \Rightarrow \frac{400000 \cdot \frac{\phi}{2}}{\frac{\pi \cdot \phi^4}{64}} \leq 2100 \Rightarrow \phi \geq 12.47 \Rightarrow \phi = 13\text{cm}$$

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{V_{\max}}{A} \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot \frac{1900}{\pi \cdot 13^2} \Rightarrow \tau_{\max} = 19.08 \frac{Kg}{cm^2}$$

**PROBLEMA 7.3.-** Calcular la dimensión de la sección transversal y dibujar la distribución de las tensiones cortantes de la viga mostrada en la figura, de modo que no sobrepase los siguientes valores admisibles:  $\bar{\sigma} = 150MPa$  ,  $\bar{\tau} = 75MPa$



$$I = \frac{(6a)(8a)^3}{12} - \frac{(2)(2.5)(6a)^3}{12} \Rightarrow I = 166a^4$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} * y_{\max}}{I} \leq \bar{\sigma} = \frac{30000 * 4a}{166a^4} \leq 150 * 10^6 \Rightarrow a \geq 1.689 * 10^{-2} \Rightarrow a = 1.7 \text{ cm}$$

Cálculo de esfuerzos cortantes

$$I = 166(1.7)^4 \Rightarrow I = 1386.45 \text{ cm}^4$$

$$\tau_1 = \frac{V * \bar{A} * \bar{y}}{I * b} \Rightarrow \tau_1 = 0$$

$$\tau_2 = \frac{V * \bar{A} * \bar{y}}{I * b} \Rightarrow \tau_2 = \frac{10000 * 6 * 1.7^2 * 5.95}{1386.45 * 10.2} \Rightarrow \tau_2 = 72.96 \text{ N/cm}^2$$

$$\tau_3 = \frac{10000 * 6 * 1.7^2 * 5.95}{1386.45 * 1.7} \Rightarrow \tau_3 = 437.74 \text{ N/cm}^2$$

$$\tau_4 = \frac{10000 * 25.5}{166 * 1.7^2} \Rightarrow \tau_4 = 531.54 \text{ N/cm}^2$$

$$\sigma_x = \frac{M_{\max} * y_{\max}}{I} \Rightarrow y_{\max} = 3a$$

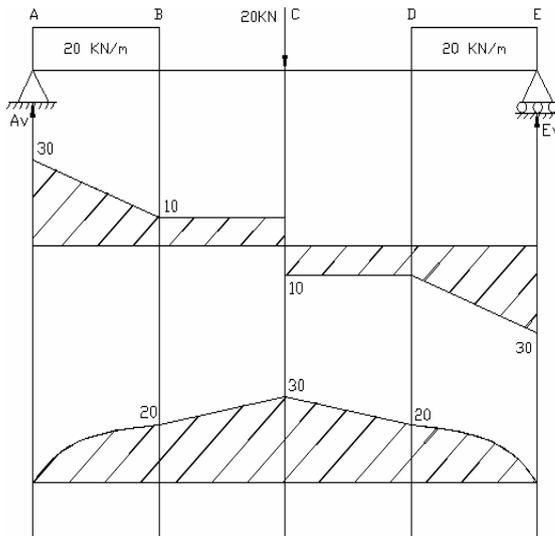
$$\sigma_x = \frac{30000 * 100 * 3 * 1.7}{1386.45} \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_x = 11035.38 \text{ N/cm}^2$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{11035.38}{2}\right)^2 + (437.74)^2} \Rightarrow \tau_{\max} = 5535.026 \text{ N/cm}^2 \leq 75 \text{ MPa} \Rightarrow$$

$$55.35 \text{ MPa} \leq 75 \text{ MPa}$$

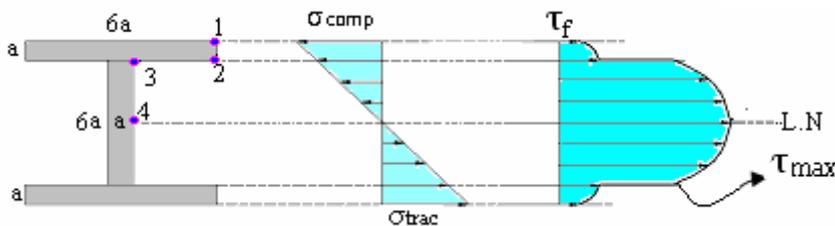
**PROBLEMA 7.4.-** Calcular las dimensiones necesarias de las secciones transversales del perfil “I” y la cortante máxima de las mismas. Para  $\bar{\sigma} = 150MPa$



$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0 \\ -20 \cdot 0.5 + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 3.5 - 4 \cdot E_V &= 0 \\ E_V &= 30 \text{ kN} \\ \sum F_V &= 0 \\ A_V + E_V - 20 - 20 - 20 &= 0 \\ A_V &= 30 \text{ kN} \end{aligned}$$

Cálculo de Momentos por áreas.

$$\begin{aligned} M_A &= 0 & M_B &= 20 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M_C &= 20 + 10 \rightarrow M_C = 30 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M_D &= 30 - 10 \rightarrow M_D = 20 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M_E &= 20 - 20 \rightarrow M_D = 0 \end{aligned}$$



$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{A} = \frac{6a^2 \cdot \frac{a}{2} + 6a^2 \cdot 4a + 6a^2 \cdot 7.5a}{6a^2 + 6a^2 + 6a^2} \Rightarrow \bar{y} = 4a \quad I = 166a^4$$

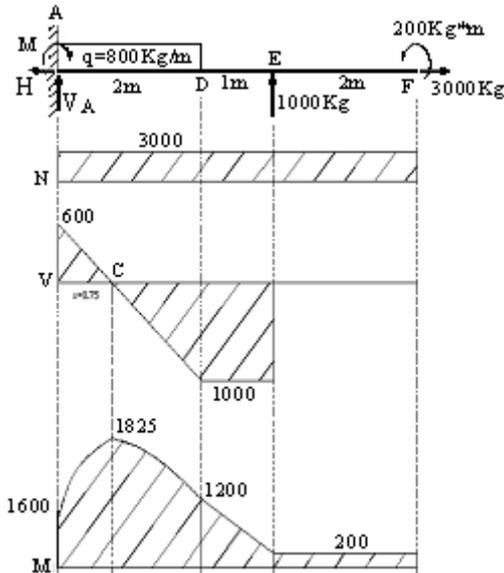
$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_{\max} \cdot y_{\max}}{I} \leq \bar{\sigma} \Rightarrow \frac{30000 \cdot 4a}{166a^4} \leq 150 \cdot 10^6 \Rightarrow a \geq 1.68 \Rightarrow a = 1.7 \text{ cm}$$

$$\text{Para } y=3a \Rightarrow \sigma_x = \frac{30000 \cdot 100 \cdot 3 \cdot 1.7}{166 \cdot 1.7^4} \Rightarrow \sigma_x = 11035.39 \text{ N/cm}^2$$

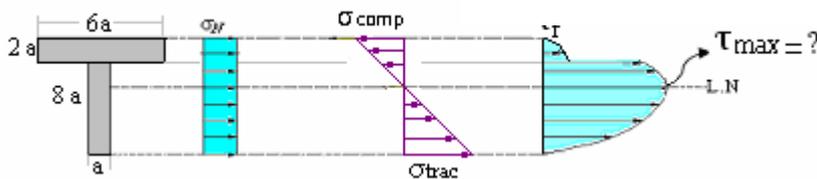
$$\tau = \frac{V \cdot A' \cdot \bar{y}'}{I \cdot b} \Rightarrow \tau = \frac{10000 \cdot 6 \cdot 1.7^2 \cdot 3.5 \cdot 1.7}{166 \cdot 1.7^4 \cdot 1.7} \Rightarrow \tau = 437.74 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} \Rightarrow \tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{11035.39}{2}\right)^2 + 437.74^2} \Rightarrow \tau_{\max} = 5535.032 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

**PROBLEMA 7.5.-** Calcular las dimensiones necesarias de las secciones transversales del perfil “T” y la cortante en la línea neutra. Si  $\bar{\sigma} = 1400 \frac{Kg}{cm^2}$



$$\begin{aligned} \sum F_H = 0 &\rightarrow -H + 3000 = 0 \rightarrow H = 3000 \text{Kg} \\ \sum M_A = 0 & \\ M + 800 \cdot 2 - 1000 \cdot 3 - 200 &= 0 \rightarrow M = 1600 \text{Kg} \cdot \text{m} \\ \sum F_V = 0 & \\ V_A - 1600 + 1000 &= 0 \rightarrow V_A = 600 \text{Kg} \\ \text{Cálculo de Momentos por Áreas:} & \\ M_A &= 1600 \\ M_C &= 1600 + 300 \cdot 0.75 \rightarrow M_C = 1825 \text{Kg} \cdot \text{m} \\ M_D &= 1825 - 500 \cdot 1.25 \rightarrow M_D = 1200 \text{Kg} \cdot \text{m} \\ M_E &= 1200 - 1000 \cdot 1 \rightarrow M_E = 200 \text{Kg} \cdot \text{m} \\ M_F &= 200 + 0 \rightarrow M_F = 200 \text{Kg} \cdot \text{m} \\ M'_F &= 200 - 200 \rightarrow M'_F = 0 \end{aligned}$$



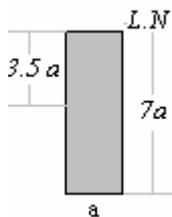
$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{A} = \frac{8a^2 \cdot 4a + 12a^2 \cdot 9a}{8a^2 + 12a^2} \Rightarrow \bar{y} = 7a$$

$$I = \frac{a \cdot (8a)^3}{12} + 8a^2 \cdot (7a - 4a)^2 + \frac{6a \cdot (2a)^3}{12} + 12a \cdot (9a - 7a)^2 \Rightarrow I = 166.67a^4$$

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{\sigma_{\max} \cdot y_{\max}}{I} \leq \bar{\sigma}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{\sigma_{\max} \cdot y_{\max}}{I} \leq \bar{\sigma} \Rightarrow \frac{3000}{20a^2} + \frac{182500 \cdot 7a}{166.67a^4} \leq 1400 \Rightarrow$$

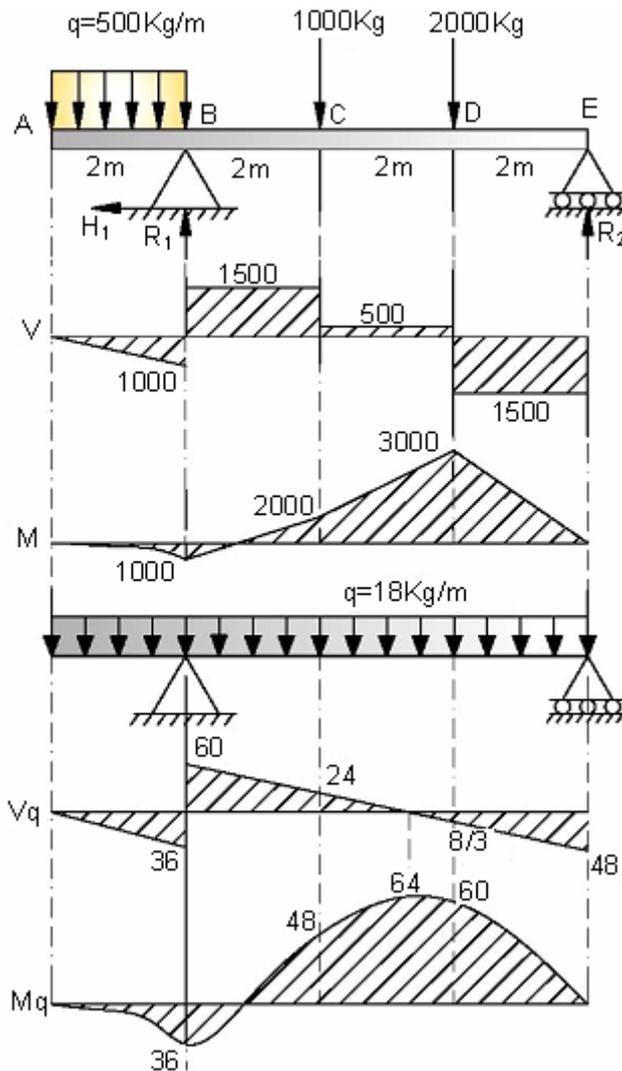
$$a \geq 1.76 \Rightarrow a = 1.8 \text{cm}$$



$$\tau = \frac{V \cdot A' \cdot \bar{y}'}{I \cdot b} \Rightarrow \tau = \frac{1000 \cdot 7 \cdot 1.8^2 \cdot 3.5 \cdot 1.8}{166.67 \cdot 1.8^4 \cdot 1.8} \Rightarrow \tau = 45.37 \frac{Kg}{cm^2}$$

$$\tau_{L.N} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} \Rightarrow \tau_{L.N} = \sqrt{\left(\frac{1500}{20 \cdot 1.8^2}\right)^2 + 45.37^2} \Rightarrow \tau_{L.N} = 50.93 \frac{Kg}{cm^2}$$

**PROBLEMA 7.6.-** Seleccionar el perfil mas económico de sección transversal I y encontrar la cortante máxima, si el esfuerzo de trabajo es de  $2100 \text{ kg/cm}^2$



$$\begin{aligned} \sum M_B &= 0 \\ -1000 + 2000 + 8000 - 6 \cdot R_2 &= 0 \\ R_2 &= 1500 \text{ Kg} \\ \sum M_E &= 0 \\ -4000 - 4000 - 7000 + 6 \cdot R_1 &= 0 \\ R_1 &= 2500 \text{ Kg} \\ \text{Control } \sum F_V &= 0 \rightarrow R_2 + R_1 - 4000 = 0 \end{aligned}$$

Determinación de  $S_{xx}$

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{\max} \cdot y_{\max}}{I} \leq \bar{\sigma}$$

$$S_{xx} \geq \frac{M_{\max}}{\bar{\sigma}} \Rightarrow S_{yy} \geq \frac{300000}{2100} \Rightarrow S_{xx} \geq 142.86 \text{ cm}^3$$

Perfil americano de ala ancha  
Buscamos de las tablas que están al final.

$$S_{xx} = 179 \text{ cm}^3 \rightarrow q = 17.9 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

$$S_{xx} = 163 \text{ cm}^3 \rightarrow q = 19.4 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

Perfil Europeo

$$S_{xx} = 143 \text{ cm}^3 \rightarrow q = 25.5 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

Se elige el perfil mas económico de carga  $q=18 \text{ Kg/m}$

$$M_q = -9x^2 + 96(x-2)$$

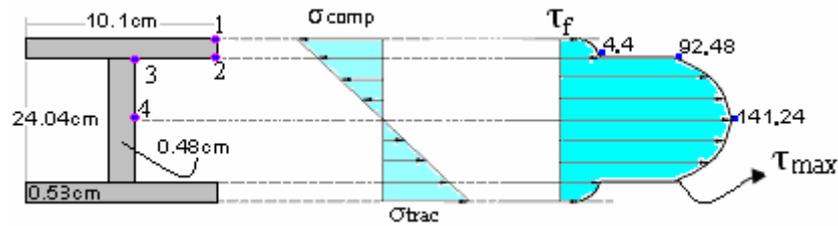
Para  $x=6 \text{ m}$

$$M_{(6)q} = -9(6)^2 + 96(6-2) \Rightarrow M_{(6)q} = 60$$

$$M_T = 3000 + 60 \Rightarrow M_T = 3060 \text{ kg.m}$$

$$\therefore \sigma_{\max} = \frac{M_T}{S_{xx}} \leq 2100 \Rightarrow \frac{306000}{179} \leq 2100 \Rightarrow 1709.50 \leq 2100 \text{ ok.}$$

Determinación de la grafica de tensiones cortantes y la grafica



$I = 2240\text{cm}^4$  ..... Valor sacado de la tabla correspondiente al perfil elegido.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} * y_{\max}}{I} \leq 150 * 10^6 \Rightarrow a \geq 1.689 * 10^{-2} \Rightarrow a = 1.7 \text{ cm}$$

Cálculo de esfuerzos cortantes

$$\tau_1 = \frac{V * \bar{A} * \bar{y}}{I * b} \Rightarrow \tau_1 = 0$$

$$\tau_2 = \frac{V * \bar{A}' * \bar{y}}{I * b} \Rightarrow \tau_2 = \frac{1512 * 5.353 * 12.285}{2240 * 10.1} \Rightarrow \tau_2 = 4.4 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau_3 = \frac{1512 * 5.353 * 12.285}{2240 * 0.48} \Rightarrow \tau_3 = 92.48 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau_4 = \frac{1512 * 11.1226 * \frac{100.44}{11.1226}}{2240 * 0.48} \Rightarrow \tau_4 = 141.24 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_x = \frac{M_{\max} * y_{\max}}{I} \Leftrightarrow y_{\max} = 12.02\text{cm}$$

$$\sigma_x = \frac{306000 * 12.02}{2240} \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_x = 1642.02 \text{ Kg} / \text{cm}^2$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{1642.02}{2}\right)^2 + (92.48)^2} \Rightarrow \tau_{\max} = 826.202 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

Las dimensiones de la sección son:

$$h=25.1\text{cm}$$

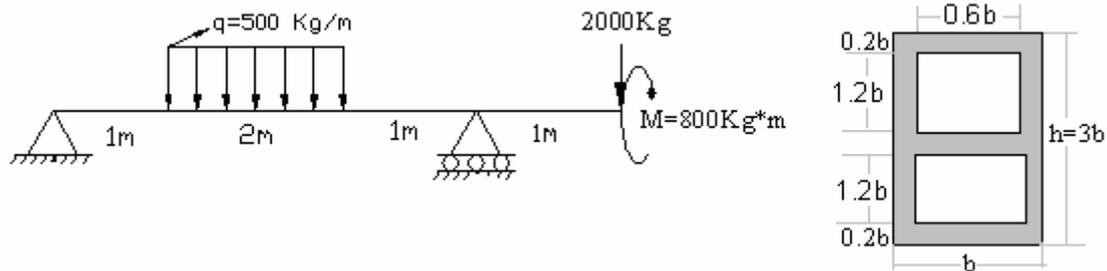
$$b=10.1\text{cm}$$

$$e=0.53\text{cm}$$

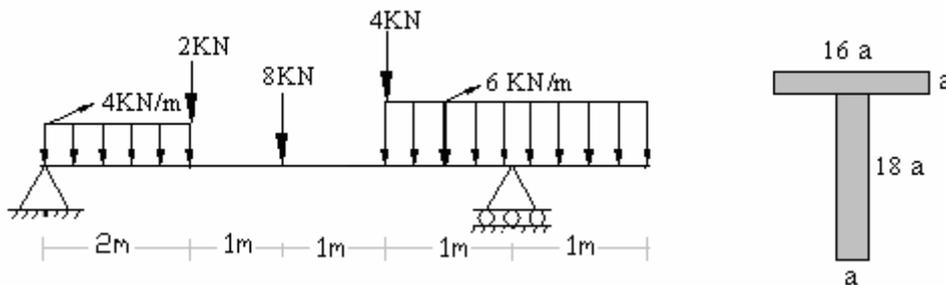
$$e_{\text{alma}}=0.48\text{cm}$$

**PROBLEMAS PROPUESTOS CORTANTE EN VIGAS**

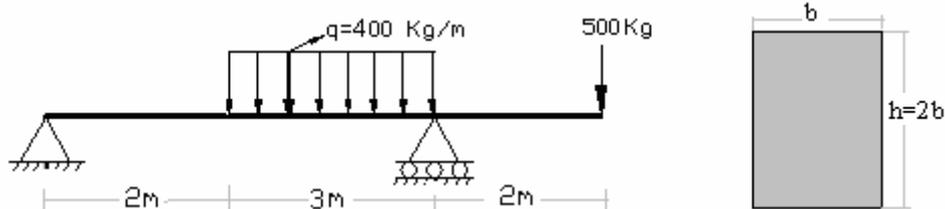
7.1.- Construir el diagrama de esfuerzos cortantes horizontales  $\tau$  para la sección transversal mostrada. Si  $\bar{\sigma} = 2100 \frac{Kg}{cm^2}$



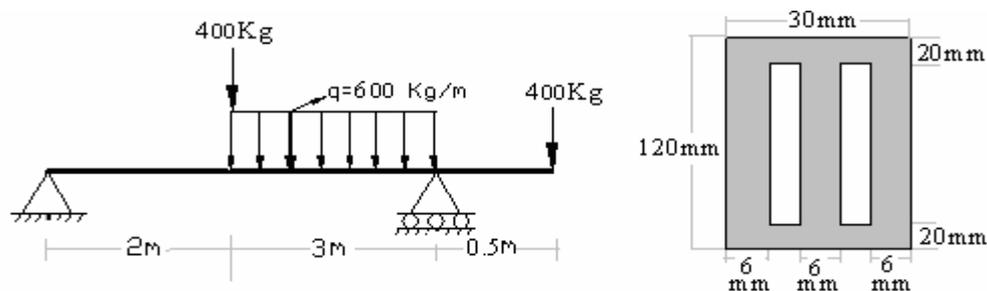
7.2.- Determinar el esfuerzo cortante máximo, estableciendo previamente las dimensiones de la sección transversal con el esfuerzos admisibles dados de  $\sigma_{trac.} = 2.3MPa$ ,  $\sigma_{comp.} = 3.5MPa$ .



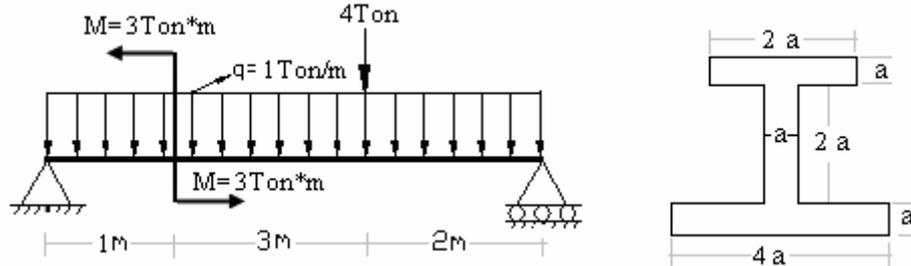
7.3.- Calcular las dimensiones de la sección transversal de la viga, si  $\sigma_{adm.} = 1600Kg/cm^2$ ,  $\tau_{adm.} = 1000Kg/cm^2$ .



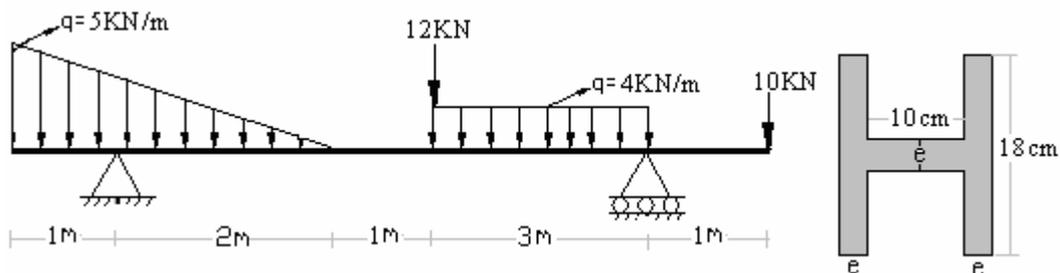
7.4.- Calcular los esfuerzos cortantes producidos, cada 20mm, medidos desde la parte superior de la sección transversales mostrada en la figura; cuanto vale  $\tau_{max} = ?$



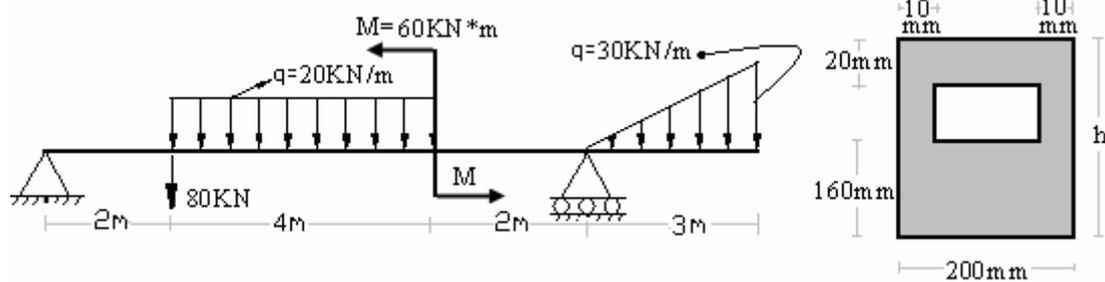
7.5.- Calcular las dimensiones necesarias de las secciones transversales de las vigas. Si  $\sigma_{adm.}=65\text{Ton}/\text{m}^2$ . Hallar la tensión cortante máxima.



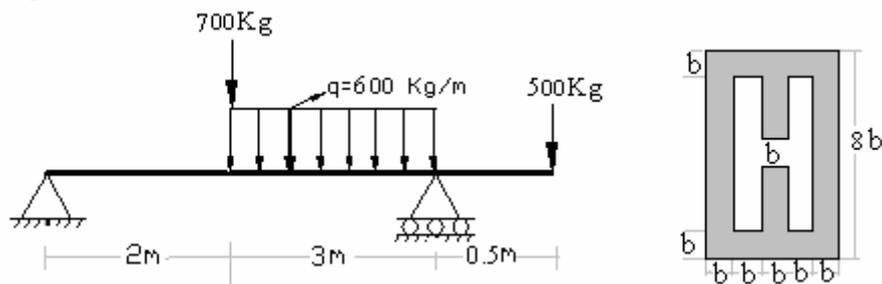
7.6.- Calcular el esfuerzo cortante máximo y las dimensiones de la sección transversal para la viga mostrada. Si  $\sigma_{adm.}=2.1\text{MN}/\text{m}^2$ .



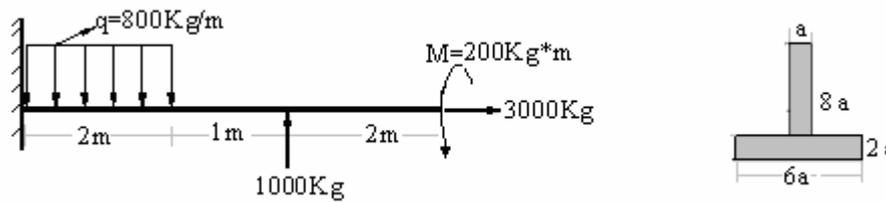
7.7.- Calcular las dimensiones necesarias de la sección transversal de la viga de la figura, si:  $\sigma_{comp.}=2\sigma_{trac.}$ . Determinar la tensión cortante máxima.



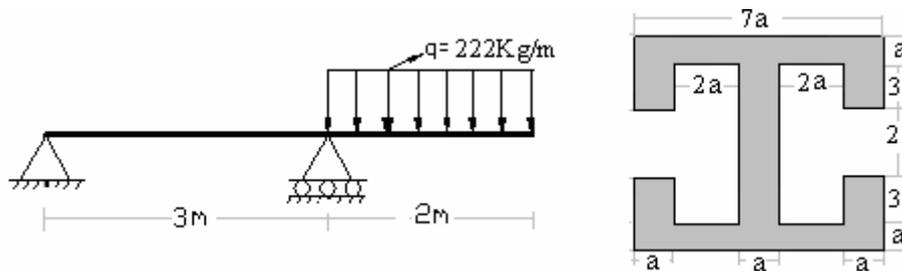
7.8.- Calcular las dimensiones necesarias, para la sección transversal de la viga mostrada, dibujar el diagrama de esfuerzos cortantes en todos los puntos necesarios y calcular  $\tau_{max}$   
 $\bar{\sigma} = 1050 \text{ Kg}/\text{cm}^2$ .



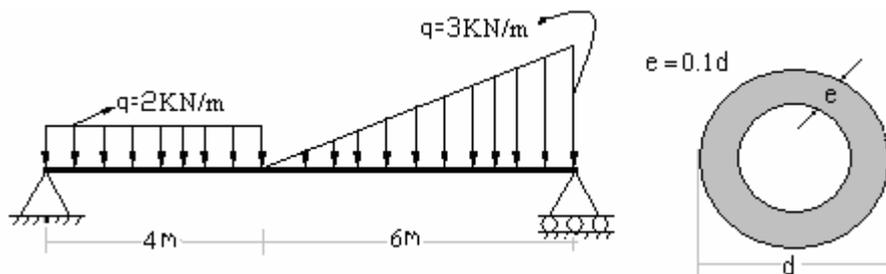
7.9.- Calcular las dimensiones necesarias de las secciones transversales del perfil "T" invertida y la cortante máxima del sistema mostrado. Si  $\bar{\sigma} = 1400 \frac{Kg}{cm^2}$



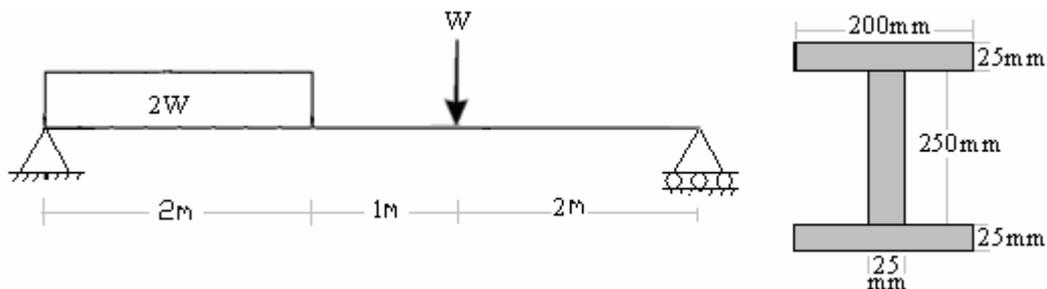
7.10.- Calcular las dimensiones necesarias, para la sección transversal de la viga mostrada, dibujar el diagrama de esfuerzos cortantes en todos los puntos necesarios y calcular  $\tau_{max} = ?$ .  $\bar{\sigma} = 1050 \text{ Kg/cm}^2$ .



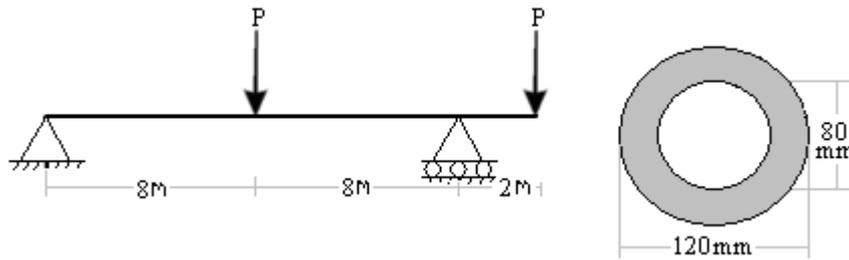
7.11.- Calcular las dimensiones para la sección transversal de la viga mostrada en la figura si:  $\sigma = 200 \text{ MN/m}^2$ ,  $\tau = 0.5\sigma$  y  $n = 2$ .



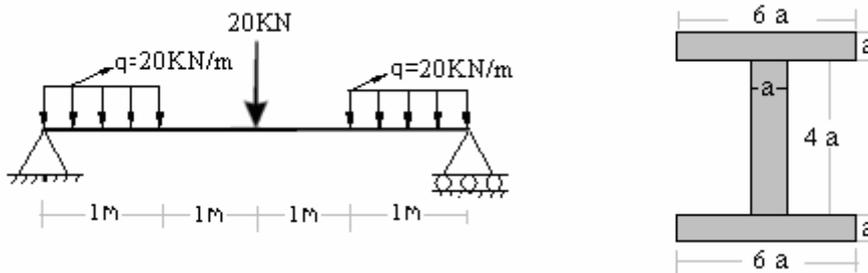
7.12.- Una viga simplemente apoyada cargada como muestra la figura, tiene una sección I como la indica. Determinar la relación entre  $\sigma_{max}$  y  $\tau_{max}$ .



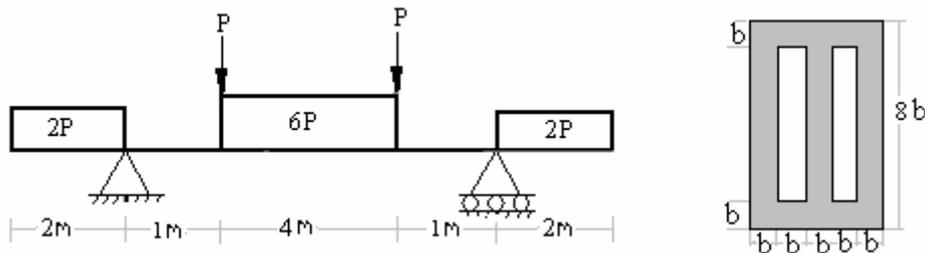
7.13.- Calcular la magnitud de la fuerza P que actúa en la viga de la figura. Usar  $\sigma_{adm.}=1000\text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau_{adm.}=500\text{Kg/cm}^2$



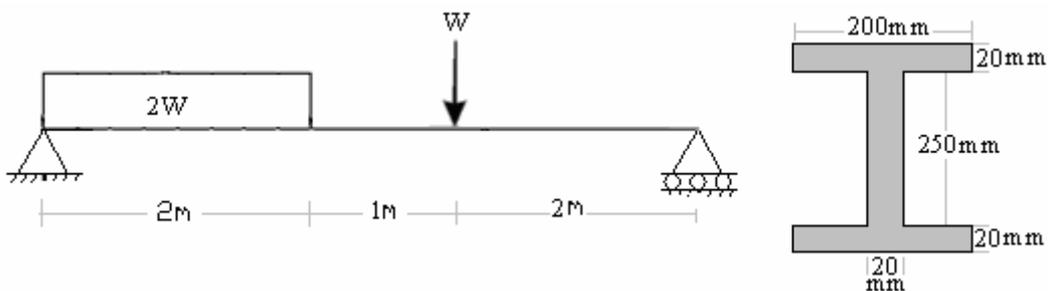
7.14.- Calcular la dimensión de la sección transversal de la viga mostrada en la figura, de modo que no sobrepase los siguientes valores:  $\sigma=300\text{MN/m}^2$ ,  $\tau=0.5 \sigma$  y  $n=2$ .



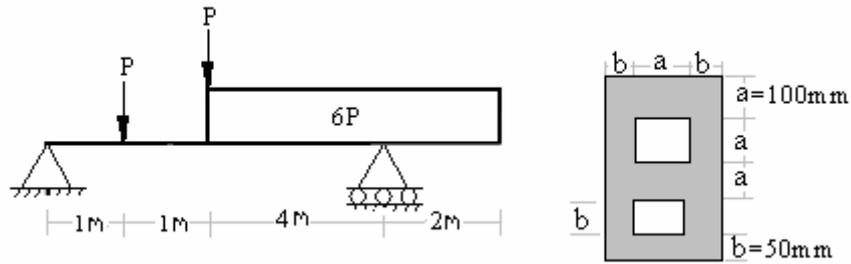
7.15.- Calcular las dimensiones de la sección transversal de la viga que satisfaga las condiciones de la resistencia, cuando  $P=80\text{Kg}$ ,  $\sigma=1600\text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau=0.6\sigma$  y  $n=2$ .



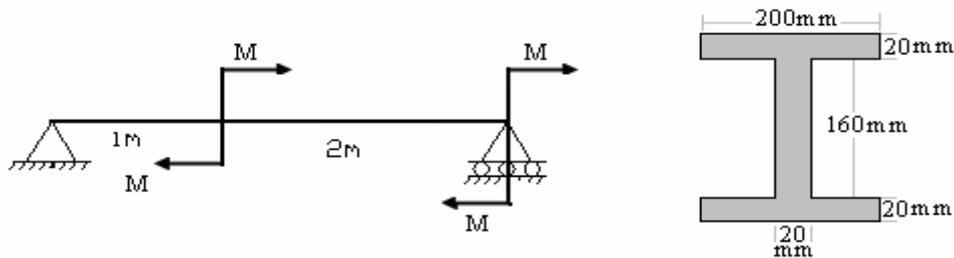
7.16.- Calcular W en la viga de la figura, si  $\sigma=20\text{MPa}$ ,  $\tau=1.8\sigma$  y  $n=2$ , verifique los esfuerzos en los puntos de concentración de tensiones.



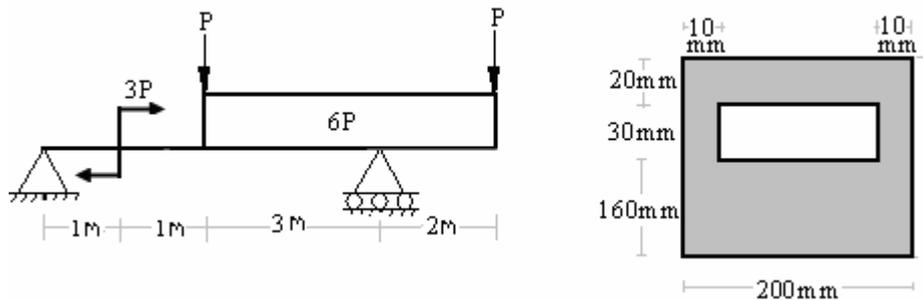
7.17.-Calcular la tensión cortante máxima. Si  $\sigma=52800\text{Kg/m}^2$ ,  $\tau=0.6\sigma$  y  $n=2$ .



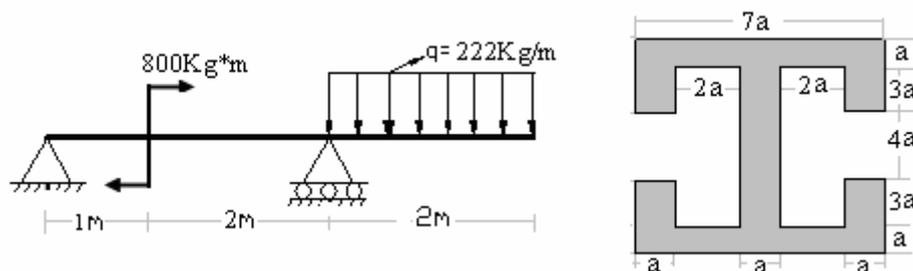
7.18.- Calcular el valor de  $M$ , en la viga de la figura, si:  $\sigma=10\text{MPa}$ ,  $\tau=2\text{MPa}$ , verificar los esfuerzos en los puntos de concentración de tensiones.



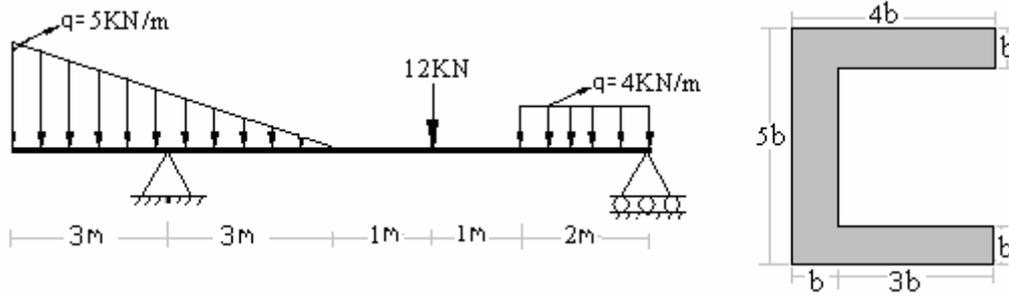
7.19.- Calcular la magnitud de la fuerza admisible  $P$  que actúa en la viga de la figura. Usar.  $\sigma_{\text{trac.}}=352000\text{Kg/m}^2$ ,  $\sigma_{\text{comp.}}=800\text{Kg/cm}^2$  y  $\tau=3000000\text{Kg/m}^2$ .



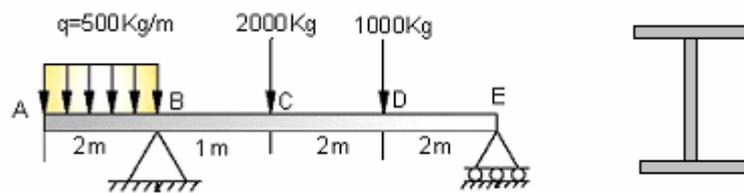
7.20.-Calcular las dimensiones transversales de la viga mostrada en la figura, de modo que no sobrepase los siguientes valores admisibles:  $\sigma=2400\text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau=0.6\sigma$ ,  $n=2$ .



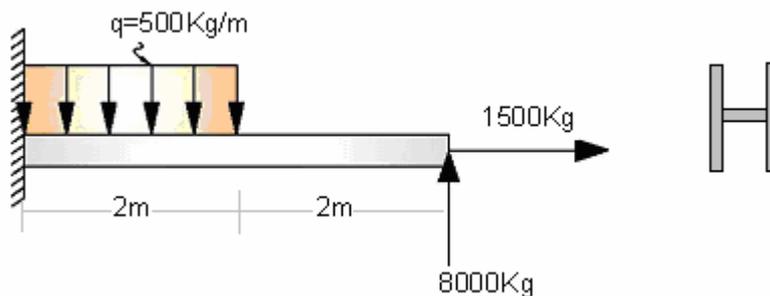
7.21.- Calcular las dimensiones necesarias de la sección transversal de la viga de la figura. Usar:  $\sigma=160\text{MPa}$ ,  $\tau=0.5\sigma$ ,  $n=2$ .



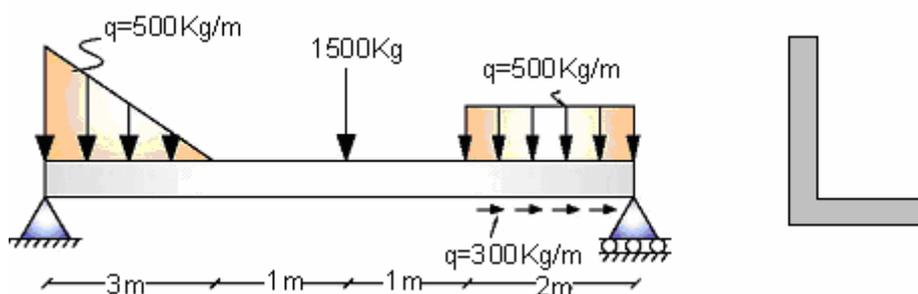
7.22.- Seleccionar el perfil mas económico de sección I y encontrar la cortante máxima, si el esfuerzo admisibles de  $\bar{\sigma}=4200\text{ kg/cm}^2$



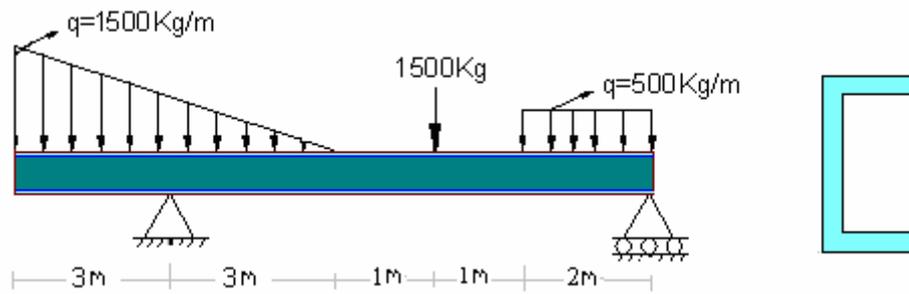
7.23.- Seleccionar el perfil mas económico de sección H y encontrar la cortante máxima, si el esfuerzo admisibles de  $\bar{\sigma}=4200\text{ kg/cm}^2$



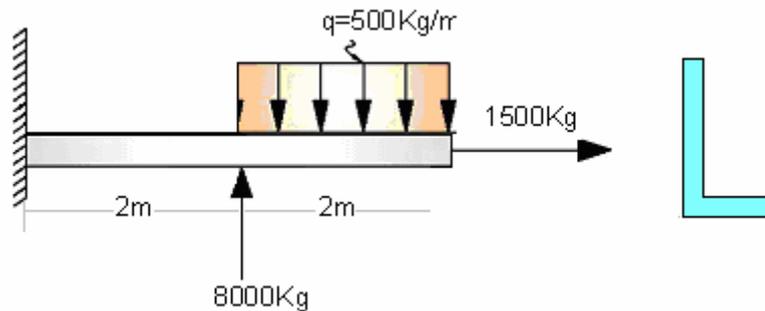
7.24.- Seleccionar el perfil mas económico de sección "L" y encontrar la cortante máxima, si el esfuerzo admisibles de  $\bar{\sigma}=4200\text{ kg/cm}^2$



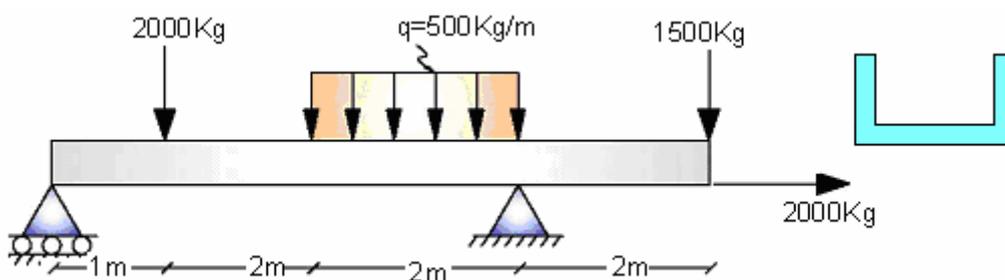
7.25.- Seleccionar el perfil mas económico de sección “C” y encontrar la cortante máxima, si el esfuerzo admisibles de  $\bar{\sigma}=4200 \text{ kg/cm}^2$



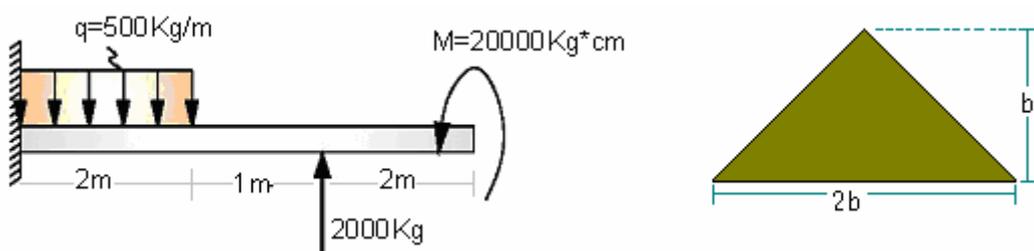
7.26.- Seleccionar el perfil mas económico de sección “L” y encontrar la cortante máxima, si el esfuerzo admisibles de  $\bar{\sigma}=1050 \text{ kg/cm}^2$ .



7.27.- Seleccionar el perfil mas económico de sección “L” y encontrar la cortante máxima, si el esfuerzo admisibles de  $\bar{\sigma}=1050 \text{ kg/cm}^2$ .



7.28.- Calcular las dimensiones de la sección transversal y la tensión cortante máxima de la viga que satisfaga las condiciones de la resistencia,  $\bar{\sigma}=1600 \text{ Kg/cm}^2$ .



## **CAPITULO VIII**

# **DEFORMACIÓN EN VIGAS A FLEXIÓN**

---

### **8.1.- INTRODUCCIÓN**

En los capítulos 6 y 7, se estudio el diseño de vigas por resistencia. En este capitulo se analizara otro aspecto de diseño de vigas que es la deformación de vigas debido a la flexión, en particular se trata de determinar la deformación máxima de una viga bajo una carga dada, ya que las especificaciones de diseño influyen generalmente un valor máximo admisible para la deformación (conocido también deflexión de viga).

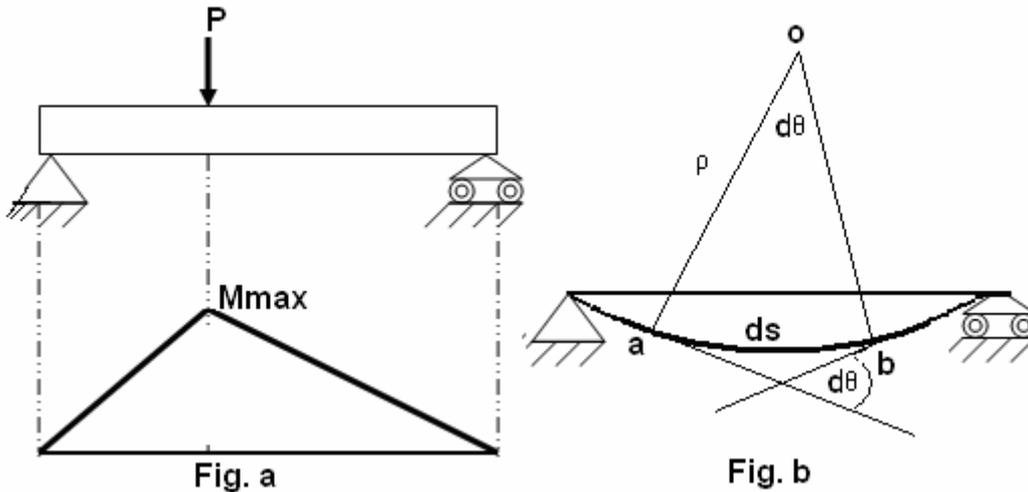
### **8.2.- HIPÓTESIS**

- La sección tiene que ser uniforme.
- El material tendrá que ser homogéneo y obedece a la ley de Hooke.
- Las cargas deben ser perpendiculares sobre la viga.
- La deformación máxima calculada debe ser menor que el de deformación admisible debido a la flexión.

### **8.3.- OBJETIVOS**

- Hallar el valor de la deformación en cualquier punto.
- Aplicar el criterio de dimensionamiento.
- El objetivo principal de esta parte es encontrar la ecuación elástica. ¿Cómo se deforma.

**8.4.- DEDUCCIÓN DE ECUACIÓN DE DEFORMACIÓN EN FLEXIÓN**



$$\tan \theta \cong \theta \Rightarrow \tan \theta = \frac{dy}{dx} \quad \therefore \theta = \frac{dy}{dx} \quad \text{Derivando tenemos} \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \dots\dots (8.1)$$

$$\text{De la Fig. b, tenemos } d\theta = \frac{ds}{\rho} \text{ pero } ds \cong dx \Rightarrow d\theta = \frac{dx}{\rho} \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\rho} \dots\dots (8.2)$$

$$\text{Sustituyendo la ecuación (8.2) en la ecuación (8.1) tenemos: } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\rho} \dots\dots (8.3)$$

Recordando del *capitulo 6* de flexión en vigas tenemos:

$$M = \frac{E * I}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{E * I} = \frac{1}{\rho} \dots\dots\dots(8.4)$$

Sustituyendo la ecuación (8.4) en la ecuación (8.3) tenemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{E * I} \quad \Rightarrow \quad \text{Esta es una ecuación diferencial elástica} \dots\dots\dots(8.5)$$

$$E * I * \frac{dy}{dx} = \int M dx \Rightarrow EIY = \iint M dx^2 + C_1 X + C_2 \text{ Ecuación integral de la elástica.}$$

Donde:

$E$  = Modulo de elasticidad propio del material (Kg/cm<sup>2</sup>).

$I$  = Momento de inercia de la sección transversal de la viga (cm<sup>4</sup>).

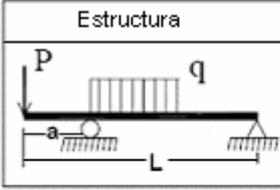
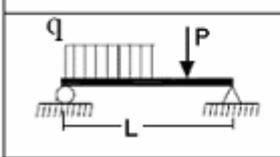
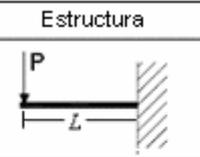
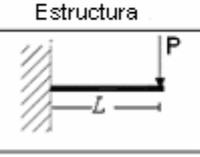
$Y$  = Es la deformación de la viga (cm).

$M$  = Ecuación singular de momento en función de X.

$C_1$  y  $C_2$  son constantes que están en función de las condiciones de frontera .  
Cuyas unidades de  $C_1$  es (Kg\*m<sup>2</sup>) y de  $C_2$  es (Kg\*m<sup>3</sup>).

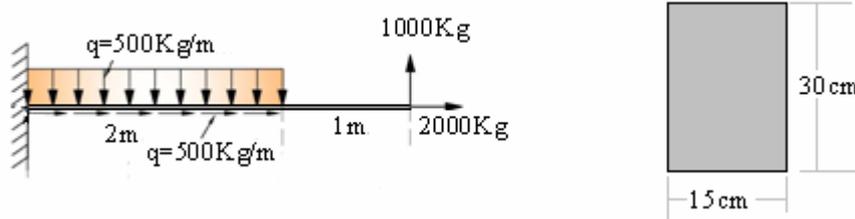
**8.5.- DIFERENTES CASOS DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA.**

Las condiciones de frontera siempre se toman en los apoyos, de izquierda hacia la derecha.

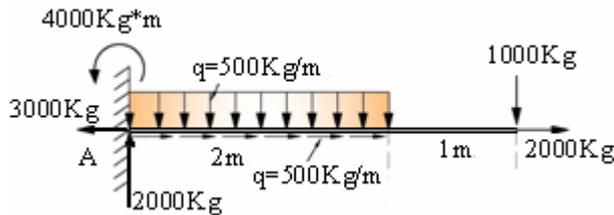
Condiciones para el caso de dos apoyos			
Estructura 	Condición 1  $x=a$ $y=0$	Condición 2  $x=L$ $y=0$	
Estructura 	Condición 1  $x=0$ $y=0$	Condición 2  $x=L$ $y=0$	
Condiciones para el caso de empotrado			
Estructura 	Condición 1  $\frac{dy}{dx} = 0$ $x=L$	Condición 2  $x=0$ $y=0$	Deformación máxima $x=0$ $Y=m \text{ máxima}$
Estructura 	Condición 1  $\frac{dy}{dx} = 0$ $x=0$	Condición 2  $x=L$ $y=0$	Deformación máxima $x=L$ $Y=m \text{ máxima}$

**PROBLEMAS RESUELTOS DE DEFPRMACIÓN DEVIDO A FLEXIÓN**

**PROBLEMA 8.1.-**Calcular la deformación máxima si  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$



Solución:



$$\sum F_x = 0 \rightarrow -H + 1000 + 2000 = 0 \rightarrow$$

$$H = 3000 \text{Kg}$$

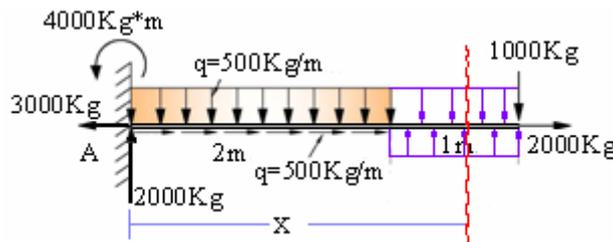
$$\sum M_A = 0$$

$$-M + 500 \cdot 2 + 1000 \cdot 3 = 0 \rightarrow M = 4000 \text{Kg} \cdot \text{m}$$

$$\sum F_v = 0$$

$$V_A - 1000 - 1000 = 0 \rightarrow V_A = 2000 \text{Kg}$$

Ecuación singular de momento para lo cual tiene que estar completo la carga para poder seccionar en el ultimo tramo, esta sección se hace con la finalidad de que el ultimo tramo contenga todas las ecuaciones de los anteriores tramos



$$\langle M \rangle = -4000 \cdot x^0 + 2000x - 250x^2 + 250 \langle x - 2 \rangle^2$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -4000x + 1000x^2 - \frac{250}{3}x^3 + \frac{250}{3} \langle x - 2 \rangle^3 + c_1$$

$$EIY = -2000x^2 + \frac{1000}{3}x^3 - \frac{250}{12}x^4 + \frac{250}{12} \langle x - 2 \rangle^4 + c_1x + c_2$$

Condiciones de contorno

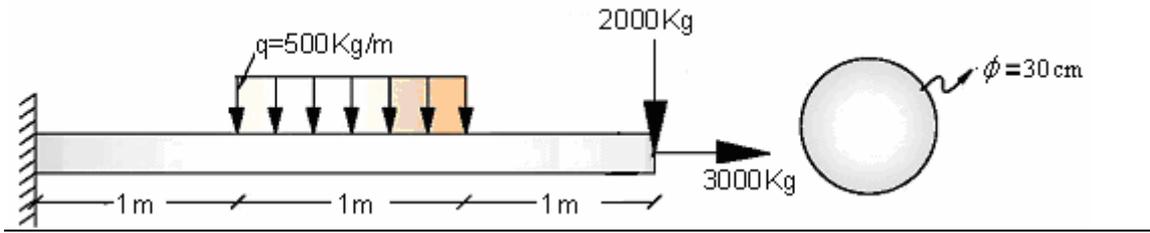
$$\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow c_2 = 0 \quad ; \quad \begin{matrix} \frac{dy}{dx}=0 \\ x=0 \end{matrix} \Rightarrow c_1 = 0$$

Para  $x=3\text{m}$  se da la deformación máxima.

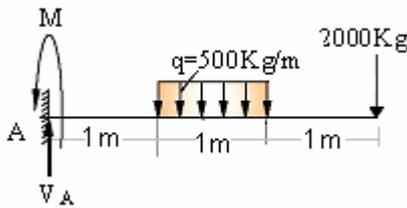
$$EI\delta_{MAX} = -2000(3)^2 + \frac{1000}{3}(3)^3 - \frac{250}{12}(3)^4 + \frac{250}{12}(1)^4$$

$$EI\delta_{MAX} = -10666.67 \Rightarrow \delta_{MAX} = \frac{10666.67 \times 10^6 \text{Kg} \cdot \text{cm}^3}{2.1 \times 10^6 \cdot \frac{15 \cdot 30^3}{12}} \Rightarrow \delta_{MAX} = 0.15 \text{cm}$$

**PROBLEMA 8.2.**-Calcular la deformación máxima si  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



Solución:



Determinación de las reacciones

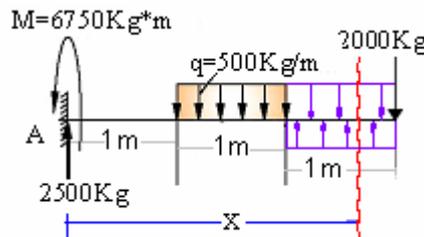
$$\sum M_A = 0$$

$$-M + 500 \cdot 1 \cdot 1.5 + 2000 \cdot 3 = 0 \rightarrow M = 6750 \text{Kg} \cdot \text{m}$$

$$\sum F_V = 0$$

$$V_A - 500 - 2000 = 0 \rightarrow V_A = 2500 \text{Kg}$$

Ecuación singular de momento



$$\langle M \rangle = -6750x^0 + 2500x - 250(x-1)^2 + 250(x-2)^2 \rightarrow$$

$$\text{para } x=3 \Rightarrow M = -6750 + 2500(3) - 250(4) + 250 \Rightarrow M = 0$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -6750x + 1250x^2 - \frac{250}{3}(x-1)^3 + \frac{250}{3}(x-2)^3 + c_1 \dots \text{primera integral}$$

$$EIY = -3375x^2 + \frac{1250}{3}x^3 - \frac{250}{12}\langle x-1 \rangle^4 + \frac{250}{12}\langle x-2 \rangle^4 + c_1x + c_2 \dots \text{segunda integral}$$

Condiciones de borde para hallar  $c_1, c_2$

$$\text{para } \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\text{para } \begin{matrix} \frac{dy}{dx}=0 \\ x=0 \end{matrix} \Rightarrow c_1 = 0$$

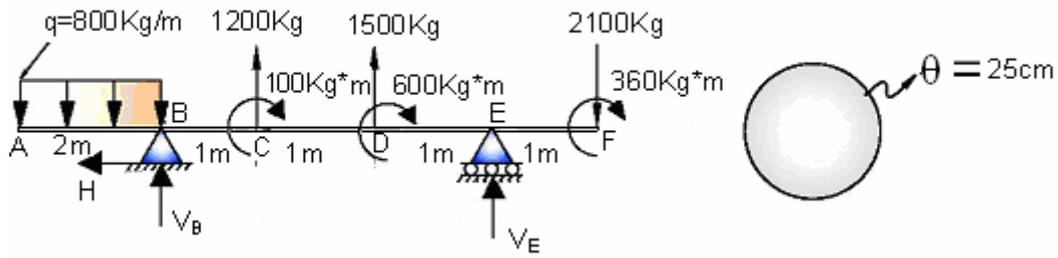
$$EIY = -3375x^2 + \frac{1250}{3}x^3 - \frac{250}{12}\langle x-1 \rangle^4 + \frac{250}{12}\langle x-2 \rangle^4 \dots \text{Ecuación elástica}$$

La deformación máxima se da para  $x=3 \text{ m}$

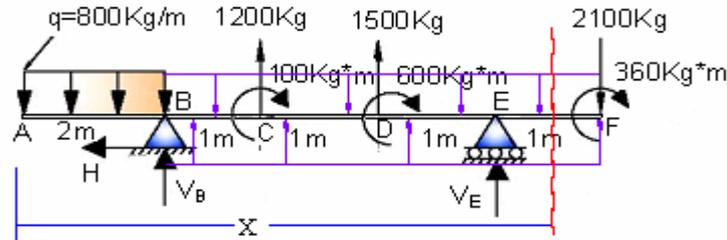
$$EI\delta_{MAX} = -3375(3)^2 + \frac{1250}{3}(3)^3 - \frac{250}{12}(2)^4 + \frac{250}{12} \Rightarrow EI\delta_{MAX} = -19437.5$$

$$\delta_{MAX} = \frac{(19437.5)(64)}{2.1 \cdot \pi \cdot 30^4} \Rightarrow \delta_{MAX} = 0.233 \text{cm}$$

**PROBLEMA 8.3.**-Calcular la deformación máxima si  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



Solución:



Determinación de las reacciones

$$\sum M_B = 0 \rightarrow -1600 - 1200 + 100 - 3000 + 600 - 3 \cdot V_E + 4 \cdot 2100 + 360 = 0 \rightarrow V_E = 1220 \text{Kg}$$

$$\sum M_E = 0 \rightarrow 360 + 2100 + 1500 + 600 + 2 \cdot 1200 + 100 + 3 \cdot V_B - 800 \cdot 4 = 0 \rightarrow V_B = -220 \text{Kg}$$

Ecuación singular de momento

$$\langle M \rangle = -400x^2 - 220 \langle x-2 \rangle + 400 \langle x-2 \rangle^2 + 1200 \langle x-3 \rangle + 100 \langle x-3 \rangle^0 + 1500 \langle x-4 \rangle + 600 \langle x-4 \rangle^0 + 1220 \langle x-5 \rangle$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{400}{3}x^3 - 110 \langle x-2 \rangle^2 + \frac{400}{3} \langle x-2 \rangle^3 + 600 \langle x-3 \rangle^2 + 100 \langle x-3 \rangle + 750 \langle x-4 \rangle^2 + 600 \langle x-4 \rangle^1 + 610 \langle x-5 \rangle^2 + c_1$$

$$EIY = -\frac{400}{12}x^4 - \frac{110}{3} \langle x-2 \rangle^3 + \frac{400}{12} \langle x-2 \rangle^4 + 200 \langle x-3 \rangle^3 + 50 \langle x-3 \rangle^2 + 250 \langle x-4 \rangle^3 + 300 \langle x-4 \rangle^2 + \frac{610}{3} \langle x-5 \rangle^3 + c_1x + c_2$$

$$\text{Para } \begin{matrix} x=2 \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow 0 = -\frac{400}{12}(2)^4 - \frac{110}{3}(0)^3 + 2c_1 + c_2 \Rightarrow 2c_1 + c_2 = 533.33 \text{ ----- E.1}$$

$$\text{Para } \begin{matrix} x=5 \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow 0 = -\frac{400}{12}(5)^4 - \frac{110}{3}(3)^3 + \frac{400}{12}(3)^4 + 200(2)^3 + 250(1)^3 + 300(1)^2 \Rightarrow$$

$$5c_1 + c_2 = 16773.33 \text{ ----- E.2}$$

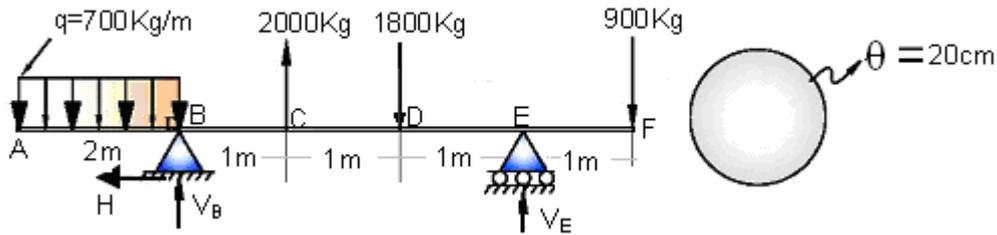
Resolviendo las ecuaciones 1 y 2 tenemos:

$$c_1 = 5413.33 \quad c_2 = -10293.34$$

La deformación máxima se da para  $x = 0 \Rightarrow$

$$\delta_{\max} = -\frac{10293.34}{EI} \Rightarrow \delta_{\max} = \frac{10293.34 \cdot 64}{2.1 \cdot \pi \cdot 25^4} \Rightarrow \delta_{\max} = 0.26 \text{cm}$$

**PROBLEMA 8.4.**-Calcular la deformación máxima si  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .

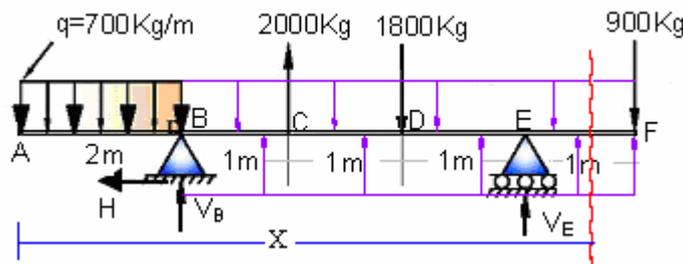


Solución:

Determinación de las reacciones

$$\sum M_B = 0 \rightarrow -1400 - 2000 + 2 \cdot 1800 - 3 \cdot V_E + 4 \cdot 900 = 0 \rightarrow V_E = 1266.67 \text{Kg}$$

$$\sum M_E = 0 \rightarrow 900 - 1800 + 2 \cdot 2000 + 3 \cdot V_B - 4 \cdot 1400 = 0 \rightarrow V_B = 833.33 \text{Kg}$$



$$\langle M \rangle = -350x^2 + 833.33 \langle x-2 \rangle + 350 \langle x-2 \rangle^2 + 2000 \langle x-3 \rangle - 1800 \langle x-4 \rangle + 1266.67 \langle x-5 \rangle$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{350}{3}x^3 + \frac{833.33}{2} \langle x-2 \rangle^2 + \frac{350}{3} \langle x-2 \rangle^3 + 1000 \langle x-3 \rangle^2 - 900 \langle x-4 \rangle^2 + \frac{1266.67}{2} \langle x-5 \rangle^2 + c_1$$

$$EIY = -\frac{350}{12}x^4 + \frac{833.33}{6} \langle x-2 \rangle^3 + \frac{350}{12} \langle x-2 \rangle^4 + \frac{1000}{3} \langle x-3 \rangle^3 - 300 \langle x-4 \rangle^3 + \frac{1266.67}{6} \langle x-5 \rangle^3 + c_1x + c_2$$

$$\text{para } \begin{matrix} x=2 \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow 0 = -\frac{350}{12}(2)^4 + \frac{833.33}{6}(0)^3 + 2c_1 + c_2 \Rightarrow 2c_1 + c_2 = 466.67 \text{ -----E.1}$$

$$\text{para } \begin{matrix} x=5 \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow 0 = -\frac{350}{12}(5)^4 + \frac{833.33}{6}(3)^3 + \frac{350}{12}(3)^4 + \frac{1000}{3}(2)^3 - 300 + 5c_1 + c_2 \Rightarrow$$

$$5c_1 + c_2 = 9750.015 \text{ -----E.2}$$

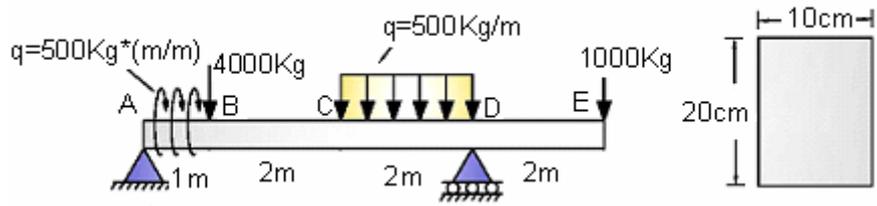
Resolviendo las ecuaciones 1 y 2 tenemos:

$$c_1 = 3094.45 \quad c_2 = -5722.23$$

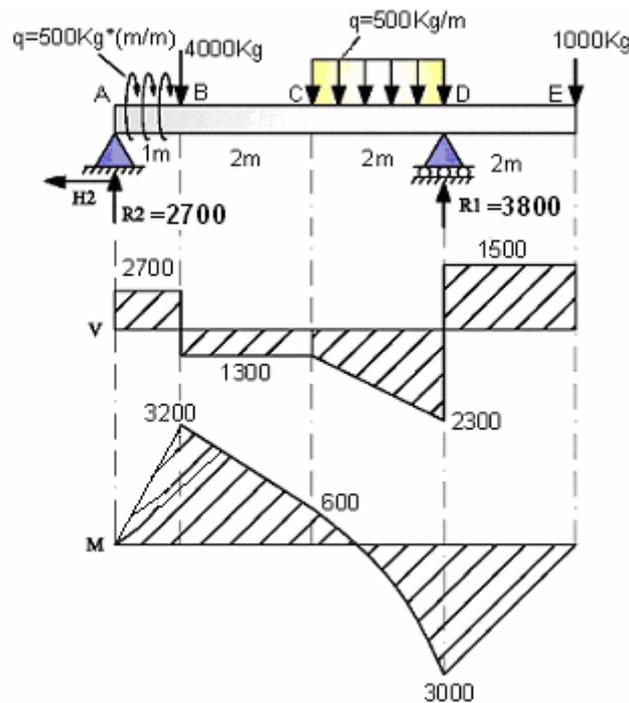
La deformación máxima se da para  $x = 0 \Rightarrow$

$$\delta_{\max} = -\frac{5722.23}{EI} \Rightarrow \delta_{\max} = \frac{5722.23 \cdot 64}{2.1 \cdot \pi \cdot 20^4} \Rightarrow \delta_{\max} = 0.35 \text{cm}$$

**PROBLEMA 8.5.**-Calcular la deformación máxima de la estructura presente. Si  $\bar{\sigma}=225 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\bar{\tau} = 0.5\bar{\sigma}$  y  $E=2.1*10^6 \text{ kg/cm}^2$ .



Solución



Se tiene que verificar los datos del problema

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} * Y_{\max}}{I} \leq \bar{\sigma} \Rightarrow \frac{(320000)(10)(12)}{(10)(20)^3} \leq 225 \Rightarrow 480 \leq 225 \Rightarrow \text{no cumple}$$

∴ Los valores reales de la secciones serán:  
siendo  $b=h/2$

$$\frac{(320000)(h/2)(12)}{b(2b)^3} \leq 225 \Rightarrow b \geq 12.87 \text{ cm} \Rightarrow b = 13 \text{ cm} \therefore h = 26 \text{ cm}$$

Verificación al cortante por flexión

$$\tau_{\max} = \frac{V_{\max} * \bar{A} * \bar{y}}{I * b} \leq \bar{\tau} \Rightarrow$$

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V_{\max}}{A} \leq \bar{\tau} \Rightarrow \frac{3}{2} \frac{2700}{(13)(26)} \leq 112.5 \Leftrightarrow 11.98 \leq 112.5 \quad \text{ok!}$$

Con los valores verdaderos tenemos:

$$I = \frac{bh^3}{12} \Rightarrow I = \frac{(13)(26)^3}{12} \Rightarrow I = 19040.67 \text{ cm}^4$$

Ecuación general de momento singular

$$\langle M \rangle = 2700x + 500x - 4000 \langle x-1 \rangle - 250 \langle x-3 \rangle^2 + 3800 \langle x-5 \rangle + 250 \langle x-5 \rangle^2 - 500 \langle x-1 \rangle$$

$$\langle M \rangle = 2700x + 500x - 500 \langle x-1 \rangle - 4000 \langle x-1 \rangle - 250 \langle x-3 \rangle^2 + 3800 \langle x-5 \rangle +$$

$$250 \langle x-5 \rangle^2 \dots\dots\dots \text{Ecuación general}$$

Verificación para  $x = 7m \Rightarrow$

$$M = 2700(7) + 500(7) - 500(6) - 4000(6) - 250(4)^2 + 3800(2) + 250(2)^2 \Rightarrow M = 0$$

Primera integral

$$EI \frac{dy}{dx} = 1350x^2 + 250x^2 - 250 \langle x-1 \rangle^2 - 2000 \langle x-1 \rangle^2 - \frac{250}{3} \langle x-3 \rangle^3 + 1900 \langle x-5 \rangle^2 + \frac{250}{3} \langle x-5 \rangle^3 + c_1$$

Segunda integral

$$EIY = 450x^3 + \frac{250}{3} x^3 - \frac{250}{3} \langle x-1 \rangle^3 - \frac{2000}{3} \langle x-1 \rangle^3 - \frac{250}{12} \langle x-3 \rangle^4 + \frac{1900}{3} \langle x-5 \rangle^3 + \frac{250}{12} \langle x-5 \rangle^4 + c_1x + c_2$$

Condiciones de contorno para buscar  $c_1, c_2$

para  $\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow c_2 = 0$

para  $\begin{matrix} x=5 \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow 0 = 450 \langle 5 \rangle^3 + \frac{250}{3} \langle 5 \rangle^3 - \frac{250}{3} \langle 5-1 \rangle^3 - \frac{2000}{3} \langle 4 \rangle^3 - \frac{250}{12} \langle 2 \rangle^4 + 5c_1 \Rightarrow$

$$c_1 = -3666.67$$

Sustituyendo los valores de la constante, se tiene una ecuación general de la deformación

$$EIY = 450x^3 + \frac{250}{3}x^3 - \frac{250}{3}\langle x-1 \rangle^3 - \frac{2000}{3}\langle x-1 \rangle^3 - \frac{250}{12}\langle x-3 \rangle^4 + \frac{1900}{3}\langle x-5 \rangle^3 + \frac{250}{12}\langle x-5 \rangle^4 - 3666.67x \dots \dots \dots \text{Ecuacion de singularidad}$$

Se busca una deformación en e tramo (B-C) para un intervalo de  $1 < x < 3$

Una función es máxima cuando su primera derivad es cero  $\frac{d_y}{d_x} = 0$

$$1350x^2 + 250x^2 - 250\langle x-1 \rangle^2 - 2000\langle x-1 \rangle^2 - 3666.67 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = 5.16m \Rightarrow \text{No pertenece al tramo} , \quad x_2 = 1.76m \Rightarrow \text{Si pertenece al tramo}$$

∴ Para  $x = 1.76 \text{ m} \Rightarrow$

$$EI\delta_1 = 450(1.76)^3 + \frac{250}{3}(1.76)^3 - \frac{250}{3}(0.76)^3 - \frac{2000}{3}(0.76)^3 - 3666.67(1.76) \Rightarrow$$

$$\delta_1 = \frac{-3874.96}{EI}$$

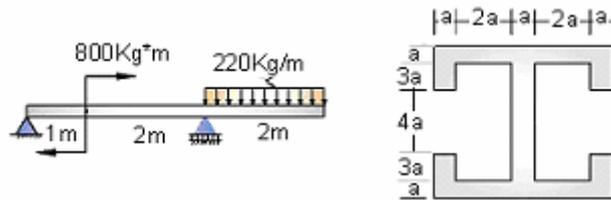
Existe otra deformacion para  $x=7$

$$EI\delta_2 = 450(7)^3 + \frac{250}{3}(7)^3 - \frac{250}{3}(6)^3 - \frac{2000}{3}(6)^3 - \frac{250}{12}(4)^4 + \frac{1900}{3}(2)^3 + \frac{250}{12}(2)^4 - 3666.67(7)$$

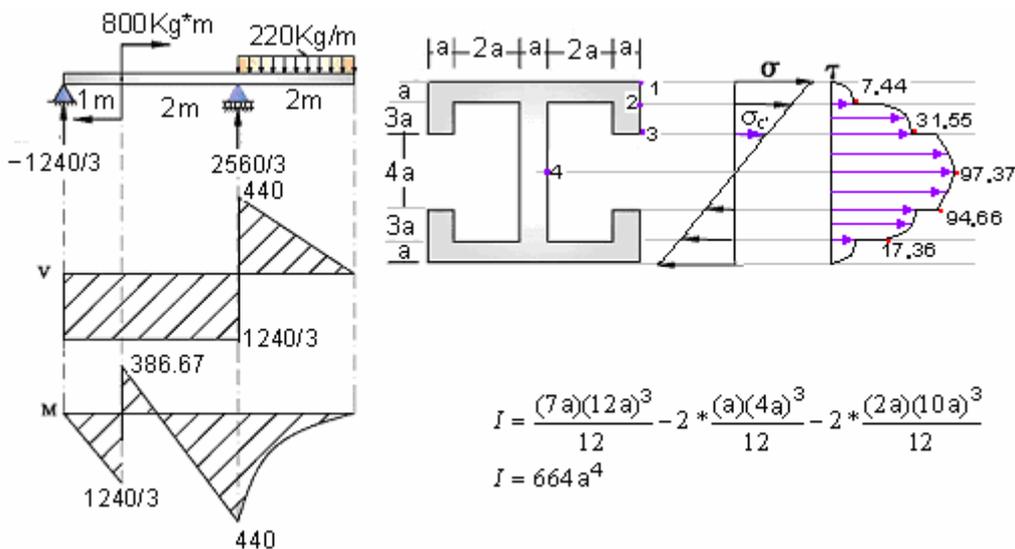
$$\delta_2 = \frac{-4666.69}{EI} \Rightarrow \delta_2 = \frac{4666.69}{(2.1)(19040.67)} \Rightarrow \delta_2 = \delta_{\max} \Rightarrow \delta_{\max} = 0.117 \text{ cm.}$$

**PROBLEMA 8.6.-** Calcular la dimensión de la sección transversal de la viga mostrada en la figura, de modo que no sobrepase los siguientes valores admisibles:  $\bar{\sigma} = 1200 \frac{Kg}{cm^2}$

$\bar{\tau} = 720 \frac{Kg}{cm^2}$  ,  $\bar{\delta} = 0.0025m$  y  $E = 4 \times 10^5 Kg/cm^2$ .



Solución



$$I = \frac{(7a)(12a)^3}{12} - 2 * \frac{(a)(4a)^3}{12} - 2 * \frac{(2a)(10a)^3}{12}$$

$$I = 664 a^4$$

Análisis por flexión

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_{max} * y_{max}}{I} \leq \bar{\sigma} \Rightarrow \frac{44000 * 6a}{664a^4} \leq 1200 \Rightarrow a \geq 0.69 \Rightarrow a = 0.7cm$$

Análisis a cortante por flexión

$$\tau_1 = \frac{V * \bar{A} * \bar{y}}{I * b} \Rightarrow \tau_1 = 0$$

$$\tau_2 = \frac{V * \bar{A}' * \bar{y}}{I * b} \Rightarrow \tau_2 = \frac{440 * 7a^2 * 5.5a}{664a^4 * 7a} \Rightarrow \tau_2 = 7.44 \frac{Kg}{cm^2}$$

$$\tau_2' = \frac{V * \bar{A}' * \bar{y}}{I * b} \Rightarrow \tau_2' = \frac{440 * 7a^2 * 5.5a}{664a^4 * 3a} \Rightarrow \tau_2' = 17.36 \frac{Kg}{cm^2}$$

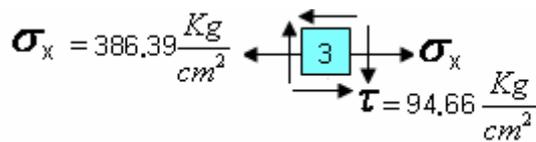
$$\tau_3 = \frac{V * \bar{A}' * \bar{y}}{I * b} \Rightarrow \tau_3 = \frac{440 * 16a^2 * \frac{70a^3}{16a^2}}{664a^4 * 3a} \Rightarrow \tau_3 = 31.55 \frac{Kg}{cm^2}$$

$$\tau'_3 = \frac{V * \bar{A}' * \bar{y}}{I * b} \Rightarrow \tau'_3 = \frac{440 * 16a^2 * \frac{70a^3}{16a^2}}{664a^4 * a} \Rightarrow \tau'_3 = 94.66 \frac{Kg}{cm^2}$$

$$\tau_4 = \frac{V * \bar{A}' * \bar{y}}{I * b} \Rightarrow \tau_4 = \frac{440 * 16a^2 * \frac{72a^3}{18a^2}}{664a^4 * a} \Rightarrow \tau_4 = 97.37 \frac{Kg}{cm^2}$$

Para realizar el análisis a tensión cortante máxima será:

$$\sigma_{C'} = \frac{\sigma * y}{I} \leq \bar{\sigma} \Rightarrow \frac{44000 * 2 * 0.7}{664 * 0.7^4} \Rightarrow \sigma_{C'} = 386.39 \frac{Kg}{cm^2}$$



$$\tau_{Max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} \leq \bar{\tau} \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{386.39}{2}\right)^2 + 94.66^2} \leq 720 \Rightarrow 215.14 \leq 720$$

Análisis a la deformación

$$\langle M \rangle = -\frac{1240}{3}x + 800 \langle x-1 \rangle^0 + \frac{2560}{3} \langle x-3 \rangle - 110 \langle x-3 \rangle^2$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{620}{3}x^2 + 800 \langle x-1 \rangle + \frac{1280}{3} \langle x-3 \rangle^2 - \frac{110}{3} \langle x-3 \rangle^3 + c_1$$

$$EIY = -\frac{620}{9}x^3 + 400 \langle x-1 \rangle^2 + \frac{1280}{9} \langle x-3 \rangle^3 - \frac{110}{12} \langle x-3 \rangle^4 + c_1x + c_2$$

Para  $\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow c_2 = 0$

Para  $\begin{matrix} x=3 \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow 0 = -\frac{620}{9}(3)^3 + 400 \langle 2 \rangle^2 + 3c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{260}{3}$

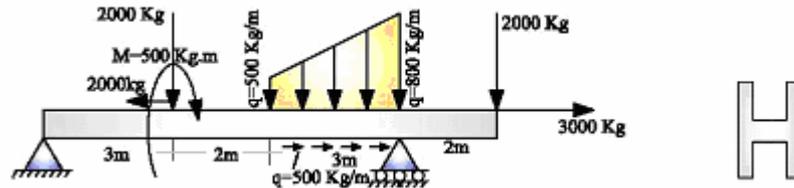
$$EIY = -\frac{620}{9}x^3 + 400 \langle x-1 \rangle^2 + \frac{1280}{9} \langle x-3 \rangle^3 - \frac{110}{12} \langle x-3 \rangle^4 + \frac{260}{3}x$$

Para  $x=5 \Rightarrow EIY = -\frac{620}{9}(5)^3 + 400 \langle 4 \rangle^2 + \frac{1280}{9} \langle 2 \rangle^3 - \frac{110}{12} \langle 2 \rangle^4 + \frac{260}{3} * 5 \Rightarrow$

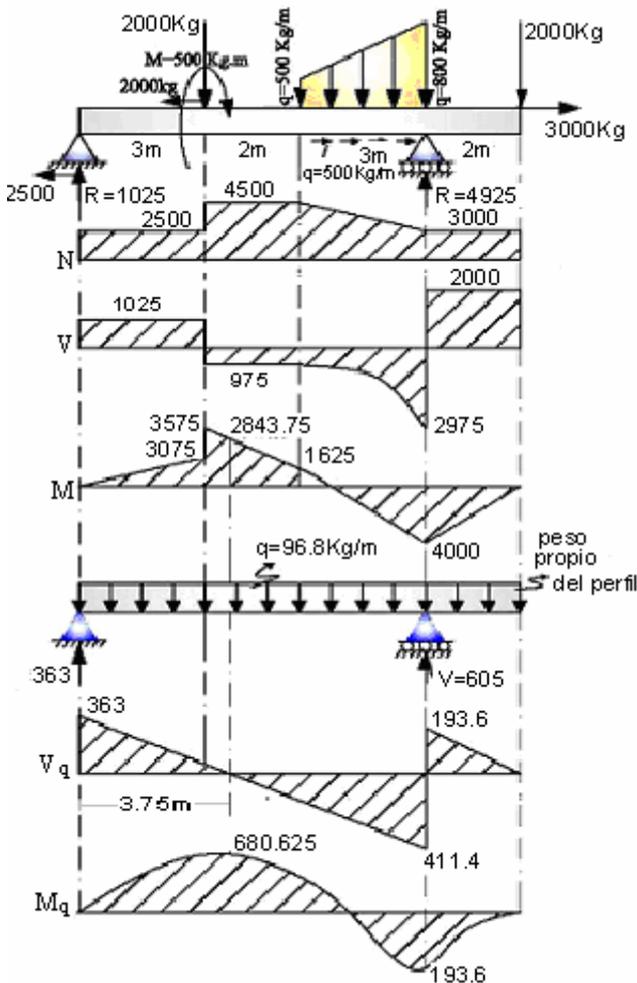
$$\delta_1 = \frac{786.67}{EI} \leq \frac{L}{1000} \Rightarrow \frac{786.67x10^6}{4x10^5 * 664a^4} \leq 0.25 \Rightarrow a \geq 1.86 \Rightarrow a = 2 \text{ cm}$$

La solución es a=2cm

**PROBLEMA 8.7.-** Seleccionar el perfil H mas económico de acero y encontrar la deformación máxima, si el esfuerzo admisible es de  $\bar{\sigma} = 1050 \frac{Kg}{cm^2}$ .



Solución



Para  $x=8m \Rightarrow M_T = 419360 \text{ kg.cm}$

$$\sigma_{\max} = \frac{3000}{123} + \frac{419360}{478} \leq 1050$$

$$901.71 \leq 1050 \text{ ok!}$$

El perfil ha sido seleccionado con las siguientes dimensiones:

$$b=30.8 \text{ cm} \therefore h=30.5 \text{ cm} \therefore e_{\text{alma}} = 0.99 \text{ cm}$$

$$e = 1.54 \text{ cm} \therefore I = 7290 \text{ cm}^4 \therefore A = 123 \text{ cm}^2$$

Determinación de  $S_{yy}$

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{\max} \cdot y_{\max}}{I} \leq \bar{\sigma}$$

$$S_{yy} \geq \frac{M_{\max}}{\bar{\sigma}} \Rightarrow$$

$$S_{yy} \geq \frac{400000}{1050} \Rightarrow S_{yy} \geq 380.95 \text{ cm}^3$$

Perfil americano de ala ancha

$$S_{yy} = 397 \text{ cm}^3 \rightarrow q = 101.2 \frac{Kg}{cm^2}$$

$$S_{yy} = 432 \text{ cm}^3 \rightarrow q = 101.2 \frac{Kg}{cm^2}$$

$$S_{yy} = 478 \text{ cm}^3 \rightarrow q = 96.8 \frac{Kg}{cm^2}$$

Para  $X=3.75m \rightarrow$

$$M_T = 680.625 + 2843.75 \rightarrow$$

$$M_T = 3524.375 \text{ Kg.m}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{\max}}{S_{yy}} \leq \bar{\sigma}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{4500}{123} + \frac{352437.5}{478} \leq 1050$$

$$774 \leq 1050$$

Determinación de la ecuación singular de momento del problema

$$\langle M \rangle = 1388x - 48.4x^2 + 500\langle x-3 \rangle^0 - 2000\langle x-3 \rangle - 250\langle x-5 \rangle^2 - \frac{50}{3}\langle x-5 \rangle^3 + 400\langle x-8 \rangle^2 + \frac{50}{3}\langle x-8 \rangle^3 + 5530\langle x-8 \rangle$$

Verificación para  $x = 10m \Rightarrow M = 0$

$$M = 1388(10) - 48.4(10)^2 + 500 - 2000(7) - 250(5)^2 - \frac{50}{3}(5)^3 + 400(2)^2 + \frac{50}{3}(2)^3 + 5530(2) \Rightarrow M = 0$$

Primera integral

$$EI \frac{dy}{dx} = 694x^2 - \frac{48.4}{3}x^3 + 500\langle x-3 \rangle - 1000\langle x-3 \rangle^2 - \frac{250}{3}\langle x-5 \rangle^3 + \frac{50}{12}\langle x-5 \rangle^4 + \frac{400}{3}\langle x-8 \rangle^3 + \frac{50}{12}\langle x-8 \rangle^4 + 2765\langle x-8 \rangle^2 + c_1$$

Segunda integral

$$EIY = \frac{694}{3}x^3 - \frac{48.4}{12}x^4 + 250\langle x-3 \rangle^2 - \frac{1000}{3}\langle x-3 \rangle^3 - \frac{250}{12}\langle x-5 \rangle^4 - \frac{50}{60}\langle x-5 \rangle^5 + \frac{400}{12}\langle x-8 \rangle^4 + \frac{50}{60}\langle x-8 \rangle^5 + \frac{2765}{3}\langle x-8 \rangle^3 + c_1x + c_2$$

Condiciones de contorno para buscar  $c_1, c_2$

para  $\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow c_2 = 0$

para  $\begin{matrix} x=8 \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow 0 = \frac{694}{3}(8)^3 - \frac{48.4}{12}(8)^4 + 250(5)^2 - \frac{1000}{3}(5)^3 - \frac{250}{12}(3)^4 - \frac{5}{6}(3)^5 + 8c_1 \Rightarrow c_1 = -8076.933$

Para  $x=10m \Rightarrow$  Se da una deformación máxima

$$EI\delta_{\max} = \frac{694}{3}(10)^3 - \frac{48.4}{12}(10)^4 + 250(7)^2 - \frac{1000}{3}(7)^3 - \frac{250}{12}(5)^4 - \frac{5}{6}(5)^5 + \frac{400}{12}(2)^4 + \frac{5}{6}(2)^5 + \frac{2765}{3}(2)^3 - 8076.933(10)$$

$$EI\delta_{\max} = 455.67 \Rightarrow \delta_{\max} = \frac{455.67}{(2.1)(7290)} \Rightarrow \delta_{\max} = 0.0298 \text{ cm}$$

Para el intervalo de  $3 < x < 5$

$$EI \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 694x^2 - \frac{48.4}{3}x^3 + 500\langle x-3 \rangle - 1000\langle x-3 \rangle^2 - 8076.933 = 0 \Rightarrow x = 3.57m$$

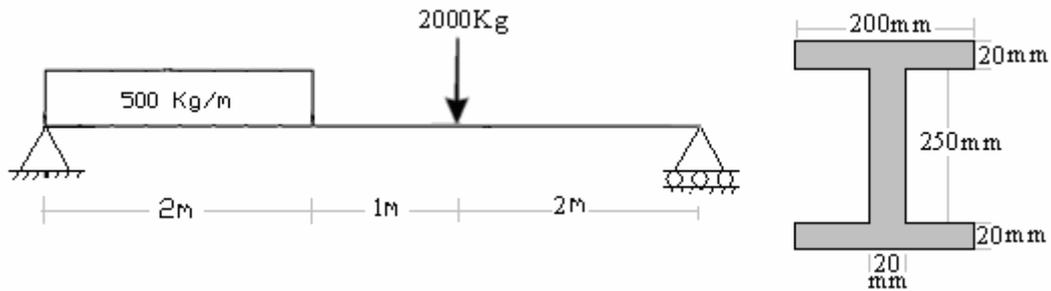
$$EI\delta_{\max} = \frac{694}{3}(3.57)^3 - \frac{48.4}{12}(3.57)^4 + 250(0.57)^2 - \frac{1000}{3}(0.57)^3 - 8076.933(3.57) \Rightarrow$$

$$EI\delta_{\max} = -18944.79$$

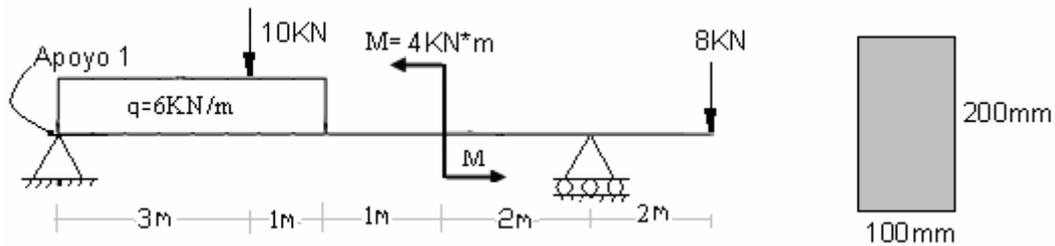
$$\delta_{\max} = \frac{18979.72}{(2.1)(7290)} \Rightarrow \delta_{\max} = 1.24 \text{ cm} \dots\dots\dots \text{Solución}$$

**PROBLEMAS PROPUESTOS**

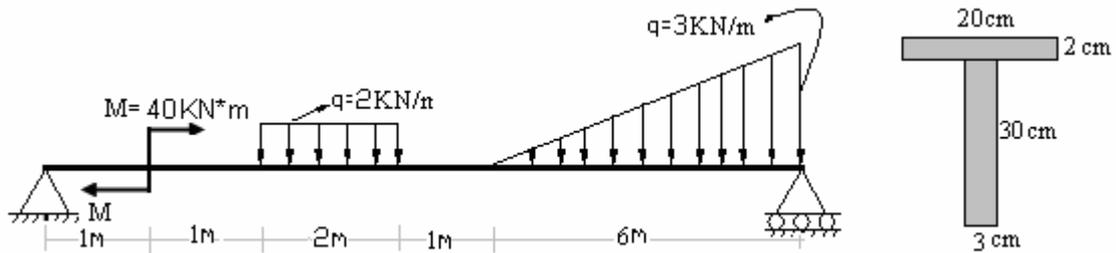
**8.1.-** Determinar la deformación máxima del debido a la flexión para una sección I  
 $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



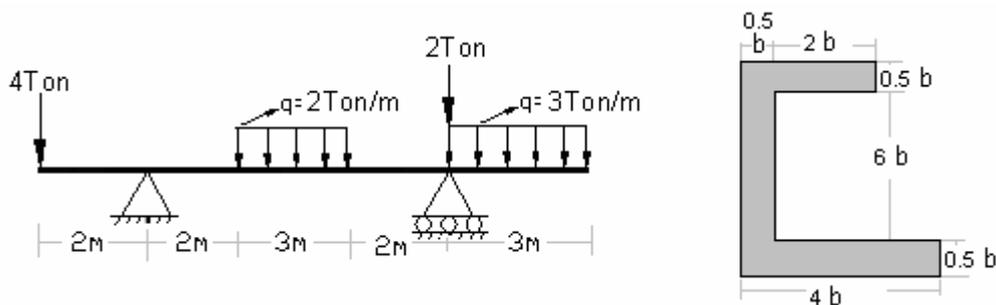
**8.2.-** Calcular de deformación Y en X=4m, medido desde el apoyo 1. Usar  $E=80\text{GPa}$ .



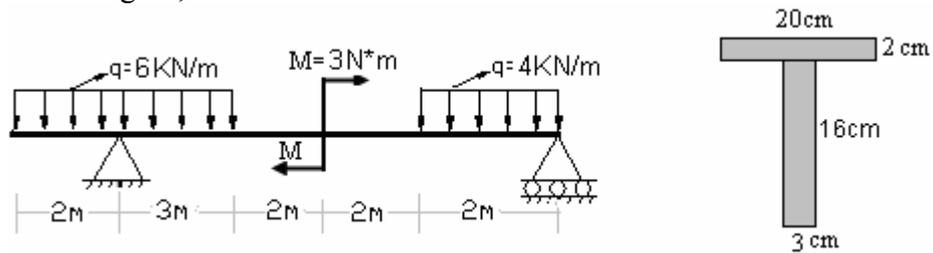
**8.3.-** Calcular la deformación máxima en el centro de los apoyos de la viga de la figura. Donde:  $E=80\text{GPa}$ .



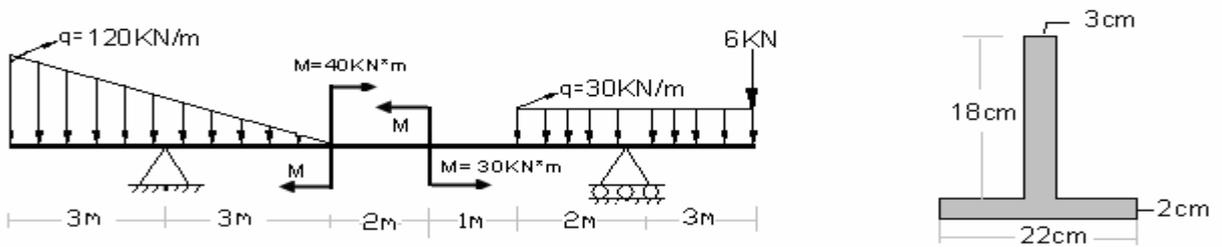
**8.4.-** Calcular las dimensiones necesarias de la sección transversal de la viga mostrada en la figura, de modo que no sobrepase los siguientes valores admisibles:  $\sigma=1800\text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau_f=0.8\sigma$ ,  $\delta_f=0.0008 \text{ m}$  y para un  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



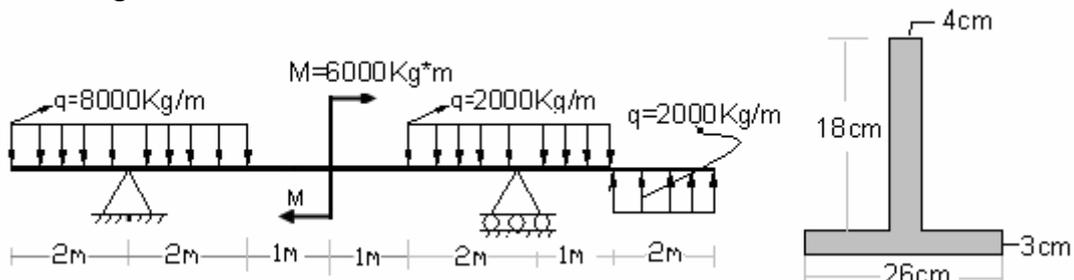
8.5.- Calcular el valor de la deflexión de la viga en el centro entre los apoyos de la viga mostrada en la figura, donde  $E= 200\text{GPa}$ .



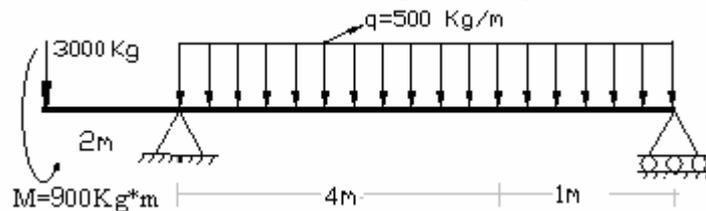
8.6.- Calcular la deflexión en el centro entre los apoyos de la viga de la figura. Donde  $E= 180\text{GPa}$ .



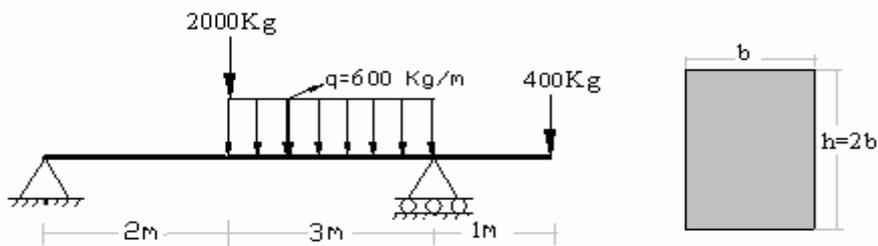
8.7.- Calcular la deformación máxima en la viga mostrada en la figura, si  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



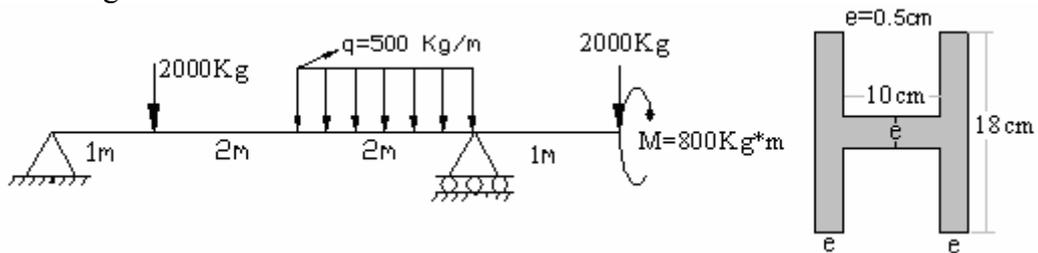
8.8.- Calcular la máxima deformación ( $EIY_{\max}$ ) para la viga mostrada en la figura.



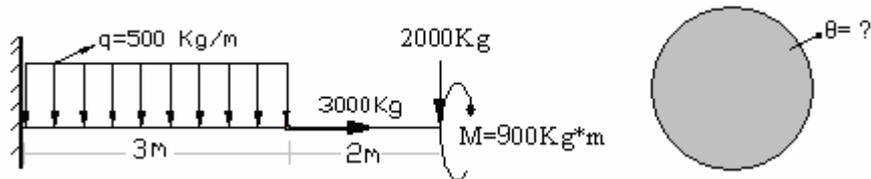
8.9.- Calcular la deformación máxima en la viga mostrada en la figura, si  $\sigma=2400\text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau=0.6\sigma$ ,  $n=2$  y  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



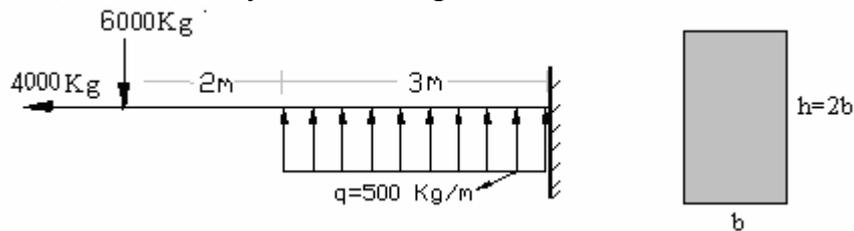
**8.10.-** Calcular la deformación máxima en la viga mostrada en la figura, si  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



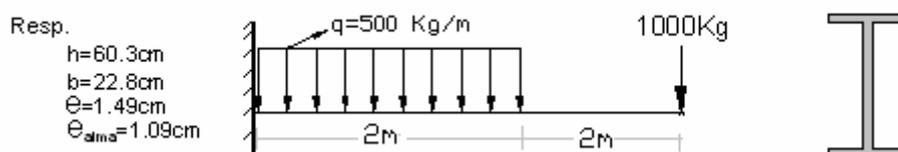
**8.11.-** Calcular la deformación máxima en la viga mostrada en la figura, si  $\sigma=2400\text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau=0.6\sigma$ ,  $n=2$  y  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



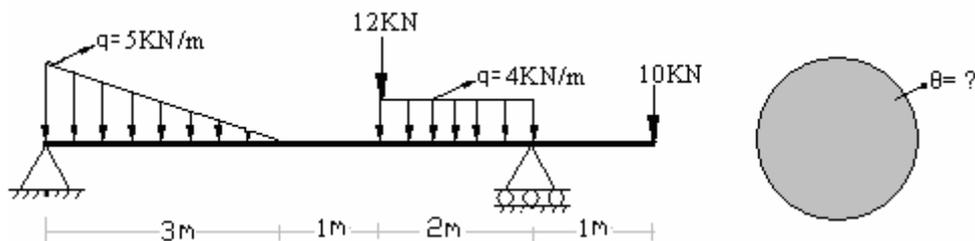
**8.12.-** Calcular la deformación máxima en la viga mostrada en la figura, si  $\sigma=2400\text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau=0.6\sigma$ ,  $n=2$  y  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



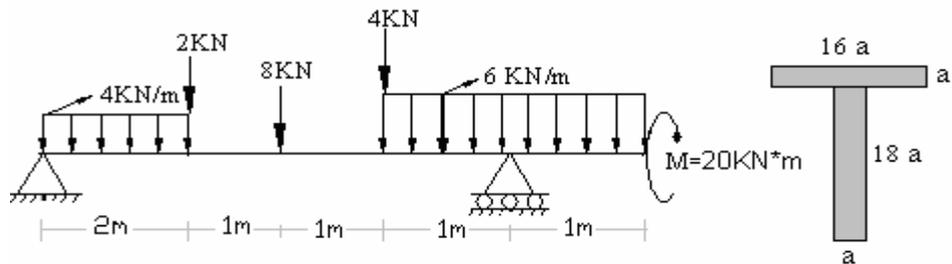
**8.13.-** Hallar las el perfil mas económico, para  $\sigma=4200\text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau=0.5\sigma$ ,  $n=2$ ,  $\delta=L/2000\text{cm}$  y  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



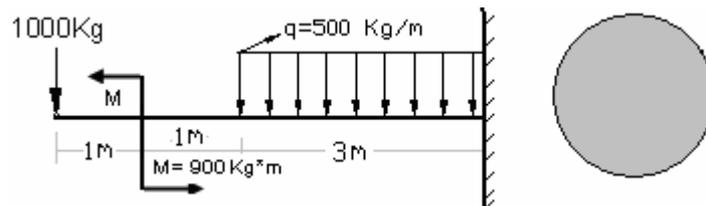
**8.14.-** Calcular la deformación máxima en la viga mostrada en la figura, si  $\sigma=4200\text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau=0.5\sigma$ ,  $n=3$  y  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



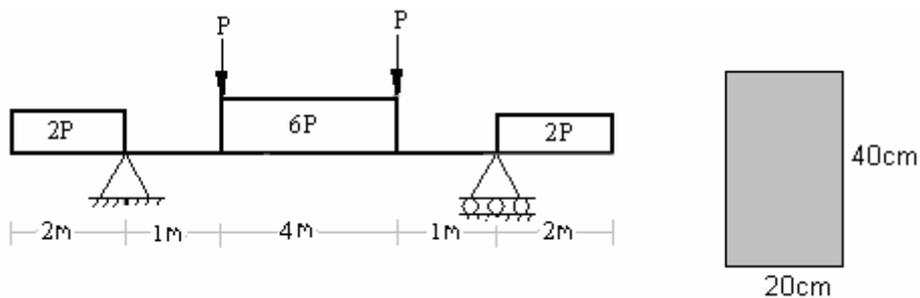
8.15.- Calcular la deformación máxima en la viga mostrada en la figura, si  $\sigma=4200\text{N/cm}^2$ ,  $\tau=0.5\sigma$ ,  $n=3$   $E=2.1 \times 10^6\text{N/cm}^2$ .



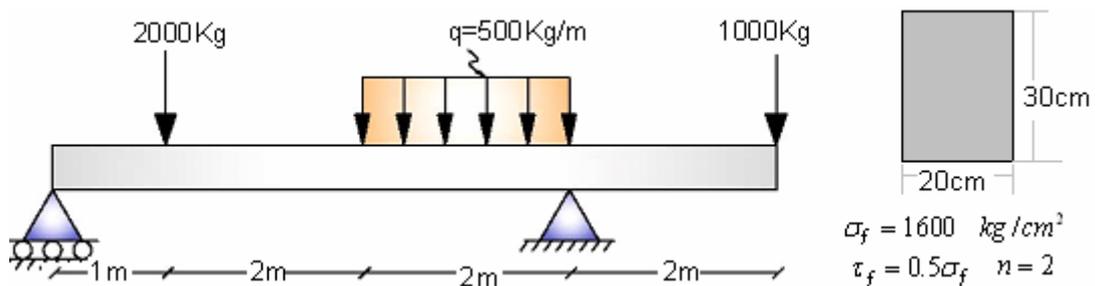
8.16.- Calcular la deformación máxima en la viga mostrada en la figura, si el diámetro es de 20cm  $E=2.1 \times 10^6\text{Kg/cm}^2$ .



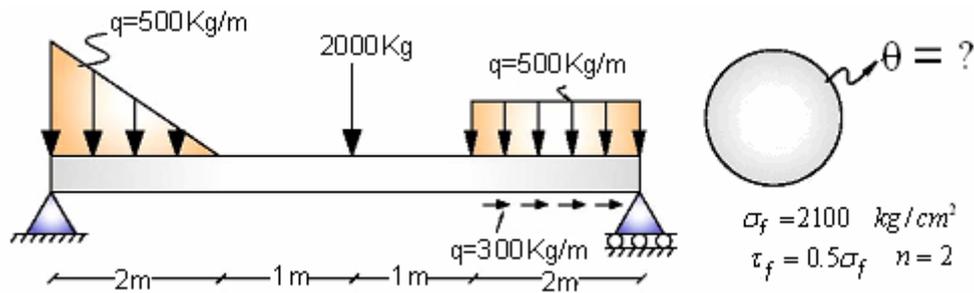
8.17.- Calcular la deformación máxima en la viga mostrada en la figura, si  $P=500\text{Kg}$  y  $E=2.1 \times 10^6\text{Kg/cm}^2$ .



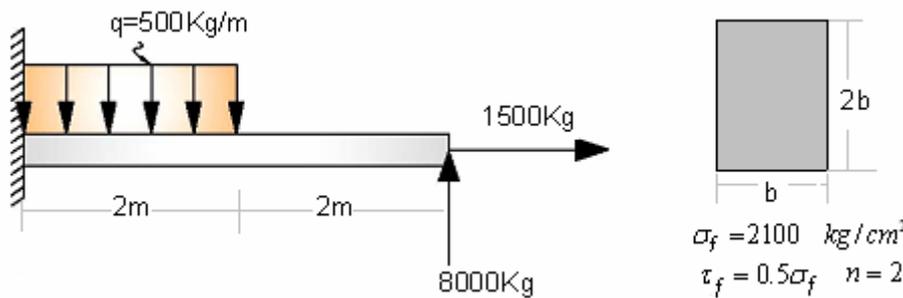
8.18.- Determinar la deformación máxima de la sección transversal,  $E=2.1 \times 10^6\text{Kg/cm}^2$  y  $X_{\max}=?$



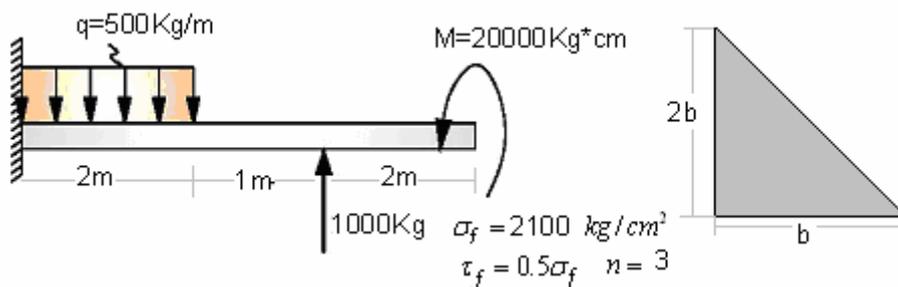
8.19.- Determinar la deformación máxima de la sección transversal,  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$  y  $X_{\max}=?$ .



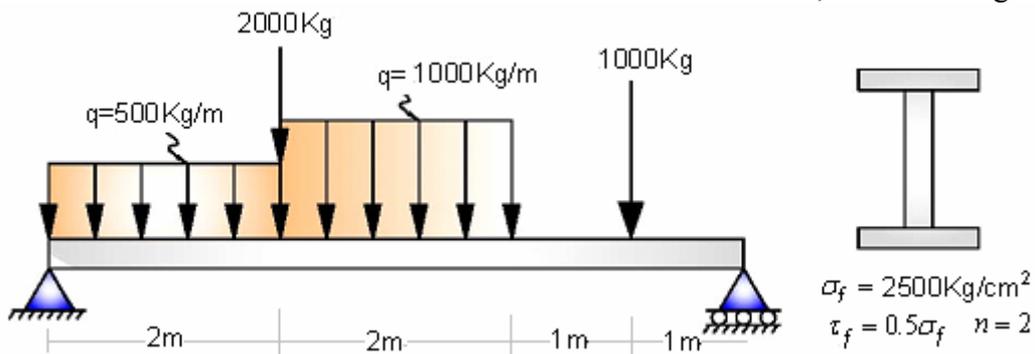
8.20.- Determinar la deformación máxima de la sección transversal,  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



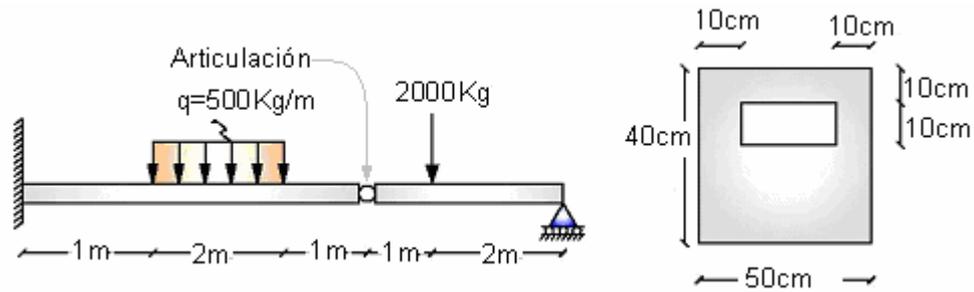
8.21.- Determinar la deformación máxima de la sección transversal,  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



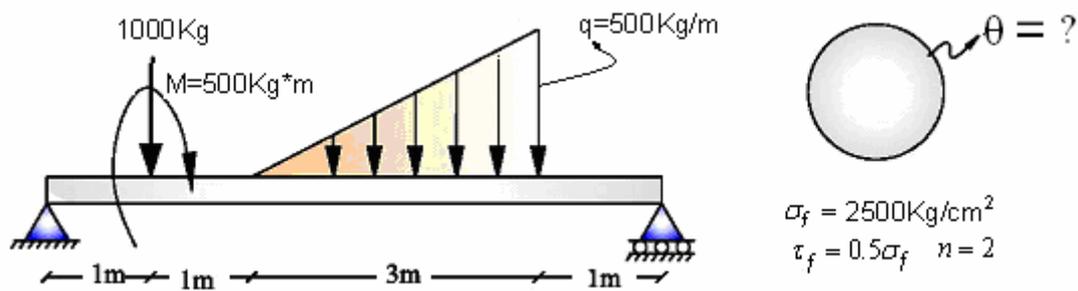
8.22.- Determinar la deformación máxima de la sección transversal,  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



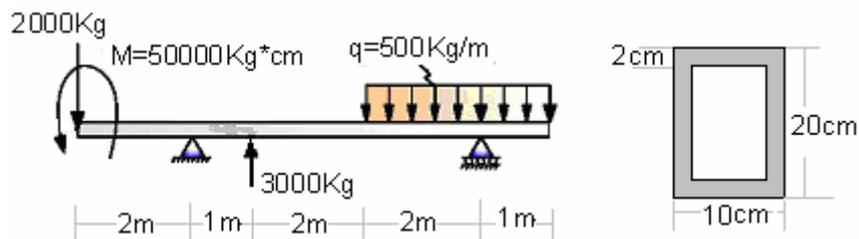
8.23.- Determinar la deformación máxima de la sección transversal,  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



8.24.- Determinar la deformación máxima de la sección transversal,  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$



8.25.- Determinar la deformación máxima de la sección transversal,  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



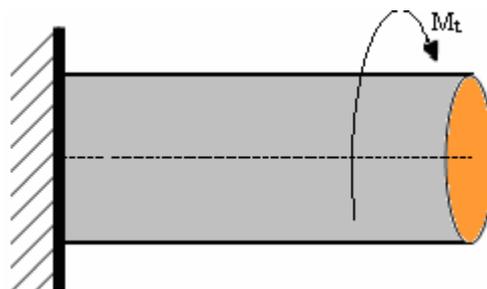
## CAPITULO IX TORSIÓN EN VIGAS

---

### 9.1.- INTRODUCCIÓN

El estudio de los problemas y sus aplicaciones de la torsión solo se analizara para el caso de las vigas de sección circular.

En este capitulo se consideraran elementos sometidos a torsión, mas específicamente, se estudiaran los esfuerzos y deformaciones de sección circular, sometidos a pares de torsión.

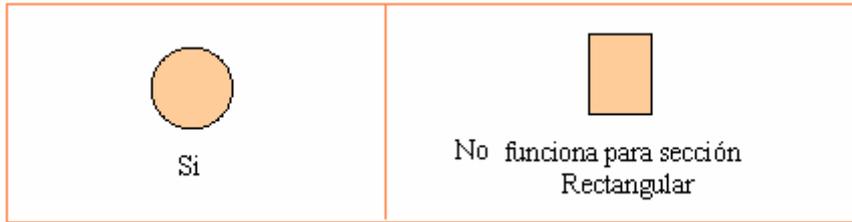


### 9.2.- OBJETIVOS

- Establecer las ecuaciones que nos permitan hallar las tensiones normales y cortantes en una viga sometida a torsión y bajo las condiciones en las cuales es posible aplicar.
- Establecer criterios de dimensionamiento.

9.3.- HIPOTESIS

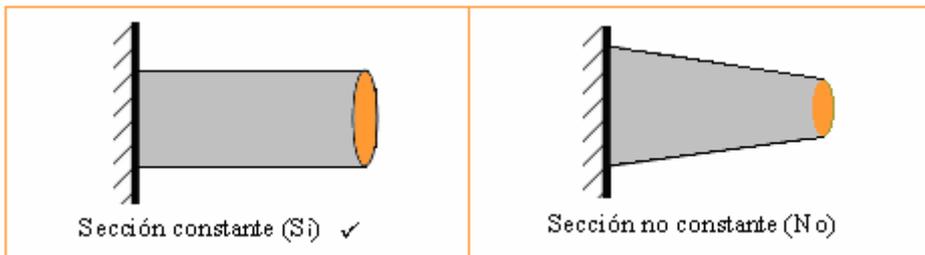
- Las secciones tienen que ser circulares.



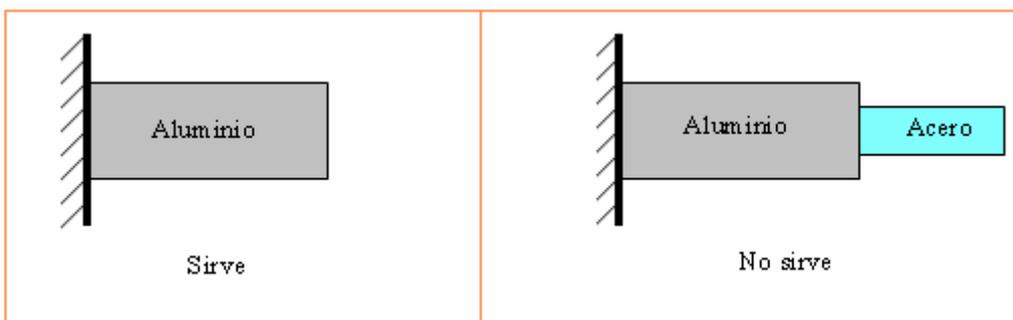
- El momento torsión actúa en el plano perpendicular al eje de la viga.



- La sección tiene que ser constante.

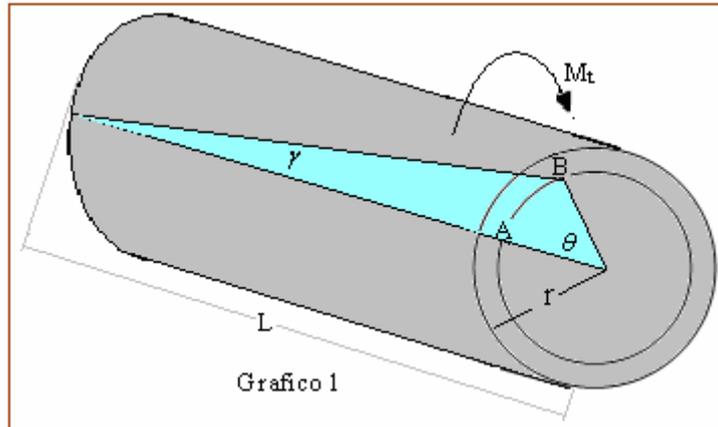


- Material homogéneo en toda la longitud.



- Cumple la ley de Hooke.
- Las tensiones no sobrepasan el límite de proporcionalidad.

**9.4.- DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE CORTANTE Y LA DEFORMACIÓN ANGULAR DEVIDO A LA TORSIÓN**

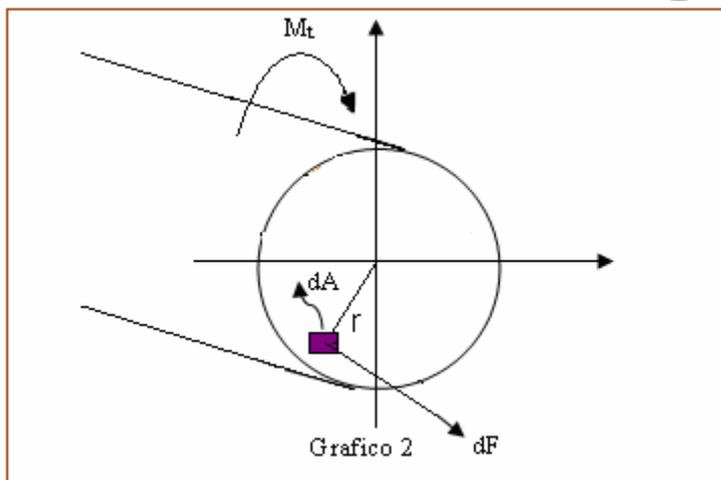


Ecuación de la tensión cortante del capítulo III es:  $\tau = G * \gamma$  ..... (9.1)

Del grafico 1  $\tan \gamma = \frac{AB}{L}$  y  $\tan \gamma \cong \gamma$ , por tanto se tiene  $\gamma = \frac{AB}{L}$  ..... (9.2)

Del grafico 1 se tiene que  $AB = \theta * r$  ..... (9.3)

Sustituyendo las ecuaciones (9.2) y (9.3) en (9.1) se tiene  $\tau = G * \frac{\theta * r}{L}$  ..... (9.4)



Del grafico 2 se tiene que  $\tau = \frac{F}{A} \Rightarrow dF = \tau * dA \Rightarrow M_t = \int (\tau * dA) * r$  ..... (9.5)

Sustituyendo (4) en (5) se tiene  $M_t = \int \left( \frac{G * \theta * r}{L} \right) * r * dA \Rightarrow$

$M_t = \frac{G * \theta}{L} \int r^2 * dA$  ..... (9.6)

$\int r^2 * dA = I_p$  es la inercia con respecto al polo (inercia polar). Con lo cual se tiene que

$M_t = \frac{G * \theta * I_p}{L}$  despejando  $\theta$  tenemos el ángulo de torsión

$$\theta = \frac{M_t * L}{G * I_p} \dots\dots\dots(9.7)$$

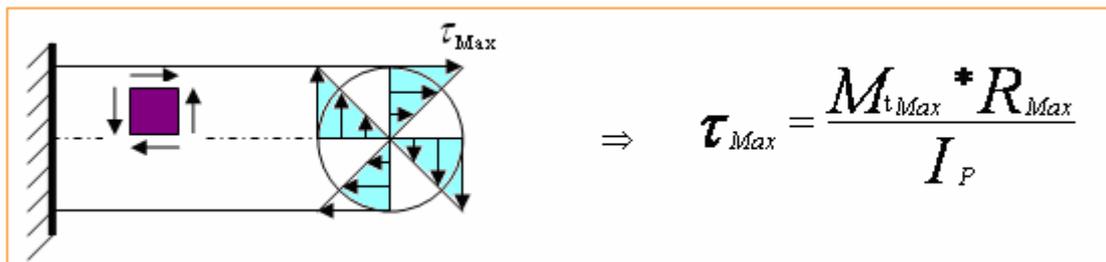
(9.7)Sustituyendo la ecuación (9.4) tenemos:

$$\tau = \frac{G \cdot R \left( \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I_p} \right)}{L \left( G \cdot I_p \right)} \Rightarrow \tau = \frac{M_t \cdot R}{I_p}$$

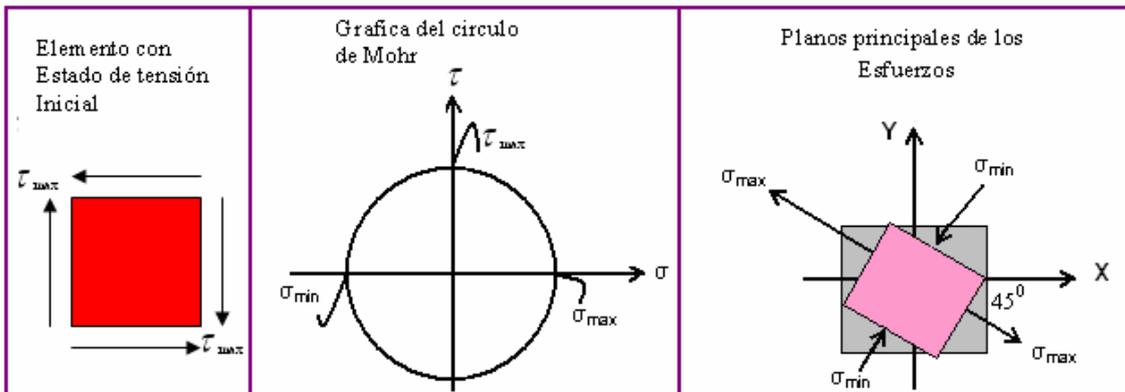
RESUMEN

<p>Ecuación general de la Deformación angular</p> $\theta = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I_p}$	<p>Ecuación general de la Cortante a torsión</p> $\tau = \frac{M_t \cdot R}{I_p}$
--	---

**9.5.- ANÁLISIS DE LAS TENSIONES MÁXIMAS.**



Para encontrarlas tensiones máximas se analiza con el circulo de Mohr.



**PARA SU DIMENSIONAMIENTO LAS TENSIONES MÁXIMAS SON:**

$$\tau_{Max} = \sigma_{Max} = \frac{M_{t_{max}} \cdot R_{Max}}{I_P} \leq \{ \bar{\sigma} \text{ ó } \bar{\tau} \} \rightarrow \text{Al más crítico.....(9.8)}$$

Donde:

- $\tau_{Max}$  = Tension Cortante máximo (Kg/cm<sup>2</sup>)
- $\sigma_{Max}$  = Tension Máxima (Kg/cm<sup>2</sup>).
- $M_{t_{max}}$  = Momento Torsor Máxima (Kg\*cm)
- $R_{max} = \frac{\phi}{2} \Rightarrow$  Distancia máxima, del eje neutro (cm).
- $\theta$  = Angulo de torsión (grados y en radianes).
- L= Longitud de la viga (cm.).
- $I_p$  = Inercia polar (cm<sup>4</sup>)

---

**PREGUNTAS TEÓRICAS DE LOS CAPITULOS VI-VII-VIII Y IX**

**1.- La ecuación (9.8) sirve para dimensionar secciones rectangulares?**

**R.-** No sirve, por que la ecuación es deducida para el caso de sección circular.

**2.- Por que se completa la carga distribuida hasta el final del tramo y se secciona el último tramo para hallar la ecuación singular de momento?**

**R.-** Se hace con la finalidad de que el último tramo contenga todas las ecuaciones de los anteriores tramos.

**3.- Defina que es viga?**

**R.-** Son elementos prismáticos rectos y largos diseñados para soportar cargas aplicadas en varios puntos a lo largo del elemento colocado horizontalmente.

**4.- Defina que es columna?**

**R.-** Apoyo que sostiene los techos, vigas y losas, colocado verticalmente.

**5.- Cuando una columna deja de ser columna.**

**R.-** Cuando cambia de su posición vertical hacia otra nueva posición horizontal.

**6.- La forma de la gráfica de momento ya sea cóncava o convexa interesa para realizar los cálculos?**

**R.-** No interesa, por que solo nos necesitamos el valor numérico en la sección critica.

**7.- Cuando uno sabe que el problema esta bien resuelto?**

**R.-** Cuando cumple todas las condiciones dadas, ya sean a la resistencia y a la rigidez.

**8.- De donde salen las condiciones para determinar  $C_1$  y  $C_2$ ?**

**R.-** De los apoyos de la viga.

**9.- Las condiciones de apoyo son los únicos para todos los casos?**

**R.-** No son los únicos, por que dependen de los apoyos sobre la viga.

**10.- En una viga empotrada en un extremo y libre en el otro, siempre se dará momento máximo en el empotramiento?**

**R.-** No siempre, por que depende de la fuerza puntual que actúan sobre la viga, ver ejemplo 7.5 pagina 144.

**11.- Que momento de inercia tengo que utilizar para la ecuación (9.8)?**

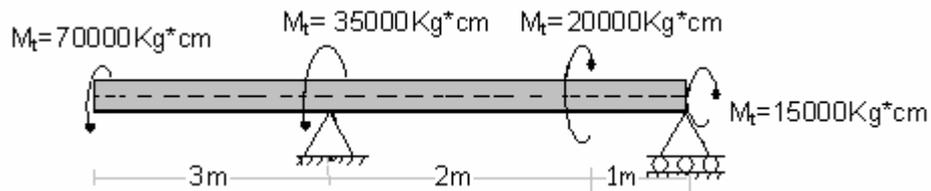
**R.-** Se tiene que utilizar el momento de inercia con respecto al polo ( $I_p = \frac{\pi\phi^4}{32}$ )

**12.- Por que se escoge el valor menor de las vargas en la selección de perfiles, sin tomar casi en cuenta el valor del modulo de resistencia?**

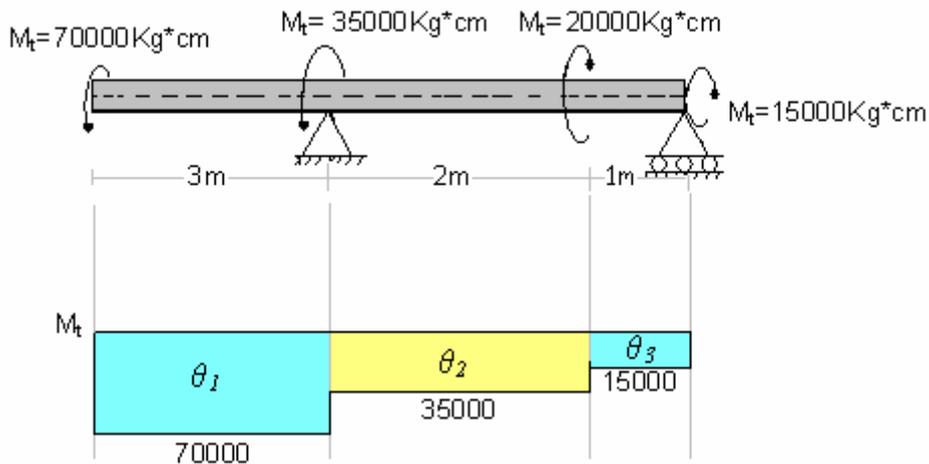
**R.-** Por que los perfiles se comercializan de acuerdo al peso, a mayor peso costo elevado y a menor peso, es el más económico.

**PROBLEMAS RESUELTOS DE TENSION CORTANTE A TORSION**

**PROBLEMA 9.1.-** Calcular el ángulo de torsión total de una viga de sección circular de diámetro 25cm, para el sistema mostrado a continuación: Si  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$  y  $\mu=0.3$ .



Solución



$$\theta_1 = \frac{M_t * L_1}{G * I_P} \Rightarrow \theta_1 = \frac{70000 * 300}{\frac{2.1 \times 10^6}{2(1+0.3)} * \frac{\pi}{32} * (25)^4} \Rightarrow \theta_1 = 6.7797 \times 10^{-4} * 57.3 \Rightarrow \theta_1 = 0.039^\circ$$

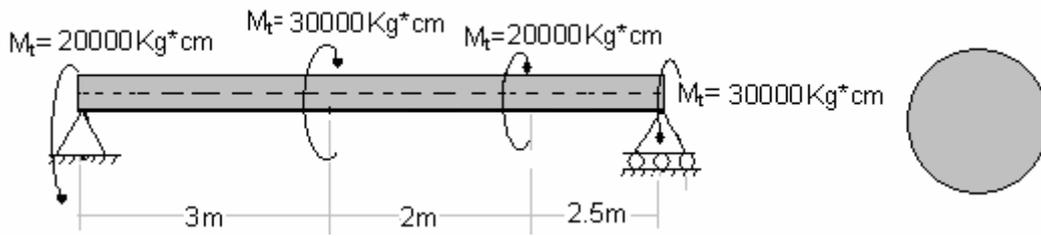
$$\theta_2 = \frac{M_t * L_2}{G * I_P} \Rightarrow \theta_2 = \frac{35000 * 200}{\frac{2.1 \times 10^6}{2(1+0.3)} * \frac{\pi}{32} * (25)^4} \Rightarrow \theta_2 = 2.2599 \times 10^{-4} * 57.3 \Rightarrow \theta_2 = 0.013^\circ$$

$$\theta_3 = \frac{M_t * L_3}{G * I_P} \Rightarrow \theta_3 = \frac{15000 * 100}{\frac{2.1 \times 10^6}{2(1+0.3)} * \frac{\pi}{32} * (25)^4} \Rightarrow \theta_3 = 4.84267 \times 10^{-5} * 57.3 \Rightarrow \theta_3 = 0.0028^\circ$$

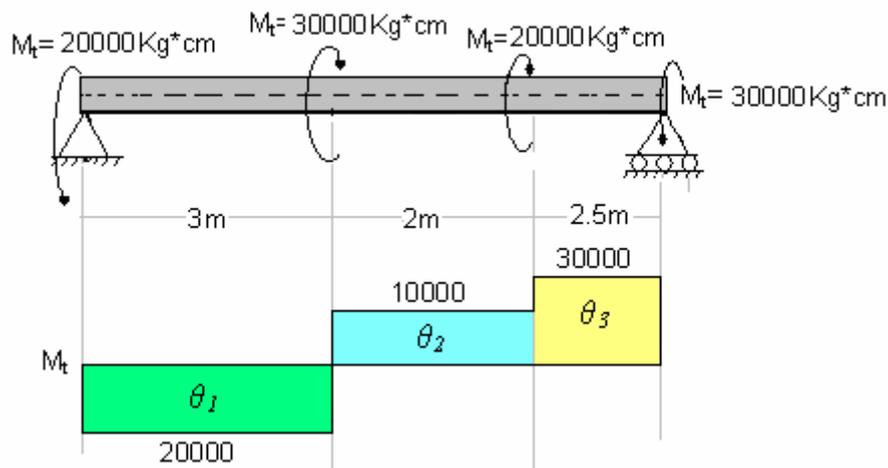
$$\theta_T = \sum \theta_i \Rightarrow \theta_T = -\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \Rightarrow \theta_T = -0.039^\circ + 0.013^\circ + 0.0028^\circ \Rightarrow \theta_T = 0.0232^\circ$$

En dirección anti horario a las manecillas del reloj

**PROBLEMA 9.2.-** Calcular el ángulo de torsión total de una viga de sección circular:  
Si  $\sigma_f=2100\text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau_f=0.5\sigma_f$ ,  $n=2$ ,  $\mu = 0.3$  y  $E = 1.8 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



Solución



$$\tau_{Max} = \frac{M_{tmax} * R_{Max}}{I_P} \leq 525 \Rightarrow \frac{30000 * \frac{d}{2}}{\frac{\pi}{32} * d^4} \leq 525 \Rightarrow d \geq 6.63\text{cm} \Rightarrow d = 7\text{cm}$$

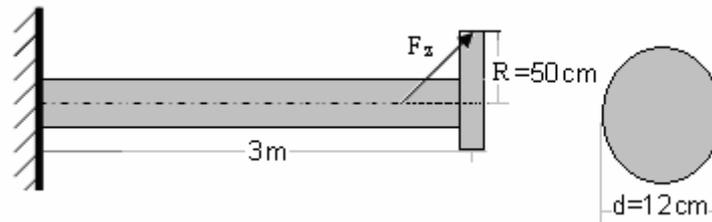
$$\theta_1 = \frac{M_t * L_1}{G * I_P} \Rightarrow \theta_1 = \frac{20000 * 300}{\frac{1.8 \times 10^6}{2(1+0.3)} * \frac{\pi}{32} * (7)^4} \Rightarrow \theta_1 = 0.03677 * 57.3 \Rightarrow \theta_1 = 2.11^\circ$$

$$\theta_2 = \frac{M_t * L_2}{G * I_P} \Rightarrow \theta_2 = \frac{10000 * 200}{\frac{1.8 \times 10^6}{2(1+0.3)} * \frac{\pi}{32} * (7)^4} \Rightarrow \theta_2 = 0.0122557 * 57.3 \Rightarrow \theta_2 = 0.70225^\circ$$

$$\theta_3 = \frac{M_t * L_3}{G * I_P} \Rightarrow \theta_3 = \frac{30000 * 250}{\frac{1.8 \times 10^6}{2(1+0.3)} * \frac{\pi}{32} * (7)^4} \Rightarrow \theta_3 = 0.045958 * 57.3 \Rightarrow \theta_3 = 2.6334^\circ$$

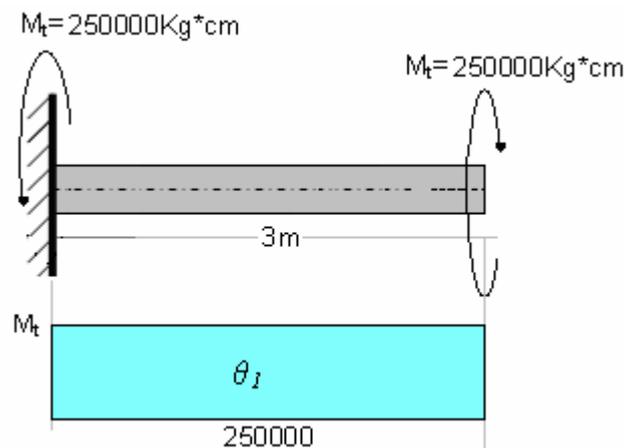
$$\theta_T = \sum \theta_i \Rightarrow \theta_T = -\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \Rightarrow \theta_T = -2.11^\circ + 0.70225^\circ + 2.6334^\circ \Rightarrow \theta_T = 1.226^\circ$$

**PROBLEMA 9.3.-** Calcular el ángulo de torsión total de una viga de sección circular de diámetro de 12cm,  $F_z=5000\text{Kg}$ : Si,  $\mu = 0.2$  y  $E = 1.5 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



Solución

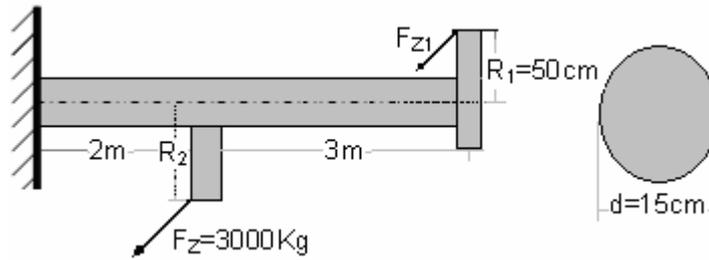
$$M_t = F_z * R \Rightarrow M_t = 5000\text{Kg} * 50\text{cm} \Rightarrow M_t = 250000\text{Kg} * \text{cm}$$



$$\theta_1 = \frac{M_t * L_1}{G * I_p} \Rightarrow \theta_1 = \frac{250000 * 300}{\frac{1.5 \times 10^6}{2(1+0.2)} * \frac{\pi}{32} * (12)^4} \Rightarrow \theta_1 = 0.058946 * 57.3 \Rightarrow \theta_1 = 3.38^\circ$$

En dirección anti horario a las manecillas del reloj

**PROBLEMA 9.4.-** Calcular el ángulo de torsión total de una viga de sección circular de diámetro de 15cm: Si  $F_{Z1}=4000\text{Kg}$ ,  $R_2=30\text{cm}$ ,  $\mu = 0.3$  y  $E = 1.5 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



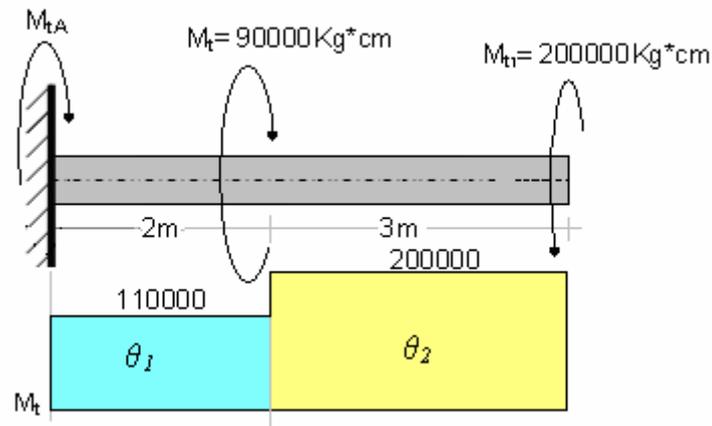
Solución

$$M_i = F_z * R \Rightarrow M_i = 3000\text{Kg} * 30\text{cm} \Rightarrow M_i = 90000\text{Kg} * \text{cm}$$

$$M_{i1} = F_{z1} * R \Rightarrow M_{i1} = 4000\text{Kg} * 50\text{cm} \Rightarrow M_{i1} = 200000\text{Kg} * \text{cm}$$

$$\sum M_i = 0 \Rightarrow M_{tA} + M_i - M_{i1} = 0$$

$$M_{tA} + 90000 - 200000 = 0 \Rightarrow M_{tA} = 110000\text{Kg} * \text{cm}$$



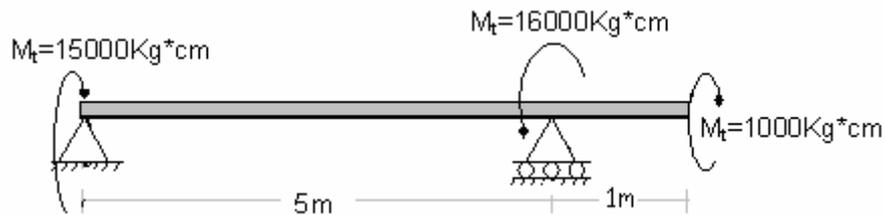
$$\theta_1 = \frac{M_i * L_1}{G * I_P} \Rightarrow \theta_1 = \frac{110000 * 200}{\frac{1.8 \times 10^6}{2(1+0.3)} * \frac{\pi}{32} * (15)^4} \Rightarrow \theta_1 = 6.39379 \times 10^{-3} * 57.3 \Rightarrow \theta_1 = 0.3664^\circ$$

$$\theta_2 = \frac{M_{i1} * L_2}{G * I_P} \Rightarrow \theta_2 = \frac{200000 * 300}{\frac{1.8 \times 10^6}{2(1+0.3)} * \frac{\pi}{32} * (15)^4} \Rightarrow \theta_2 = 0.01744 * 57.3 \Rightarrow \theta_2 = 0.9992^\circ$$

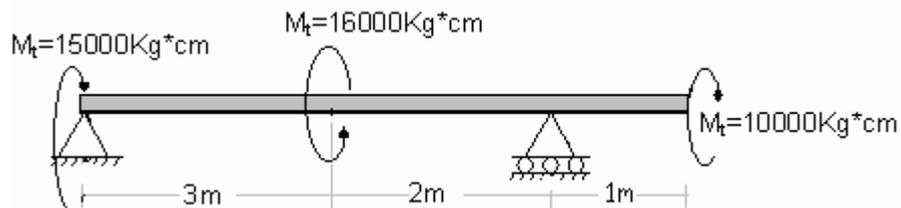
$$\theta_T = \sum \theta_i \Rightarrow \theta_T = \theta_1 + \theta_2 \Rightarrow \theta_T = 0.3664^\circ + 0.992^\circ \Rightarrow \theta_T = 1.3656^\circ$$

**PROBLEMAS PROPUESTOS DE TENSIÓN CORTANTE A TORSIÓN**

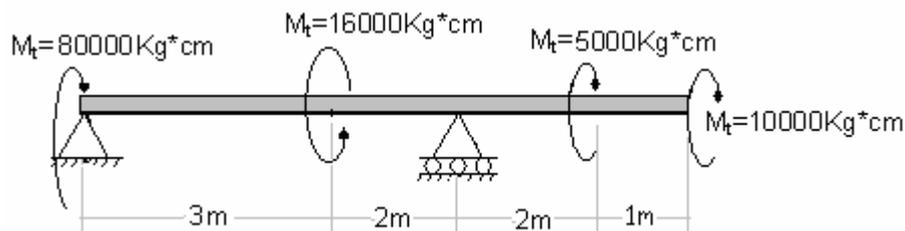
**9.1.-** Calcular el ángulo de torsión total de una viga de sección transversal circular de diámetro 10cm, para el sistema mostrado a continuación: Si  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$  y  $\mu=0.3$ .



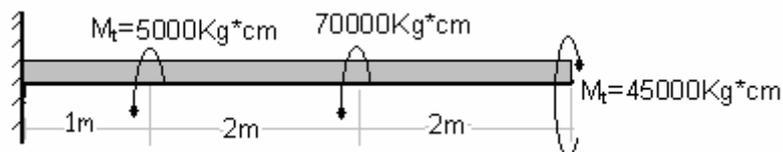
**9.2.-** Calcular el ángulo de torsión total de una viga de sección transversal circular de diámetro 15cm, para el sistema mostrado a continuación: Si  $E=1.8 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$  y  $\mu=0.3$ .



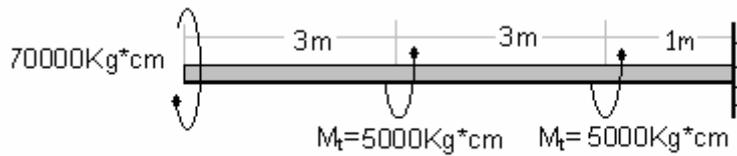
**9.3.-** Calcular la dimensión de una viga de sección circular, para el sistema mostrado a continuación: Si  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ ,  $\bar{\theta} = 0.8^\circ$  y  $\mu=0.2$ .



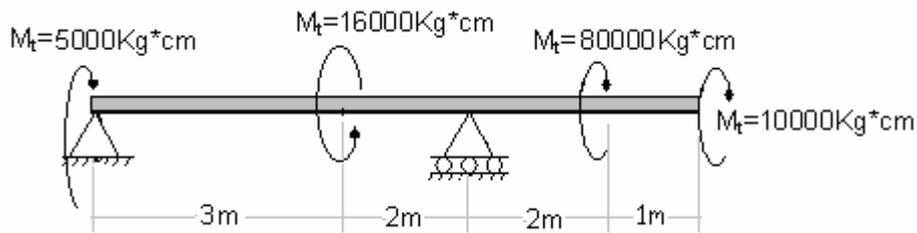
**9.4.-** Calcular la dimensión de una viga de sección transversal circular, para el sistema mostrado a continuación: Si  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ ,  $\bar{\theta} = 1.2^\circ$  y  $\mu=0.3$ .



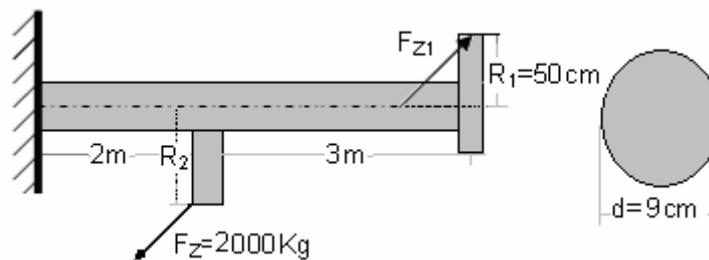
9.5.- Calcular el ángulo de torsión total de una viga de sección transversal circular de diámetro 10cm, para el sistema mostrado a continuación: Si  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$  y  $\mu=0.2$ .



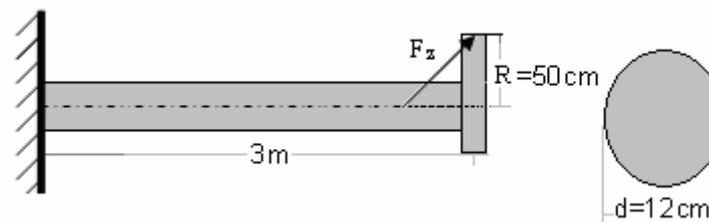
9.6.- Calcular la dimensión de una viga de sección circular, para el sistema mostrado a continuación: Si  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ ,  $\theta = 0.5^\circ$  y  $\mu=0.2$ .



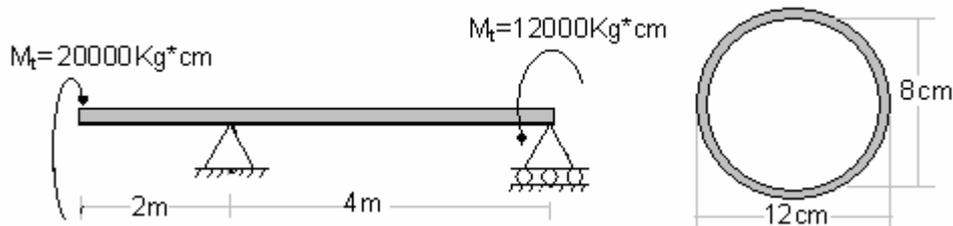
9.7.- Calcular el ángulo de torsión total de una viga de sección transversal circular de diámetro de 15cm: Si  $F_{Z1}=4000\text{Kg}$ ,  $R_2=20\text{cm}$ ,  $\mu = 0.3$  y  $E = 1.5 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



9.8.- Calcular el ángulo de torsión total de una viga de sección transversal circular de diámetro de 12cm,  $F_z=2500\text{Kg}$ : Si,  $\mu = 0.3$  y  $E = 2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



9.9.- Calcular la tensión cortante máxima y mínima de la sección transversal.



---

# CAPITULO X

## TENSIONES COMBINADAS EN EL ESPACIO

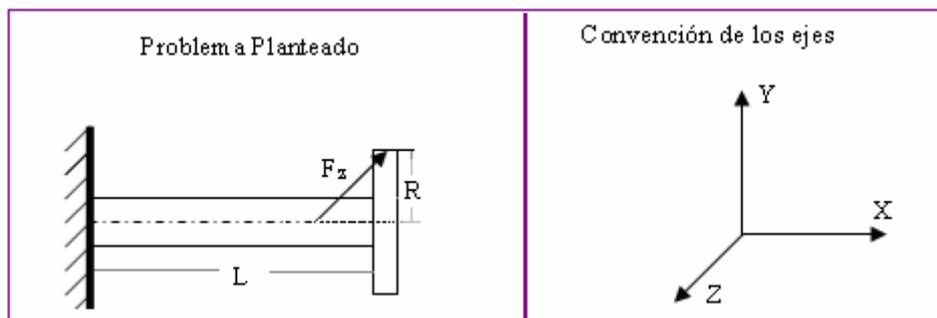
---

(FLEXO – TRAXO – TORSIÓN)

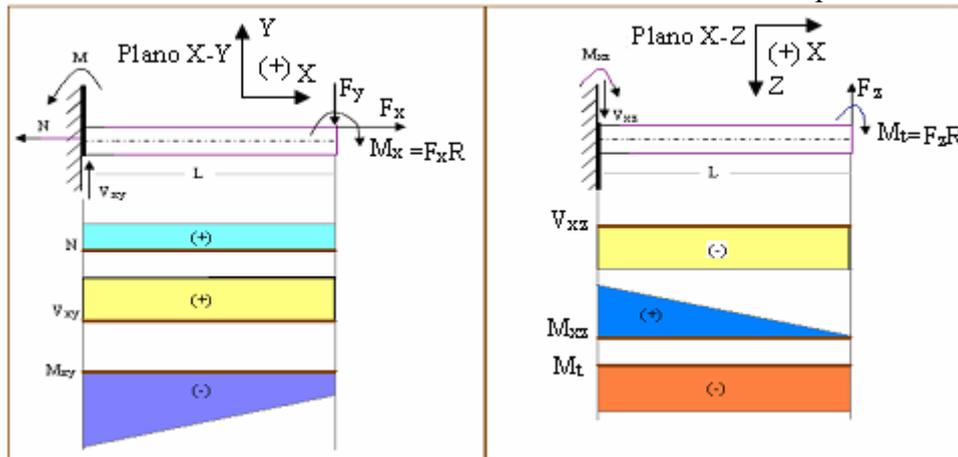
### 10.1.- INTRODUCCIÓN

Este capítulo se basa a un resumen de toda la materia, se analizara todos los efectos que se presenta cuando una viga es sometida a flexión en el espacio.

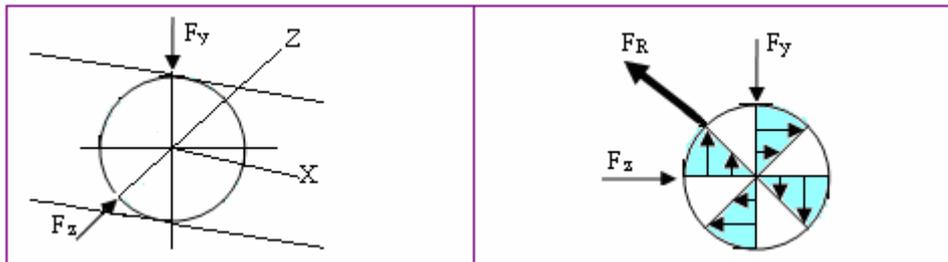
### 10.2.- ANÁLISIS DE LAS TENSIONES MÁXIMAS CASO VIGA DE SECCIÓN CIRCULAR



El problema consiste en encontrar los momentos máximos en los dos planos



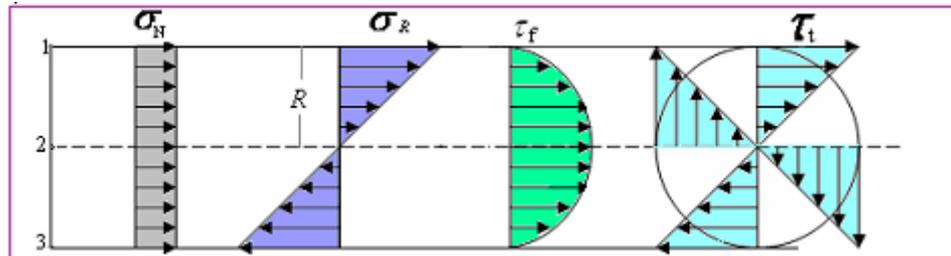
a).- DETERMINACIÓN DE LAS TENSIONES RESULTANTES



b).- DETERMINACIÓN DE LA SECCIÓN CRÍTICA.

$$M_R = \sqrt{M_{XY}^2 + M_{XZ}^2} \quad \sigma_R = \frac{M_R * R}{I}$$

c).- DIAGRAMA DE TENSIONES RESULTANTES EN EL PLANO.



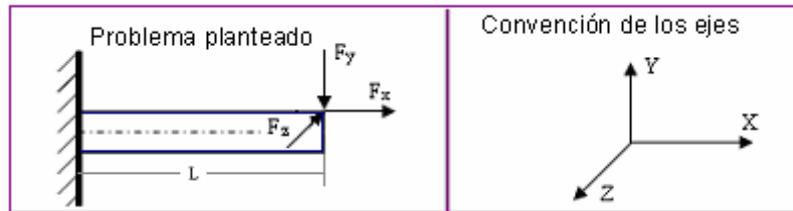
d).- DETERMINACIÓN DEL PUNTO CRÍTICO DE LAS DIAGRAMAS (1 - 1).

Elemento con estado de tensiones	Ecuaciones para el calculo	
	$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_R * R}{I}$	$I = \frac{\pi * \phi^4}{64}$
	$\tau_{max} = \frac{M_t * R}{I_p}$	$I_p = \frac{\pi * \phi^4}{32}$

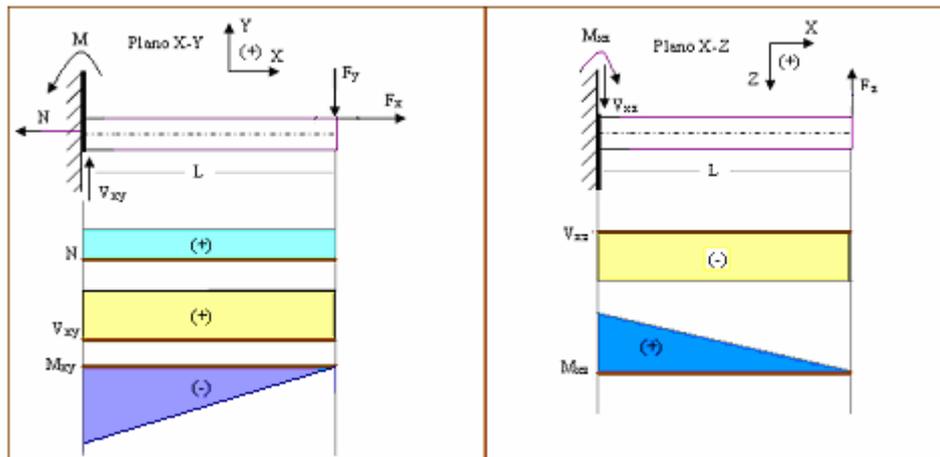
e).- ECUACIONES PARA SU DIMENSIONAMIENTO

Ecuación para la tensión máxima	Ecuación para la cortante máxima
$\sigma_{max} = \left( \frac{\sigma_x}{2} \right) + \sqrt{\left( \frac{\sigma_x}{2} \right)^2 + (\tau)^2} \leq \bar{\sigma}$	$\tau_{max} = R = \sqrt{\left( \frac{\sigma_x}{2} \right)^2 + (\tau)^2} \leq \bar{\tau}$

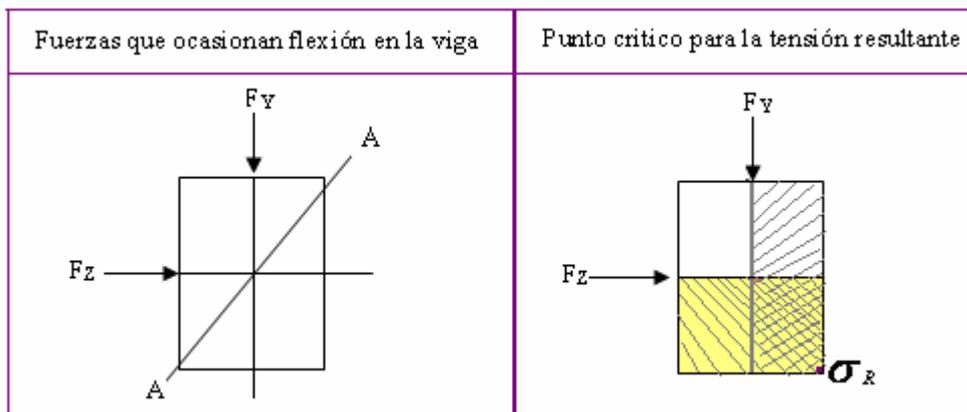
10.3.- ANÁLISIS DE LAS TENSIONES MÁXIMAS CASO VIGA DE SECCIÓN RECTANGULAR



El problema consiste en hallar los momentos máximos de los dos planos.



a).- DETERMINACIÓN DEL PUNTO MÁS CRÍTICO EN CASO DE UNA VIGA RECTANGULAR.

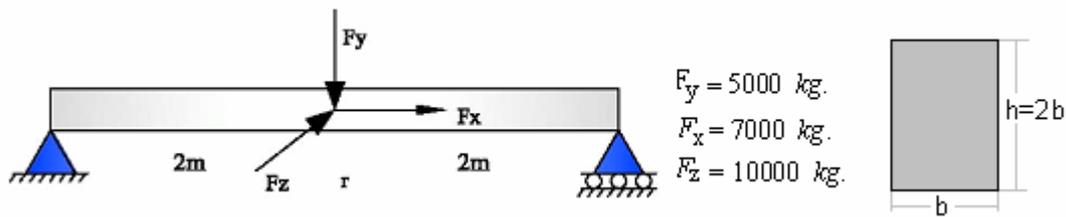


$$\sigma_R = \frac{M_{XY} * Y_{\max}}{I_{ZZ}} + \frac{M_{XZ} * Z_{\max}}{I_{YY}} \leq \bar{\sigma} \text{ Para dimensionar a tensión admisible}$$

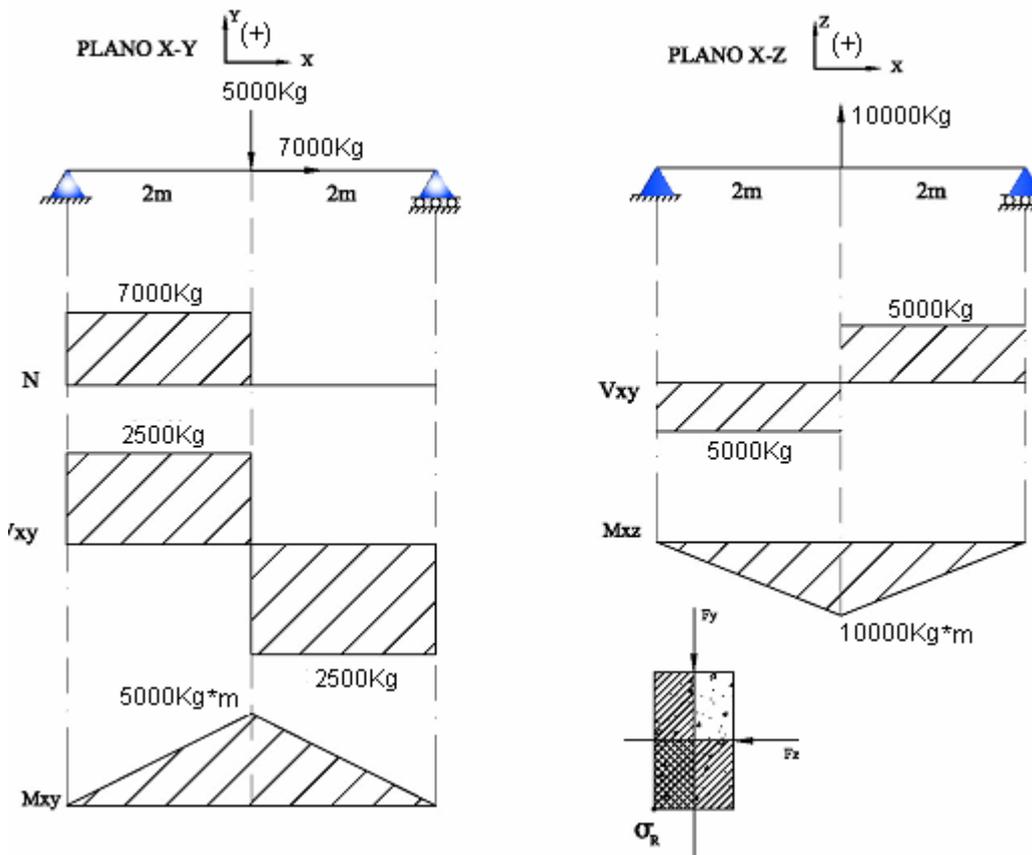
$$\tau_{\max} = \frac{V_{XY} * A' * \bar{Y}'}{I_{ZZ} * b} + \frac{V_{XZ} * A' * \bar{Y}''}{I_{YY} * h} \leq \bar{\tau} \text{ Para dimensionar a tensión cortante}$$

**PROBLEMAS RESUELTOS DE FLEXIÓN EN EL ESPACIO**

**PROBLEMA 10.1-** Calcular las dimensiones de una viga rectangular de  $h=2b$ , a partir de la estructura siguiente en base a los siguientes datos:  $\sigma_r=2100\text{Kg/cm}^2$ ,  $n=3$



Solución

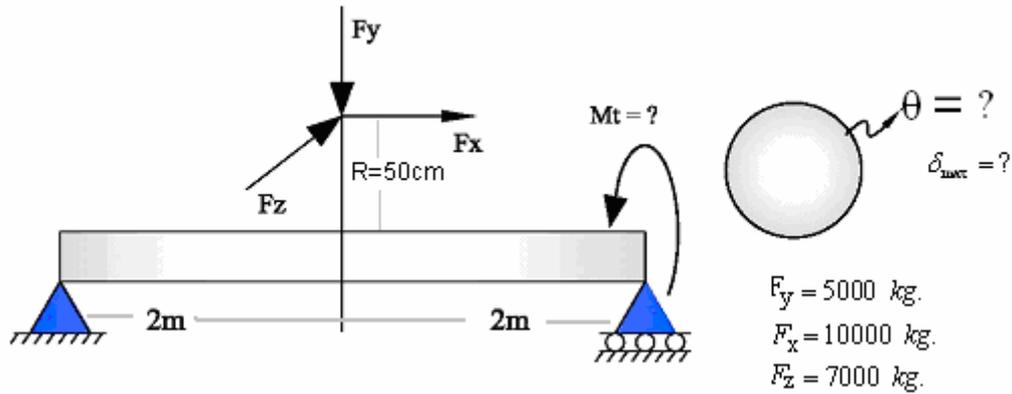


$$\sigma_r = \frac{N}{A} + \left| \frac{M_{MAX(xy)} * Y_{MAX}}{I_{XX}} \right| + \left| \frac{M_{MAX(xz)} * Z_{MAX}}{I_{YY}} \right| \leq \bar{\sigma}$$

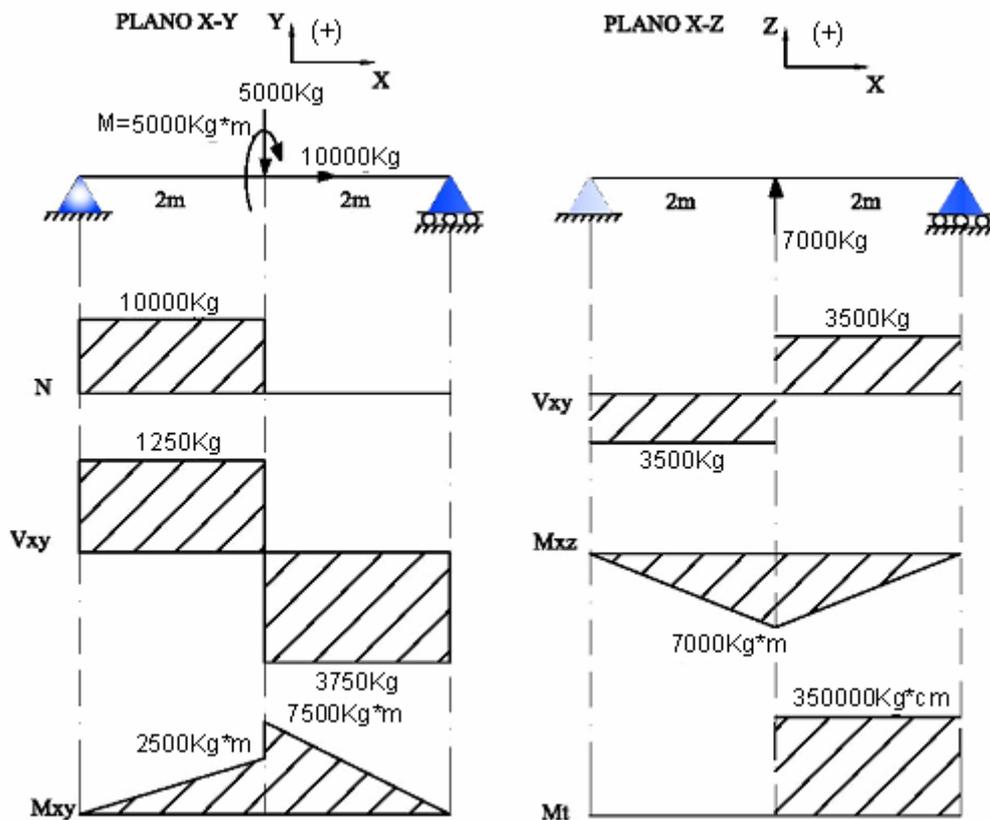
$$\frac{10000}{(b)(2b)} + \frac{(500000)(b)(12)}{b(2b)^3} + \frac{(1000000)(b/2)(12)}{(2b)(b^3)} \leq 700$$

$b \geq 17.49 \text{ cm.}$   
 $b = 18 \text{ cm.}$   
 $h = 36 \text{ cm.}$

**PROBLEMA 10.2-** Calcular el diámetro de una viga circular que cumpla las condiciones:  $\sigma_f=2100\text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau_f=0.5\sigma_f$ ,  $n=3$ ,  $\mu = 0.2$ ,  $\bar{\theta} = 0.25^\circ$  y  $E = 2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



Solución:



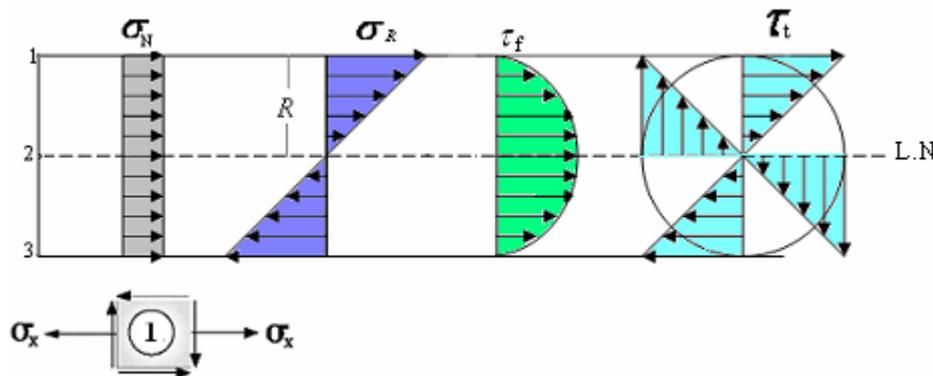
Determinación de la sección crítica.

$$M_R = \sqrt{M_{XY}^2 + M_{XZ}^2} \Rightarrow M_R = \sqrt{7500^2 + 7000^2} \Rightarrow$$

$$M_R = 10259.14 \text{ Kg} * m \Rightarrow$$

$$M_R = 1025914 \text{ Kg} * cm$$

Determinación del punto critico.



$$\sigma_R = \frac{M_R * Y_{MAX}}{I}, \quad \sigma_N = \frac{N}{A}, \quad \tau_t = \frac{M_t * R}{I_p}$$

$$\sigma_x = \sigma_n + \sigma_R \Rightarrow \sigma_x = \frac{10000}{\frac{\pi}{4} \phi^4} + \frac{(1025914)(\phi/2)}{\frac{\pi}{64} \phi^4} \Rightarrow \frac{\sigma_x}{2} = \frac{20000}{\pi \phi^2} + \frac{16414624}{\pi \phi^3}$$

$$\tau_{xy} = \tau_t = \frac{M_t * R}{I_p} \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{(350000)(\phi/2)}{\frac{\pi}{32} \phi^4} \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{5600000}{\pi \phi^3}$$

$$\sigma_{MAX} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \leq 1400$$

$$\therefore \frac{20000}{\pi \phi^2} + \frac{16414624}{\pi \phi^3} + \sqrt{\left(\frac{20000}{\pi \phi^2} + \frac{16414624}{\pi \phi^3}\right)^2 + \left(\frac{5600000}{\pi \phi^3}\right)^2} \leq 1400$$

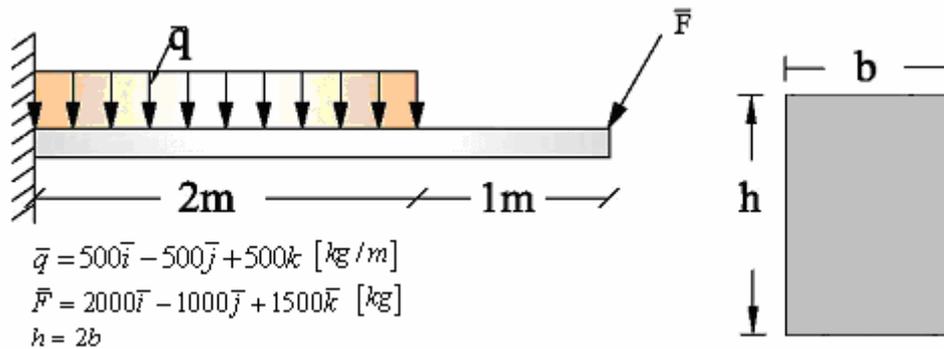
$$\therefore \phi \geq 19.9 \text{ cm.} \Rightarrow \phi = 20 \text{ cm.}$$

$$\theta_T = \sum \theta_i \Rightarrow \frac{M_t * L}{G * I_p} \leq \bar{\theta} \Leftrightarrow \frac{(350000)(32)(2.4)(200) * \frac{180}{\pi}}{(2.1 * 10^6) \pi \phi^4} \leq 0.25$$

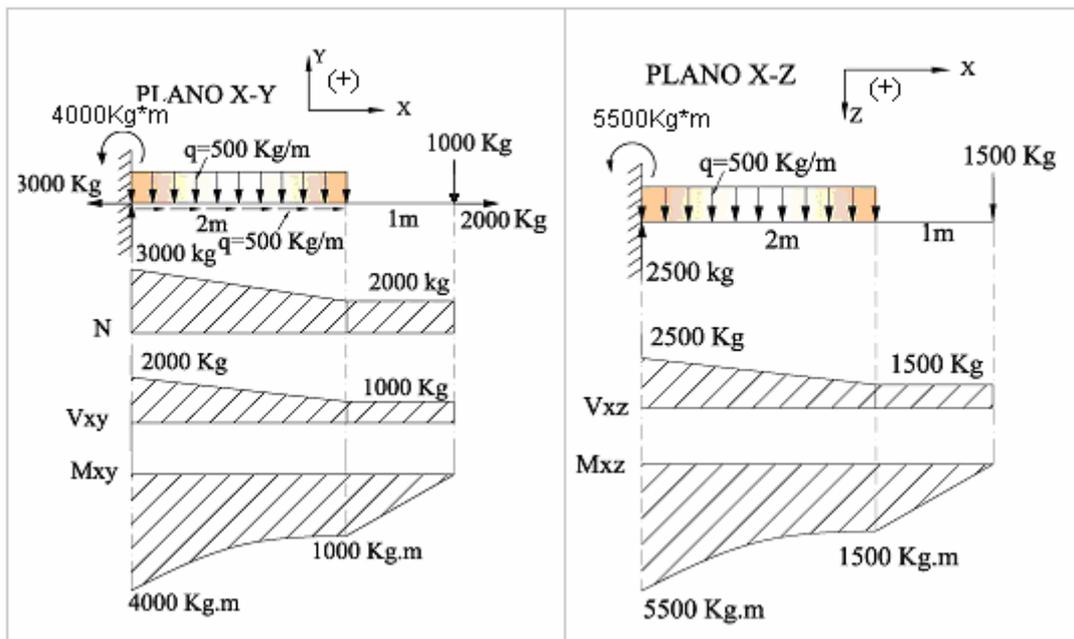
$$\phi \geq 20.79 \text{ cm} \Rightarrow \phi = 21 \text{ cm.}$$

Solución es  $\phi = 21 \text{ cm.}$

**PROBLEMA 10.3.-** Calcular la deformación máxima en el plano (x-y) con los siguientes datos:  $\sigma_f=2100\text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau_f=0.5\sigma_f$ ,  $n=3$  y  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ .



Solución:



$$\sigma_R = \frac{N}{A} + \frac{M_{MAX(x-y)} * Y_{MAX}}{I_{xx}} + \frac{M_{MAX(x-z)} * Z_{MAX}}{I_{yy}} \leq 700$$

$$\Rightarrow \frac{3000}{(b)(2b)} + \frac{(400000)(b)}{b(2b)^3} + \frac{(550000)(b/2)}{(2b)(b)^3} \leq 700$$

$$b \geq 14.76 \text{ cm} \Rightarrow b = 15 \text{ cm.} \therefore h = 30 \text{ cm.}$$

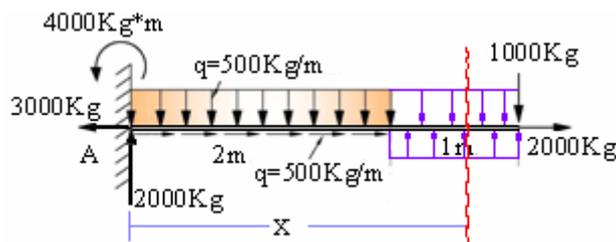
Verificación a la tensión cortante debido a la flexión.

$$\tau_{\max} = \frac{V_{xy} * A' * \bar{Y}'}{I_{zz} * b} + \frac{V_{xz} * A' * \bar{Y}''}{I_{yy} * h} \leq \bar{\tau} \Rightarrow$$

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} * \frac{V_{\max(x-y)}}{A} + \frac{3}{2} * \frac{V_{\max(x-z)}}{A} \leq \bar{\tau} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{3}{2} * \frac{2000}{15 * 30} + \frac{3}{2} * \frac{2500}{15 * 30} \leq \bar{\tau} \Rightarrow$$

15 ≤ 350 Cumple la condición

Ecuacion singular en el plano X-Y



$$\langle M \rangle = -4000 - 250x^2 + 250 \langle x - 2 \rangle^2 + 2000x$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -4000x + 1000x^2 - \frac{250}{3}x^3 + \frac{250}{3} \langle x - 2 \rangle^3 + c_1$$

$$EIY = -2000x^2 + \frac{1000}{3}x^3 - \frac{250}{12}x^4 + \frac{250}{12} \langle x - 2 \rangle^4 + c_1x + c_2$$

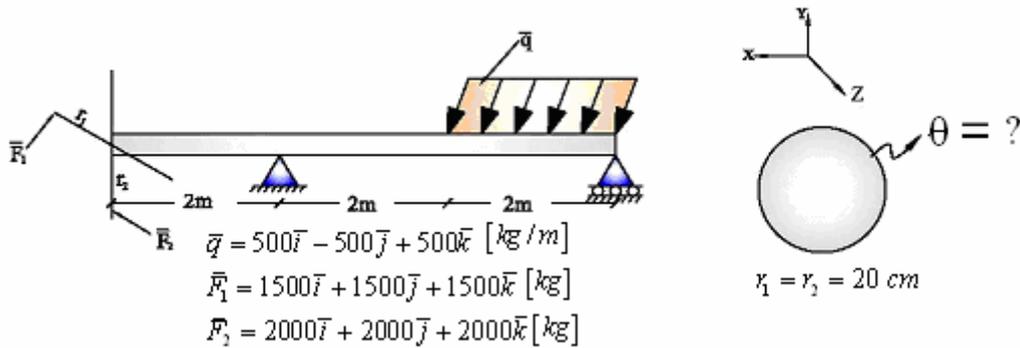
Las condiciones de contorno se toman en los apoyos para determinar los valores de las dos constantes.

$$\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow c_2 = 0 \quad ; \quad \begin{matrix} \frac{dy}{dx}=0 \\ x=0 \end{matrix} \Rightarrow c_1 = 0$$

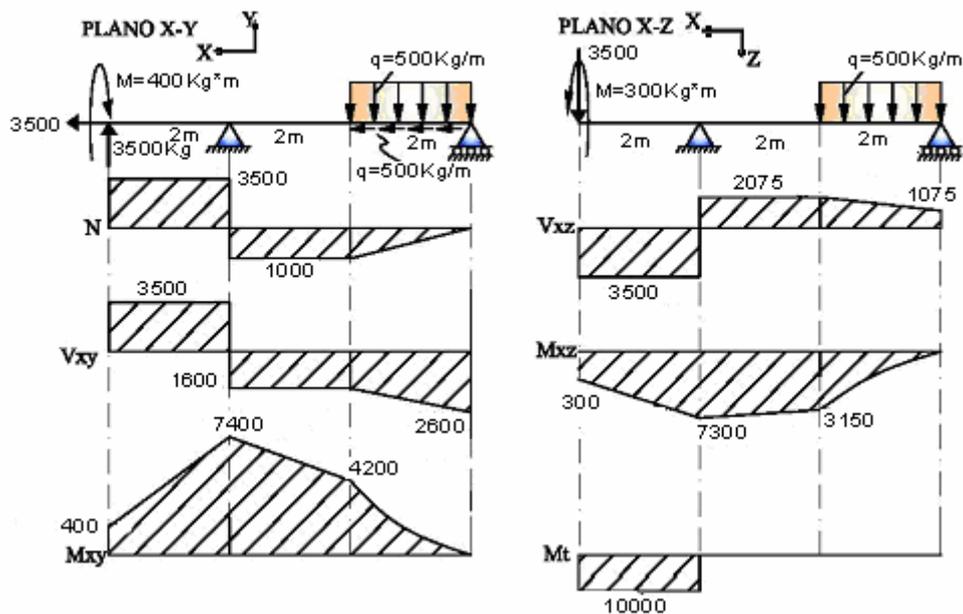
$$EI\delta_{MAX} = -2000(3)^2 + \frac{1000}{3}(3)^3 - \frac{250}{12}(3)^4 + \frac{250}{12}(1)^4$$

$$EI\delta_{MAX} = -10666.67 \Rightarrow \delta_{MAX} = \frac{10666.67 \times 10^6 \text{ Kg} * \text{cm}^3}{2.1 \times 10^6 * \frac{15 * 30^3}{12}} \Rightarrow \delta_{MAX} = 0.15 \text{ cm}$$

**PROBLEMA 10.4.-** Calcular el diámetro y el ángulo de torsión máximo que puede soportar la viga, con los siguientes datos:  $\sigma_f=4200\text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau_f=0.5\sigma_f$ ,  $n=3$ ,  $\mu = 0.3$  y  $E = 2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



Solución:

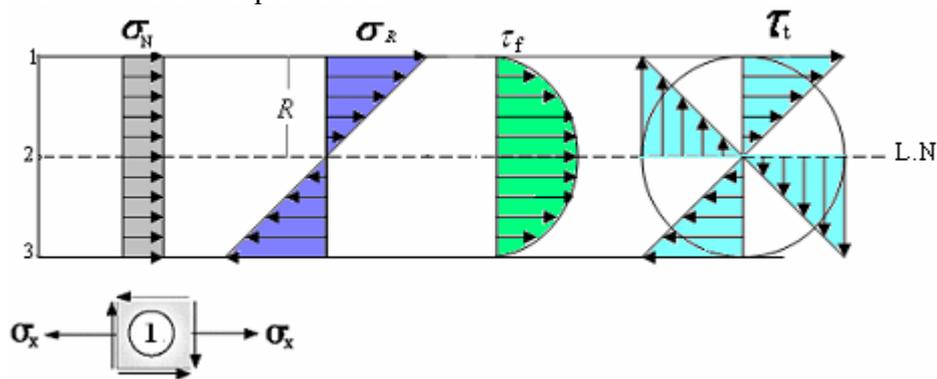


$$M_R = \sqrt{M_{XY}^2 + M_{XZ}^2} \Rightarrow M_R = \sqrt{7400^2 + 7300^2} \Rightarrow$$

$$M_R = 10394.71 \text{Kg} * m \Rightarrow$$

$$M_R = 1039471 \text{Kg} * cm$$

Determinación del punto crítico



$$\sigma_x = \sigma_N + \frac{M_R * Y_{MAX}}{I} \Rightarrow$$

$$\sigma_x = \frac{3500}{\frac{\pi}{4} \phi^2} + \frac{(1039471)(\phi/2)}{\frac{\pi}{64} \phi^4} \Rightarrow \sigma_x = \frac{14000}{\pi \phi^2} + \frac{33263072}{\pi \phi^3}$$

$$\tau = \frac{M_t * R}{I_p} \Rightarrow \tau = \frac{(10000)(\phi/2)}{\frac{\pi}{32} \phi^4} \Rightarrow \tau = \frac{160000}{\pi \phi^3}$$

$$\sigma_{MAX} = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + (\tau)^2} \leq \bar{\sigma}$$

$$\sigma_{MAX} = \frac{7000}{\pi \phi^2} + \frac{16631536}{\pi \phi^3} + \sqrt{\left(\frac{7000}{\pi \phi^2} + \frac{16631536}{\pi \phi^3}\right)^2 + \left(\frac{160000}{\pi \phi^3}\right)^2} \leq 1400$$

$$\Rightarrow \phi \geq 19.63 \text{ cm} \Rightarrow \phi = 20 \text{ cm.}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \Rightarrow \tau_{MAX} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + (\tau)^2} \leq \bar{\tau}$$

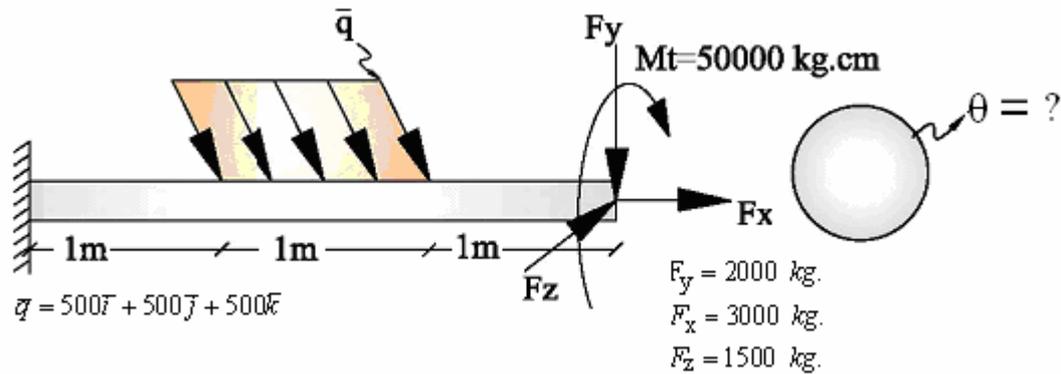
$$\tau_{MAX} = \sqrt{\left(\frac{7000}{\pi \phi^2} + \frac{16631536}{\pi \phi^3}\right)^2 + \left(\frac{160000}{\pi \phi^3}\right)^2} \leq 700 \Rightarrow \phi \geq 19.63 \text{ cm} \Rightarrow \phi = 20 \text{ cm.}$$

$$\theta_{MAX} = \Sigma \theta_i = \frac{M_t * L}{G * I_p} \Rightarrow \theta = \frac{10000 * 200 * 2.6 * 32}{2.1 \times 10^6 * \pi * 20^4} \Rightarrow \theta = 1.57639 \times 10^{-4}$$

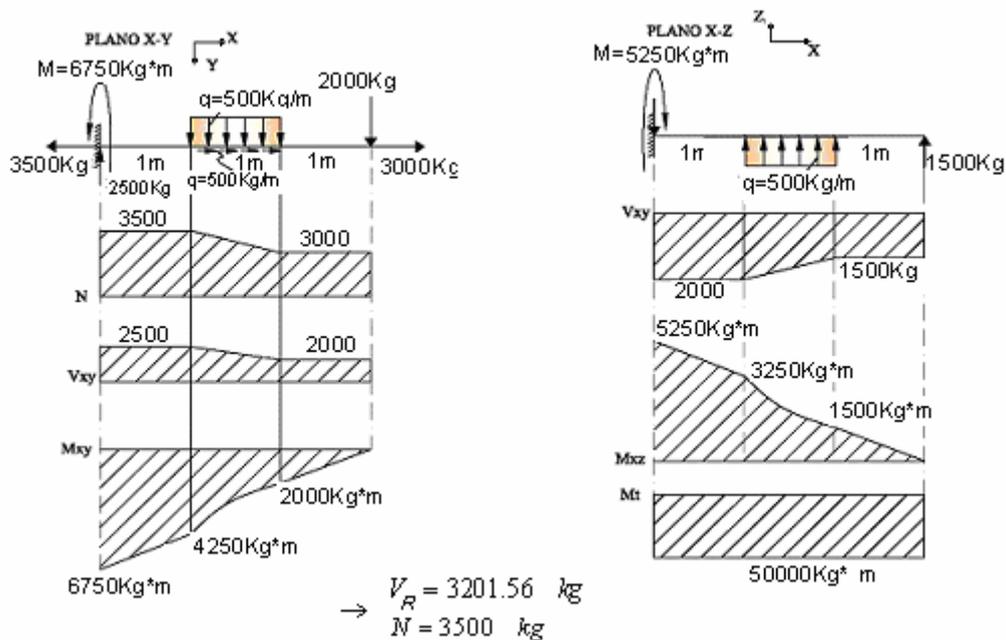
$$\theta_{MAX} = 1.57639 \times 10^{-4} * 57.3 \Rightarrow \theta_{MAX} = 0.00903^0$$

**PROBLEMA 10.5.-** Calcular el diámetro de la viga si  $\sigma_f = 2100 \text{ kg/cm}^2$ ;  $\tau_f = 0.5\sigma_f$ , con un factor de seguridad de 3, sin sobrepasar  $\bar{\theta} = 0.3^\circ$ , considerar que la deformación máxima en el plano (x-y) no sobrepase  $L/1000$  en cm.

$E = 2.1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\mu = 0.3$



Solución:



$$M_R = \sqrt{M_{XY}^2 + M_{XZ}^2} \rightarrow M_R = 855132 \text{ Kg}^*m$$

Paso 1.-Análisis a cortante por torsión

$$\tau_{MAX} = \frac{M_{t_{max}} R}{I_p} \leq \bar{\tau} \rightarrow$$

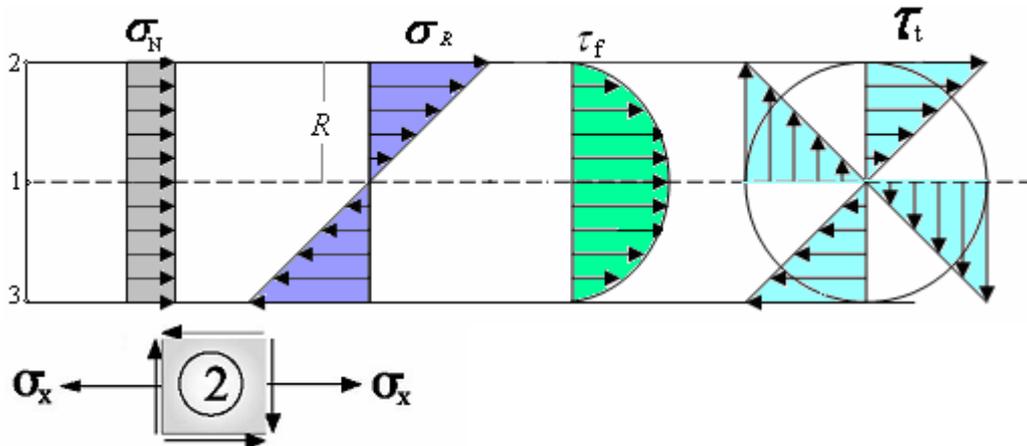
$$\frac{(50000)(\varnothing/2)(32)}{\pi\varnothing^4} \leq 350 \Rightarrow \varnothing \geq 8.99 \text{ cm} \Rightarrow \varnothing = 9 \text{ cm.}$$

Paso 2.- Análisis a rigidez por torsión

$$\theta = \frac{M_t L}{GI_p} \leq \bar{\theta}$$

$$\frac{(50000)(2.6)(32)(300)}{\pi \phi^4 (2.1 \cdot 10^6)} * 57.3 \leq 0.3^\circ \Rightarrow \phi \geq 13.79 \text{ cm} \Rightarrow \phi = 14 \text{ cm}$$

3.- Análisis a la resistencia



$$\sigma_x = \frac{350}{\frac{\pi}{4} \phi^2} + \frac{855132(\phi/2)}{\frac{\pi}{64} \phi^4} \Rightarrow \sigma_x = \frac{14000}{\pi \phi^2} + \frac{27364224}{\pi \phi^3}$$

$$\tau_1 = \frac{M_t * R}{I_p} \Rightarrow \tau_1 = \frac{800000}{\pi \phi^3};$$

$$\tau_2 = \frac{4V_R}{34} \Rightarrow \tau_2 = \frac{51216}{\pi \phi^2}$$

Análisis para el punto 1

$$\sigma_{MAX} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_1)^2} \leq \bar{\sigma}$$

$$\Rightarrow \frac{7000}{\pi \phi^2} + \frac{13682112}{\pi \phi^3} + \sqrt{\left(\frac{7000}{\pi \phi^2} + \frac{13682112}{\pi \phi^3}\right)^2 + \left(\frac{800000}{\pi \phi^3}\right)^2} \leq 700$$

$$\Rightarrow \phi \geq 23.18 \text{ cm.}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{\sigma_{MAX} - \sigma_{MIN}}{2} \leq \bar{\tau} \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{7000}{\pi \phi^2} + \frac{13682112}{\pi \phi^3}\right)^2 + \left(\frac{800000}{\pi \phi^3}\right)^2} \leq 350$$

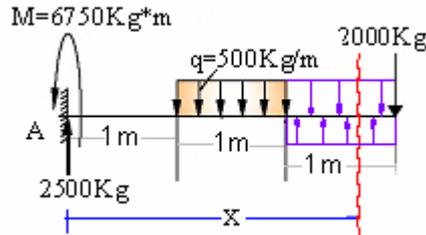
$$\phi \geq 23.18 \text{ cm.} \Rightarrow \phi = 23.5 \text{ cm.}$$

Análisis para el punto 2

$$\sigma_{MAX} = \frac{700}{\pi \phi^2} + \sqrt{\left(\frac{700}{\pi \phi^2}\right)^2 + \left(\frac{51216}{\pi \phi^2}\right)^2} \leq 700 \Rightarrow \phi \geq 5.17 \text{ cm}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{\sigma_{MAX} - \sigma_{MIN}}{2} \leq \bar{\tau} \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{7000}{\pi \phi^2}\right)^2 + \left(\frac{51216}{\pi \phi^2}\right)^2} \leq 350 \Rightarrow \phi \geq 6.86 \text{ cm} \therefore \phi = 7 \text{ cm.}$$

4.-Análisis a la deformación elástica (x-y)



$$\langle M \rangle = -6750 + 2500x - 250(x-1)^2 + 250(x-2)^2 \rightarrow$$

$$\text{para } x = 3 \Rightarrow M = -6750 + 2500(3) - 250(4) + 250 \Rightarrow M = 0$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -6750x + 1250x^2 - \frac{250}{3}(x-1)^3 + \frac{250}{3}(x-2)^3 + c_1 \dots \dots \dots \text{primera integral}$$

$$EIY = -3375x^2 + \frac{1250}{3}x^3 - \frac{250}{12}\langle x-1 \rangle^4 + \frac{250}{12}\langle x-2 \rangle^4 + c_1x + c_2 \dots \dots \dots \text{segunda integral}$$

Condiciones de borde para hallar  $c_1, c_2$

$$\text{para } \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\text{para } \begin{matrix} \frac{dy}{dx}=0 \\ x=0 \end{matrix} \Rightarrow c_1 = 0$$

$$EIY = -3375x^2 + \frac{1250}{3}x^3 - \frac{250}{12}\langle x-1 \rangle^4 + \frac{250}{12}\langle x-2 \rangle^4 \dots \dots \dots \text{Ecuación elástica}$$

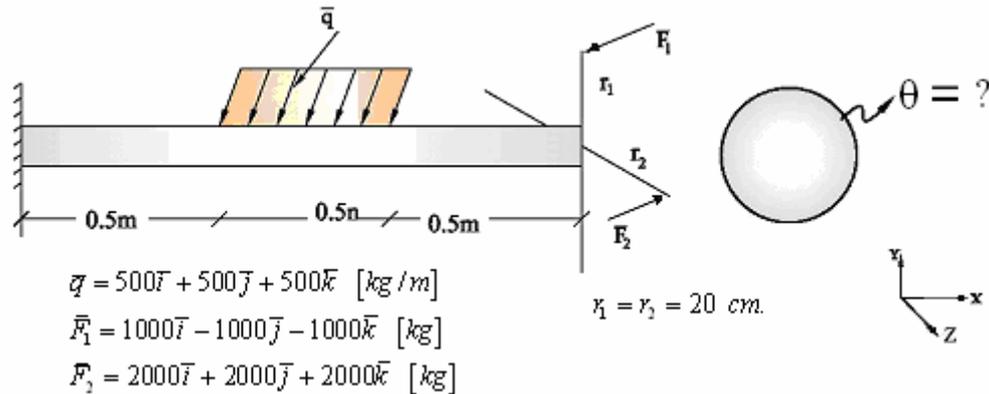
La deformación máxima se da para  $x=3$  m

$$EI\delta_{MAX} = -3375(3)^2 + \frac{1250}{3}(3)^3 - \frac{250}{12}(2)^4 + \frac{250}{12} \Rightarrow EI\delta_{MAX} = -19437.5$$

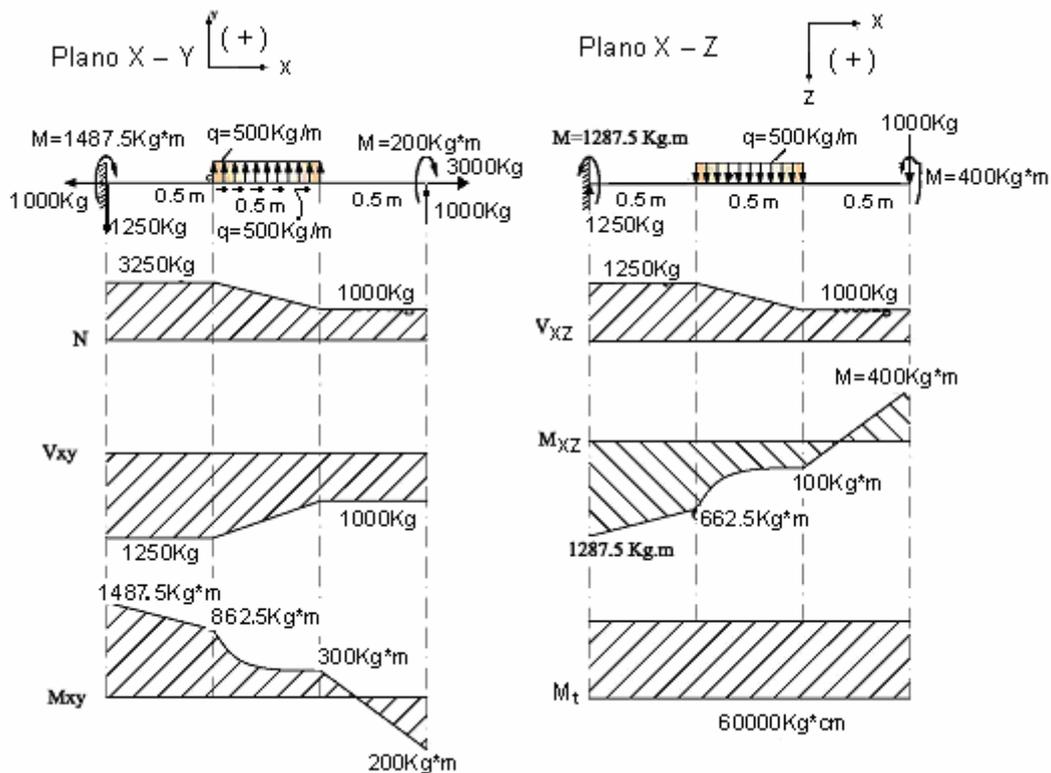
$$\delta_{MAX} = \frac{(19437.5)(64)}{\pi\phi^4(2.1)} \leq \frac{300}{1000} \Rightarrow \phi \geq 28.16 \text{ cm.}$$

La solución será  $\phi=28.5$  cm.

**PROBLEMA 10.6.-** Calcular la deformación máxima en el plano (x-y), de modo que no sobrepase los siguientes valores:  $\sigma_f=4200\text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau_f=0.5\sigma_f$ ,  $n=3$ ,  $\mu = 0.3$  y  $E=2.1 \times 10^6\text{Kg/cm}^2$ .



Solución  
Diagramas en ambos planos

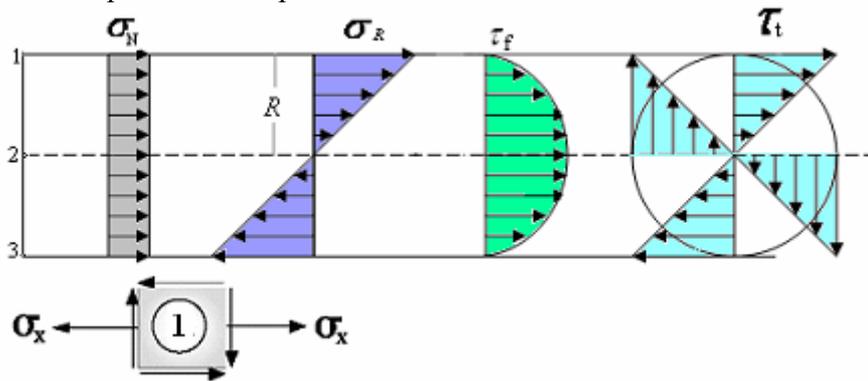


$$M_R = \sqrt{M_{XY}^2 + M_{XZ}^2} \Rightarrow M_R = \sqrt{1487.5^2 + 1287.5^2} \Rightarrow$$

$$M_R = 1967.31\text{Kg} * m \Rightarrow$$

$$M_R = 196731\text{Kg} * cm$$

.....  
Análisis del punto crítico para el momento resultante



$$\sigma_x = \frac{3250}{\frac{\pi}{4} \phi^2} + \frac{(196731)(\phi/2)}{\frac{\pi}{64} \phi^4} \Rightarrow \sigma_x = \frac{13000}{\pi \phi^2} + \frac{6295392}{\pi \phi^3}$$

$$\tau_{xy} \leq \frac{M_t * R}{I_p} \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{(60000)(\phi/2)}{\frac{\pi}{32} \phi^4}$$

$$\sigma_{MAX} \leq \bar{\sigma} \Rightarrow \sigma_{MAX} = \frac{6500}{\pi \phi^2} + \frac{3147696}{\pi \phi^3} + \sqrt{\left(\frac{6500}{\pi \phi^2} + \frac{3147696}{\pi \phi^3}\right)^2 + \left(\frac{960000}{\pi \phi^3}\right)^2} \leq 1400$$

$$\Rightarrow \phi \geq 11.35 \text{ cm} \Rightarrow \phi = 11.5 \text{ cm}$$

$$\theta = \frac{M_t l}{GI_p} \Rightarrow \theta = \frac{(60000)(150)(2.6)(32)}{\pi(11.5)^4(2.1 \cdot 10^6)} * 57.3 \Rightarrow \theta = 0.372^\circ$$

Ecuación singular de momento

$$\langle M \rangle = 1487.5x^0 - 1250x + 250(x-0.5)^2 - 250(x-1)^2 \rightarrow$$

$$EI \frac{dy}{dx} = 1487.5x - 625x^2 + \frac{250}{3}(x-0.5)^3 - \frac{250}{3}(x-1)^3 + c_1 \dots \dots \dots \text{primera integral}$$

$$EIY = \frac{1487.5}{2}x^2 - \frac{625}{3}x^3 + \frac{250}{12}\langle x-0.5 \rangle^4 - \frac{250}{12}\langle x-1 \rangle^4 + c_1x + c_2 \dots \dots \dots \text{segunda integral}$$

Condiciones de borde para hallar  $c_1, c_2$

$$\text{para } \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow c_2 = 0 \qquad \text{para } \begin{matrix} \frac{dy}{dx}=0 \\ x=0 \end{matrix} \Rightarrow c_1 = 0$$

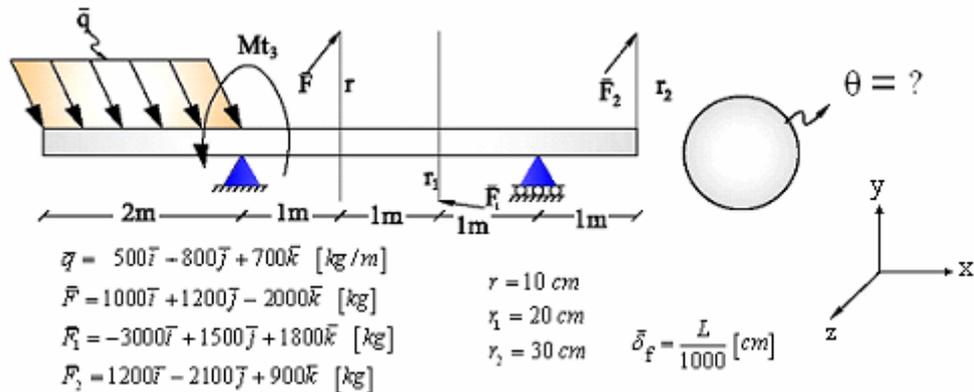
$$EIY = \frac{1487.5}{2}x^2 - \frac{625}{3}x^3 + \frac{250}{12}\langle x-0.5 \rangle^4 - \frac{250}{12}\langle x-1 \rangle^4 \dots \dots \dots \text{Ecuación elástica}$$

La deformación máxima se da para  $x=1.5 \text{ m}$

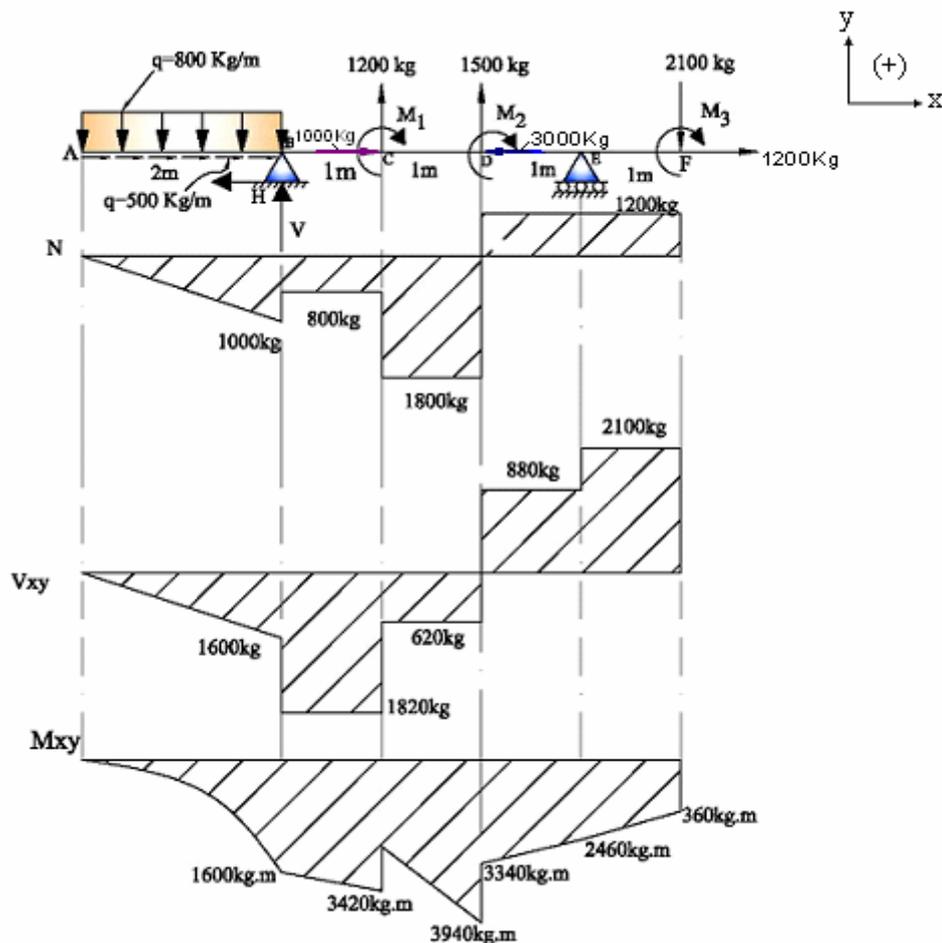
$$EI\delta_{MAX} = \frac{1487.5}{2}(1.5)^2 - \frac{625}{3}(1.5)^3 + \frac{250}{12}\langle 1 \rangle^4 - \frac{250}{12}\langle 0.5 \rangle^4$$

$$\delta_{MAX} = \frac{989.84375}{E * I} \Rightarrow \delta_{MAX} = 0.55 \text{ cm.}$$

**PROBLEMA 10.7.-** Realizar un análisis completo del sistema mostrado a continuación para flexión en el espacio de una viga:  $\sigma_f=4200\text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau_f=0.5\sigma_f$ ,  $n=2$ ,  $\mu = 0.3$ ,  $\bar{\theta} = 1.2^\circ$  y  $E = 1.5 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



1.-Realizar el diagrama de esfuerzos en los planos (x-y) y (x-z)  
Diagrama en el plano (x-y)



Determinación de las reacciones.

$$M_1 = F \cdot r \Rightarrow M_1 = 1000 \cdot 0.1 \Rightarrow M_1 = 100 \text{ kg.m}$$

$$M_2 = F_2 \cdot r_2 \Rightarrow M_2 = 3000 \cdot 0.2 \Rightarrow M_2 = 600 \text{ kg.m}$$

$$M_3 = F_3 \cdot r_2 \Rightarrow M_3 = 1200 \cdot 0.3 \Rightarrow M_3 = 360 \text{ kg.m}$$

$$\sum M_B^+ = 0$$

$$-800(2) - 1200 + 100 - 2(1500) + 600 - 3V_1 + 4(2100) + 360 = 0$$

$$V_1 = 1220 \text{ kg.}$$

$$\sum M_E^+ = 0$$

$$360 + 2100 + 1500 + 600 + 2(1200) + 100 + 3V - 800(8) = 0$$

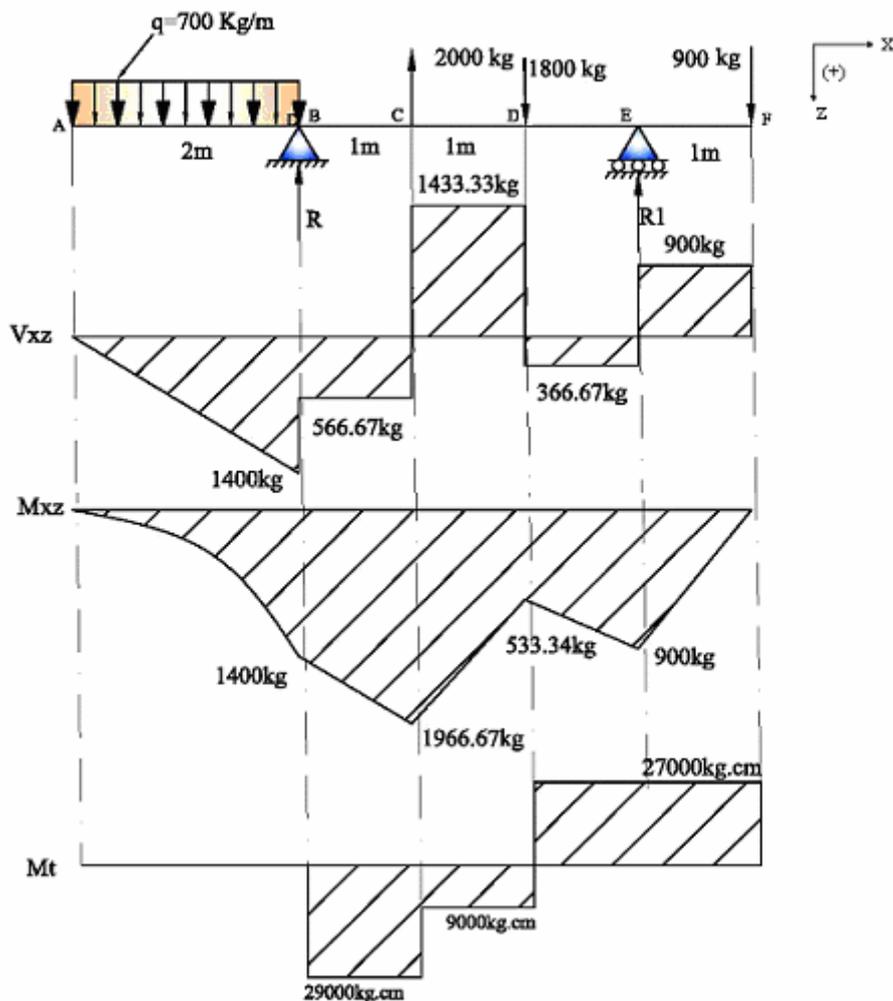
$$V = -220 \text{ kg.}$$

$$\sum H = 0$$

$$1000 - H + 1000 - 3000 + 1200 = 0$$

$$H = 200 \text{ kg.}$$

Diagrama en el plano (x-z)



Plano X-Z

$$\sum M^+_B = 0 \Rightarrow R_1 = 1266.67 \text{ kg.}$$

$$\sum M^+_E = 0 \Rightarrow R = 833.33 \text{ kg.}$$

Determinación de momentos torsores

$$M_t = r * F_Z \Rightarrow M_t = 10 * 2000 \Rightarrow M_t = 20000 \text{ kg.cm}$$

$$M_{t_1} = r_1 * F_{Z_1} \Rightarrow M_{t_1} = 20 * 1800 \Rightarrow M_{t_1} = 36000 \text{ kg.cm}$$

$$M_{t_2} = r_2 * F_{Z_2} \Rightarrow M_{t_2} = 30 * 900 \Rightarrow M_{t_2} = 27000 \text{ kg.cm}$$

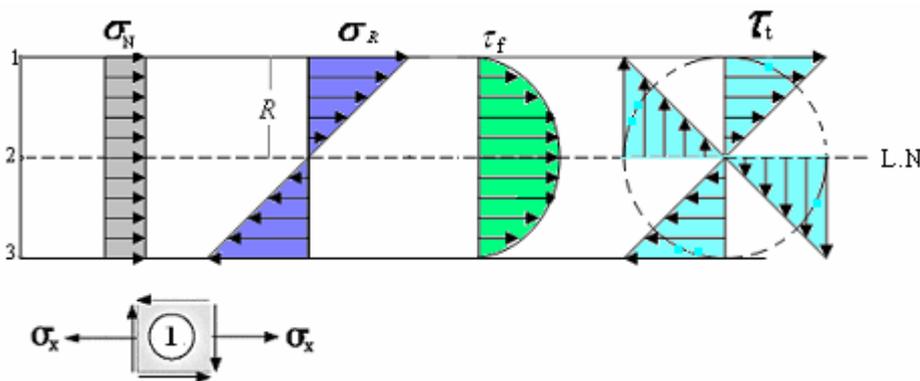
2.-Determinación de la sección crítica

$$M_{R(E)} = \sqrt{(2460)^2 + (900)^2} \Rightarrow M_{R(E)} = 2619.46 \text{ kg.m}$$

$$M_{R(D)} = \sqrt{(3940)^2 + (533.34)^2} \Rightarrow M_{R(D)} = 3975.93 \text{ kg.m} \quad \Rightarrow M_R = 397593 \text{ kg.cm}$$

$$M_{R(C)} = \sqrt{(3420)^2 + (1966.67)^2} \Rightarrow M_{R(C)} = 3945.15 \text{ kg.m}$$

3.-Diagrama de tensiones resultantes en el plano



4.-Buscar el punto mas crítico en los diagramas de tensiones para (1-1)

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_{\max} * y_{\max}}{I} \Rightarrow \sigma_x = \frac{1200}{\pi * \phi^2} + \frac{397593 * \frac{\phi}{2}}{\pi * \phi^4} \Rightarrow \sigma_x = \frac{1528}{\phi^2} + \frac{4049849}{\phi^3}$$

$$\tau_1 = \tau_f + \tau_t \Rightarrow \tau_1 = \frac{(27000) \left( \frac{\phi}{2} \right)}{\frac{\pi}{32} \phi^4} \Rightarrow \tau_1 = \frac{137509.87}{\phi^3}$$

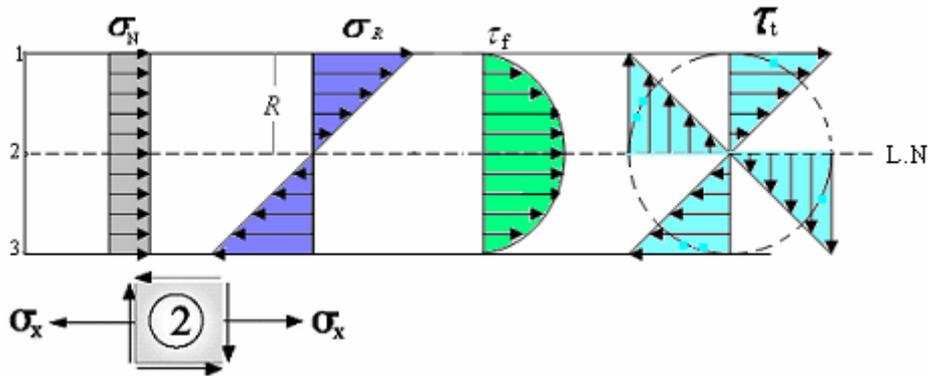
5.-Aplicación de las tensiones combinadas de círculo de mohr

$$\sigma_{\max} = \frac{764}{\phi^2} + \frac{2024920}{\phi^3} + \sqrt{\left( \frac{764}{\phi^2} + \frac{2024924.5}{\phi^3} \right)^2 + \left( \frac{137509.87}{\phi^3} \right)^2} \leq 2100 \Rightarrow \phi_1 \geq 12.452 \text{ cm}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \leq \bar{\tau} \Rightarrow \tau_{\max} = \sqrt{\left( \frac{764}{\phi^2} + \frac{2024924.5}{\phi^3} \right)^2 + \left( \frac{137509.87}{\phi^3} \right)^2} \leq 1050 \Rightarrow \phi_2 \geq 12.46 \text{ cm}$$

$$\therefore \phi = 12.5 \text{ cm}$$

6.- Dimensionamiento a la cortante por flexión en el punto (2-2)



$$V_{R(D)} = \sqrt{(880)^2 + (1433.33)^2} \Rightarrow V_{R(D)} = 1681.914 Kg$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{764}{\phi^2}\right)^2 + \left(\frac{4 * 1681.914}{3 * \frac{\pi \phi^2}{4}}\right)^2} \leq 1050 \Rightarrow \phi_3 \geq 1.68 \text{ cm} \Rightarrow \phi_3 = 2 \text{ cm}$$

7.-Dimensionamiento a la torsión máxima

$$\tau_{\max} = \frac{Mt_{\max} * R}{I_p} \leq \bar{\tau} \Rightarrow \frac{(29000) \left(\frac{\phi}{2}\right)}{\frac{\pi}{32} \phi^4} \leq 1050 \Rightarrow \phi_4 \geq 5.2 \Rightarrow \phi_4 = 5.5 \text{ cm}$$

8.-Dimensionamiento a la rigidez  $\bar{\theta}$

$$\theta_T = \sum \theta_i \leq \bar{\theta} \Rightarrow$$

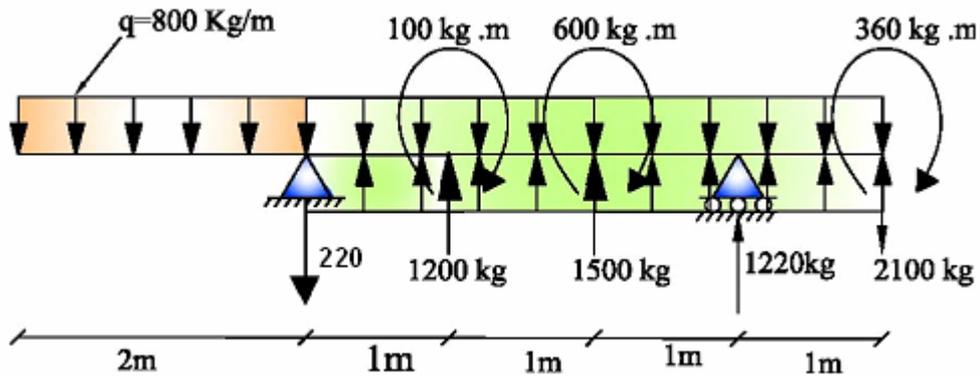
$$\left( \frac{-(29000)(2.6)(32)(100) - (9000)(2.6)(32)(100) + (27000)(2.6)(32)(200)}{(1.5 * 10^6)(\pi)(\phi^4)} \right) * 57.3 \leq 1.2^\circ$$

$$\Rightarrow \phi_5 \geq 6.06 \text{ cm}$$

9.-Dimensionamiento a la deformación debido a la flexión

$$EIY = \iint \langle M \rangle dx dx + c_1 x + c_2$$

PLANO (x-y)



$$\langle M \rangle = -400x^2 - 220\langle x-2 \rangle + 400\langle x-2 \rangle^2 + 1200\langle x-3 \rangle + 100\langle x-3 \rangle^0 + 1500\langle x-4 \rangle + 600\langle x-4 \rangle^0 + 1220\langle x-5 \rangle$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{400}{3}x^3 - 110\langle x-2 \rangle^2 + \frac{400}{3}\langle x-2 \rangle^3 + 600\langle x-3 \rangle^2 + 100\langle x-3 \rangle + 750\langle x-4 \rangle^2 + 600\langle x-4 \rangle^1 + 610\langle x-5 \rangle^2 + c_1$$

$$EIY = -\frac{400}{12}x^4 - \frac{110}{3}\langle x-2 \rangle^3 + \frac{400}{12}\langle x-2 \rangle^4 + 200\langle x-3 \rangle^3 + 50\langle x-3 \rangle^2 + 250\langle x-4 \rangle^3 + 300\langle x-4 \rangle^2 + \frac{610}{3}\langle x-5 \rangle^3 + c_1x + c_2$$

Condiciones de apoyo para determinar los valores de las dos constantes.

$$\text{Para } \begin{matrix} x=2 \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow 0 = -\frac{400}{12}(2)^4 - \frac{110}{3}(0)^3 + 2c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow 2c_1 + c_2 = 533.33 \text{----- (E.1)}$$

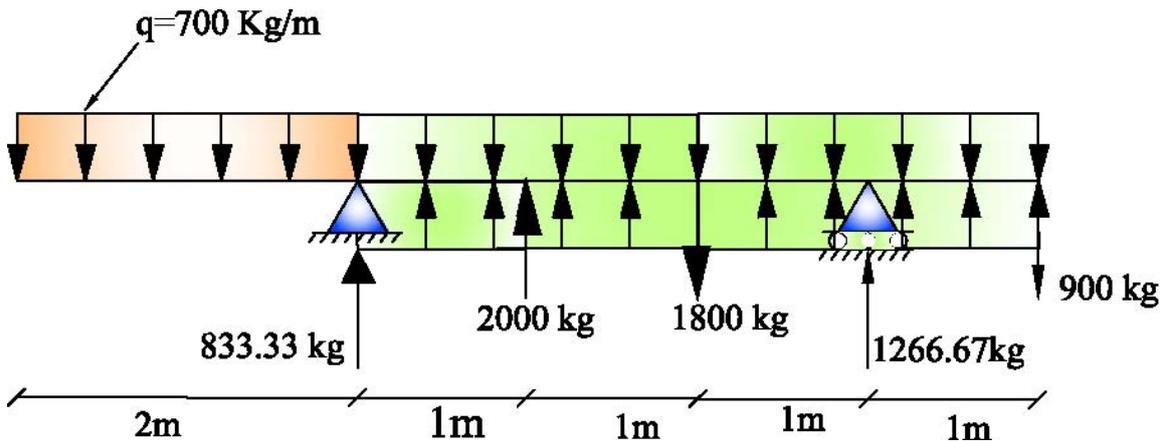
$$\text{Para } \begin{matrix} x=5 \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow 0 - \frac{400}{12}(5)^4 - \frac{110}{3}(3)^3 + \frac{400}{12}(3)^4 + 200(2)^3 + 50(2)^2 + 250(1)^3 + 300(1)^2 + 5c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow 5c_1 + c_2 = 16773.33 \text{----- E.2}$$

Resolviendo las ecuaciones 1 y 2 tenemos:

$$c_1 = 5413.33 \quad c_2 = -10293.34$$

$$\text{La deformación máxima se dá para } x = 0 \Rightarrow \delta_{\max(x-y)} = -\frac{10293.34}{EI}$$

PLANO X-Z



$$\langle M \rangle = -350x^2 + 833.33\langle x-2 \rangle + 350\langle x-2 \rangle^2 + 2000\langle x-3 \rangle - 1800\langle x-4 \rangle + 1266.67\langle x-5 \rangle$$

$$EI \frac{dz}{dx} = -\frac{350}{3}x^3 + \frac{833.33}{2}\langle x-2 \rangle^2 + \frac{350}{3}\langle x-2 \rangle^3 + 1000\langle x-3 \rangle^2 - 900\langle x-4 \rangle^2 + \frac{1266.67}{2}\langle x-5 \rangle^2 + c_1$$

$$EIZ = -\frac{350}{12}x^4 + \frac{833.33}{6}\langle x-2 \rangle^3 + \frac{350}{12}\langle x-2 \rangle^4 + \frac{1000}{3}\langle x-3 \rangle^3 - 300\langle x-4 \rangle^3 + \frac{1266.67}{6}\langle x-5 \rangle^3 + c_1x + c_2$$

Condiciones de apoyo para determinar los valores de las dos constantes.

$$\text{Para } \begin{matrix} x=2 \\ z=0 \end{matrix} \Rightarrow 0 = -\frac{350}{12}(2)^4 + \frac{833.33}{6}(0)^3 + 2c_1 + c_2 \Rightarrow 2c_1 + c_2 = 466.67 \text{ -----E.1}$$

$$\text{Para } \begin{matrix} x=5 \\ z=0 \end{matrix} \Rightarrow 0 = -\frac{350}{12}(5)^4 + \frac{833.33}{6}(3)^3 + \frac{350}{12}(3)^4 + \frac{1000}{3}(2)^3 - 300 + 5c_1 + c_2 \Rightarrow$$

$$5c_1 + c_2 = 9750.015 \text{ -----E.2}$$

Resolviendo las ecuaciones 1 y 2 tenemos:

$$c_1 = 3094.45 \quad c_2 = -5722.23$$

$$\text{La deformación máxima se da para } x=0 \Rightarrow \delta_{\max(x-z)} = -\frac{5722.23}{EI}$$

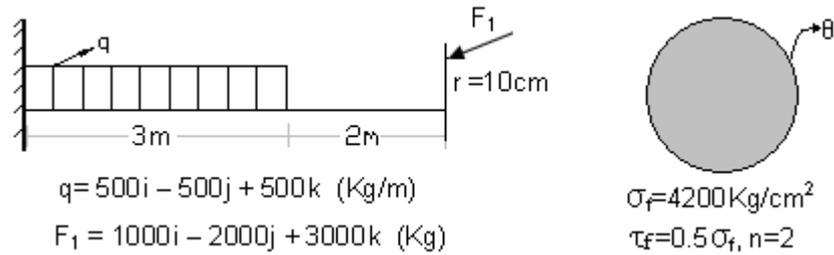
$$\delta_R = \sqrt{\left[\delta_{\max(x-y)}\right]^2 + \left[\delta_{\max(x-z)}\right]^2} \leq \frac{L}{1000} \Rightarrow \delta_R = \sqrt{\left[\frac{10293.34}{EI}\right]^2 + \left[\frac{5722.23}{EI}\right]^2} \leq \frac{L}{1000} \Rightarrow$$

$$\frac{11776.959}{EI} \leq \frac{200}{1000} \Rightarrow \frac{11776.959}{1.5 * \frac{\pi}{64} \varnothing^4} \leq \frac{200}{1000} \Rightarrow \varnothing \geq 29.9 \text{ cm}$$

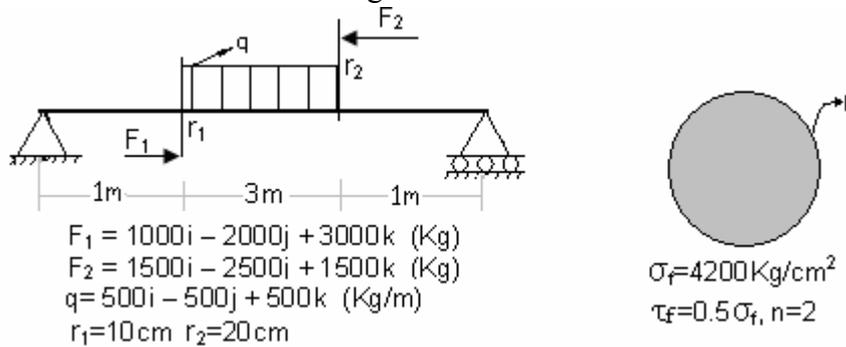
$$\text{sol : } \varnothing = 30 \text{ cm}$$

**PROBLEMAS PROPUESTOS DE FLEXIÓN EN EL ESPACIO**

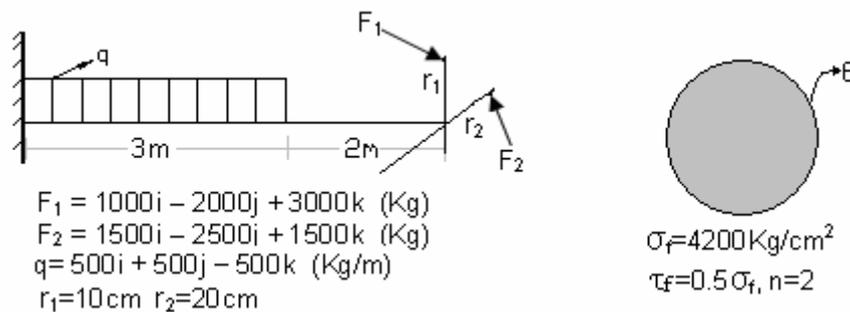
**10.1.-** Determinar el momento resultante, la cortante resultante máxima y el diámetro de la viga de sección circular.



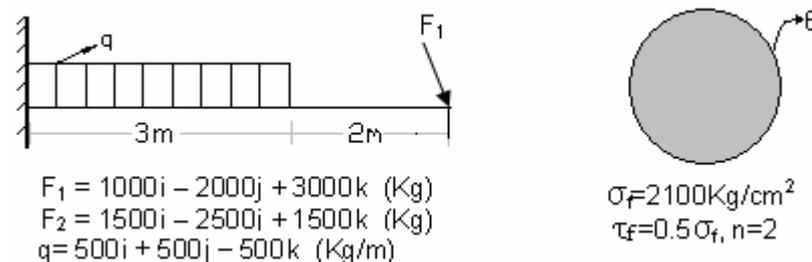
**10.2.-** Determinar el momento resultante, la cortante resultante máxima, el momento y el ángulo de torsión máximo de una viga de sección circular: si  $G = 6.9 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ .



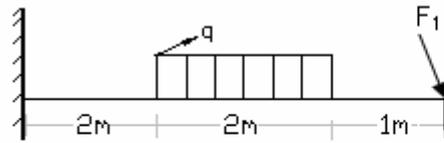
**10.3.-** Hallar la deformación máxima, de modo que no sobrepase los siguientes valores:  $\sigma_f = 4200 \text{ Kg/cm}^2$ ,  $\tau_f = 0.5\sigma_f$ ,  $n=2$  y  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ .



**10.4.-** Hallar el diámetro de la viga de sección transversal, de modo que no sobrepase los valores:  $\sigma_f = 2100 \text{ Kg/cm}^2$ ,  $\tau_f = 0.5\sigma_f$ ,  $n=2$ ,  $\bar{\delta} = \frac{L}{1000} \text{ cm}$ ,  $\mu = 0.3$  y  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ .

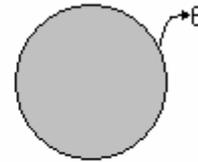


**10.5.-** Hallar el diámetro de la viga de sección transversal, de modo que no sobrepase los valores:  $\sigma_f=2100\text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau_f=0.5\sigma_f$ ,  $n=2$ ,  $\bar{\delta} = \frac{L}{1000}\text{cm}$   $\mu = 0.3$  y  $E = 2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



$$F_1 = 1500i - 2500j + 1500k \text{ (Kg)}$$

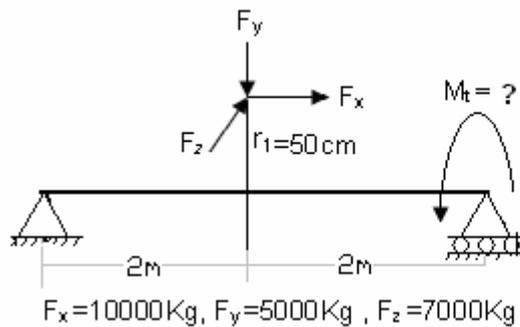
$$q = 500i - 500j + 500k \text{ (Kg/m)}$$



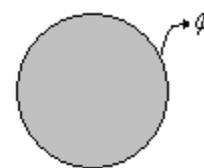
$$\sigma_f = 2100 \text{Kg/cm}^2$$

$$\tau_f = 0.5 \sigma_f, n=2$$

**10.6.-** Hallar el diámetro de la viga de sección transversal, de modo que no sobrepase los siguientes valores:  $\sigma_f=2100\text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau_f=0.5\sigma_f$ ,  $n=2$ , y  $E = 2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



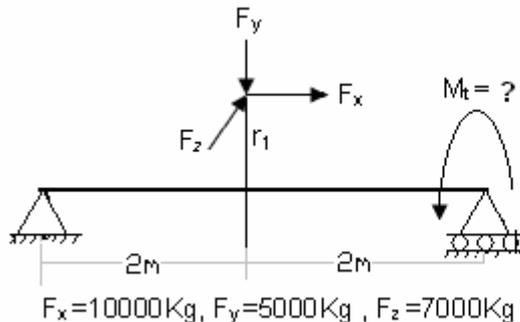
$$F_x = 10000 \text{Kg}, F_y = 5000 \text{Kg}, F_z = 7000 \text{Kg}$$



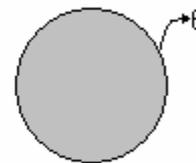
$$\sigma_f = 4200 \text{Kg/cm}^2$$

$$\tau_f = 0.5 \sigma_f, n=2$$

**10.7.-** Hallar el diámetro de la viga de sección transversal, de modo que no sobrepase los valores:  $\sigma_f=4200\text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau_f=0.5\sigma_f$ ,  $n=2$ ,  $\bar{\delta} = \frac{L}{1000}\text{cm}$ ,  $\mu = 0.3$  y  $E = 2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



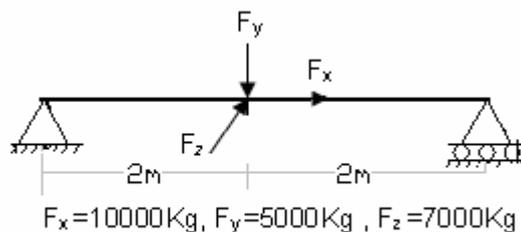
$$F_x = 10000 \text{Kg}, F_y = 5000 \text{Kg}, F_z = 7000 \text{Kg}$$



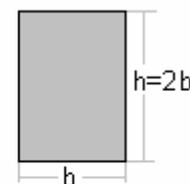
$$\sigma_f = 4200 \text{Kg/cm}^2$$

$$\tau_f = 0.5 \sigma_f, n=2$$

**10.8.-** Hallar la dimensión de la viga de sección rectangular llena de  $h = 2b$ , de modo que no sobrepase los siguientes valores:  $\sigma_f=4200\text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau_f=0.5\sigma_f$  y  $n=2$ .



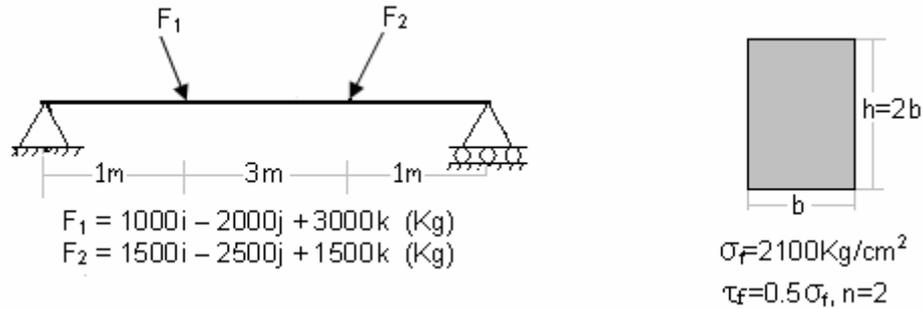
$$F_x = 10000 \text{Kg}, F_y = 5000 \text{Kg}, F_z = 7000 \text{Kg}$$



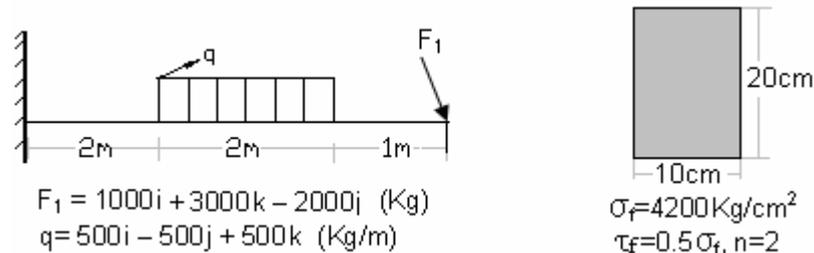
$$\sigma_f = 4200 \text{Kg/cm}^2$$

$$\tau_f = 0.5 \sigma_f, n=2$$

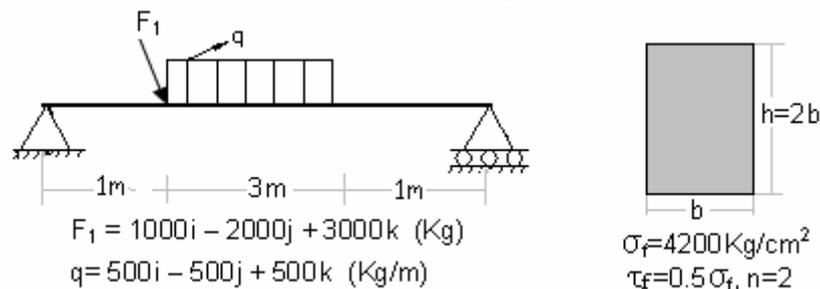
**10.9.-** Hallar la deformación en el plano (x-z) de la viga de sección transversal, de modo que no sobrepase los valores:  $\sigma_f=2100\text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau_f=0.5\sigma_f$  y  $n=2$ ,  $E=2.1 \times 10^6\text{Kg/cm}^2$ .



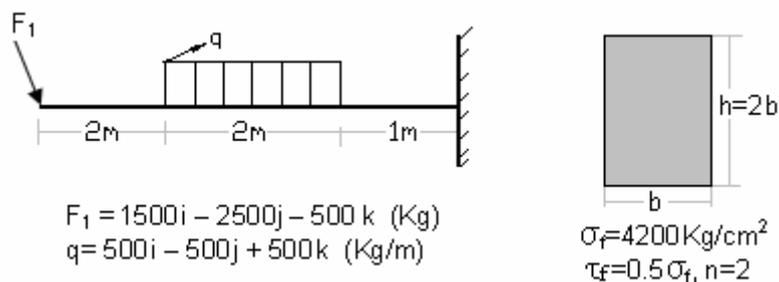
**10.10.-** Hallar la deformación máxima en el plano (X – Y) de una viga de sección rectangular llena de  $h = 2b$ , de modo que no sobrepase los siguientes valores:  $\sigma_f=4200\text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau_f=0.5\sigma_f$  y  $n=2$ ,  $E=2.1 \times 10^6\text{Kg/cm}^2$ .



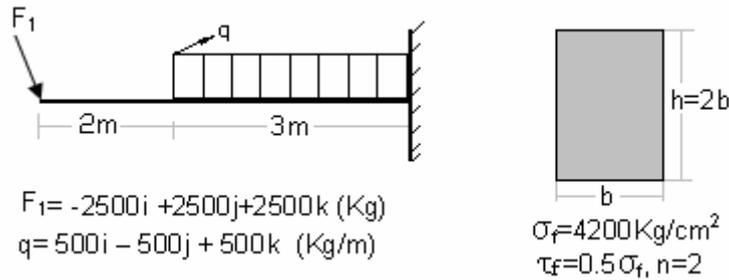
**10.11.-** Hallar la dimensión de la viga de sección rectangular llena de  $h = 2b$ , de modo que no sobrepase los siguientes valores:  $\sigma_f=4200\text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau_f=0.5\sigma_f$  y  $n=2$ .



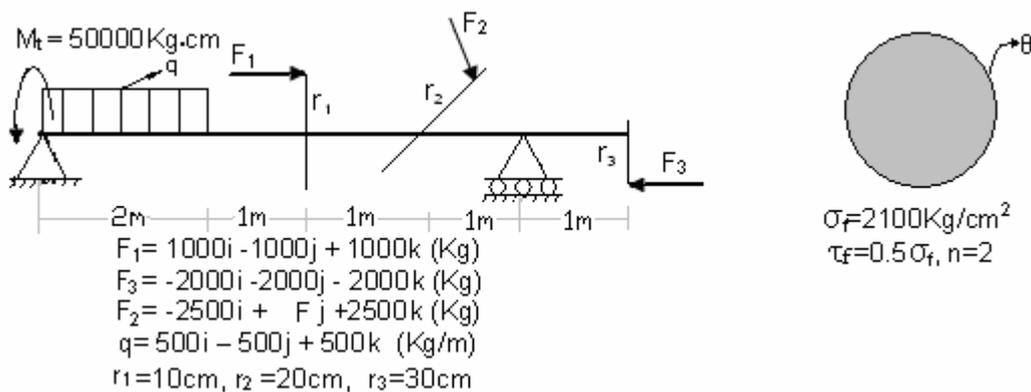
**10.12.-** Hallar la dimensión de la viga de sección rectangular llena de  $h = 2b$ , de modo que no sobrepase los siguientes valores:  $\sigma_f=4200\text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau_f=0.5\sigma_f$  y  $n=2$ .



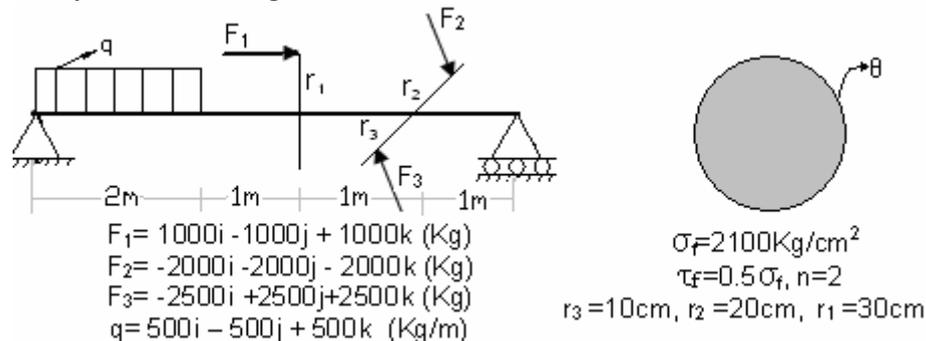
**10.13.-** Hallar el diámetro de la viga de sección rectangular llena de  $h = 2b$ , de modo que no sobrepase los siguientes valores:  $\sigma_f = 4200 \text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau_f = 0.5\sigma_f$ ,  $n=2$ .



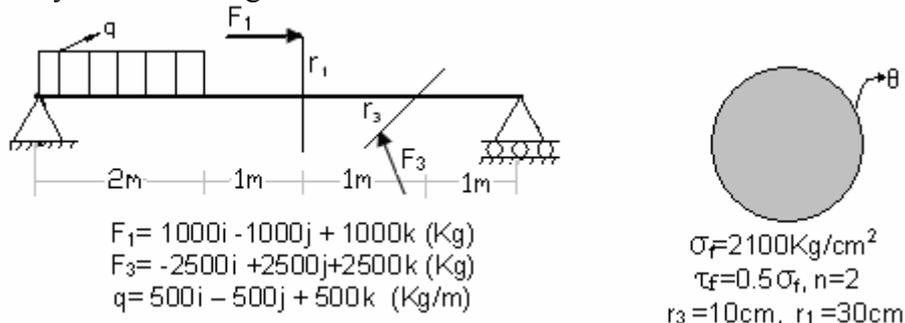
**10.14-** Hallar la deformación máxima resultante de los dos planos de la sección transversal, de modo que no sobrepase los valores:  $\sigma_f = 2100 \text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau_f = 0.5\sigma_f$ ,  $n=2$ ,  $\mu = 0.3$ ,  $\bar{\theta} = 1.5^\circ$ ,  $E = 2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



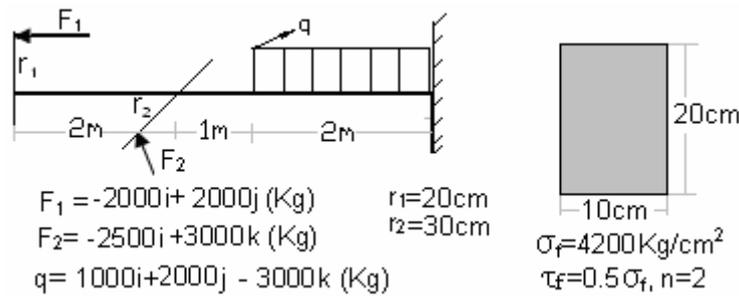
**10.15.-** Hallar la deformación máxima resultante de los dos planos de la viga de sección, de modo que no sobrepase los siguientes valores:  $\sigma_f = 2100 \text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau_f = 0.5\sigma_f$ ,  $n=2$ ,  $\mu = 0.2$ ,  $\bar{\theta} = 1.5^\circ$  y  $E = 2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$



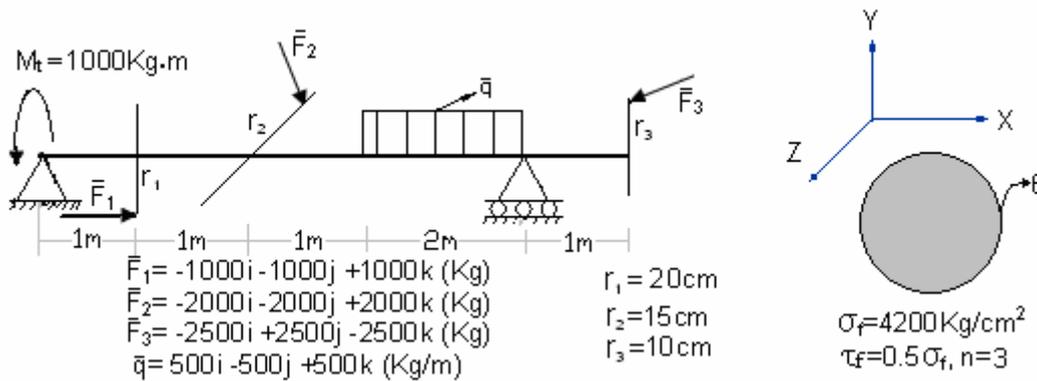
**10.16.-** Hallar la deformación máxima resultante de los dos planos de la viga de sección, de modo que no sobrepase los siguientes valores:  $\sigma_f = 2100 \text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau_f = 0.5\sigma_f$ ,  $n=3$ ,  $\mu = 0.3$ ,  $\bar{\theta} = 0.8^\circ$  y  $E = 2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



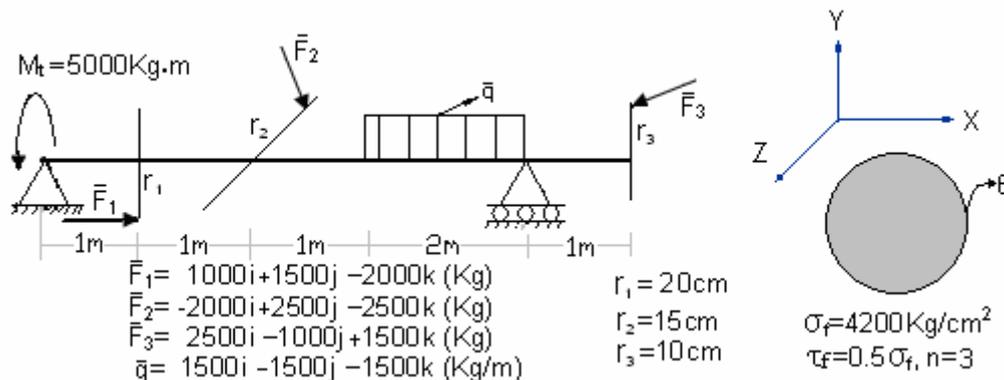
10.17.- Hallar la deformación máxima en el plano (x-y), si:  $E = 2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



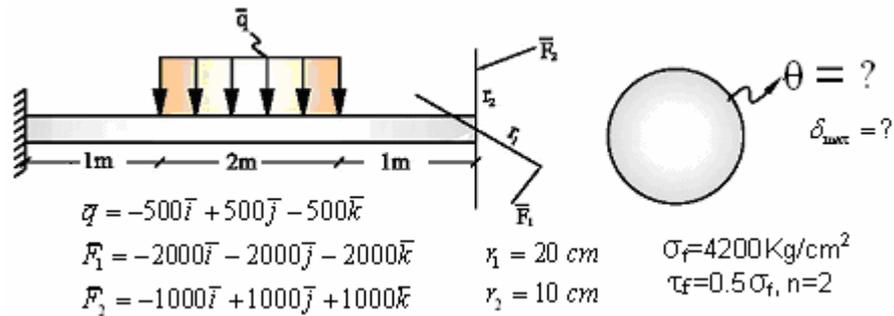
10.18.- Calcular el diámetro de la viga de la figura y el ángulo de torsión máxima, según los datos, si:  $E = 1.8 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



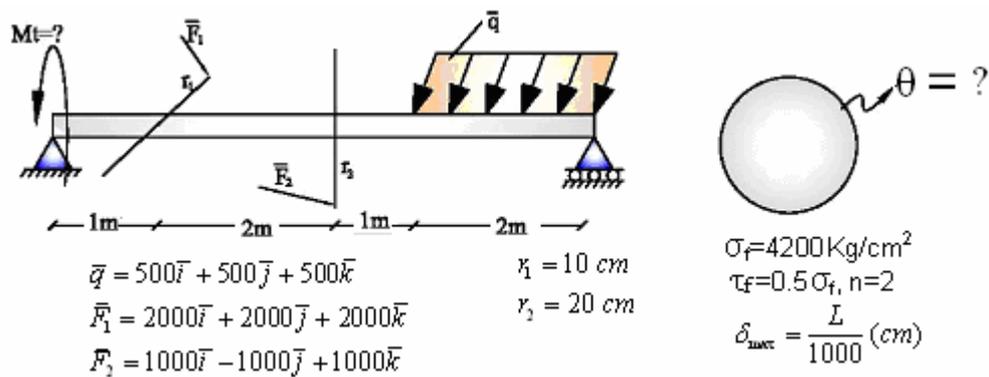
10.19.- Calcular el diámetro de la viga de la figura y el ángulo de torsión máxima, según los datos, si:  $E = 1.8 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



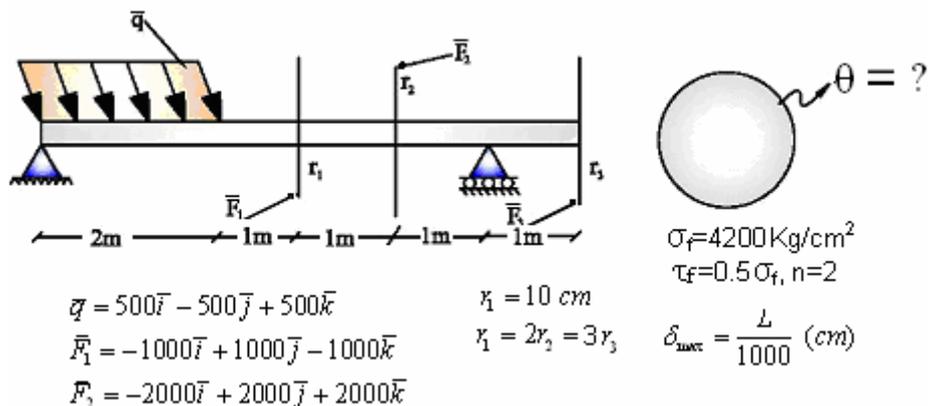
10.20.- Calcular el diámetro de la viga y la deformación máxima resultante de la figura, según los datos, si:  $E = 2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



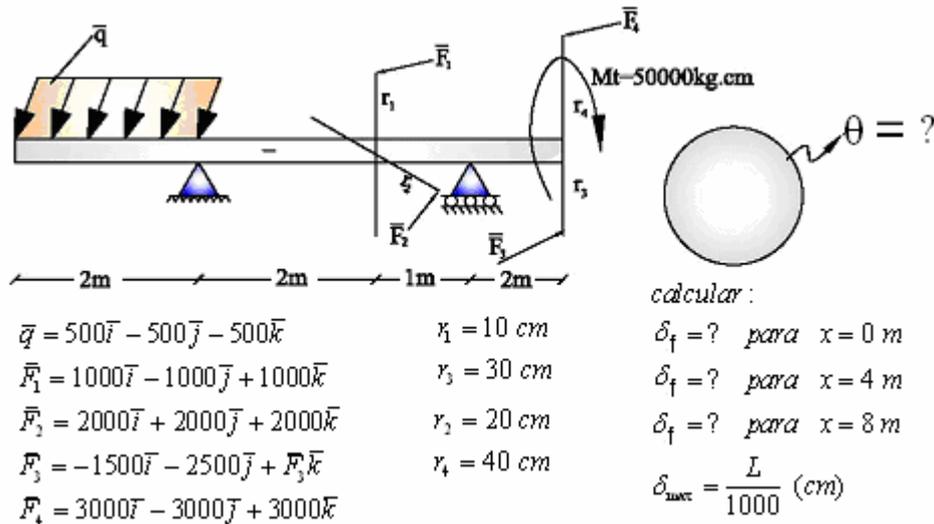
10.21.- Calcular el diámetro de la viga de sección transversal, de modo que no sobrepase los valores:  $\sigma_f = 4200 \text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau_f = 0.5 \sigma_f$ ,  $n = 2$ ,  $\mu = 0.3$ ,  $\bar{\theta} = 0.8^0$  y  $E = 2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .



10.22.- Calcular el diámetro de la viga de sección circular llena, de modo que no sobrepase los siguientes valores:  $\bar{\theta} = 1.2^0$ ,  $E = 2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$  y  $G = 2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ .

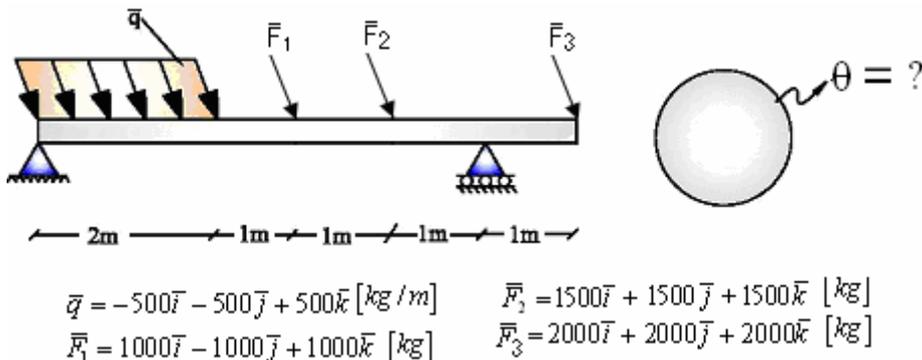


**10.23.-** Calcular el diámetro de la viga de sección transversal, de modo que no sobrepase los valores:  $\sigma_f=4200\text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau_f=0.5\sigma_f$ ,  $n=2$ ,  $\mu = 0.3$ ,  $\bar{\theta}=1^0$  y  $E=1.5 \times 10^6\text{Kg/cm}^2$ .

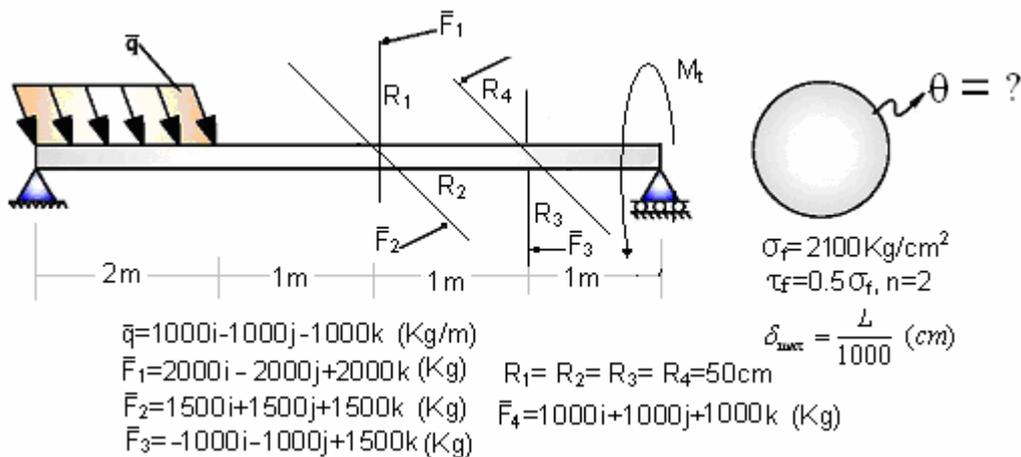


**10.24.-** A partir de la viga mostrada, para valores de:  $\sigma_f=4200\text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau_f=0.5\sigma_f$ ,  $n=2$  y  $E=2.1 \times 10^6\text{Kg/cm}^2$ , se pide determinar:

- El diámetro de la viga de sección circular llena y su deformación máxima resultante.
- Las dimensiones la sesión rectangular llena de base "b" y de altura "h=2b".
- Las deformaciones máximas en el planos (x-y) y en el plano (x-z) de una viga rectangular del inciso anterior.

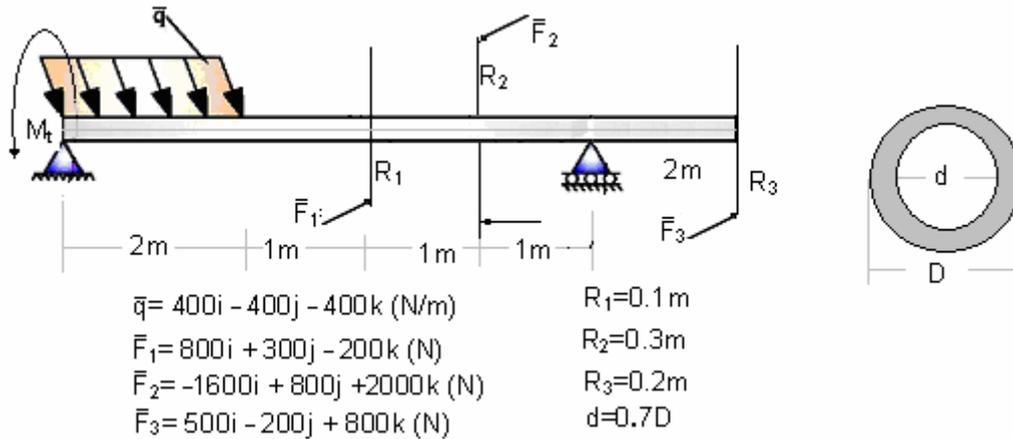


**10.25.-** Calcular el diámetro de la viga de sección circular llena, de modo que no sobrepase los siguientes valores:  $\mu = 0.3$ ,  $\bar{\theta}=0.25^0$  y  $E=1.5 \times 10^6\text{Kg/cm}^2$ .

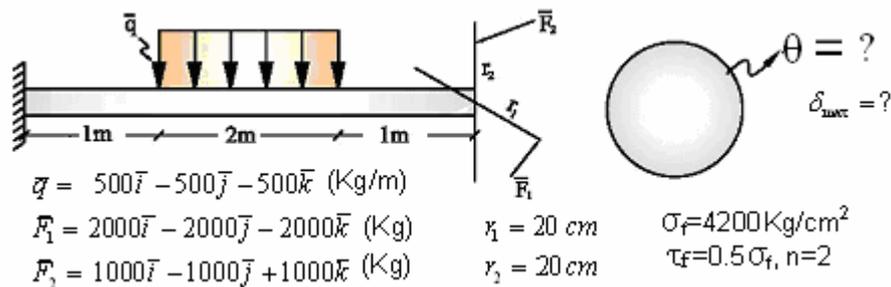


10.26.- Calcular las dimensiones de la sección transversal de la viga mostrada, de modo que no sobrepase los siguientes valores:

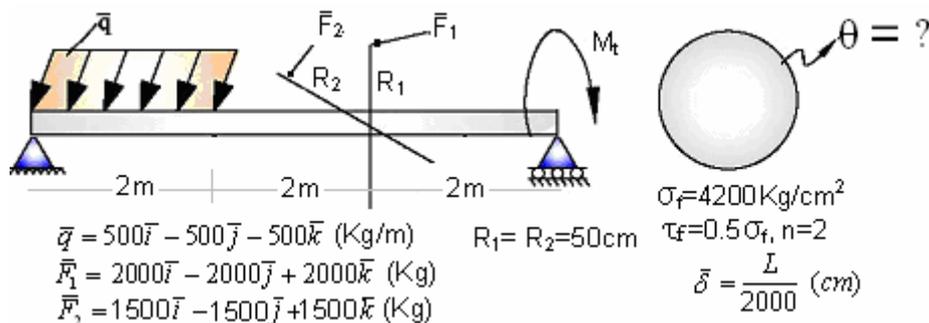
$$\bar{\sigma} = 2.4MPa, \bar{\theta} = 2^\circ, E = 200GPa, \mu = 0.3, \bar{\delta}_x = \frac{L}{800} cm$$



10.27.- Calcular el diámetro de la viga y la deformación máxima resultante de la figura, según los datos, si:  $\mu = 0.3, E = 2.1 \times 10^6 Kg/cm^2$ .

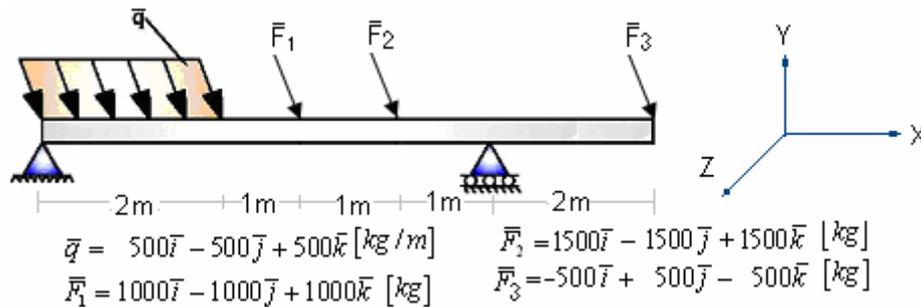


10.28.- Calcular las dimensiones de la sección transversal de la viga mostrada, de modo que no sobrepase los siguientes valores:  $\mu = 0.3, E = 200GPa$  y  $\bar{\delta}_x = \frac{L}{800} cm$ .



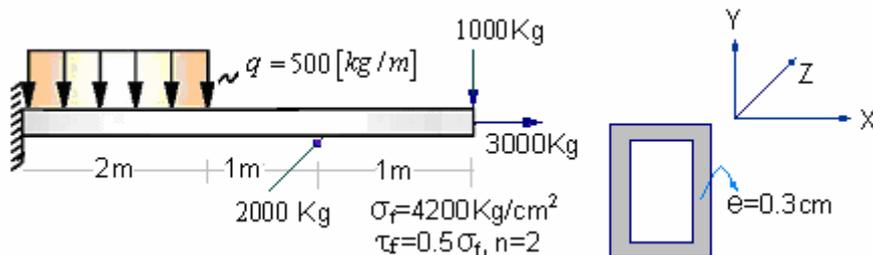
**10.29.-** A partir de la viga mostrada,  $\sigma_f=2100\text{Kg/cm}^2$ ,  $\tau_f=0.5\sigma_f$ ,  $n=3$  y  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ , se pide determinar:

- El diámetro de la viga de sección circular llena y su deformación máxima resultante.
- Las dimensiones la sesión rectangular llena de base "b" y de altura "h=2b".
- Las deformaciones máximas en el planos (x-y) y (x-z) de una viga rectangular del inciso (b).

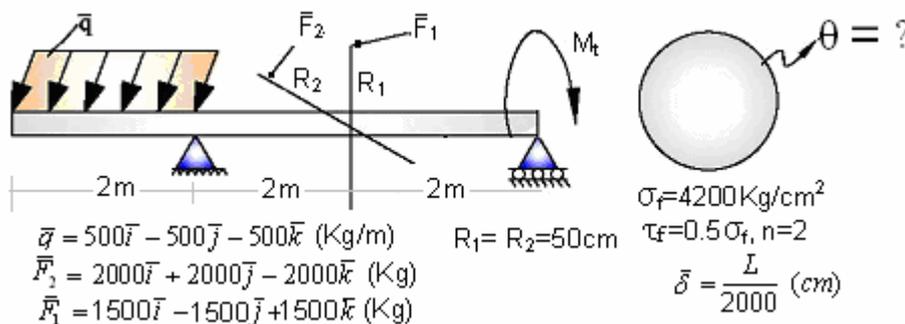


**10.30.-** A partir de la viga mostrada,  $\bar{\sigma}=2100\text{Kg/cm}^2$ ,  $\bar{\tau}=0.5\bar{\sigma}$  y  $E=2.1 \times 10^6 \text{Kg/cm}^2$ , se pide determinar:

- El diámetro de la viga de sección circular hueca de  $e=4\text{cm}$ .  $\bar{\sigma}=2100\text{Kg/cm}^2$ ,  $\bar{\tau}=0.5\bar{\sigma}$
- Las dimensiones la sesión rectangular hueca de base "b" y de altura "h=2b".



**10.31.-** Calcular las dimensiones de la sección transversal de la viga mostrada, de modo que no sobrepase los siguientes valores:  $\mu = 0.3$ ,  $E=200\text{GPa}$  y  $\bar{\delta} = \frac{L}{2000} \text{cm}$ .



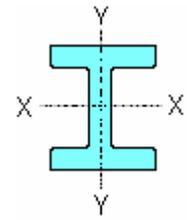


Tabla A-1 Perfiles **H** (vigas de ala ancha), americanos (W) unidades (S.I)

Denominación	Masa Aprox. (Kg/m)	Área transversal (mm <sup>2</sup> )	Altura (mm)	Ala (o patín)			Eje X - X		Eje Y - Y	
				Ancho (mm)	espesor (mm <sup>2</sup> )	espesor alma (mm <sup>2</sup> )	I (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$s = \frac{I}{c}$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )	I (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$s = \frac{I}{c}$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )
W920x446	447.2	57000	933	423	42.7	24	8470	18200	540	2550
W920x417	418.1	53300	928	422	39.9	22.5	7880	17000	501	2370
W920x387	387	49300	921	420	36.6	21.3	7180	15600	453	2160
W920x365	364.6	46400	916	419	34.3	20.3	6710	14600	421	2010
W920x342	342.4	43600	912	418	32	19.3	6250	13700	390	1870
W920x313	312.7	39800	932	309	34.5	21.1	5480	11800	170	1100
W920x289	288.6	36800	927	308	32	19.4	5040	10900	156	1020
W920x271	271.7	34600	923	307	30	18.4	4720	10200	145	946
W920x253	253.7	32300	919	306	27.9	17.3	4370	9520	134	874
W920x238	238.3	30400	915	305	25.9	16.5	4060	8880	123	806
W920x223	224.2	28600	911	304	23.9	15.9	3770	8270	112	738
W920x201	201.3	25600	903	304	20.1	15.2	3250	7200	94.4	621
W840x359	359.4	45800	868	403	35.6	21.1	5910	13600	389	1930
W840x329	329.4	42000	862	401	32.4	19.7	5350	12400	349	1740
W840x299	299.3	38100	855	400	29.2	18.2	4790	11200	312	1560
W840x226	226.6	28900	851	294	26.8	16.1	3400	7990	114	774
W840x210	210.8	26800	846	293	24.4	15.4	3110	7340	103	700
W840x193	193.5	24700	840	292	21.7	14.7	2780	6630	90.3	618
W840x176	176	22400	835	292	18.8	14	2460	5900	78.2	536
W760x314	314.4	40100	786	384	33.4	19.7	4270	10900	316	1640
W760x284	283.9	36200	779	382	30.1	18	3810	9790	280	1470
W760x257	257.6	32800	773	381	27.1	16.6	3420	8840	250	1310
W760x196	196.8	25100	770	268	25.4	15.6	2400	6240	81.7	610
W760x185	184.8	23500	766	267	23.6	14.9	2230	5820	75.1	563
W760x173	173.6	22100	762	267	21.6	14.4	2060	5400	68.7	515
W760x161	160.4	20400	758	266	19.3	13.8	1860	4900	60.7	457
W760x147	147.1	18700	753	265	17.0	13.2	1660	4410	52.9	399
W690x265	264.5	33700	706	358	30.2	18.4	2900	8220	231	1290
W690x240	239.9	30600	701	356	27.4	16.8	2610	7450	206	1160
W690x217	217.8	27700	695	355	24.8	15.4	2340	6740	185	1040
W690x170	169.9	21600	693	256	23.6	14.5	1700	4910	66.2	517
W690x152	152.1	19400	688	254	21.1	13.1	1510	4380	57.8	455
W690x140	139.8	17800	684	254	18.9	12.4	1360	3980	51.7	407
W690x125	125.6	16000	678	253	16.3	11.7	1190	3500	44.1	349
W610x241	241.7	30800	635	329	31	17.9	2150	6780	184	1120
W690x217	217.9	27800	628	328	27.7	16.5	1910	6070	163	995
W690x195	195.6	24900	622	327	24.4	15.4	1680	5400	142	871
W690x174	174.3	22200	616	325	21.6	14	1470	4780	124	761
W690x155	154.9	19700	611	324	19	12.7	1290	4220	108	666
W690x140	140.1	17900	617	230	22.2	13.1	1120	3630	45.1	392
W690x125	125.1	15900	612	229	19.6	11.9	985	3220	39.3	343
W690x113	113.4	14400	608	228	17.3	11.2	875	2880	34.3	300

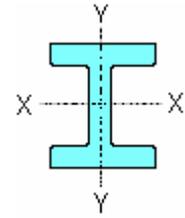


Tabla A-1 Perfiles **H** (vigas de ala ancha), americanos (W) unidades (S.I)

Denominación	Masa Aprox. (Kg/m)	Área transversal (mm <sup>2</sup> )	Altura (mm)	Ala (o patín)			Eje X - X		Eje Y - Y	
				Ancho (mm)	espesor (mm <sup>2</sup> )	espesor alma (mm <sup>2</sup> )	I (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$s = \frac{I}{c}$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )	I (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$s = \frac{I}{c}$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )
W690x101	101.7	13000	603	228	14.9	10.5	764	2530	29.5	259
W690x92	92.3	11800	603	179	15	10.9	646	2140	14.4	161
W690x82	81.9	10400	599	178	12.8	10	560	1870	12.1	136
W530x219	218.9	27900	560	318	29.2	18.3	1510	5390	157	986
W530x196	196.5	25000	554	316	26.3	16.5	1340	4840	139	877
W530x182	181.7	23100	551	315	24.4	15.2	1240	4480	127	808
W530x165	165.3	21100	546	313	22.2	14	1110	4060	114	726
W530x150	150.6	19200	543	312	20.3	12.7	1010	3710	103	659
W530x138	138.3	17600	549	214	23.6	14.7	861	3140	38.7	362
W530x123	123.2	15700	544	212	21.2	13.1	761	2800	33.8	319
W530x109	109	13900	539	211	18.8	11.6	667	2480	29.5	280
W530x101	101.4	12900	537	210	17.4	10.9	616	2300	26.9	256
W530x92	92.5	11800	533	209	15.6	10.2	552	2070	23.8	228
W530x85	84.7	10800	535	166	16.5	10.3	485	1810	12.6	152
W530x82	82.4	10500	528	209	13.3	9.5	479	1810	20.3	194
W530x74	74.7	9520	529	166	13.6	9.7	411	1550	10.4	125
W530x66	65.7	8370	525	165	11.4	8.9	351	1340	8.57	104
W460*177	177.3	22600	482	286	26.9	16.6	910	3780	105	735
W460*158	157.7	20100	476	284	23.9	15	796	3350	91.4	643
W460*144	144.6	18400	472	283	22.1	13.6	726	3080	83.6	591
W460*128	128.4	16400	467	282	19.6	12.2	637	2730	73.3	520
W460*113	113.1	14400	463	280	17.3	10.8	556	2400	63.3	452
W460*106	105.8	13500	469	194	20.6	12.6	488	2080	25.1	259
W460*97	96.6	12300	466	193	19	11.4	445	1910	22.8	237
W460*89	89.3	11400	463	192	17.7	10.5	410	1770	20.9	218
W460*82	81.9	10400	460	191	16	9.9	370	1610	18.6	195
W460*74	74.2	9450	457	190	14.5	9	333	1460	16.6	175
W460*68	68.5	8730	459	154	15.4	9.1	297	1290	9.41	122
W460*67	68.1	8680	454	190	12.7	8.5	300	1320	14.6	153
W460*61	60.9	7760	450	189	10.8	8.1	259	1150	12.2	129
W460*60	59.6	7590	455	153	13.3	8	255	1120	7.96	104
W460*52	52	6630	450	152	10.8	7.6	212	943	6.34	83.4
W410*149	149.3	19000	431	265	25	14.9	619	2870	77.7	586
W410*132	132.1	16800	425	263	22.2	13.3	538	2530	67.4	512
W410*114	114.5	14600	420	261	19.3	11.6	462	2200	57.2	439
W410*100	99.6	12700	415	260	16.9	10	398	1920	49.5	381
W410*85	85	10800	417	181	18.2	10.9	315	1510	18	199
W410*74	74.9	9550	413	180	16	9.7	275	1330	15.6	173
W410*67	67.5	8600	410	179	14.4	8.8	246	1200	13.8	154
W410*60	59.5	7580	407	178	12.8	7.7	216	1060	12	135
W410*54	53.4	6810	403	177	10.9	7.5	186	924	10.1	114
W410*46	46.2	5890	403	140	11.2	7	156	773	5.14	73.4
W410*39	39.2	4990	399	140	8.8	6.4	127	634	4.04	57.7

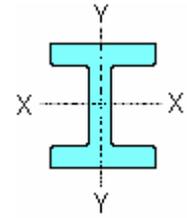


Tabla A-1 Perfiles **H** (vigas de ala ancha), americanos (W) unidades (S.I)

Denominación	Masa Aprox. (Kg/m)	Área transversal (mm <sup>2</sup> )	Altura (mm)	Ala (o patín)			Eje X - X		Eje Y - Y	
				Ancho (mm)	espesor (mm <sup>2</sup> )	espesor alma (mm <sup>2</sup> )	I (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$s = \frac{I}{c}$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )	I (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$s = \frac{I}{c}$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )
W360*1086	1087.9	139000	569	454	125	78	5960	20900	1960	8650
W360*990	991	126000	550	448	115	71.8	5190	18900	1730	7740
W360*900	902.2	115000	531	442	106	65.9	4500	17000	1530	6940
W360*818	819	104000	514	437	97	60.5	3920	15300	1360	6200
W360*744	744.3	94800	498	432	88.9	55.6	3420	13700	1200	5550
W360*677	677.8	86300	483	428	81.5	51.2	2990	12400	1070	4990
W360*634	634.3	80800	474	424	77.1	47.6	2740	11600	983	4630
W360*592	592.6	75500	465	421	72.3	45	2500	10800	902	4280
W360*551	550.6	70100	455	418	67.6	42	2260	9940	825	3950
W360*509	509.5	64900	446	416	62.7	39.1	2050	9170	754	3630
W360*463	462.8	59000	435	412	57.4	35.8	1800	8280	670	3250
W360*421	421.7	53700	425	409	52.6	32.8	1600	7510	601	2940
W360*382	382.4	48700	416	406	48	29.8	1410	6790	536	2640
W360*347	347	44200	407	404	43.7	27.2	1250	6140	481	2380
W360*314	313.4	39900	399	401	39.6	24.9	1100	5530	426	2120
W360*287	287.6	36600	393	399	36.6	22.6	997	5070	388	1940
W360*262	262.7	33500	387	398	33.3	21.1	894	4620	350	1760
W360*237	236.3	30100	380	395	30.2	18.9	788	4150	310	1570
W360*216	216.3	27600	375	394	27.7	17.3	712	3790	283	1430
W360*196	196.5	25000	372	374	26.2	16.4	636	3420	229	1220
W360*179	179.2	22800	368	373	23.9	15	575	3120	207	1110
W360*162	162	20600	364	371	21.8	13.3	516	2830	186	1000
W360*147	147.5	18800	360	370	19.8	12.3	463	2570	167	904
W360*134	134	17100	356	369	18	11.2	415	2330	151	817
W360*122	121.7	15500	363	257	21.7	13	365	2010	61.5	478
W360*110	110.2	14000	360	256	19.9	11.4	331	1840	55.7	435
W360*101	101.2	12900	357	255	18.3	10.5	302	1690	50.6	397
W360*91	90.8	11600	353	254	16.4	9.5	267	1510	44.8	353
W360*79	79.3	10100	354	205	16.8	9.4	227	1280	24.2	236
W360*72	71.5	9110	350	204	15.1	8.6	201	1150	21.4	210
W360*64	63.9	8140	347	203	13.5	7.7	178	1030	18.8	186
W360*57	56.7	7220	358	172	13.1	7.9	161	897	11.1	129
W360*51	50.6	6450	355	171	11.6	7.2	141	796	9.68	113
W360*45	45	5730	352	171	9.8	6.9	122	691	8.18	95.7
W360*39	39.1	4980	353	128	10.7	6.5	102	580	3.75	58.6
W360*33	32.8	4170	349	127	8.5	5.8	82.7	474	2.91	45.8
W310*500	500.4	63700	427	340	75.1	45.1	1690	7910	494	2910
W310*454	454	57800	415	336	68.7	41.3	1480	7130	436	2600
W310*415	415.1	52900	403	334	62.7	38.9	1300	6450	391	2340
W310*375	374.3	47700	391	330	57.1	35.4	1130	5760	343	2080
W310*342	343.3	43700	382	328	52.6	32.6	1010	5260	310	1890
W310*313	313.3	39900	374	325	48.3	30	896	4790	277	1700
W310*283	283	36000	365	322	44.1	26.9	787	4310	246	1530
W310*253	252.9	32200	356	319	39.6	24.4	682	3830	215	1350
W310*226	226.8	28900	348	317	35.6	22.1	596	3420	189	1190

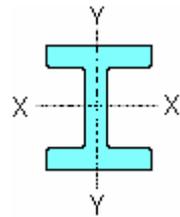


Tabla A-1 Perfiles H (vigas de ala ancha), americanos (W) unidades (S.I)

Denominación	Masa Aprox. (Kg/m)	Área transversal (mm <sup>2</sup> )	Altura (mm)	Ala (o patín)			Eje X - X		Eje Y - Y	
				Ancho (mm)	espesor (mm <sup>2</sup> )	espesor alma (mm <sup>2</sup> )	I (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$s = \frac{I}{c}$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )	I (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$s = \frac{I}{c}$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )
W310*202	202.6	25800	341	315	31.8	20.1	520	3050	166	1050
W310*179	178.8	22800	333	313	28.1	18	445	2680	144	919
W310*158	157.4	20100	327	310	25.1	15.5	386	2360	125	805
W310*143	143.1	18200	323	309	22.9	14	348	2150	113	729
W310*129	129.6	16500	318	308	20.6	13.1	308	1940	100	652
W310*118	117.5	15000	314	307	18.7	11.9	275	1750	90.2	588
W310*107	106.9	13600	311	306	17	10.9	248	1590	81.2	531
W310*97	96.8	12300	308	305	15.4	9.9	222	1440	72.9	478
W310*86	86.4	11000	310	254	16.3	9.1	199	1280	44.5	1351
W310*79	78.9	10100	306	254	14.6	8.8	177	1160	39.9	314
W310*74	74.5	9490	310	205	16.3	9.4	165	1060	23.4	229
W310*67	66.8	8510	306	204	14.6	8.5	145	949	20.7	203
W310*60	59.6	7590	303	203	13.1	7.5	129	849	18.3	180
W310*52	52.3	6670	317	167	13.2	7.6	118	747	10.3	123
W310*45	44.6	5690	313	166	11.2	6.6	99.2	634	8.55	103
W310*39	38.7	4940	310	165	9.7	5.8	85.1	549	7.27	88.1
W310*33	22.8	4180	313	102	10.8	6.6	65	415	1.92	37.6
W310*28	28.4	3610	309	102	8.9	6	54.3	351	1.58	31
W310*24	23.8	3040	305	101	6.7	5.6	42.7	28	1.16	22.9
W310*21	21.1	2690	303	101	5.7	5.1	37	244	0.983	19.5
W250*167	167.4	21300	289	265	31.18	19.2	300	2080	98.8	746
W250*149	148.9	19000	282	263	28.4	17.3	259	1840	86.2	656
W250*131	131.1	16700	275	261	25.1	15.4	22.1	1610	74.5	571
W250*115	114.8	14600	269	259	22.1	13.5	189	1410	64.1	495
W250*101	101.2	12900	264	257	19.6	11.9	164	1240	55.5	432
W250*89	89.6	11400	260	256	17.3	10.7	143	1100	48.4	378
W250*80	80.1	10200	256	255	15.6	9.4	126	982	43.1	338
W250*73	72.9	9280	253	254	14.2	8.6	113	891	38.8	306
W250*67	67.1	8550	257	204	15.7	8.9	104	806	22.2	218
W250*58	58.2	7420	252	203	13.5	8	87.3	693	18.8	186
W250*49	49	6250	247	202	11	7.4	70.6	572	15.1	150
W250*45	44.9	5720	266	148	13	7.6	71.1	534	7.03	95.1
W250*39	38.7	4920	262	147	11.2	6.6	60.1	459	5.94	80.8
W250*33	32.7	4170	258	146	9.9	6.1	48.9	379	4.73	64.7
W250*28	28.5	3630	260	102	10	6.4	40	307	1.78	34.8
W250*25	25.3	3230	257	102	8.4	6.1	34.2	266	1.48	29.2
W250*22	22.4	2850	254	102	6.9	5.8	28.9	227	1.23	24
W250*18	17.9	2270	251	101	5.3	4.8	22.4	179	0.913	18.1
W200*100	99.5	12700	229	210	23.7	14.5	113	989	36.6	349
W200*86	86.7	11100	222	209	20.6	13	94.7	853	31.4	300
W200*71	71.5	9110	216	206	17.4	10.2	76.6	709	25.4	246
W200*59	59.4	7560	210	205	14.2	9.1	61.1	582	20.4	199
W200*52	52.3	6660	206	204	12.6	7.9	52.7	512	17.8	175
W200*46	46	5860	203	203	11	7.2	45.5	448	15.3	151

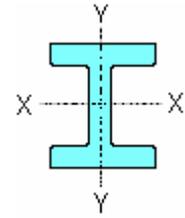


Tabla A-1 Perfiles H (vigas de ala ancha), americanos (W) unidades (S.I)

Denominación	Masa Aprox. (Kg/m)	Área transversal (mm <sup>2</sup> )	Altura (mm)	Ala (o patín)			Eje X - X		Eje Y - Y	
				Ancho (mm)	espesor (mm <sup>2</sup> )	espesor alma (mm <sup>2</sup> )	I (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$s = \frac{I}{c}$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )	I (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$s = \frac{I}{c}$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )
W200*42	41.7	5310	205	166	11.8	7.2	40.9	399	9	108
W200*36	35.9	4580	201	165	10.2	6.2	34.4	342	7.64	92.6
W200*31	31.4	4000	210	134	10.2	6.4	31.4	299	4.10	61.1
W200*27	26.6	3390	207	133	8.4	5.8	25.8	249	3.3	49.6
W200*22	22.4	2860	206	102	8	6.2	20	194	1.42	27.8
W200*19	19.4	2480	203	102	6.5	5.8	16.6	163	1.15	22.6
W200*15	15	1900	200	100	5.2	4.3	12.7	127	0.869	17.4
W150*37	37.1	4730	162	154	11.6	8.1	22.2	274	7.07	91.8
W150*30	22.9	3790	157	153	9.3	6.6	17.2	219	5.56	72.6
W150*22	22.3	2850	152	152	6.6	5.8	12.1	159	3.87	50.9
W150*24	24	3060	160	102	10.3	6.6	13.4	168	1.83	35.8
W150*18	18	2290	153	102	7.1	5.8	9.16	120	1.26	24.7
W150*14	13.6	1730	150	100	5.5	4.3	6.87	91.5	0.918	18.4
W130*28	28.2	3590	131	128	10.9	6.9	11	168	3.81	59.6
W130*24	23.7	3020	127	127	9.1	6.1	8.84	139	3.11	49
W100*19	19.4	2470	106	103	8.8	7.1	4.76	89.9	1.61	31.2
S610*179	178.9	22800	610	204	28	20.3	1260	4140	35.1	345
S610*157.6	158	20100	610	200	28	15.9	1180	3870	32.8	328
S610*149	149.2	19000	610	184	22.1	19	997	3270	20.1	218
S610*134	133.9	17100	610	181	22.1	15.8	938	3070	18.9	209
S610*118.9	119.1	15200	610	178	22.1	12.7	879	2880	17.9	201
S510*141	141.8	18100	508	183	23.3	20.3	674	2660	21	230
S510*127	126.9	16200	508	179	23.3	16.6	633	2490	19.5	218
S510*112	111.9	14300	508	162	20.1	16.3	532	2100	12.5	154
S510*97.3	97.8	12500	508	159	20.1	12.7	494	1950	11.7	147
S460*104	104.7	13300	457	159	17.6	18.1	387	1690	10.3	129
S460*81.4	81.6	10400	457	152	17.6	11.7	335	1470	8.77	115
S380*74	74.6	9500	381	143	15.8	14	203	1060	6.6	92.3
S380*64	63.9	8150	381	140	15.8	10.4	187	980	6.11	87.3
S310*74	74.6	9500	305	139	16.8	17.4	128	836	6.64	95.6
S310*60.4	60.8	7750	305	133	16.8	11.7	114	747	5.71	85.9
S310*52	52.2	6650	305	129	13.8	10.9	95.8	629	4.16	64.5
S310*47	47.4	6040	305	127	13.8	8.9	91.1	597	3.94	62.1
S250*52	52.3	6660	254	126	12.5	15.1	61.6	485	3.56	56.5
S250*38	37.8	4820	254	118	12.5	7.9	51.4	405	2.84	48.2
S200*34	34.3	4370	203	106	10.8	11.2	27	266	1.81	34.2
S200*27	27.5	3500	203	102	10.8	6.9	24	237	1.59	31.1

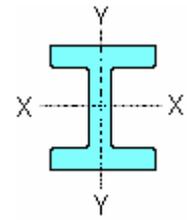


Tabla A-1 Perfiles **H** (vigas de ala ancha), americanos (W) unidades (S.I)

Denominación	Masa Aprox. (Kg/m)	Área transversal (mm <sup>2</sup> )	Altura (mm)	Ala (o patín)			Eje X - X		Eje Y - Y	
				Ancho (mm)	espesor (mm <sup>2</sup> )	espesor alma (mm <sup>2</sup> )	$I$ (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$s = \frac{I}{c}$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )	$I$ (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$s = \frac{I}{c}$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )
S180*30	29.7	3780	178	97	10	11.4	17.6	198	1.30	26.8
S180*22.8	22.7	2890	178	92	10	6.4	15.3	172	1.08	23.6
S150*26	25.5	3250	152	90	9.1	11.8	10.8	143	0.952	21.2
S150*19	18.4	2340	152	84	9.1	5.8	9.08	119	0.750	17.9
S130*22	21.9	2790	127	83	8.3	12.5	6.33	99.6	0.690	16.6
S130*15	14.8	1880	127	76	8.3	5.3	5.11	80.4	0.507	13.4
S100*14.1	14	1790	102	70	7.4	8.3	2.81	55.2	0.362	10.3
S100*11	11.3	1440	102	67	7.4	4.8	2.52	49.4	0.311	9.28
S75*11	11.1	1420	76	63	6.6	8.9	1.2	31.6	0.238	7.56
S75*8	8.4	1070	76	59	6.6	4.3	1.04	27.4	0.190	6.43

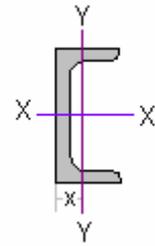


Tabla A-2 Perfiles C (Canales), americanos unidades (S.I)

Denominación	Masa Aprox. (Kg/m)	Área transversal (mm <sup>2</sup> )	Altura (mm)	Ala (o patín)			Eje X - X		Eje Y - Y		X (mm)
				Ancho (mm)	espesor (mm <sup>2</sup> )	espesor alma (mm <sup>2</sup> )	I (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$s = \frac{I}{c}$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )	I (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$s = \frac{I}{c}$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )	
C380*74	74.4	9480	381	94	16.5	18.2	168	881	4.6	62.4	20.3
C380*60	59.4	7570	381	89	16.5	13.2	145	760	3.84	55.5	19.7
C380*50	50.5	6430	381	86	16.5	10.2	131	687	3.39	51.4	20
C310*45	44.7	5690	305	80	12.7	13	67.3	442	2.12	33.6	17
C310*37	37.1	4720	305	77	12.7	9.8	59.9	393	1.85	30.9	17.1
C310*31	30.8	3920	305	74	12.7	7.2	53.5	351	1.59	28.2	17.5
C250*45	44.5	5670	254	76	11.1	17.1	42.8	337	1.6	26.8	16.3
C250*37	37.3	4750	254	73	11.1	13.4	37.9	299	1.4	24.3	15.7
C250*30	29.6	3780	254	69	11.9	9.6	32.7	257	1.16	21.5	15.3
C250*23	22.6	2880	254	65	11.1	6.1	27.8	219	0.922	18.8	15.9
C230*30	29.8	3800	229	67	10.5	11.4	25.5	222	1.01	19.3	14.8
C230*22	22.3	2840	229	63	10.5	7.2	21.3	186	0.806	16.8	14.9
C230*20	19.8	2530	229	61	10.5	5.9	19.8	173	0.716	15.6	15.1
C200*28	27.9	3560	203	64	9.9	12.4	18.2	180	0.825	16.6	14.4
C200*21	20.4	2600	203	59	9.9	7.7	14.9	147	0.627	13.9	14
C200*17	17	2170	203	57	9.9	5.6	13.5	133	0.544	12.8	14.5
C180*22	21.9	2780	178	58	9.9	10.6	11.3	127	0.568	12.8	13.5
C180*18	18.2	2310	178	55	9.3	8	10	113	0.476	11.4	13.2
C180*15	14.5	1850	178	53	9.3	5.3	8.86	99.6	0.405	10.3	13.8
C150*19	19.2	2450	152	54	8.7	11.1	7.12	93.7	0.425	10.3	12.9
C150*16	15.5	1980	152	51	8.7	8	6.22	81.9	0.351	9.13	12.6
C150*12	12.1	1540	152	48	8.7	5.1	5.36	70.6	0.279	7.93	12.8
C130*13	13.3	1700	127	47	8.1	8.3	3.66	57.6	0.252	7.2	11.9
C130*10	9.9	1260	127	44	8.1	4.8	3.09	48.6	0.195	6.14	12.2
C100*11	10.8	1370	102	43	7.5	8.2	1.91	37.4	0.174	5.52	11.5
C100*8	8	1020	102	40	7.5	4.7	1.61	31.6	0.132	4.65	11.6
C75*9	8.8	1120	76	40	6.9	9	0.85	22.3	0.123	4.31	11.4
C75*7	7.3	933	76	37	6.9	6.6	0.75	19.7	0.096	3.67	10.8
C75*6	6	763	76	35	6.9	4.3	0.67	17.6	0.077	3.21	10.9

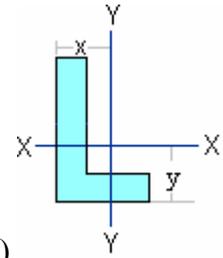


Tabla A-3 Perfiles L (angulares), de lados iguales, americanos unidades (S.I)

Dimensiones (mm)	Masa Aprox. (Kg/m)	Area transversal (mm <sup>2</sup> )	I (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$s = \frac{I}{c}$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )	X O Y (mm)
200 x 200x30	87.1	1110	40.3	290	60.9
200 x 200x25	73.6	9380	34.8	247	59.2
200 x 200x20	59.7	7600	28.8	202	57.4
200 x 200x16	48.2	6140	23.7	165	55.9
200 x 200x13	39.5	5030	19.7	136	54.8
200 x 200x10	30.6	3900	15.5	106	53.7
150 x 150x20	44	5600	11.6	110	44.8
150 x 150x16	35.7	4540	9.63	90.3	43.4
150 x 150x13	29.3	3730	8.05	74.7	42.3
150 x 150x10	22.8	2900	6.37	58.6	41.2
125 x 125x16	29.4	3740	5.41	61.5	37.1
125 x 125x13	24.2	3080	4.54	51.1	36
125 x 125x10	18.8	2400	3.62	40.2	34.9
125 x 125x8	15.2	1940	2.96	32.6	34.2
100 x 100x16	23.1	2940	2.65	38.3	30.8
100 x 100x13	19.1	2430	2.24	31.9	29.8
100 x 100x10	14.9	1900	1.8	25.2	28.7
100 x 100x8	12.1	1540	1.48	20.6	28
100 x 100x6	9.14	1160	1.14	15.7	27.2
90 x 90x13	17	21.7	1.6	25.6	27.2
90 x 90x10	13.3	1700	1.29	20.2	26.2
90 x 90x8	10.8	1380	1.07	16.5	25.5
90 x 90x6	8.20	1040	0.826	12.7	24.7
75 x 75x13	14	1780	0.892	17.3	23.5
75 x 75x10	11	1400	0.725	13.8	22.4
75 x 75x8	8.92	1140	0.602	11.3	21.7
75 x 75x6	6.78	864	0.469	8.68	21
75 x 75x5	5.69	725	0.398	7.32	20.6
65 x 65x10	9.42	1200	0.459	10.2	19.9
65 x 65x8	7.66	936	0.383	8.36	19.2
65 x 65x6	5.84	744	0.300	6.44	18.5
65 x 65x5	4.91	625	0.255	5.45	18.1

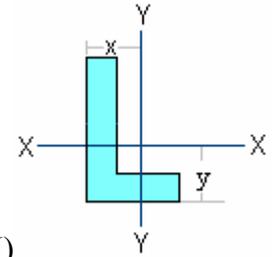
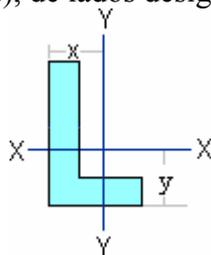


Tabla A-3 Perfiles **L** (angulares), de lados iguales, americanos unidades (S.I)

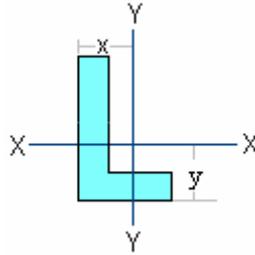
Dimensiones (mm)	Masa Aprox. (Kg/m)	Área transversal (mm <sup>2</sup> )	$I$ (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$s = \frac{I}{c}$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )	X O bien Y (mm)
55 x 55x10	7.85	1000	0.268	7.11	17.4
55 x 55x8	6.41	816	0.225	5.87	16.7
55 x 55x6	4.90	624	0.277	4.54	16
55 x 55x5	4.12	525	0.152	3.85	15.6
55 x 55x4	3.33	424	0.125	3.13	15.2
55 x 55x3	2.52	321	0.096	2.39	14.9
45 x 45x8	5.15	656	0.118	3.82	14.2
45 x 45x6	3.96	504	0.094	2.98	13.4
45 x 45x5	3.34	425	0.081	2.53	13.1
45 x 45x4	2.70	344	0.067	2.07	12.7
45 x 45x3	2.05	261	0.052	1.58	12.4
35 x 35x6	3.01	384	0.042	1.74	10.9
35 x 35x5	2.55	325	0.036	1.49	10.6
35 x 35x4	2.07	264	0.030	1.22	10.2
35 x 35x3	1.58	201	0.024	0.94	9.86
25 x 25x5	1.77	225	0.012	0.724	8.06
25 x 25x4	1.44	184	0.010	0.599	7.71
25 x 25x3	1.11	141	0.008	0.465	7.35

Tabla A-3 Perfiles L (angulares), de lados desiguales, americanos (unidades S.I)



Dimensiones (mm)	Masa Aprox. (Kg/m)	Área transversal (mm <sup>2</sup> )	Eje X - X			Eje Y - Y		
			I (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$s = \frac{I}{c}$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )	Y (mm)	I (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$s = \frac{I}{c}$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )	X (mm)
200 x 150 x25	63.8	8120	31.6	236	66.3	15.1	139	41.3
200 x 150 x20	51.8	6600	26.2	193	64.5	12.7	115	39.5
200 x 150 x16	42	5340	21.6	158	63.1	10.5	93.8	38.1
200 x 150 x13	34.4	43.8	17.9	130	62	8.77	77.6	37
200 x 100 x20	44	5600	22.6	180	74.3	3.84	50.8	24.3
200 x 100 x16	35.7	4540	18.7	147	72.8	3.22	41.8	22.8
200 x 100 x13	29.3	3730	15.6	121	71.7	2.72	34.7	21.7
200 x 100 x10	22.8	2900	12.3	94.8	70.5	2.18	27.4	20.5
150 x 100 x16	29.4	3740	8.40	84.8	50.9	3	40.4	25.9
150 x 100 x13	24.2	3080	7.03	70.2	49.9	2.53	33.7	24.9
150 x 100 x10	18.8	2400	5.58	55.1	48.8	2.03	26.6	23.8
150 x 100 x8	15.2	1940	4.55	44.6	48	1.67	21.6	23
125 x 90 x16	25	3180	4.84	58.5	42.2	2.09	32	24.7
125 x 90 x13	20.6	2630	4.07	48.6	41.2	1.77	26.7	23.7
125 x 90 x10	16.1	2050	3.25	38.2	40.1	1.42	21.1	22.6
125 x 90 x8	13	1660	2.66	31.1	39.3	1.18	17.2	21.8
125 x 75 x13	19.1	2430	3.82	47.1	43.9	1.04	18.5	18.9
125 x 75 x10	14.9	1900	3.05	37.1	42.8	0.841	14.7	17.8
125 x 75 x8	12.1	1540	2.5	30.1	42.1	0.697	12	17.1
125 x 75 x6	9.14	1160	1.92	23	41.3	0.542	9.23	16.3
100 x 90 x13	18.1	2300	2.17	31.4	31.1	1.66	25.9	26.1
100 x 90 x10	14.1	1800	1.74	24.9	30	1.33	20.5	25
100 x 90 x8	11.4	1460	1.43	20.3	29.3	1.10	16.8	24.3
100 x 90 x6	8.67	1100	1.11	15.5	28.5	0.853	12.8	23.5
100 x 75 x13	16.5	2110	2.04	30.6	33.4	0.976	18	20.9
100 x 75 x10	13	1650	1.64	24.2	32.3	0.791	14.3	19.8
100 x 75 x8	10.5	1340	1.35	19.7	31.5	0.656	11.7	19
100 x 75 x6	7.96	1010	1.04	15.1	30.8	0.511	9.01	18.3
90 x 75 x13	15.5	1980	1.51	24.8	29.3	0.946	17.8	21.8
90 x 75 x10	12.2	1550	1.22	19.7	28.2	0.767	14.1	20.7
90 x 75 x8	9.86	1260	1.01	16.1	27.5	0.636	11.6	20

Tabla A-3 Perfiles L (angulares), de lados desiguales, americanos (unidades S.I)



Dimensiones (mm)	Masa Aprox. (Kg/m)	Área transversal (mm <sup>2</sup> )	Eje X - X			Eje Y - Y		
			I (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$s = \frac{I}{c}$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )	Y (mm)	I (10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup> )	$s = \frac{I}{c}$ (10 <sup>3</sup> mm <sup>3</sup> )	X (mm)
90 x 75 x6	7.49	954	0.779	12.3	26.8	0.495	8.89	19.3
90 x 75 x5	6.28	800	0.660	10.4	26.4	0.421	7.50	18.9
90 x 65 x10	11.4	1450	1.16	19.2	29.8	0.507	10.6	17.3
90 x 65 x8	9.23	1180	0.958	15.7	29.1	0.422	8.72	16.6
90 x 65 x6	7.02	894	0.743	12.1	28.4	0.330	6.72	15.9
90 x 65 x5	5.89	750	0.629	10.2	28	0.281	5.68	15.5
80 x 60 x10	10.2	1300	0.808	15.1	26.5	0.388	8.92	16.5
80 x 60 x8	8.29	1060	0.670	12.4	25.8	0.324	7.33	15.8
80 x 60 x6	6.31	804	0.522	9.50	25.1	0.254	5.66	15.1
80 x 60 x5	5.30	675	0.443	8.02	24.7	0.217	4.79	14.7
75 x 50 x8	7.35	936	0.525	10.6	25.5	0.187	5.06	13
75 x 50 x6	5.60	714	0.410	8.15	24.7	0.148	3.92	12.2
75 x 50 x5	4.71	600	0.349	6.88	24.4	0.127	3.32	11.9
65 x 50 x8	6.72	856	0.351	8.03	21.3	0.180	4.97	13.8
65 x 50 x6	5.13	654	0.275	6.19	20.6	0.142	3.85	13.1
65 x 50 x5	4.32	550	0.235	5.24	20.2	0.122	3.27	12.7
65 x 50 x4	3.49	444	0.192	4.25	19.9	0.100	2.66	12.4
55 x 35 x6	3.96	504	0.152	4.23	19.0	0.48	1.85	9.04
55 x 35 x5	3.44	425	0.130	3.59	18.7	0.41	1.58	8.68
55 x 35 x4	2.70	344	0.107	2.92	18.3	0.034	1.29	8.31
55 x 35 x3	2.05	261	0.083	2.23	17.9	0.027	0.994	7.94
45 x 30 x6	3.25	414	0.082	2.79	15.7	0.029	1.32	8.22
45 x 30 x5	2.75	350	0.070	2.37	15.4	0.025	1.13	7.86
45 x 30 x4	2.23	284	0.058	1.94	15	0.021	0.930	7.49
45 x 30 x3	1.7	216	0.045	1.49	14.6	0.016	0.717	7.12

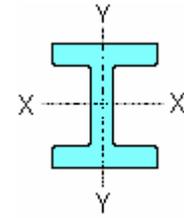
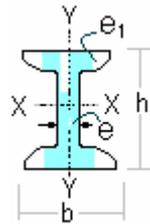


Tabla A-4 Perfiles H (viga de ala ancha), europeos (unidades S.T)

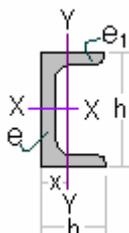
Denominación (cm)	Masa (peso) Kg/m	Área transversal cm <sup>2</sup>	Altura cm.	Ala o patín		Espesor Alma cm.	Eje X -X		Eje Y -Y	
				Ancho cm.	Espesor cm.		I cm <sup>4</sup>	$s = \frac{I}{c}$ cm <sup>3</sup>	I cm <sup>4</sup>	$s = \frac{I}{c}$ cm <sup>3</sup>
14-14	35.7	45.5	14	14	1.25	0.85	1534	219	572	81.7
16-16	44	56	16	16	1.35	0.9	2500	312	922	115
18-18	53	67.5	18	18	1.45	0.95	3856	428	1410	156
20-20	62.8	80	20	20	1.55	1	5690	569	2068	207
22-22	73.2	93	22	22	1.65	1.05	8105	736	2929	266

Tabla A-5 Perfiles I (vigas normales), europeos (unidades S.T)



Perfil	Dimensiones en mm.				Área Transversal (mm <sup>2</sup> )	Masa (peso) Kg/m	Eje X - X		Eje Y - Y	
	h	b	e	e <sub>1</sub>			I cm <sup>4</sup>	$s = \frac{I}{c}$ cm <sup>3</sup>	I cm <sup>4</sup>	$s = \frac{I}{c}$ cm <sup>3</sup>
8	80	42	3.9	5.9	7.58	7.95	77.8	19.5	6.29	3
10	100	50	4.5	6.8	10.6	8.32	171	34.2	12.2	4.88
12	120	58	5.1	7.7	14.2	11.2	328	54.7	21.5	7.41
14	140	66	5.7	8.6	18.3	14.4	573	81.9	35.2	10.7
16	160	74	6.3	9.5	22.8	17.9	935	117	54.7	14.8
18	180	82	6.9	10.4	27.9	21.9	1450	161	81.3	19.8
20	200	90	7.5	11.3	33.5	26.3	2140	214	117	26
22	220	98	8.1	12.2	39.6	31.1	3060	278	162	33.1
24	240	106	8.7	13.1	46.1	36.2	4250	354	221	41.7
26	260	113	9.4	14.1	53.4	49.9	5740	442	288	51
28	280	119	10.1	15.2	61.1	48	7590	542	364	61.2
30	300	125	10.8	16.2	69.1	54.2	9800	653	451	72.2
32	320	131	11.5	17.3	77.8	61.1	12510	782	555	84.7
34	340	137	12.2	18.3	86.8	68.1	15700	923	674	98.4
36	360	143	13	19.5	97.1	76.2	19610	1090	818	114
38	380	149	13.7	20.5	107	84	24010	1260	975	131
40	400	155	14.4	21.6	118	92.6	29210	1460	1160	149
45	450	170	16.2	24.3	147	115	45850	2040	1730	203
50	500	185	18	27	180	141	68740	2750	2480	268
55	550	200	29	30	213	167	99180	3610	3490	349
60	600	215	21.6	32.4	254	199	139000	4630	4670	434

Tabla A-6 Perfiles C (o U)(canales) ,europeos (unidades S.T)



Perfil	Dimensiones en mm.				X (cm)	Área Transversal (mm <sup>2</sup> )	Masa (peso) Kg/m	Eje X - X		Eje Y - Y	
	h	b	e	e <sub>1</sub>				$I$ cm <sup>4</sup>	$s = \frac{I}{c}$ cm <sup>3</sup>	$I$ cm <sup>4</sup>	$s = \frac{I}{c}$ cm <sup>3</sup>
50-25	50	25	6	6	0.8	5.1	4	20	8	3	1.76
60-30	60	30	6	6	0.89	6.4	5.02	32.6	10.8	5.62	1.10
8	80	45	6	8	1.45	11	8.64	106	26.5	19.4	6.36
10	100	50	6	8.5	1.55	13.5	10.60	206	41.2	29.3	8.49
12	120	55	7	9	1.6	17	13.4	364	60.7	43.2	11.1
14	140	60	7	10	1.75	20.4	16.01	605	86.4	62.7	14.8
16	160	65	7.5	10.5	1.84	24	18.84	925	116	85.3	18.3
18	180	70	8	11	1.92	28	22	1350	150	114	22.4
20	200	75	8.5	11.5	2.01	32.2	25.3	1910	191	148	27
22	220	80	9	12.5	2.14	37.4	29.4	2690	245	197	33.6
25-8	250	80	10	12.5	2.14	42.5	34	3770	302	238	40.6
25-10	250	100	10	16	2.88	53.7	22.20	5180	414	440	61.7
30	300	90	13	14	2.14	60.7	47.65	7310	487	349	51

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- Se debe tener en cuenta que la elaboración del presente documento es y será un aporte, no solo para los estudiantes de la carrera de Ingeniería Civil de la Facultad de Ciencias y Tecnología de la Universidad Mayor de san Simón, si no para todas las personas de una u otra forma estén relacionados en el área de la resistencia de materiales I.
- Estamos conscientes de que la mejor forma de aprender los conceptos explicados en el desarrollo del documento, es llevarlo a la practica para posterior no encontrarse en obstáculos, para ello es mejor aplicar el criterio de conocimiento.
- Esta es una guía sobre la metodología de trabajo y los pasos a seguir en la mencionada materia.
- Se recomienda al estudiante para poder comprender bien los temas, leer por lo menos dos veces antes que el docente.
- Una última recomendación para los estudiantes es, asistir a las clases de la teoría, ya que con eso se podrá captar con facilidad.

## RESPUESTAS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

---

### CAPITULO I

1.1.-  $\sigma_{br.} = 28.6\text{MPa}$ ,  $\sigma_{al.} = 28.6\text{MPa}$  y  $\sigma_{ac.} = 28.6\text{MPa}$ .

1.2.-  $\sigma_1 = 2000\text{Kg/cm}^2$ ,  $\sigma_2 = 200\text{Kg/cm}^2$  y  $\sigma_3 = 500\text{Kg/cm}^2$ .

1.3.-  $\sigma_1 = 4000\text{Kg/cm}^2$ ,  $\sigma_2 = 1000\text{Kg/cm}^2$  y  $\sigma_3 = 875\text{Kg/cm}^2$ .

1.4.-  $P_{max} = 180\text{KN}$ .

1.5.-  $d_i = 183.4\text{mm}$ .

1.6.-  $\phi \geq 1.25\text{cm}$  Sea  $\phi = \frac{1''}{2} \Rightarrow \phi = 1.27\text{cm}$

1.7.-  $\phi \geq 1.741\text{cm}$  Sea  $\phi = \frac{3''}{4} \Rightarrow \phi = 1.905\text{cm}$

1.8.-  $\sigma_{BD} = 8.064\text{MPa}$ .

1.9.-  $P = 62.745\text{KN}$ .

1.11.-  $\phi \geq 3.48\text{cm}$  Sea  $\phi = 1\frac{1''}{2} \Rightarrow \phi = 3.81\text{cm}$

1.12.-  $913\text{lb}$ ,  $\theta_x = 50.6^\circ$ ,  $\theta_y = 117.6^\circ$  y  $\theta_z = 51.8^\circ$

$\phi \geq 0.786\text{cm}$  Sea  $\phi = \frac{3''}{8} \Rightarrow \phi = 0.9525\text{cm}$  y  $\phi \geq 0.718\text{cm}$  Sea  $\phi = \frac{3''}{8} \Rightarrow \phi = 0.9525\text{cm}$

1.13.-  $T_1 = 3814.1\text{Kg} \Rightarrow \phi \geq 2.15\text{cm}$  Sea  $\phi = 1'' \Rightarrow \phi = 2.54\text{cm}$ .

$T_2 = 5160.26\text{Kg} \Rightarrow \phi \geq 2.50\text{cm}$  Sea  $\phi = 1'' \Rightarrow \phi = 2.54\text{cm}$ .

$T_3 = 1282.05\text{Kg} \Rightarrow \phi \geq 1.25\text{cm}$  Sea  $\phi = \frac{1''}{2} \Rightarrow \phi = 1.27\text{cm}$ .

1.14.-  $28.8\text{MPa}$ ,  $-48.8\text{MPa}$

### CAPITULO II

2.1.-  $b = 11.43\text{mm}$

2.2.-  $\phi \geq 2.2023\text{cm}$  Sea  $\phi = 1'' \Rightarrow \phi = 2.54\text{cm}$

2.3.-  $\phi \geq 1.557\text{cm}$  Sea  $\phi = \frac{3''}{4} \Rightarrow \phi = 1.905\text{cm}$

2.4.-  $\phi \geq 1.557\text{cm}$  Sea  $\phi = \frac{3''}{4} \Rightarrow \phi = 1.905\text{cm}$

2.5.-  $\phi \geq 3.589\text{cm}$  Sea  $\phi = 1\frac{1''}{2} \Rightarrow \phi = 3.81\text{cm}$

2.6.-  $a = 0.5\text{cm}$

2.7.- a).-  $\phi \geq 1.596\text{cm}$  Sea  $\phi = \frac{3''}{4} \Rightarrow \phi = 1.905\text{cm}$

b).-  $\phi \geq 2.04\text{cm}$  Sea  $\phi = 1'' \Rightarrow \phi = 2.54\text{cm}$

c).-  $e \geq 0.501\text{cm}$  Sea  $\phi = \frac{1''}{4} \Rightarrow \phi = 0.635\text{cm}$

### CAPITULO III

3.1.- 0.157mm

3.2.-  $\delta = MgL/2AE$ .

3.3.-  $\delta = 4PL/\pi EDd$

3.4.-  $\delta = \frac{\rho g L^2 (D+d)}{6E(D-d)} - \frac{\rho g L^2 d^2}{3ED(D-d)}$

3.5.-  $\delta = 0.0733\text{cm}$

3.6.-  $\delta = 0.2024\text{cm}$ ;  $\sigma_{\max} = 750\text{kg/cm}^2$

3.7.-  $P_{\max} = 12\text{KN}$ ,  $\delta_T = 0.2148\text{cm}$

3.8.-  $\delta_T = 0.06324\text{m}$

3.9.-  $\sigma_{\max} = 1400\text{kg/cm}^2$   $\delta = 0.067\text{cm}$

3.10.-  $\sigma_1 = -535.71\text{kg/cm}^2$  y  $\sigma_2 = 1657.14\text{kg/cm}^2$

3.11.-  $\delta_T = 0.1532\text{cm}$

3.14.-  $P_{\max} = 24.8\text{kN}$

3.15.-  $\sigma_{br} = 75.4\text{MPa}$ ; 1.66 vueltas

3.16.-  $\sigma_b = 10.29\text{ksi}$

3.17.-  $\sigma_1 = 2262.64\text{kg/cm}^2$ ,  $\sigma_2 = 1840.91\text{kg/cm}^2$  y  $\sigma_3 = 705.58\text{kg/cm}^2$

3.18.- Incompatible.

3.19.-  $P_{\max} = 47250\text{Kg}$ ,  $X = 4.28\text{cm}$

3.20.-  $\phi \geq 0.842\text{cm}$  Sea media pulg.  $\Rightarrow \phi = 1.27\text{cm}$

3.21.-  $\delta_{AB} = 0.02\text{cm}$

3.22.-  $\delta = 0.2PL/A_2E_2$

3.23.-  $M = 22.38 \cdot 10^3\text{Kg}$

3.24.- Incompatible.

3.25.- Incompatible.

3.26.-  $\delta_B = 0.53\text{cm}$

3.27.-  $P_{\max} = 464\text{Kg}$

3.28.-  $T_1 = 2250\text{kg/cm}^2$ ,  $T_2 = 3000\text{kg/cm}^2$

3.29.- 89.52GPa, 0.225

### CAPITULO IV

4.2.-  $\sigma_{\max} = 5123.106\text{kg/cm}^2$ ,  $\sigma_{\min} = 3123.106\text{kg/cm}^2$ ,  $\tau_{\max} = 4123.106\text{kg/cm}^2$ .

4.3.-  $\phi \geq 2.21\text{cm}$  Sea  $\phi = 1'' \Rightarrow \phi = 2.54\text{cm}$

4.4.-  $\phi \geq 1.88\text{cm}$  Sea  $\phi = \frac{3''}{4} \Rightarrow \phi = 1.905\text{cm}$

4.6.- a).-  $\phi \geq 2.16\text{cm}$  Sea  $\phi = 1'' \Rightarrow \phi = 2.54\text{cm}$ , b).-  $\phi = \frac{3''}{4} \Rightarrow \phi = 1.905\text{cm}$

4.7.-  $\sigma_{\max} = 4270.69\text{kg/cm}^2$ ,  $\sigma_{\min} = 1229.31\text{kg/cm}^2$ ,  $\tau_{\max} = 1520.69\text{kg/cm}^2$ .  
 $\alpha = 40.27^\circ$ ,  $\beta = 4.73^\circ$

4.8.-  $a \geq 2.88\text{cm} \Rightarrow a = 3\text{cm} \Rightarrow \epsilon_x = 0.0005195 \therefore \epsilon_y = -0.000548$

4.9.-  $\phi_c \geq 3.554\text{cm}$  Sea  $\phi_c = 1\frac{1''}{2} \Rightarrow \phi_c = 3.81\text{cm}$

$\phi_p \geq 2.93\text{cm}$  Sea  $\phi_p = 1\frac{1''}{4} \Rightarrow \phi_p = 3.175\text{cm}$

$\phi_r \geq 2.323\text{cm}$  Sea  $\phi_r = 1'' \Rightarrow \phi_r = 2.54\text{cm}$

$$4.10.- \phi_p \geq 3.016cm \text{ Sea } \phi_p = 1\frac{1}{4}'' \Rightarrow \phi_p = 3.175cm$$

$$\phi_c \geq 2.806cm \text{ Sea } \phi_c = 1\frac{1}{8}'' \Rightarrow \phi_c = 2.86cm$$

$$\phi_r \geq 1.226cm \text{ Sea } \phi_r = \frac{1}{2}'' \Rightarrow \phi_r = 1.27cm$$

$$4.11.- \phi_1 \geq 2.312cm \text{ Sea } \phi_1 = 1'' \Rightarrow \phi_1 = 2.54cm$$

$$\phi_2 \geq 1.874cm \text{ Sea } \phi_2 = \frac{3}{4}'' \Rightarrow \phi_2 = 1.905cm$$

$$4.14.- \phi \geq 1.604cm \text{ Sea } \phi = \frac{3}{4}'' \Rightarrow \phi = 1.905cm$$

## CAPITULO V

$$5.1.- \sigma_c = 80MPa, \sigma_L = 40MPa, \Delta D = 0.7mm$$

$$5.2.- h = 60cm$$

$$5.5.- n = 3$$

$$5.7.- 11MPa$$

$$5.8.- 1.2mm$$

$$5.9.- \tau_{max} = 21.05MPa.$$

$$5.10.- e \geq 0.119cm \text{ Sea } e = \frac{1}{16}'' \Rightarrow e = 0.159cm, D_f = 100.064cm, \phi = \frac{1}{4}'' \Rightarrow N = 119$$

$$5.12.- e \geq 0.1904cm \text{ Sea } e = \frac{1}{8}'' \Rightarrow e = 0.3175cm \text{ Para } \phi = \frac{1}{4}'' \Rightarrow N = 97$$

$$5.13.- e \geq 0.1374cm \text{ Sea } e = \frac{1}{16}'' \Rightarrow e = 0.15875cm$$

## CAPITULO VI

$$6.1.- \sigma_{\max(\text{tracción})} = 189.79 \frac{Kg}{cm^2}, \sigma_{\max(\text{compresión})} = 272.225 \frac{Kg}{cm^2}$$

$$6.2.- \sigma_{\max(\text{tracción})} = 1.807 \frac{Kg}{cm^2}, \sigma_{\max(\text{compresión})} = 1.807 \frac{Kg}{cm^2}, I = 26560000cm^4$$

$$6.3.- \sigma_{\max(\text{tracción})} = 2279.18 \frac{Kg}{cm^2}, \sigma_{\max(\text{compresión})} = 1306.58 \frac{Kg}{cm^2}$$

$$6.4.- \sigma_{\max(\text{tracción})} = 2639.64 \frac{Kg}{cm^2}, \sigma_{\max(\text{compresión})} = 1222.70 \frac{Kg}{cm^2}, I = 3417.62cm^4$$

$$6.5.- \sigma_{\max(\text{tracción})} = 8601.89 \frac{Kg}{cm^2}, \sigma_{\max(\text{compresión})} = 9778.21 \frac{Kg}{cm^2}$$

$$6.7.- \phi \geq 11.33cm \text{ Sea } \Rightarrow \phi = 11.5cm$$

$$6.8.- b \geq 8.298cm \Rightarrow b = 8.5cm \therefore h = 2b \Rightarrow h = 17cm$$

$$6.9.- b \geq 6.58cm \Rightarrow b = 7cm \therefore h = 2b \Rightarrow h = 14cm$$

$$6.11.- \phi \geq 18.11cm \text{ Sea } \Rightarrow \phi = 18.5cm$$

$$6.12.- \phi \geq 11.07cm \text{ Sea } \Rightarrow \phi = 11.5cm$$

$$6.13.- b \geq 6.56cm \Rightarrow b = 7cm \therefore h = 2b \Rightarrow h = 14cm$$

- 6.14.-  $\phi \geq 12.7cm$  Sea  $\Rightarrow \phi = 13cm$   
 6.16.-  $\phi \geq 12.4cm$  Sea  $\Rightarrow \phi = 12.5cm$   
 6.17.-  $\bar{y} = 11.40cm$ ,  $I = 2315.16cm^4$ ,  $S = 203.08 cm^3$   
 6.19.-  $S \geq 99.55m^3$   
 6.21.-  $a \geq 1.23cm \Rightarrow a = 1.5cm$   
 6.22.- Para  $\phi = 1\frac{1}{4}'' \Rightarrow N = 3 \therefore L = 6.2m$   
 6.23.- Para  $\phi = \frac{1}{2}'' \Rightarrow N = 3 \therefore L = 6.2m$   
 6.24.- Para  $\phi = 1\frac{1}{4}'' \Rightarrow N = 3 \therefore L = 8.2m$   
 6.25.- Para  $\phi = \frac{5}{4}'' \Rightarrow N = 3 \therefore L = 3.2m$

### CAPITULO VII

- 7.1.-  $b \geq 4.56cm \Rightarrow b = 5cm$   
 7.3.-  $b \geq 4.54cm \Rightarrow b = 5cm \therefore h = 2b \Rightarrow h = 10cm$   
 7.5.-  $a \geq 24.87cm \Rightarrow a = 25cm$ ,  $\tau_{m\acute{a}x} = 20.86 \frac{Ton}{m^2}$   
 7.9.-  $a \geq 1.33cm \Rightarrow a = 1.5cm$ ,  $\tau_{m\acute{a}x} = 179.7 \frac{Kg}{cm^2}$   
 7.11.-  $d \geq 20.93cm$  Sea  $\Rightarrow d = 21cm \therefore e = 2.1cm$   
 7.12.- 2  
 7.13.-  $P = 45Kg$   
 7.15.-  $I = 2315.16cm^4$ ,  $b \geq 1.67cm \Rightarrow a = 2cm$   
 7.16.- 3.6kN  
 7.17.-  $\bar{y} = 20.19cm$ ,  $I = 95392.63cm^4$ ,  $P = 80Kg$ ,  $\tau_{m\acute{a}x} = 12.54 \frac{Kg}{cm^2}$   
 7.19.-  $\bar{y} = 9.4cm$ ,  $I = 11562.5cm^4$ ,  $P = 25Kg$ ,  $\tau_{m\acute{a}x} = 16.4 \frac{Kg}{cm^2}$   
 7.23.- Para  $S_{yy} \geq 738.09cm^3 \Rightarrow$  Perfil americano para  $q = 134 \frac{Kg}{m} \therefore S_{yy} = 817cm^3$   
 $h = 36.9cm$ ,  $b = 35.6cm$ ,  $e = 1.8cm$ ,  $e_1 = 1.12cm$ ,  $\tau_{m\acute{a}x} = 91.53 \frac{Kg}{cm^2}$   
 7.24.-  $\tau_{m\acute{a}x} = 789.34 \frac{Kg}{cm^2}$

### CAPITULO VIII

- 8.1.-  $x = 2.44m \Rightarrow I = 17210.833cm^4 \therefore \delta_{M\acute{a}x} = 0.175cm$   
 8.3.-  $x = 5.5m \Rightarrow I = 13852.56cm^4 \therefore \delta_{M\acute{a}x} = 0.83cm$   
 8.5.-  $x = 6.5m \Rightarrow \bar{y} = 12.09cm$ ,  $I = 2322.44cm^4 \therefore \delta_{M\acute{a}x} = 2.32cm$   
 8.9.-  $b \geq 7.46cm \Rightarrow b = 7.5cm \therefore h = 2b \Rightarrow h = 15cm \Rightarrow \delta_{M\acute{a}x} = 1.69cm$   
 8.11.-  $x = 5m \Rightarrow \phi \geq 22.35cm \Rightarrow \phi = 22.5cm \therefore \delta_{M\acute{a}x} = 3.942cm$

8.18.-  $\delta_{Máx} = 2.82cm$

8.20.-  $b \geq 16.422cm \Rightarrow b = 16.5cm \therefore h = 2b \Rightarrow h = 33cm \Rightarrow \delta_{Máx} = 1.622cm$

8.21.-  $b \geq 9.806cm \Rightarrow b = 10cm \therefore h = 2b \Rightarrow h = 20cm \Rightarrow \delta_{Máx} = 3.75cm$

## CAPITULO IX

9.1.-  $\theta = 0.535^0$

9.2.-  $\theta = 0.055^0$

9.3.-  $\phi \geq 12.86cm \Rightarrow \phi = 13cm$

9.4.-  $\phi \geq 9.02cm \Rightarrow \phi = 9.5cm$

9.5.-  $\theta = 3.1017^0$

9.6.-  $\phi \geq 11.54cm \Rightarrow \phi = 12cm$

9.7.-  $\theta = 2.16^0$

9.8.-  $\theta = 1.307^0$

9.10.-  $\tau_{max} = 73.46Kg/cm^2, \tau_{min} = 48.97Kg/cm^2$

## CAPITULO X

10.1.-  $\phi \geq 21.75cm \Rightarrow \phi = 22cm$

10.3.-  $\phi \geq 24.12cm \Rightarrow \phi = 24.5cm, \delta_{x-y} = 6.871cm$

10.5.-  $\phi \geq 41.078cm \Rightarrow \phi = 41.5cm$

10.6.-  $\phi \geq 20.28cm \Rightarrow \phi = 20.5cm$

10.7.-  $\phi \geq 22.96cm \Rightarrow \phi = 23cm,$

10.8.-  $b \geq 11.07cm \Rightarrow b = 11.5cm \therefore h = 23cm$

10.9.-  $b \geq 10.233cm \Rightarrow b = 10.5cm \therefore h = 21cm, \delta_{x-z} = 0.372cm$

10.10.-  $b \geq 15.18cm \Rightarrow b = 15.5cm \therefore h = 31cm, \delta_{x-z} = 1.26cm$

10.11.-  $b \geq 8.559cm \Rightarrow b = 9cm \therefore h = 18cm$

10.13.-  $b \geq 14.16cm \Rightarrow b = 14.5cm \therefore h = 29cm$

10.15.-  $\phi \geq 13.37cm \Rightarrow \phi = 13.5cm, \delta_{Max} = 1.6428cm$

10.17.-  $b \geq 10.89cm \Rightarrow b = 11cm \therefore h = 22cm, \delta_{x-y} = 4.4071cm$

10.18.-  $\phi \geq 16.83cm \Rightarrow \phi = 17cm$

10.19.-  $\phi \geq 17.34cm \Rightarrow \phi = 17.5cm$

10.25.-

10.26.-  $D \geq 20.89cm \Rightarrow D = 21cm \therefore d = 14.7cm$

10.29.- a).-  $\phi \geq 18.54cm \Rightarrow \phi = 19cm, \delta_{Max} = 1.368cm$

b).-  $b \geq 12.58cm \Rightarrow b = 13cm \therefore h = 26cm, c).- \delta_{x-y} = 0.325cm, \delta_{x-z} = 1.30cm$

10.30.- a).-  $\phi \geq 36.15cm \Rightarrow \phi = 36.5cm$

b).-  $b \geq 26.42cm \Rightarrow b = 26.5cm \therefore h = 53cm$

# BIBLIOGRAFIA

- 1.- Resistencia de Materiales (tomo I) Timoshenko.
- 2.- Resistencia de Materiales S. Timoshenko – Young.
- 3.- Resistencia de Materiales F.L. Singer.
- 4.- Resistencia de Materiales J. Courbon.
- 5.- Resistencia de Materiales Fitzgerald, Roberth.
- 6.- Diseño de Ingeniería Mecánica J.E. Shigley.
- 7.- Mecánica de materiales Anthony Berford.
- 8.- Mecánica de materiales Russell Johnstón.
- 9.- Mecánica de materiales Berford Liechti.
- 10.-Mecánica de sólidos Egor P.Popov.
- 11.- Mecánica de sólidos T.J. Larnner.