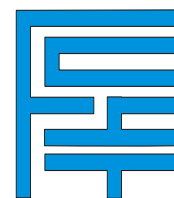


UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN SIMÓN
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
CARRERA DE INGENIERÍA CIVIL



**“MODERNIZACIÓN DE LA ENSEÑANZA APRENDIZAJE EN LA
ASIGNATURA DE HIDRÁULICA – I (CIV 229)”**

Trabajo Dirigido por Adscripción para Optar al Diploma Académico
de Licenciatura en Ingeniería Civil

Presentado por: AQUINO ZAMORANO LEYLA MARIBEL
VARGAS BELLIDO LILIANA ANGÉLICA

Tutor: Ing. Msc. Marco Escobar Seleme

COCHABAMBA – BOLIVIA

Junio, 2011

DEDICATORIA

A mis queridos padres, hermanos y familia por brindarme su apoyo incondicional en todo momento quienes nunca dudaron en mí y siempre estuvieron conmigo durante toda mi formación académica.

A mi pareja quien siempre me apoyó en todo momento.

Leyla

A mi querida madre y familia por su apoyo incondicional en todo momento quienes no dudaron en mí y siempre estuvieron conmigo en todo momento.

A tí Papá que aunque no estés ya con nosotros te llevamos en el corazón cada día de nuestra vida.

Liliana

AGRADECIMIENTOS

A Dios por darnos la luz y guía espiritual para nuestro crecimiento tanto intelectual como moral.

A nuestros padres y hermanos por el amor brindado, por sus desvelos, sus sacrificios, su amistad y compañerismo.

A los Ingenieros: Marco Escobar, Oscar Saca, Galo Muñoz, Grover López por toda su ayuda y apoyo que nos han brindado.

A los docentes por sus consejos y enseñanzas para nuestra formación profesional.

A la Universidad por abrirnos las puertas y cobijarnos hasta la culminación de nuestros estudios.

Y a todos nuestros amigos/as que nos ayudaron y nos apoyaron: Cesar Coca, Ronal Vásquez, Cristina Gallínate, Lourdes Cahiguara.

¡Muchas Gracias!

FICHA RESUMEN

Objetivo general: Elaborar un Texto Guía de la materia de Hidráulica I y modernizar la enseñanza-aprendizaje en la materia, dotando de instrumentos de orientación y consulta con el fin de mejorar el nivel académico del Estudiante.

Objetivos específicos: 1) Elaboración de un Plan Global Actualizado para la materia de Hidráulica I, 2)Elaboración de un texto de uso del Docente y el estudiante para la materia, 3)Elaboración de un conjunto de problemas solucionados y propuestos para cada capítulo de la asignatura, 4)Elaboración de ayudas visuales para la asignatura.

La metodología son:1) Realizar investigaciones para cada tema 2)El estudiante deberá contar con una descripción suscrita del objeto-propósito académico que se persigue alcanzar en cada tema de la asignatura.3)Rememorar las bases teóricas de la materia, aplicables directamente a cada tema.4)Desarrollar el procedimiento particular, a seguir de cada tema, desde la toma de datos hasta su respectivo procesamiento de los mismos.

Los resultados son: 1) El estudiante pueda plasmar en la realidad la aplicación de cada tema que comprende la asignatura 2) Reflexionar sobre las conclusiones que pueda alcanzar el estudiante.

Conclusiones: Dada la amplitud del estudio de la Mecánica de Fluidos, la situación de los capítulos resulta difícil y limitar su extensión fue un problema. Sin embargo se ha procurado limitar el alcance de cada capítulo a lo necesario, para proporcionar al estudiante, información suficiente, sin llegar a una extensión excesiva del texto.

Recomendaciones: Se recomienda al estudiante tener el conocimiento teórico y práctico de los temas descritos en el texto guía para realizar prácticas en laboratorio.

ÍNDICE

	Página
INTRODUCCIÓN	
BREVE HISTORIA DE LA HIDRÁULICA.....	1
APLICACIÓN DE LA HIDRÁULICA EN EL CAMPO DE LA INGENIERIA CIVIL....	4
CAPITULO I	
CONCEPTOS GENERALES	
1. INTRODUCCIÓN.....	9
2. MECÁNICA DE FLUIDOS.....	9
3. DEFINICIÓN DE FLUIDO.....	9
4. SISTEMAS DE UNIDADES.....	10
5. DENSIDAD DE MASA.....	11
6. PESO ESPECÍFICO.....	11
7. VISCOSIDAD DE LOS FLUIDOS.....	13
7.1. Viscosidad Dinámica.....	13
7.2. Viscosidad Cinemática.....	15
7.3. Tipos de Viscosímetros.....	15
8. TENSIÓN SUPERFICIAL.....	17
9. CAPILARIDAD.....	18
10. PRESIÓN DE VAPOR.....	20
11. COMPRESIBILIDAD.....	20
12. APLICACIÓN DE CONCEPTOS GENERALES.....	22
EJERCICIOS RESUELTOS.....	23
EJERCICIOS PROPUESTOS.....	28
CAPITULO II	
ESTÁTICA DE FLUIDOS	
1. INTRODUCCIÓN.....	30
2. PRESIÓN.....	30
3. MEDICIÓN DE PRESIONES.....	33
4. DIFERENCIA DE PRESIONES.....	33
5. VARIACIÓN DE LA PRESIÓN EN UN FLUIDO ESTÁTICO.....	34
6. APLICACIÓN DE ESTÁTICA DE FLUIDOS.....	38
EJERCICIOS RESUELTOS.....	39
EJERCICIOS PROPUESTOS.....	45
CAPITULO III	
FUERZAS SOBRE SUPERFICIES SUMERGIDAS	
1. INTRODUCCIÓN.....	47
2. SUPERFICIE PLANA VERTICAL.....	49
3. SUPERFICIE PLANA INCLINADA.....	50
4. SUPERFICIE CURVA.....	52
5. APLICACIÓN DE FUERZAS SOBRE SUPERFICIES.....	53
EJERCICIOS RESUELTOS.....	54
EJERCICIOS PROPUESTOS.....	63

CAPITULO IV**CUERPOS FLOTANTES Y FUERZA ASCENCIONAL**

1. INTRODUCCIÓN.....	66
2. PRINCIPIO DE ARQUIMIDES.....	67
3. PROCEDIMIENTO PARA RESOLVER PROBLEMAS DE FLOTABILIDAD.....	68
4. CONDICIONES DE EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS EN FLOTACIÓN.....	69
4.1. Equilibrio Estático.....	69
4.2. Equilibrio Inestable.....	69
4.3. Equilibrio Neutro.....	70
5. ESTABILIDAD DE CUERPOS FLOTANTES.....	70
5.1. Procedimiento Para La Evaluación De La Estabilidad De Cuerpos Flotantes.....	74
6. CURVA DE ESTABILIDAD ESTÁTICA.....	75
7. MASAS FLUIDAS SOMETIDAS A ACELERACION CONSTANTE.....	75
7.1. Equilibrio Relativo.....	77
7.2. Aceleración Lineal Constante.....	77
8. APLICACIÓN DE LOS CUERPOS FLOTANTES.....	80
EJERCICIOS RESUELTOS.....	81
EJERCICIOS PROPUESTOS.....	90

CAPITULO V**CINEMÁTICA DE FLUIDOS**

1. INTRODUCCIÓN.....	93
2. TIPOS DE FLUJO.....	93
3. VELOCIDAD.....	98
4. CAMPOS DE FLUJO.....	99
4.1. Campo De Aceleración.....	99
4.2. Campo Rotacional.....	102
5. TRAYECTORIAS Y LINEAS DE CORRIENTE.....	102
6. VOLUMENES DE CONTROL.....	104
7. LEYES DEL COMPORTAMIENTO DE UN FLUIDO.....	105
8. ECUACIÓN DE CONTINUIDAD.....	106
8.1. Principio De Conservación De La Materia.....	106
8.2. Ecuación Diferencial De La Continuidad.....	106
8.3. Ecuación De La Continuidad De La Vena Liquida.....	109
9. CONSERVACIÓN DE MOMENTO – ECUACIÓN DE MOVIMIENTO.....	111
10. APLICACIÓN DE CINEMATICA DE FLUIDOS.....	114
EJERCICIOS RESUELTOS.....	115
EJERCICIOS PROPUESTOS.....	121

CAPITULO VI**DINÁMICA DE FLUIDOS**

1. INTRODUCCIÓN.....	123
2. DINÁMICA DE FLUIDOS IDEALES INCOMPRESIBLES.....	123
2.1. Ecuación De Euler.....	123
2.2. Planteamiento bidimensional.....	126

2.3. Ecuación De Euler Para Flujo Permanente, Ecuación De Bernoulli.....	128
2.4. Flujo En Orificios.....	129
2.4.1. Ecuación general de orificios.....	129
2.4.2. Trayectoria de la vena líquida.....	131
2.4.3. Coeficiente de velocidad, contracción y gasto, en orificios de pared delgada..	132
2.4.4. Pérdida de carga en un orificio.....	134
2.4.5. Orificio con descarga sumergida.....	134
2.4.6. Gasto en orificios de pared gruesa.....	135
2.5. Vaciado De Tanques.....	136
2.6. Ecuación General De La Energía.....	138
2.6.1. Interpretación de la ecuación de la Energía.....	142
3. DINÁMICA DE FLUIDOS REALES.....	147
3.1. Efecto De La Viscosidad – Ecuación De Navier Stokes.....	147
3.2. Flujo viscoso uniforme y permanente.....	149
3.2.1. Flujo Entre Placas Paralelas.....	149
3.2.2. Flujo En Tuberías Circulares De Sección Constante.....	152
4. NÚMERO DE REYNOLDS.....	153
5. TEORIA DE LA CAPA LIMITE.....	155
6. TURBULENCIA.....	156
7. DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDADES.....	158
7.1. Superficies lisas.....	158
7.2. Superficies rugosas.....	162
8. PERDIDAS DE ENERGÍA EN FLUJO TURBULENTO.....	164
8.1. Planteamiento general.....	164
8.2. Planteamiento para tuberías circulares.....	165
9. APLICACIÓN DE DINÁMICA DE FLUIDOS.....	168
EJERCICIOS RESUELTOS.....	169
EJERCICIOS PROPUESTOS.....	182
CAPITULO VII	
SIMILITUD HIDRÁULICA	
1. INTRODUCCIÓN.....	184
2. MODELOS HIDRÁULICOS.....	185
3. ANALISIS DIMENCIONAL.....	185
4. NÚMEROS ADIMENSIONALES Y SIMILITUD HIDRÁULICA.....	186
4.1. LEYES DE SIMILITUD.....	186
4.1.1. Número de Froude.....	186
4.1.2. Número de Reynolds.....	187
4.1.3. Número de Euler.....	188
4.1.4. Número de Mach.....	189
4.1.5. Número de Weber.....	190
5. SIMILITUD GEOMETRICA.....	191
6. SIMILITUD CINEMÁTICA Y DINÁMICA.....	192
7. SISTEMAS A PRESIÓN.....	193

8. SISTEMAS A SUPERFICIE LIBRE.....	194
9. PLANEACIÓN Y CONSTRUCCIÓN DEL MODELO.....	197
10. APLICACIÓN DE SIMILITUD.....	198
EJERCICIOS RESUELTOS.....	199
EJERCICIOS PROPUESTOS.....	204
CAPITULO VIII	
FLUJO EN TUBERIAS	
1. INTRODUCCIÓN.....	205
2. RESISTENCIA AL FLUJO EN TUBERIA COMERCIALES.....	205
2.1. Tuberías circulares.....	205
2.2. Ecuación de Hagen – Poseiville.....	206
2.3. Diagrama de MOODY.....	207
2.4. Formula de Hazen – Williams.....	207
2.5. Formula de Manning.....	208
2.6. Perdidas localizadas-Formula General.....	209
- Entradas.....	210
- Expansión.....	211
- Contracciones.....	212
- Cambios de dirección.....	213
3. PERDIDAS POR VALVULAS.....	214
3.1. Válvulas De Compuerta.....	214
3.2. Válvulas Esféricas.....	215
3.3. Válvulas Mariposas.....	215
4. PERDIDAS POR CAMBIO DE DIRECCIÓN.....	216
4.1. Bifurcaciones.....	216
5. FLUJO PERMANENTE.....	219
a) Ecuaciones básicas.....	219
a.1). Ecuación de la Continuidad.....	219
a.2). Ecuación de la Energía.....	219
b) Tipos de problemas.....	223
6. TUBERIAS SIMPLES.....	224
7. TUBERIAS MULTIPLES.....	228
8. GOLPE DE ARIETE.....	229
9. PLANTEAMIENTO PARA REDES.....	231
9.1. Sistema Δq	232
9.2. Sistema H.....	232
9.3. Sistema Q.....	233
9.4. Métodos Para Solucionar Redes De Tuberías.....	234
a) Método de Cross.....	234
b) Método de Newton - Raphson.....	234
10. APLICACIÓN DE FLUJO EN TUBERIAS.....	235
EJERCICIOS RESUELTOS.....	236
EJERCICIOS PROPUESTOS.....	253

CAPITULO IX**MAQUINARIAS HIDRÁULICAS**

1. BOMBAS.....	257
1.1. Introducción.....	257
1.2. Tipos De Bombas.....	257
1.2.1. Bombas de desplazamiento positivo (directas).....	258
1.2.2. Bombas de desplazamiento no positivo (indirecta) o rotodinamicas.....	258
1.3. Potencia Requerida Por Bombas.....	259
1.4. Eficiencia Mecánica De La Bombas.....	260
1.5. Potencia Suministrada A Motores De Fluido.....	261
1.6. Eficiencia Mecánica De Los Motores De Fluido.....	262
2. TURBINAS.....	263
2.1. Introducción.....	263
2.2. Clasificación De Turbinas.....	263
Según el grado de reacción.....	263
Según la admisión.....	264
Según la reacción del flujo.....	264
Según la posición del eje.....	264
Según la velocidad especifica de giro.....	264
2.3. Turbinas Hidráulicas o de Agua.....	265
2.4. Tipos de Turbinas Hidráulicas Modernas.....	265
a) Turbina Pelton.....	265
b) Turbina Kaplan.....	266
c) Turbina Francis.....	267
2.5. OTRAS TURBINAS POCO CONOCIDAS (Derias, Bulbo, Banki).....	269
2.6. VALORES TÍPICOS DE (VELOCIDAD ESPECÍFICA DE GIRO Y ALTURA).....	269
2.7. TURBINAS DE VAPOR.....	269
2.8. ECUACIÓN DE BERNOULLI PARA TURBINAS.....	270
2.8.1. Motores Hidráulicos.....	270
2.8.2. Selección Del Tipo De Turbina Para Aplicaciones Especificas De Trabajo.....	273
2.9. DIAGRAMAS DE SELECCIÓN DE TURBINAS.....	274
3. INTRODUCCIÓN A CENTRALES HIDROELECTRICAS.....	276
3.1. INTRODUCCIÓN.....	276
- Desarrollo de la energía hidroeléctrica.....	276
- Función de una central hidroeléctrica.....	278
3.2. VENTAJAS DE LAS CENTRALES HIDROELÉCTRICAS.....	278
3.3. DESVENTAJAS DE LAS CENTRALES HIDROELÉCTRICAS.....	279
3.4. TIPO DE CENTRALES HIDROELÉCTRICAS.....	279
3.4.1. Central hidroeléctrica de pasada.....	279
3.4.2. Central hidroeléctrica con embalse de reserva.....	280
3.4.3. Centrales hidroeléctricas de bombeo.....	283
3.5. PRINCIPALES COMPONENTES DE UNA CENTRAL HIDROELÉCTRICA.....	284
a) Presa.....	284

b) Los Aliviaderos.....	286
c) Tomas de agua.....	287
d) Casa de Maquinas	287
4. APLICACIÓN DE MAQUINARIAS HIDRÁULICAS.....	290
ANEXO (TABLAS Y GRAFICAS).....	291
GLOSARIO.....	307
BIBLIOGRAFIA	309

INTRODUCCIÓN GENERAL AL ESTUDIO DE LA HIDRÁULICA

BREVE HISTORIA DE LA HIDRÁULICA

El hombre empezó desde muy temprano la experimentación de la utilización de recursos naturales tan abundantes como el agua y el viento. Inicialmente se movilizó en los lagos y ríos utilizando los troncos de madera que flotaban. Mas adelante la navegación se hizo el aprovechamiento de la fuerza de los vientos, también con los grandes ríos se basaron en la agricultura y su economía.

La rueda hidráulica y el molino de viento son preámbulos de mucho interés para la historia de los sistemas con potencia fluida, pues familiarizaron al hombre con las posibilidades de los fluidos para generar y transmitir energía y le enseñaron en forma empírica los rudimentos de la Hidromecánica y sus propiedades.



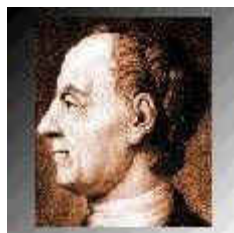
[12]Fuente. <http://www.libros.redsauce.net>

“Mecánica de Fluidos

Rueda hidráulica

Antiguamente en la segunda mitad del siglo XV, LEONARDO DA VINCI en su escrito sobre flujo de agua y estructuras para ríos, estableció sus experiencias y observaciones en la construcción de instalaciones hidráulicas ejecutadas principalmente en Milán y Florencia.

GALILEO en 1612 elaboro el primer estudio sistemático de los fundamentos de la Hidrostática. Un alumno de Galileo, TORRICELI, enunció en 1643 la ley del flujo libre de líquidos a través de orificios. Construyo El barómetro para la medición de la presión atmosférica.



(1)



(2)



(3)



(4)



(5)



(6)

[12]Fuente. <http://www.libros.redsauce.net>
"Mecánica de Fluidos"

(1)Euler, (2) Bernoulli, (3) Reynolds, (4) Saint Venant, (5) Newton, (6) Pascal...

BLAISE PASCAL, aunque vivió únicamente hasta la edad de 39 años, fue uno de los grandes científicos y matemáticos del siglo XVII. Fue responsable de muchos descubrimientos importantes, pero en relación con la mecánica de fluidos son notables los siguientes:

- La formulación en 1650 de la ley de la distribución de la presión en un líquido contenido en un recipiente. Se conoce esta, como ley de Pascal.
- La comprobación de que la potencia del vacío se debe al peso de la atmósfera y no a un "horror natural" como se creyó por mas de 2000 años antes de su época. A ISAAC NEWTON, además de muchas contribuciones a la ciencia y a las matemáticas, se le debe en Mecánica de Fluidos:
 - El primer enunciado de la ley de fricción en un fluido en movimiento.
 - La introducción del concepto de viscosidad en un fluido.
 - Los fundamentos de la teoría de la similaridad hidrodinámica.

Estos, sin embargo, fueron trabajos aislados de los cuales resultaron leyes y soluciones a problemas no conexos. Hasta la mitad del siglo XVIII no existía aun una ciencia integrada sobre El comportamiento de los fluidos.

Los fundamentos teóricos de la Mecánica de Fluidos como una ciencia se deben a Daniel Bernoulli y a Leonhard Euler en el siglo XVIII.

DANIEL BERNOULLI, 1700-1782, perteneció a una famosa familia suiza en la cual hubo once sabios celebres, la mayoría de ellos matemáticos o mecánicos. Gran parte de su trabajo se realizó en San Peterburgo, como miembro de la academia rusa de ciencias. En 1738 en su "Hidrodinámica", formulo la ley fundamental del movimiento de los fluidos que da la relación entre presión, velocidad y cabeza de fluido.

LEONHARD EULER, 1707-1783, también suizo, desarrollo las ecuaciones diferenciales generales del flujo para los llamados fluidos ideales (no viscosos). Esto marco El principio de los métodos teóricos de análisis en la Mecánica de Fluidos. A Euler se le debe también la ecuación general del trabajo para todas las maquinas hidráulicas rotodinámicas (turbinas, bombas centrifugas, ventiladores, etc.), además de los fundamentos de la teoría de la flotación.

En 1855, después de 135 años de la formulación de la ley de Pascal, JOSEPH BRAMAH, construyo en Inglaterra la primera prensa hidráulica. Esta primera prensa utilizaba sello de cuero y agua como fluido de trabajo. El accionamiento se realizaba por medio de una bomba manual y no superaba los 10 bares de presión. Sin embargo, la fuerza desarrollada por ella fue algo descomunal e inesperada para el mundo técnico e industrial de entonces.

Inmediatamente siguieron sin número de aplicaciones y como era de esperarse, se abrió un mercado para el mismo sin precedentes y que superaba las disponibilidades tanto técnicas como financieras de su tiempo.

El segundo periodo, que comprende los últimos años del siglo XVIII y la mayoría del XIX, se caracterizó por la acumulación de datos experimentales y por la determinación de factores de corrección para la ecuación de Bernoulli. Se basaron en el concepto de fluido ideal, o sea que no tuvieron en cuenta una propiedad tan importante como la viscosidad. Cabe destacar los nombres de experimentalistas notables como ANTOINE CHEZY, HENRI DARCY, JEAN POISEUILLE en Francia; JULIUS WEISBACH Y G. HAGEN en Alemania. De importancia especial fueron los experimentos de Weisbach y las fórmulas empíricas resultantes que fueron utilizadas hasta hace poco tiempo. Entre los teóricos de la Mecánica de Fluidos de este período, están LAGRANGE, HELMHOLTZ Y SAINT VENANT.

En los años posteriores a 1850 las grandes ciudades de Inglaterra instalaron centrales de suministros de energía hidráulica, la cual era distribuida a grandes distancias por tuberías hasta las fábricas donde accionaban molinos, prensas, laminadores y grúas.

Todavía funcionan en algunas ciudades europeas las redes de distribución de energía hidráulica. En Londres, por ejemplo, esta aun en servicio la empresa " The London Hydraulic Power Co.", con capacidad instalada de 700 HP y 180 millas de tubería de distribución. En la misma ciudad, el famoso Puente de la Torre, es accionado hidráulicamente, así como el ascensor principal en el edificio de la institución de los Ingenieros Mecánicos.

En el periodo siguiente, al final del siglo XIX y principios del XX, se tomó en cuenta la viscosidad y la teoría de la similitud. Se avanzó con mayor rapidez por la expansión tecnológica y las fuerzas productivas. A este período están asociados los nombres de GEORGE STOKES y de OSBORNE REYNOLDS.

En la Hidráulica contemporánea se deben mencionar a: LUIDWIG PRANDTL, THEODOR VON KARMAN Y JOHAN NIKURADSE. Los dos primeros por sus trabajos en Aerodinámica y Mecánica de Fluidos que sirvieron para dilucidar la teoría del flujo turbulento; el último sobre flujo en tuberías.

En 1906 la Marina de los EE.UU. botó El U. S. Virginia, primer barco con sistemas hidráulicos para controlar su velocidad y para orientar sus cañones.

En 1930 se empezaron a construir las bombas de paletas de alta presión y se introdujeron los sellos de caucho sintético. Diez años después los servomecanismos electrohidráulicos ampliaron el campo de aplicación de la oleohidráulica (rama de la hidráulica que utiliza aceite mineral como fluido). Desde los años sesenta el esfuerzo investigativo de la industria y las entidades de formación profesional ha conducido hasta los sofisticados circuitos de la fluidica.

APLICACIÓN DE LA HIDRÁULICA EN EL CAMPO DE LA INGENIERIA CIVIL

La ingeniería hidráulica es una de las ramas más antiguas de la ingeniería civil, ya que está presente desde los romanos tradicionales. Se ocupa de la proyección y ejecución de obras relacionadas con el agua, sea para su uso, como en la obtención de energía hidráulica, la irrigación, potabilización, canalización, u otras, sea para la construcción de estructuras en mares, ríos, lagos, o entornos similares, incluyendo, por ejemplo, diques, represas, canales, puertos,

muelles, rompeolas, entre otras construcciones. También hace referencia a las máquinas hidráulicas.

- Diseño de canales y obras hidráulicas en general

Se entiende por obra hidráulica o infraestructura hidráulica a una construcción, en el campo de la ingeniería civil, donde el elemento dominante tiene que ver con el agua. Se puede decir que las obras hidráulicas constituyen un conjunto de estructuras construidas con el objeto de manejar el agua, cualquiera que sea su origen, con fines de aprovechamiento o de defensa.

Generalmente se consideran obras hidráulicas:

- Canales, que pueden constar de diversos elementos como por ejemplo:
 - Bocatomas de derivación.
 - Compuerta de entrada.
 - Controles de nivel del agua en el canal.
 - Dispositivos para la medición del caudal.
 - Dispositivos de seguridad.
 - Balsa de agua, considerando las construidas artificialmente.
 - Cruces:
 - Canal de riego con drenaje con puente canal
 - Canal de riego o de drenaje con caminos rurales --> alcantarilla o puente.
- Represas, que pueden constar de las siguientes partes:
 - Vertedero o aliviadero.
 - Descarga de fondo
 - Cuencas de disipación
 - Bocatomas para los diversos usos del embalse.
 - Escalera de peces
 - Obras provisionales durante la construcción.
 - Túnel de derivación
- Estaciones de bombeo, que pueden constar de las siguientes partes:
 - Canal de aproximación

- Reja para el desbaste y la retención de finos.
 - Cámara de succión
 - Bomba
 - Motor, el que puede ser de muy diversos tipos, y consecuentemente exigir infraestructura de apoyos diferentes, como pueden ser: estaciones de transformación de energía eléctrica, o depósitos de combustible.
 - Línea de impulsión
 - Dispositivo para amortiguar el golpe de ariete.
-
- Sistema de abastecimiento de agua potable
 - Sistema de recogida de aguas residuales
 - Sistemas de riego
 - Sistemas de drenaje
 - Defensas ribereñas
 - Recarga de acuíferos, Pozos de absorción.
 - Trasvase de cuenca
 - Centrales hidroeléctricas



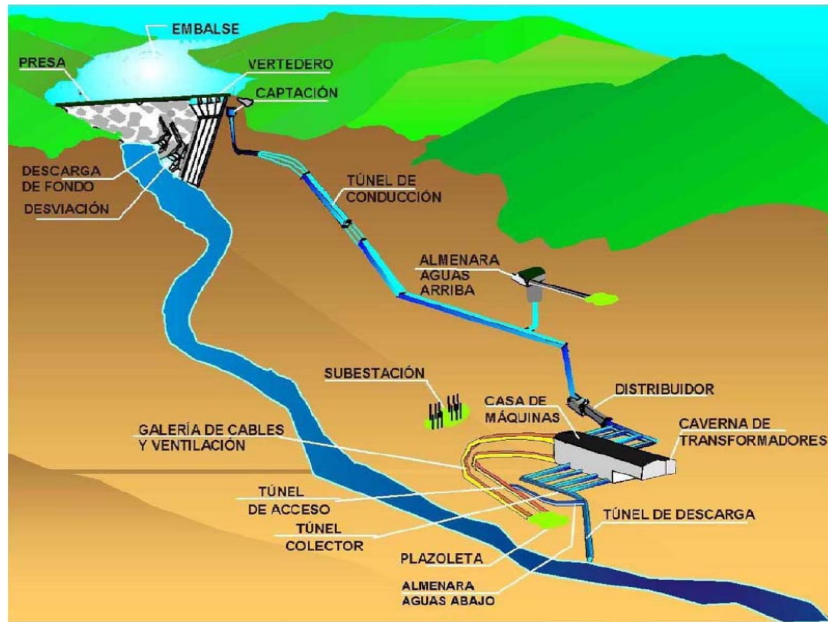
Fuente: Fotografía "Los Molinos-Tiquipaya" –
Elaboración propia

Canal para transporte de agua



Fuente: Fotografía "Presa La Puna-S. C." –
Laboratorio de Hidráulica I UMSS

Represa



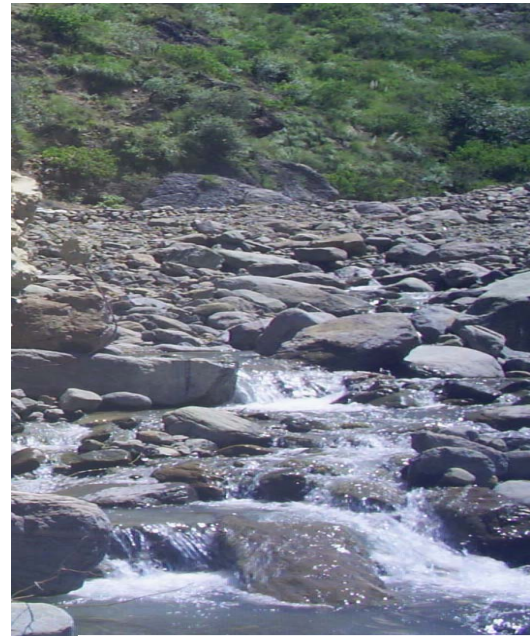
[12]Fuente. <http://www.libros.redsauce.net>

Central Hidroeléctrica “Mecánica de Fluidos.

Dentro de lo que es la situación en Bolivia urge la necesidad de Aprovechar de manera sostenible los recursos hídricos, debido a la gran variedad de cuencas, ríos, acuíferos, vertientes, existentes.



Vertiente



Fuente: Elaboración propia:
Fotografías de Tiquipaya - Apote

Río

Todo esto esta relacionado con lo que es la Hidráulica ya que se debe tener los conceptos principales para poder internarse en lo que serán el diseño de obras hidráulicas y construcciones civiles en general.



Construcción de Presas



Puerto

Fuente: <http://www.introduccion.a.la.hidraulica.com>



Poliductos

Fuente: <http://www.introduccion.a.la.hidraulica.com>

Dado que el manejo del recurso de agua es de mucha importancia para el desarrollo de la sociedad, se debe antes tener un conocimiento acerca de este elemento así como de las propiedades y comportamiento del mismo. Este comportamiento de los fluidos ya sea en reposo o en movimiento da a este estudio un inmenso campo de utilidades para la ingeniería en general.

La hidráulica abarca varias ramas de aplicación, se mostrara alguna de las muchas aplicaciones de esta a modo de mostrar la necesidad y ventajas de la aplicación de la misma. Cabe recalcar que la hidráulica es el estudio de los fluidos (agua, aceite, mercurio, etc.), por lo que su aplicación se mostrara en sus diferentes campos.

Capítulo 1:

CONCEPTOS GENERALES

1. INTRODUCCIÓN

En la vida cotidiana se ve afectada por el comportamiento de los fluidos, y esencialmente por el agua. Una de las funciones del Ingeniero Civil es diseñar y construir la infraestructura necesaria para transportar agua y otros fluidos para diferentes fines (consumo humano, generación eléctrica, riego, oleoductos, gasoductos, etc.). Todos los procesos mencionados anteriormente están regidos por los principios de la mecánica de fluidos.

2. MECÁNICA DE FLUIDOS

La mecánica de fluidos es la ciencia en la cual los principios de la mecánica general se emplean en el estudio del comportamiento de los fluidos, tanto líquidos (agua, aceite, gasolina o glicerina) como gases (aire, oxígeno, nitrógeno o helio), en lo referente a la estática, cinemática y dinámica. El comportamiento de los fluidos afecta en la vida cotidiana de muchas maneras.

El análisis del comportamiento de los fluidos se basa en las leyes fundamentales de la mecánica aplicada, las cuales relacionan la conservación de la masa, energía y cantidad de movimiento.

3. DEFINICIÓN DE FLUIDO

Los fluidos son sustancias capaces de fluir y que adapten a la forma de los recipientes que los contienen. Cuando están en equilibrio, los fluidos no pueden soportar fuerzas tangenciales o cortantes. Todos los fluidos son comprensibles en cierto grado y ofrecen pocas resistencias a los cambios de forma.

Los fluidos pueden dividirse en líquidos y gases. La diferencia esencial entre líquidos y gases son: (a). Los líquidos son prácticamente incompresibles y los gases son compresibles, por lo que en muchas ocasiones hay que tratarlos como tales y (b). Los líquidos ocupan un volumen definido y tienen superficies libres mientras que una masa dada de gas se expande hasta ocupar todas las partes del recipiente que lo contengan.

4. SISTEMAS DE UNIDADES

Todo problema relacionado con el movimiento de los fluidos puede ser definido en términos de: longitud (L), tiempo (T), y fuerza (F) o bien de longitud, tiempo y masa (m). La equivalencia entre ambos sistemas viene establecida por la ecuación de Newton, que dimensionalmente puede expresarse:

$$\boxed{F^d = \frac{mL}{T}} \Rightarrow \boxed{m^d = \frac{FT^2}{L}} \quad \text{Donde la “d” significa igualdad dimensional.} \quad (1)$$

También puede utilizarse fuerza en lugar de masa en la lista de dimensiones básicas. Para propósitos cuantitativos, diferentes grupos y países han adoptado unidades de medida para estas dimensiones básicas. El U. S Customary System (USCS) emplea la libra-fuerza, el pie, el segundo y el grado Rankine, como las unidades para las dimensiones básicas. El sistema internacional de unidades (SI) usa el newton, el metro, el segundo y el grado Kelvin. La tabla 1(*Anexo*). Muestra algunos de los sistemas de unidades más utilizados.

Sistema internacional de unidades (SI), donde la unidad de masa es el kilogramo masa (Kg), la de longitud el metro (m), y la de tiempo el segundo (s). La unidad de fuerza es consecuencia de la ecuación $Kg \, m/s^2$, denominado **Newton (N)**. la unidad de temperatura es el grado kelvin (°K) de temperatura absoluta, aunque en la practica se utiliza también el grado Celsius (°C).

Puede verse de lo anterior que 1N es la fuerza requerida para acelerar 1Kg masa a $1m/s^2$, dado que la relación entre peso (w) y masa (m) viene dado por la ecuación de Newton:

$$\boxed{w = mg} \quad [N] \quad (2)$$

$$m = \text{masa}$$

$$W = \text{peso}$$

El peso “w”: Es la cantidad que pesa un cuerpo, es decir, la fuerza con la que el cuerpo es atraído hacia la tierra por la acción de la gravedad.

La masa “m”: Es la medida de la cantidad de fluido.

En este libro utilizaremos $g = 9.81 \, m/s^2$ en el sistema SI y $g = 32.2 \, pies/s^2$ en el Sistema Británico de Unidades.

Como g es la aceleración de la gravedad de esto resulta que un Newton es equivalente a un Kgf dividido por la aceleración de gravedad, o sea, $1N$ es aproximadamente igual a $0.1019 Kgf$ ó $1 Kgf$ es $9.807 N$.

Debido a que el tamaño real de cantidades físicas en el estudio de la mecánica de fluidos cubre una amplia variedad, se usan prefijos en las cantidades básicas.

En la *tabla 2(Anexo)* se muestran tales prefijos. Como se indica, el uso normal en el *SI* solamente considera aquellos prefijos que varían en pasos de 10^3 .

5. DENSIDAD DE MASA, ρ

Densidad es masa por unidad de volumen. Se dice que una cantidad dada de materia tiene cierta masa la cual es tratada como invariante. Por tanto, la densidad será una constante mientras el volumen de una cantidad dada de materia permanezca inafectado (esto es, para un gas, siempre que las condiciones de presión y temperatura sean las mismas). Las unidades de densidad son kilogramos por metro cúbico en el Sistema Internacional (*SI*).

$$\rho = \frac{m}{V} \quad [Kg/m^3] \quad (3)$$

Donde: V ; volumen de la sustancia

m ; masa

Para agua a $4^\circ C$ $\rho = 1000 Kg/m^3$

Para aire a $20^\circ C$ y presión Standard $\rho = 1.2 Kg/m^3$

6. PESO ESPECIFICO, γ

El peso específico es el peso de una sustancia por unidad de volumen de la misma. Donde el peso de la sustancia está influenciada por la fuerza gravitacional. Las unidades del peso específico son los *Newtons* por metro cúbico (N/m^3) en el *SI*.

$$\gamma = \frac{w}{V} \quad [Kg.f/m^3] \text{ o } [N/m^3] \quad (4)$$

Donde: V ; Volumen de una sustancia

w ; Peso

Muy a menudo se debe encontrar el peso específico de una sustancia cuando se conoce su densidad y viceversa. La relación que existe en el peso específico y la densidad puede ser deducida desde la segunda ley de Newton, donde:

$$\boxed{\gamma = \rho g} \quad [\text{N/m}^3] \quad (5)$$

En la que g es la aceleración debida a la gravedad y ρ la densidad del líquido

Otra forma de cuantificar la densidad o el peso específico de un líquido puede considerarse constante para las variaciones ordinarias de presión; se hace refiriéndolos a los correspondientes al agua, cuyo peso específico a temperaturas más comunes es de 1000 kg/m^3 , esto es:

$$\boxed{Dr = \frac{\rho_{sust}}{\rho_{agua}} = \frac{\gamma_{sust}}{\gamma_{agua}}} \quad (6)$$

Se conoce como densidad relativa y es un número adimensional que viene dado por la relación del peso del cuerpo al peso de un volumen igual de una sustancia que se toma como referencia. Los sólidos y líquidos se refieren al agua (20°C), mientras que los gases se refieren al aire, libre de CO_2 e hidrógeno (0°C y 1 Atm de presión $1.033 \text{ kp/cm}^2 = 101.3 \text{ kPa}$), como condiciones normales.

Por ejemplo:

$$\text{Densidad relativa de una sustancia} = \frac{\text{peso de la sustancia}}{\text{peso de igual volumen de agua}}$$

$$\text{Densidad relativa de una sustancia} = \frac{\text{peso específico de la sustancia}}{\text{peso específico del agua}}$$

$$\text{Densidad relativa de una sustancia} = \frac{\text{densidad de la sustancia}}{\text{densidad del agua}}$$

La densidad relativa del agua es 1.00 y la del mercurio 13.57 .

Los pesos específicos de los gases pueden calcularse mediante la *ecuación de estado* de los gases o (Ley de Charles y Boyle)

$$\boxed{\frac{p v_s}{T} = R} \quad (7)$$

Donde: $p \rightarrow$ presión absoluta en Kg/m^2

$v_s \rightarrow$ volumen específico o volumen ocupado por la unidad de peso en m^3/Kg

$T \rightarrow$ temperatura absoluta en $^\circ\text{K}$ ($^\circ\text{K} = ^\circ\text{C} + 273$)

$R \rightarrow$ Constante del gas en $\text{m}^3/\text{Kg}^\circ\text{K}$

Como $\gamma = \frac{1}{v_s}$ la ecuación anterior puede escribirse:

$$\boxed{\gamma = \frac{p}{RT}} \quad (8)$$

También existe una tabla mediante el cual podemos obtener el peso específico del agua con relación a la temperatura y la densidad (ver tabla 4 *Anexo*)

7. VISCOSIDAD DE LOS FLUIDOS

La viscosidad es una propiedad de un fluido que determina la cantidad de resistencia opuesta a las fuerzas cortantes que actúan en él. Se debe a interacciones entre partículas.

7.1. Viscosidad Dinámica

La viscosidad de un fluido es aquella propiedad que determina la cantidad de resistencia opuesta a las fuerzas cortantes. La viscosidad se debe primordialmente a las interacciones entre las moléculas del fluido.

Los fluidos en reposo no ofrecen resistencia a los esfuerzos de corte, si estos esfuerzos actúan directamente sobre el fluido. Pero si el fluido esta en contacto con una superficie rígida y a esta se le induce una fuerza, que hace que la superficie se mueva con una velocidad, entonces el fluido también se moverá a la misma velocidad que esta superficie. Si tuviéramos dos superficies, una fija y otra en movimiento, debido a la acción de una fuerza, basándose en el siguiente esquema.

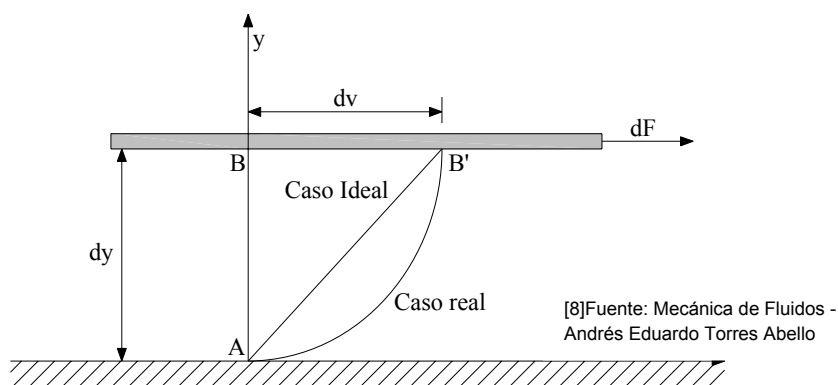


Fig. 1.1

Donde dy es la separación que existe entre las placas. Tendremos una distribución de velocidades idealizado, donde la velocidad del fluido en contacto con la superficie fija es 0 y con la superficie que se mueve es v , teniendo un dv como incremento de velocidades. Esta distribución de velocidades formará una línea recta en un sistema de coordenadas v en el eje de las abscisas y y en el eje de las ordenadas.

Se producirá un gradiente de velocidades, que en el caso de un fluido real tendrá una forma parabólica y en caso de un fluido ideal tendrá una distribución lineal. El esfuerzo de corte que se produce entre las partículas es proporcional a la pendiente de la recta del segundo caso:

La relación del esfuerzo de corte estará dada por la siguiente expresión:

$$\boxed{\tau \propto \frac{dv}{dy}} \quad dv/dy \rightarrow \text{gradiente de velocidades} \quad (9)$$

Para hacer que esta relación de proporcionalidad sea una igualdad, debemos incluir un coeficiente:

$$\boxed{\tau = \mu \frac{dv}{dy}} \quad \mu \rightarrow \text{viscosidad dinámica} \quad (10)$$

Si experimentalmente se midiera la velocidad de deformación y el esfuerzo de corte se obtiene una recta que pasa por el origen, a la pendiente de esa recta se llama viscosidad cinemática. Este coeficiente es función del tipo de fluido. Mientras el fluido es más viscoso la placa superior tendrá

un movimiento más lento. También podemos hallar la viscosidad dinámica en relación a la temperatura en que se encuentra la sustancia (ver tabla 4 *Anexo*)

7.2. Viscosidad Cinemática

La relación presentada para la viscosidad cinemática se denomina ley de viscosidad de Newton. Para todos los fluidos que cumplan con esta ley, se los denomina fluidos newtonianos y a los que no cumplan se los denominará fluido no newtoniano.

Las unidades de la viscosidad dinámica son: $N \cdot s/m^2$, $Lb \cdot s/ft^2$. La viscosidad dinámica es la relación entre la viscosidad cinemática con la densidad de masa:

$$\boxed{\mu = \nu \rho} \quad [m^2/s] \text{ o } [ft^2/s] \quad \nu \rightarrow \text{viscosidad Cinemática} \quad (11)$$

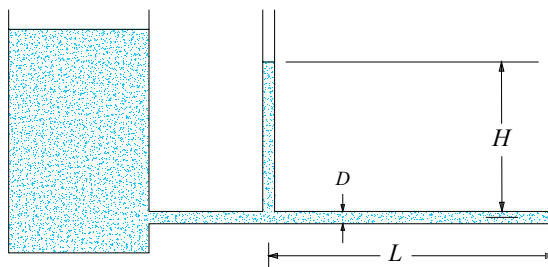
Las unidades de la viscosidad cinemática son: m^2/s o ft^2/s .

Mientras haya esfuerzo de corte debido a un intercambio molecular, existe una atracción substancial como también fuerzas cohesivas entre las moléculas del líquido. Ambos, el intercambio molecular y la cohesión contribuyen a la viscosidad de corte en fluidos.

7.3. Tipos de Viscosímetros.

7.3.1. Viscosímetro de tubo capilar.

Se describe como la unión de dos recipientes mediante un tubo capilar (tubo largo de diámetro pequeño), cuando el fluido fluye a lo largo del tubo con velocidad constante, se presenta una pérdida de energía produciendo una caída en la presión, la cual puede ser medida mediante un manómetro. La caída de presión y la viscosidad están relacionadas.



[8] Fuente: Mecánica de Fluidos -
Andrés Eduardo Torres Abello

Fig. 1.2

7.3.2. Viscosímetro de caída de bola.

Este viscosímetro funciona haciendo caer libremente una bola esférica a través de un fluido, se mide el tiempo que se demora la bola en recorrer una distancia determinada, y de esa forma se puede calcular su velocidad.

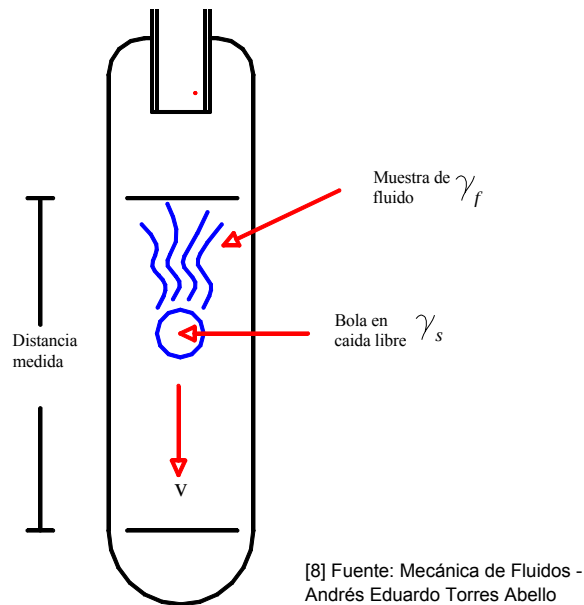
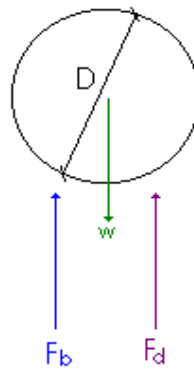


Fig. 1.3

La siguiente fig. 1.4 muestra la fuerza boyante (F_b), la fuerza de arrastre viscoso (F_d) y sus correspondientes ecuaciones.



[8] Fuente: Mecánica de Fluidos - Andrés Eduardo Torres Abello

Fig. 1. 4

$$F_b = \gamma_f \nabla = \gamma_f \pi \frac{D^3}{6} \quad \text{Y} \quad F_b = 3\pi\mu v D$$

A partir de la segunda ley de Newton y considerando que la velocidad es constante, se puede hallar la viscosidad dinámica del fluido.

7.3.3. Viscosímetro Universal de Saybolt.

Consiste en establecer el tiempo que se demora el Viscosímetro en coleccionar 60mL de fluido. El tiempo encontrado se expresa como la viscosidad del fluido en segundos Saybolt.

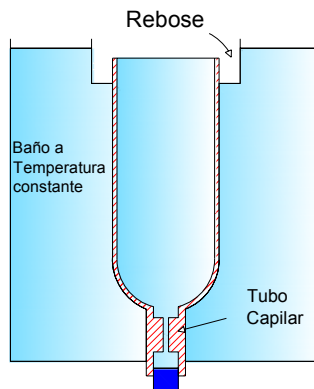


Fig. 1.5

[8] Fuente: Mecánica de Fluidos -
Andrés Eduardo Torres Abello

8. TENSION SUPERFICIAL

Una molécula sumergida dentro un fluido, es atraída en todas las direcciones por moléculas que se encuentran a su alrededor y ejercen sobre ella una fuerza cohesiva. Cuando las moléculas están por debajo la superficie del líquido, estas ejercerán fuerzas en todas las direcciones haciendo que estas fuerzas alcancen un equilibrio. Pero las moléculas que se encuentran justamente en la línea de superficie, tendrán un desbalanceo entre las fuerzas cohesivas. Esto provocara una tensión en la superficie entre las componentes horizontales de estas fuerzas. Esta tensión es conocida como tensión superficial.

Caso de una gota de agua:

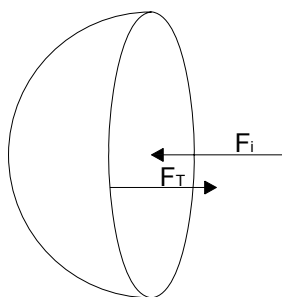


Fig. 1. 6 Esquema de fuerzas en media gota de agua

Fuerza debido a la presión interna: $F_i = P \pi r^2$

Fuerza debido a la tensión superficial: $F_T = 2 \pi r \sigma$

Para lograr el equilibrio:

$$F_i - F_T = 0 \rightarrow F_i = F_T$$

$$P \pi r^2 = 2 \pi r \sigma$$

Despejando P:

$$P = \frac{2 \sigma}{r} \quad (12)$$

Donde: p , es la presión al interior de la burbuja, σ es la componente de tensión superficial y r el radio de la gota.

9. CAPILARIDAD

El comportamiento de los líquidos en tubos delgados (tubos capilares, del latín capiflus, cabello) depende de la tensión superficial y de la humidificación de los sólidos. Por ejemplo, como, cuando un tubo de vidrio se sumerge en agua, ésta se eleva en el tubo por encima del nivel hidrostático, mientras que si el tubo se sumerge en mercurio, el resultado es una depresión.

Considérese ahora la situación en que un líquido se encuentra en contacto con un sólido, como en el caso de un líquido dentro de un tubo de vidrio. Si la adhesión del líquido con el sólido es mayor que la cohesión en el líquido, entonces el líquido subirá dentro del tubo y formará con el sólido un menisco curvado hacia arriba, como se ilustra en la (fig. 1.7(a)) para agua y vidrio. La curvatura con el sólido se mide mediante el ángulo α .

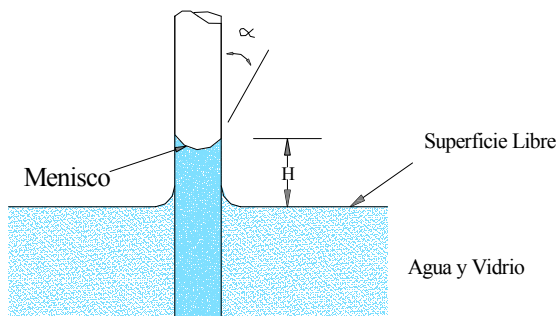


Fig. 1.7(a)

[6] Fuente: Mecánica de Fluidos - Irving H. Shames

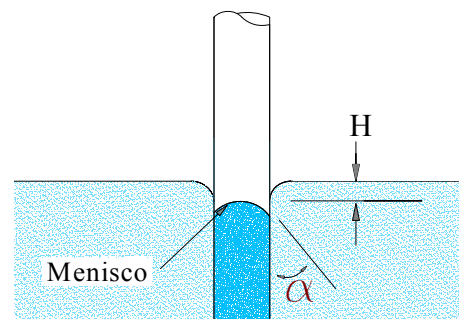


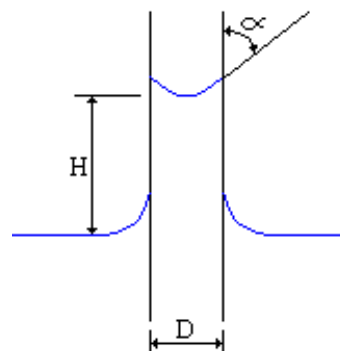
Fig. 1.7(b)

Efectos capilares de cohesión y adhesión

La altura capilar h para un fluido y un sólido dados depende de α , el cual, a su vez, depende del diámetro interno del tubo. La altura capilar se incrementará con la disminución del diámetro interno del tubo. Si la adhesión con el vidrio es menor que la cohesión en el líquido, entonces se obtiene un menisco curvado hacia abajo medido mediante α en el sólido, como se muestra para el mercurio y el vidrio en la (Fig. 1.7(b)). Nótese en este caso que la columna de mercurio se deprime una distancia H . Nuevamente, H se incrementará con una disminución en el diámetro interno del tubo. Estos efectos se conocen como efectos de capilaridad.

Las fuerzas de cohesión son aquellas que existen entre dos partículas de naturaleza diferente, y las fuerzas de atracción son las que existen entre dos partículas de la misma naturaleza.

Esto puede explicarse mejor en el fenómeno que se observa en las paredes (Fig. 1.8), si ésta esta en contacto con agua, y no tiene ningún impermeabilizante, la humedad empieza a subir por la misma.



[2] Fuente: Introducción a la Hidráulica
- Ing. Marco Escobar Seleme (2004)

Fig. 1.8

Tensión superficial que produce ascenso es igual a la componente de tensión que produce ascenso por el perímetro del tubo, es decir:

$$\boxed{P_{vertical} = \sigma \cos \alpha \pi D} \quad [\text{N}] \quad (13)$$

La única fuerza que se opone al ascenso es el peso propio del bloque líquido de altura H .

$$\boxed{P_{Liq} = \rho g \frac{\pi D^2}{4} H} \quad [\text{N}] \quad (14)$$

Para equilibrar el sistema:

$$\sigma \cos \alpha \pi D = \rho g \frac{\pi D^2}{4} H \quad (15)$$

$$H = \frac{4\sigma \cos \alpha}{\rho g D} \quad [\text{m}] \quad (16)$$

Donde: H es la altura la que sube el fluido dentro del tubo capilar.

10. PRESIÓN DE VAPOR.

Para ciertas condiciones de temperatura y presión, los líquidos se vaporizan; es decir, cambian de estado, convirtiéndose en gases. La presión de vapor, P_v , se define como aquella presión, para una temperatura dada, en la cual un líquido se vaporiza.

En el estudio de la mecánica de los líquidos, la presión de vapor es de especial importancia, pues el líquido se vaporizaría si llegara a alcanzarse, perdiendo así, no solo la continuidad de la materia, sino ocasionado el llamado fenómeno de *cavitación*, cuya ocurrencia causa serios problemas. En la tabla 3 y tabla 4 (*Anexo*) presentamos los valores de algunas propiedades de los fluidos para distintos líquidos.

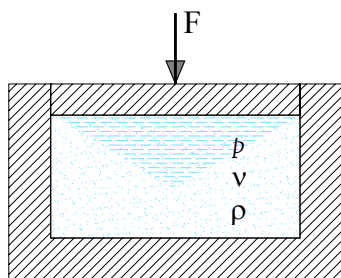
El fenómeno de cavitación se produce cuando el fluido alcanza la presión de vapor, el fluido se convierte en gas o cambia de estado formando burbujas de gas, estas se mueven de zonas de presiones bajas a zonas de presiones altas e implosionan, provocando ondas de explosión perjudiciales a las estructuras.

11. COMPRESIBILIDAD.

La compresibilidad de un fluido es una medida del cambio de volumen (y por lo tanto de su densidad) cuando se somete a diversas presiones. Cuando un volumen V de un líquido de densidad ρ y presión p se somete a compresión por efecto de una fuerza F , como se muestra en la (Fig. 1.9) la masa total del fluido ρV permanece constante, es decir:

$$\rho V = \text{cte.}$$

$$d(\rho V) = \rho dV + V d\rho = 0$$



Fuente: Elaboración propia

Fig. 1.9. Esquema de fluido comprimido.

De donde resulta:

$$-\frac{V}{dV} = \frac{\rho}{d\rho}$$

Al multiplicar ambos miembros por $d\rho$, se obtiene:

$$E_v = -\frac{dp}{\frac{dV}{V}} = +\frac{dp}{\frac{d\rho}{\rho}}$$

Módulo Volumétrico:
$$E_v = \frac{-\Delta p}{(\Delta V)/V} \quad (17)$$

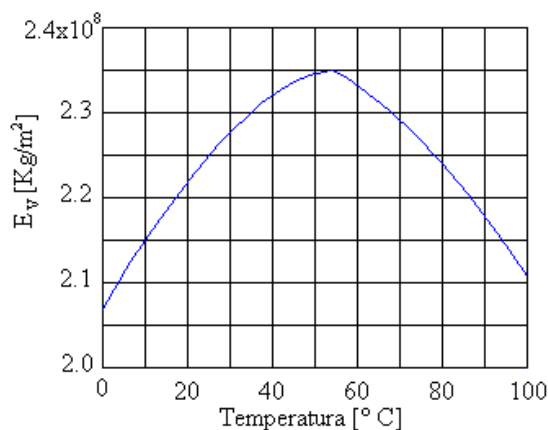
- Líquidos muy poco compresibles $\Rightarrow E$ alto

La cantidad E_v se conoce como módulo de elasticidad volumétrico y es análogo al módulo de la elasticidad lineal empleado para caracterizar la elasticidad de los sólidos.

El módulo de elasticidad volumétrico se define como el cambio de presión dividido al cambio asociado en el volumen o densidad, por unidad de volumen o densidad, siendo una medida directa de la compresibilidad del fluido.

Sus dimensiones son las de esfuerzo $[F/L^2]$. El signo negativo de la ecuación indica una disminución en el volumen V al aumentar la presión p .

El módulo de elasticidad volumétrico del agua varía principalmente con la temperatura, como se muestra en la (Fig. 1.10) donde el valor de las condiciones estándar es $2.09 \times 10^8 \text{ [Kg/m}^2\text{]}$, es decir, aproximadamente 100 veces más compresible que el acero.



[2] Fuente: Introducción a la Hidráulica
- Ing. Marco Escobar Seleme (2004)

Fig. 1.10. Módulo de elasticidad volumétrica del agua en función a la temperatura.

Es común designar la compresibilidad como el recíproco del módulo de elasticidad volumétrico:

$$\beta = \frac{1}{E_v} \quad \left[\frac{L^2}{F} \right] \quad (18)$$

12. APLICACIÓN DE CONCEPTOS GENERALES.

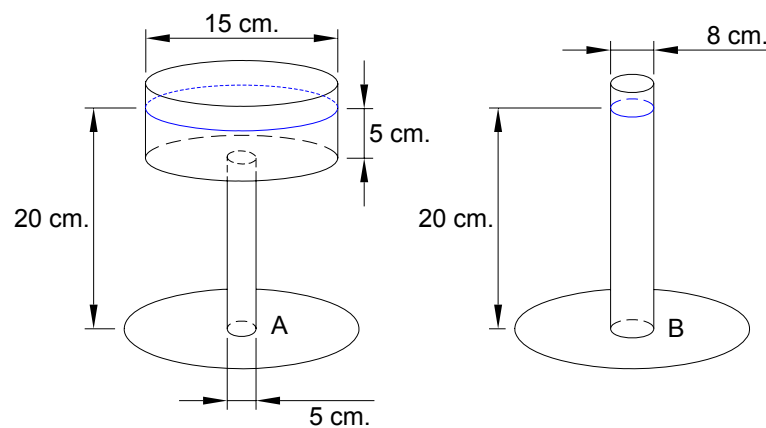
El estudio de la Mecánica de fluidos es parte de la Ingeniería y su finalidad es diferenciar entre un gas y un líquido; Identificar las unidades de las cantidades básicas de tiempo, longitud, fuerza y masa en el Sistema Internacional de Unidades o SI (sistema métrico de unidades); Establecer apropiadamente las ecuaciones asegurando la consistencia de unidades.

Generar competencias en el estudiante, para aplicar los principios que rigen el movimiento mecánico de los fluidos, al estudio teórico de las máquinas hidráulicas y otros dispositivos así como su aplicación a la solución de problemas prácticos de aplicación industrial, y la solución de problemas de transporte de fluidos entre otras aplicaciones. Constituye la base para el estudio de materias del ámbito tecnológico como ser: Máquinas hidráulicas, Térmicas y Neumáticas; redes de distribución; transmisiones y controles hidráulicos y neumáticos, entre otros. Pocos sistemas mecánicos industriales pueden prescindir de la acción dinámica y/o térmica de un fluido, esto hace que la profundización en el estudio de la ciencia de la Mecánica de Fluidos, sea imprescindible en la formación integral de un ingeniero, pues desarrolla competencias técnico-específicas necesarias para que su desempeño profesional en el ámbito laboral sea significativo, eficiente y eficaz.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Propósito u objetivo: Con los conceptos generales de la mecánica de fluidos y la aplicación de la fórmula de peso específico.

Calcular cuáles son los pesos específicos de los líquidos que se tiene para dos recipientes A y B colocados sobre los platillos de una balanza. Cuando están vacíos la balanza esta en equilibrio. Al llenar el recipiente A de un líquido hasta una altura de 20 [cm.], la balanza indica 930 gramos peso; para volver a equilibrarla es necesario llenar el recipiente B con otro líquido hasta llegar a una altura de 20 [cm.].



Solución:

El peso específico es el peso de un líquido por unidad de volumen del mismo:

$$\gamma = \frac{W}{V}$$

El peso del líquido del recipiente A es de 0.93 [Kg.] este es igual al del recipiente B.

Se determina el volumen de los dos recipientes:

$$Vol_{cilindro} = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$V_A = \frac{\pi (0.05)^2}{4} (0.15) + \frac{\pi (0.15)^2}{4} (0.05) \Rightarrow V_A = 1.18 \times 10^{-3} \text{ [m}^3\text{]}$$

$$V_B = \frac{\pi (0.08)^2}{4} (0.20) \Rightarrow V_B = 1.01 \times 10^{-3} \text{ [m}^3\text{]}$$

Ahora se puede determinar el peso específico:

$$\gamma_A = \frac{W_A}{V_A} = \frac{0.93}{1.18 \times 10^{-3}} \Rightarrow \gamma_A = 789.5 \left[\frac{\text{Kgf}}{\text{m}^3} \right]$$

$$\gamma_B = \frac{W_B}{V_B} = \frac{0.93}{1.01 \times 10^{-3}} \Rightarrow \gamma_A = 920.8 \left[\frac{\text{Kgf}}{\text{m}^3} \right]$$

2.- Propósito u objetivo: Con los conceptos generales de la mecánica de fluidos y las formulas deducidas.

Se requiere calcular su peso específico, densidad y densidad relativa. Para un volumen de 6 m^3 de un aceite que pesan 5080 kg,

Solución:

$$\text{Peso específico } \gamma = \frac{W}{V} = \frac{5080 \text{ kg}}{6 \text{ m}^3} = 848 \text{ kg} / \text{m}^3$$

$$\text{Densidad } \rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{848 \text{ kg} / \text{m}^3}{9,81 \text{ m} / \text{seg}^2} \quad \boxed{\rho = 86,5 \text{ UTM/m}^3}$$

$$\text{Densidad relativa de una sustancia} = \frac{\text{peso específico de la sustancia}}{\text{peso específico del agua}} = \frac{\gamma_{ac}}{\gamma_{ag}} = \frac{848}{1000}$$

$$\boxed{\text{Densidad Relativa} = 0.848}$$

3.- Propósito u objetivo: Aplicar la formula de peso específico y la densidad para un gas.

Se requiere determinar la constante del gas R y su densidad ρ , que se encuentra a una temperatura de 32°C y la presión absoluta es de $2,10 \text{ Kg./cm}^2$, el volumen específico V_s cierto gas es $0,71 \text{ m}^3/\text{kg}$.

Solución:

$$\text{Como } \gamma = \frac{\rho}{RT}; R = \frac{\rho}{\gamma \cdot T} = \frac{\rho v_s}{T} = \frac{(2,10 \times 10^4)(0,71)}{273 + 32}$$

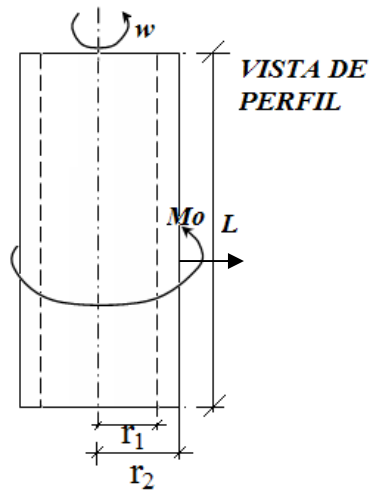
$$\boxed{R = 48.88 \text{ m}^2/\text{° K}}$$

$$\text{Densidad } \rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{1/v_s}{g} = \frac{1}{v_s g} = \frac{1}{0,71 \times 9,81}$$

$$\boxed{\rho = 0,1436 \text{ Kg. seg}^2/\text{m}^4}$$

4.- Propósito u objetivo: Con los conceptos de viscosidad desarrollada en la mecánica de fluidos.

Determinar la viscosidad del líquido que llena el espacio entre los cilindros para un cilindro de 0,122 m de radio gira concéntrica mente en el interior de un cilindro fijo de 0,128 m de radio. Ambos cilindros tiene una longitud de 0,305 m., lo cual se necesita un par de 0,881 Nm para mantener una velocidad angular de 60 revoluciones por minuto.



Solución.

$$r_1 = 0.122m \quad ; \quad r_2 = 0.128m$$

$$L = 0.305m \quad ; \quad M = 0.881N \cdot m$$

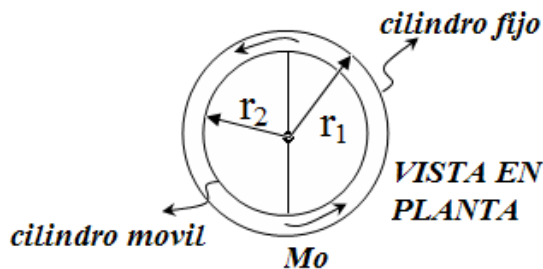
$$\omega = 60rpm = 2\pi \left[\frac{rad}{s} \right]$$

$$v = \omega r \Rightarrow \text{velocidad tangencial}$$

$$v = (0.122m)(2\pi \left[\frac{rad}{s} \right])$$

$$v = 0.767 \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$M_0 = M_{\text{resistente}}$$



$$0.881 = \tau(2\pi r \times 0.305)r$$

$$\tau = \frac{0.4597}{r^2}$$

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy} \Rightarrow \frac{dV}{dy} = \frac{0.4597}{\mu r^2}$$

$$\text{Cuando } r = r_2 \Rightarrow V = 0$$

$$\text{Cuando } r = r_1 \Rightarrow V = 0.767 \frac{m}{s}$$

$$\int_{V_2}^{V_1} dV = \frac{0.4597}{\mu} \int_{0.128}^{0.122} \frac{1}{r^2} (-dr)$$

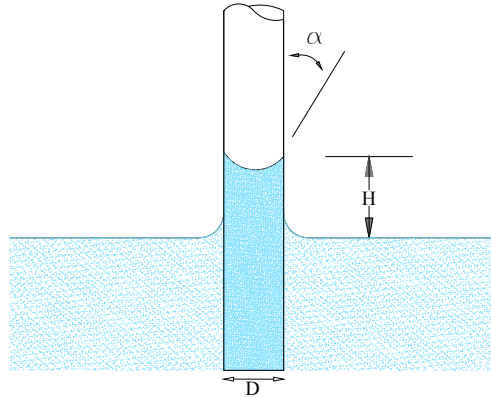
$$(V_1 - V_2) = \frac{0.4597}{\mu} \left[\frac{1}{r} \right]_{0.128}^{0.122}$$

$$(0.767 - 0) = \frac{0.4597}{\mu} \left[\frac{1}{0.122} - \frac{1}{0.128} \right]$$

$$\mu = 0.230 Pa \cdot s$$

5.- Propósito u objetivo. Aplicar el concepto de tensión superficial desarrollada en mecánica de fluidos.

Para determinar el ángulo de un tubo vertical sumergido en agua, si el diámetro del tubo es de 5 cm y la Altura capilar es de 2 cm; $\sigma = 5 \times 10^{-5} \text{ KN/cm}$



Solución:

Sabemos: $D = 5 \text{ cm.} = 0.05 \text{ m}$

$H = 2 \text{ cm.} = 0.02 \text{ m}$

$\Sigma = 5 \times 10^{-5} \text{ KN/cm.} = 5 \times 10^{-3} \text{ KN/m}$

Usando la siguiente ecuación deducida:

$$H = \frac{4\sigma \cos \alpha}{\rho g D}$$

Donde:

$$\gamma = \rho * g = (1000 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2) \Rightarrow \gamma = 9.810 \text{ KN/m}^3$$

$$1\text{N} = 1\text{kg.m/s}^2$$

Entonces:

$$\cos \alpha = \frac{\gamma.H.D}{4.\sigma} = \frac{(9.81)(0.02)(0.05)}{(4)(5 \times 10^{-3})}$$

$$\alpha = 60.63^\circ$$

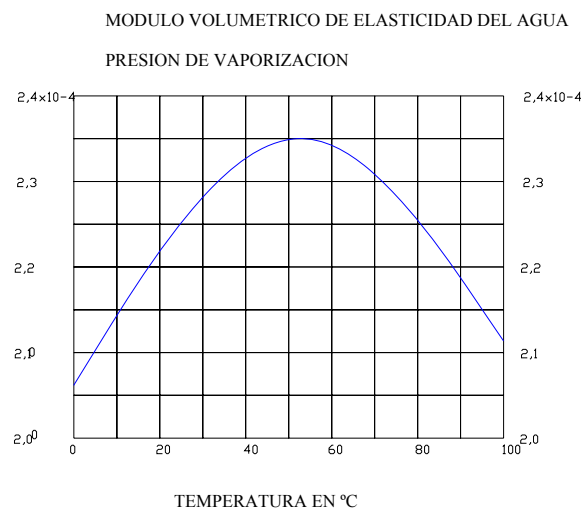
EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Propósito u objetivo: Aplicar las ecuaciones de compresibilidad desarrolladas en la mecánica de fluidos.

Encontrar la variación de volumen que experimenta 1 m^3 de agua a 20°C cuando se somete a un incremento de presión de 20 kg/cm^2 .

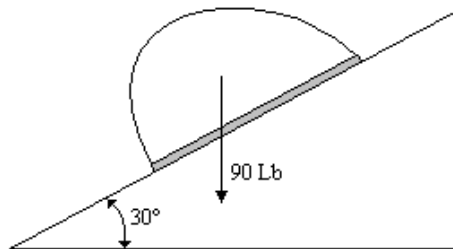
Solución: Resolver con la grafica siguiente.

$$\Delta V = -0,000899 \text{ m}^3$$



2.- Propósito u objetivo: Aplicar los conceptos de la viscosidad cinemática.

Para un cuerpo que pesa 90 Lb y que tiene una superficie plana de 2 pie^2 se resbala sobre un plano lubricado, el cual forma un ángulo de 30° con la horizontal. Para una viscosidad de $2.09 \times 10^{-3} \text{ [Lb.s/pie}^2\text{]}$ y una velocidad del cuerpo de 3 [pie/s] , determinar el espesor de la película lubricante.



Se asume que el fluido del sistema es Newtoniano, entonces se aplica la ecuación de Newton para fluidos ideales:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

Por otro lado, el esfuerzo cortante es igual a la fuerza por unidad de área: $\tau = \frac{F}{A}$

$$y = 3.35 [p \lg]$$

3.- Propósito u objetivo: Con los conceptos de mecánica de fluidos. Determinar la densidad de una

masa de aire tiene una presión de $0.8 \frac{Kg}{cm^2}$ absolutos a una temperatura de 5 0C.

Solución.

$$\rho = 0.99 \frac{Kg - masa}{m^3}$$

4.- Propósito u objetivo: Aplicar la ecuación deducida del peso en la mecánica de fluidos. Donde se mantiene aire a una presión de 200 kPa y a una temperatura de 30°C en un tanque de 500 L. ¿Cuál es la masa del aire?

Solución:

$$M = 1.149 \text{ kg.}$$

Capítulo 2:

ESTÁTICA DE FLUIDOS

1. INTRODUCCIÓN

La estática de fluidos estudia las condiciones de equilibrio de los fluidos en reposo, y cuando se trata solo de líquidos, se denomina hidrostática. Desde el punto de vista de Ingeniería Civil es mas importante el estudio de los líquidos en reposo que de los gases, por lo cual aquí se hará mayor hincapié en los líquidos, en particular en el agua, por lo que $dv/dy = 0$ por lo que no existe velocidad y los esfuerzos cortantes lo cual son nulos. Están solo dos fuerzas presentes en equilibrio estático que son la presión y gravedad y por lo tanto no existe aceleración.

2. PRESIÓN

El termino presión es usado para indicar la fuerza normal por unidad de área que se presenta en cualquier punto de una masa fluida. Al no existir el esfuerzo cortante en una masa fluida en reposo, las fuerzas son necesariamente perpendiculares a la superficie sobre la cual se ejercen.

Las unidades son:

$$\frac{N}{m^2} = 1 \text{ Pa} \quad \text{Para el S.I.}$$

$$\frac{Lb}{Pie^2} \quad \text{Para el S.I.G.}$$

Blaise Pascal, un científico del siglo XVII, describió dos principios importantes acerca de la presión.

- “La presión en una masa fluida en reposo, es la misma cualquiera sea la dirección en que se la mida”.

Esto indica que la presión es una cantidad escalar, lo cual se puede demostrar mediante un elemento pequeño prismático triangular de dimensiones; Δx , Δy , como catetos y Δn como la hipotenusa, con un ancho unitario.

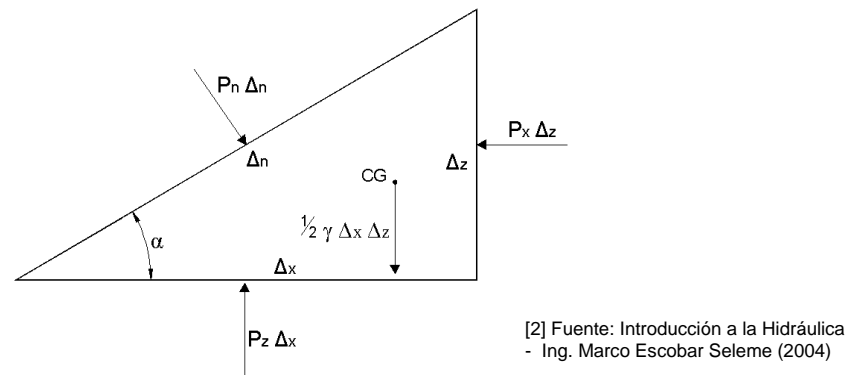


Fig. 2.1 Volumen de control triangular de ancho unitario

Como se trata de un fluido en reposo, este tiene equilibrio estático, entonces:

$$\text{Condición de equilibrio : } \sum H = 0 \quad \Rightarrow \quad -P_x \Delta_z + P_n \Delta_n \cdot \sin \alpha = 0 \quad (a)$$

$$\text{Condición de equilibrio : } \sum V = 0 \quad \Rightarrow \quad P_z \Delta_x - P_n \Delta_n \cdot \cos \alpha - \frac{1}{2} \gamma \Delta_x \Delta_z = 0 \quad (b)$$

$$\text{Sen } \alpha = \frac{\Delta_z}{\Delta_n} \quad \text{Cos } \alpha = \frac{\Delta_x}{\Delta_n}$$

De la primera ecuación (a):

$$-P_x \Delta_z + P_n \Delta_z = 0 \quad \Rightarrow \quad P_x = P_n$$

De la segunda ecuación (b):

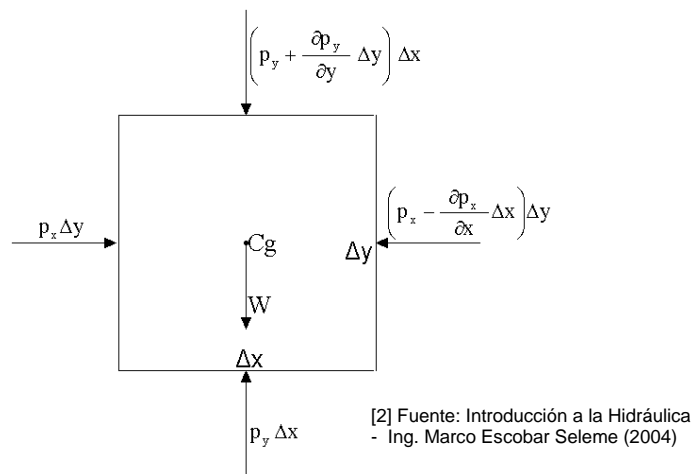
$$P_z \Delta_x - P_n \Delta_x - \frac{1}{2} \gamma \Delta_x \Delta_z = 0$$

Asiando tender Δ_x y Δ_z a cero, además si el volumen del prisma tiende a cero:

$$P_z = P_n \\ \therefore P_x = P_z = P_n$$

➤ “La presión en una masa fluida no varía en un plano horizontal, en el sentido de la vertical existirá una variación de la presión que aumenta con la profundidad”.

Tomamos en elemento diferencial de lados Δ_x, Δ_z y ancho unitario, con el eje z que coincide con la vertical, las fuerzas actuantes serán la presión y el peso del elemento.

**Fig. 2.2 Volumen de control**

De la misma manera que la demostración anterior; por equilibrio estático:

$$\text{Condicion de equilibrio: } \sum H = 0 \quad \Rightarrow \quad P_x \Delta_y - \left(P_x - \frac{\partial P_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y = 0$$

$$P_x \Delta_y - P_x \Delta_y + \frac{\partial P_x}{\partial x} \Delta x \Delta y = 0$$

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} = 0$$

Lo que indica que la presión no varía a lo largo del eje x, es decir, la presión no varía horizontalmente.

En el sentido vertical:

$$\text{Condicion de equilibrio: } \sum V = 0 \quad \Rightarrow \quad P_y \Delta_x - \left(P_y + \frac{\partial P_y}{\partial y} \Delta y \right) \Delta_x - \gamma \Delta_x \Delta_y = 0$$

$$P_y \Delta_x - P_y \Delta_x - \frac{\partial P_y}{\partial y} \Delta_y \Delta_x - \gamma \Delta_x \Delta_y = 0$$

$$\frac{\partial P_y}{\partial y} \Delta_y \Delta_x = -\gamma \Delta_x \Delta_y$$

$$\frac{\partial P_y}{\partial y} = -\gamma$$

Integrando entre 1 y 2: $\int_1^2 dP = \int_1^2 -\gamma dy \quad \Rightarrow \quad \text{Tenemos:} \quad P_2 - P_1 = \gamma(y_1 - y_2)$
 $P = \gamma h$

Donde h será la distancia media verticalmente hacia abajo desde el plano horizontal de presión cero, es decir la superficie del líquido.

3. MEDICIÓN DE PRESIONES

Denominamos presión absoluta a la presión medida desde un cero absoluto o vacío perfecto. Las presiones relativas son las medidas desde un cero de referencia, este cero es comúnmente la presión atmosférica.

Las presiones relativas se pueden clasificar en. Presiones positivas, mayores que la atmosférica, y las negativas o de vacío, menores a la atmosférica en consecuencia:

$$\text{Presión absoluta} = \text{Presión atmosférica} + \text{Presión relativa.}$$

Las presiones absolutas y relativas (manométricas) se pueden esquematizar en la siguiente figura:

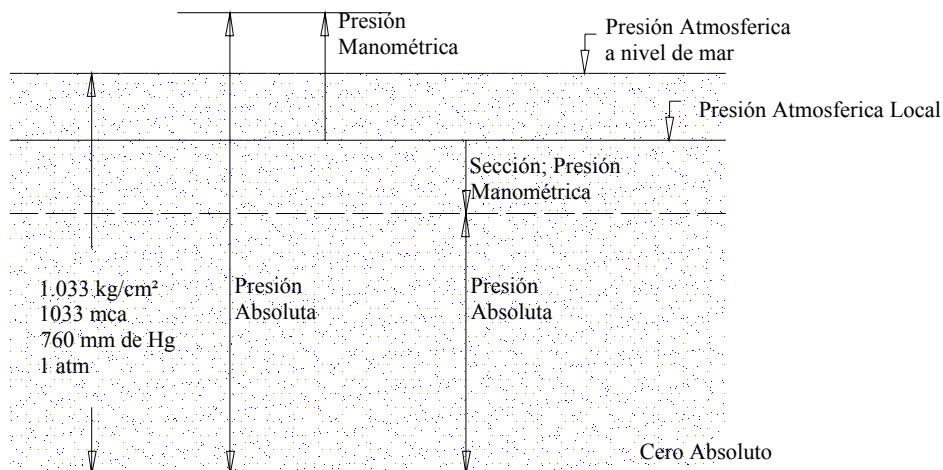


Fig. 2.3 Esquema de presiones

[2] Fuente: Introducción a la Hidráulica
 - Ing. Marco Escobar Seleme (2004)

4. DIFERENCIA DE PRESIONES

La diferencia de presiones entre dos puntos a distintos niveles en un líquido viene dada por:

$$p_2 - p_1 = \gamma(h_2 - h_1) \quad [\text{En Kg. /m}^2] \quad (1)$$

Donde γ = peso específico de líquido (Kg. /m³) y $h_2 - h_1$ = diferencia en elevación (m).

Si el punto 1 esta en la superficie libre del líquido y h es positivo hacia abajo, la ecuación anterior se transforma en:

$$\boxed{p = \gamma \cdot h} \quad [\text{En Kg./m}^2 \text{ (man)}] \quad (2)$$

Para obtener la presión en Kg./cm²,

$$\boxed{p' = \frac{p}{10^4} = \frac{\gamma \cdot h}{10^4}} \quad [\text{En Kg./cm}^2 \text{ (man)}] \quad (3)$$

Estas ecuaciones son aplicables en tanto que γ se mantenga constante (o varia tan ligeramente con h , que no introduzca un error significativo en el resultado).

5. VARIACIÓN DE LA PRESIÓN EN UN FLUIDO ESTÁTICO

Con el fin de averiguar la distribución de presiones en fluidos estáticos, se considerará el equilibrio de fuerzas de un elemento infinitesimal de fluido, tal como se muestra en la (fig. 2.4). Las fuerzas que actúan sobre el elemento se originan debido a la presión del medio circundante y a la fuerza de gravedad.

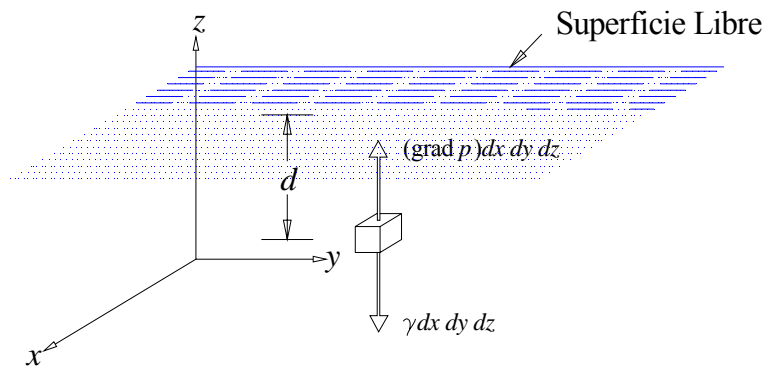


Fig. 2.4

[6] Fuente: Mecánica de fluidos –
Irving H. Shames

Cuerpo libre de un elemento en un fluido estático.

Para equilibrio, se tiene que

$$-\gamma dx \cdot dy \cdot dz \cdot k + (-grad p) dx \cdot dy \cdot dz = 0$$

Donde γ es el peso específico. Las ecuaciones escalares resultantes son:

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = 0} \quad (4a)$$

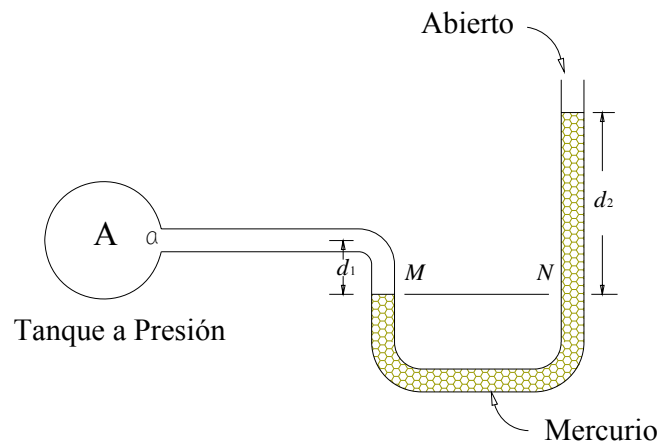
$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial y} = 0} \quad (4b)$$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma} \quad (4c)$$

Se concluye que la presión varía solamente en la dirección z , escogida como la dirección opuesta a la gravedad. Como p varía solamente en la dirección z y no es una función de x y y , puede utilizarse una derivada ordinaria en la ecuación (4c). Luego:

$$\boxed{\frac{dp}{dz} = -\gamma} \quad (5)$$

$$\boxed{\int_p^{p_{atm}} dp = \int_z^{z_0} -\gamma \cdot dz}$$



[6] Fuente: Mecánica de fluidos – Irving H. Shames

Fig. 2.5 Manómetro simple o tubo en U.

Tomando γ como una constante, la integración es inmediata. De este modo, se obtiene:

$$\boxed{P_{atm} - P = -\gamma(z_0 - z)}$$

$$\boxed{p - p_{atm} = \gamma(z_0 - z) = \gamma h} \quad (6)$$

Donde d es la distancia por debajo de la superficie libre (véase la fig. 2.5). Usualmente el término $p - p_{atm}$, es decir, la diferencia de presión con respecto a la presión atmosférica, se conoce como presión manométrica, y se representa mediante el símbolo p_{man} , o p manométrica. Luego:

$$p_{man} = \gamma h \quad (7)$$

Muchos de los aparatos para medir presiones registran la presión por encima o por debajo de la correspondiente a la atmósfera. Como consecuencia, las presiones manométricas se utilizan con frecuencia en la práctica de la ingeniería”. En contraste con la presión p , nótese que la presión p_{man} puede ser negativa, con un valor negativo máximo posible igual a $-p_{atm}$. Nótese también, en las anteriores ecuaciones, que para cualquier fluido estático la presión a una profundidad dada por debajo de la superficie libre permanece constante para esa profundidad en cualquier lugar del fluido.

La manometría es una técnica para la medición de presiones, cuyas ecuaciones se deducen directamente del análisis anterior. Los manómetros se utilizarán con frecuencia en las discusiones y problemas que siguen.

El tipo más sencillo de manómetro es el tubo en U. Éste se muestra en la fig. 2.6 (a) conectado a un tanque que contiene un fluido A cuya presión en el punto a desea medirse. Nótese que el fluido en el tanque se extiende dentro del tubo en U, haciendo contacto con la columna de mercurio. Los fluidos alcanzan una configuración de equilibrio de la que es relativamente sencillo deducir la presión del tanque. Debido a su alto peso específico, es usual emplear mercurio como el segundo fluido cuando se esperan presiones bastante altas, debido a que los desplazamientos requeridos para alcanzar equilibrio serán razonablemente pequeños. El manómetro abierto fig. 2.6 (b), contiene mercurio, uno de sus extremos se conecta de manera perpendicular a la pared que confina el flujo del recipiente que lo contiene, el otro extremo puede estar abierto a la atmósfera o bien con otro punto de la pared en cuyo caso el manómetro medirá diferenciales de presiones entre los dos puntos.

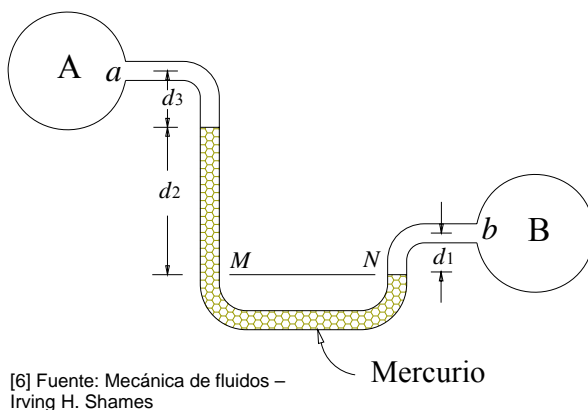


Fig. 2.6 (a) Manómetro en U cerrado

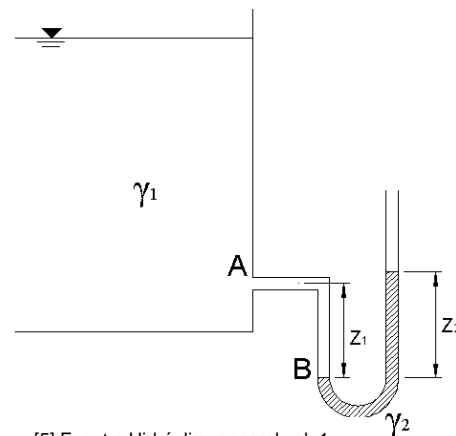


Fig. 2.6 (b) Manómetro en U abierto

Los más importantes son el barómetro y el tubo piezométrico. El primero es un dispositivo para medir la presión atmosférica local; consiste en un tubo de vidrio lleno de mercurio, con un extremo cerrado y el otro abierto, sumergido dentro de un recipiente que contiene dicho elemento.

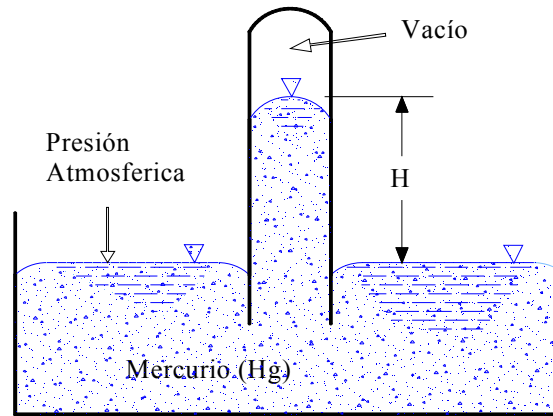


Fig. 2.7 Barómetro

[5] Fuente: Hidráulica general vol. 1-
Gilberto Sotelo Ávila

La presión que produce el ascenso del mercurio por el interior del tubo es la presión atmosférica; y, por supuesto, la altura alcanzada por el mercurio varía con la presión reinante, esto se expresa:

$$p_a = \gamma_{Hg} h \quad \text{ó} \quad h = \frac{p_a}{\gamma_{Hg}} \quad (8)$$

Los piezómetros se utilizan para medir presiones estáticas moderadas de un líquido que fluye dentro de una tubería; consiste en un tubo transparente de diámetro pequeño, conectado al interior de la tubería mediante un niple y con el otro extremo abierto a la atmósfera (fig. 2.8 a). La altura h de la columna piezométrica, multiplicada por el peso específico del líquido en la tubería, determina la presión en la misma para el punto de contacto con el piezómetro. Cuando se desea medir la presión media en una sección, se utiliza una instalación como se muestra en la (fig. 2.8 b).

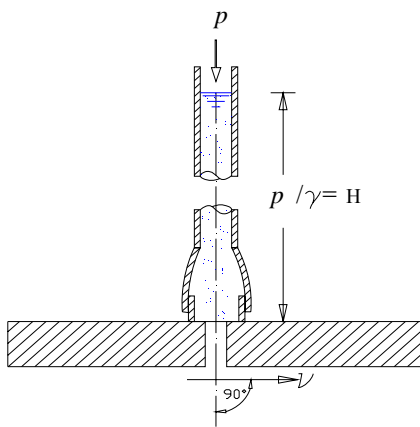
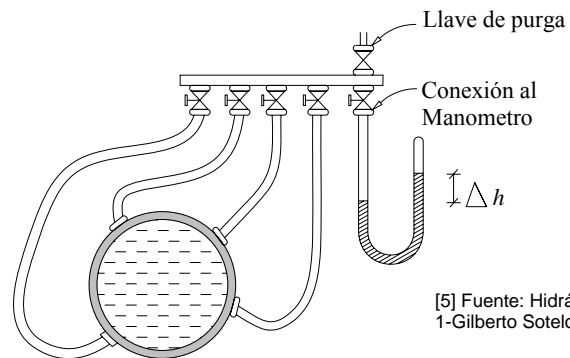


Fig. 2.8 (a) Piezómetro



[5] Fuente: Hidráulica general vol. 1-
Gilberto Sotelo Ávila

**Fig. 2.8 (b) Disposición de tomas Piezométricas en la
sección transversal de un tubo**

6. APLICACIÓN DE LA ESTÁTICA DE FLUIDOS.

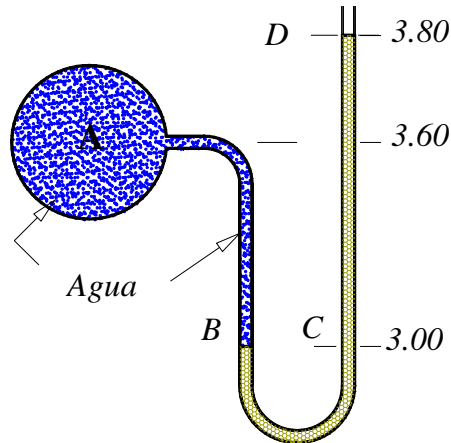
Es aplicado a los problemas de la hidráulica donde el estudiante será capaz de; (a). Definir la relación que existe entre la presión absoluta, presión manométrica y presión atmosférica, (b). Describir el grado de variación de presión atmosférica cerca de la superficie terrestre.

Los barómetros y manómetros son aparatos que nos ayuda medir las presiones de los distintos fluidos como ser; Agua, Gas, Glicerina, etc.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Propósito u objetivo: Con los conceptos de medición de presiones de estática de fluidos aplicar la formula deducida.

Determinar la presión manométrica en A en kp/cm^2 debida a la columna de mercurio (densidad relativa = 13,57) en el manómetro en U mostrado en la figura.



Solución:

Como B y C están al mismo nivel y en el mismo liquido; podemos igualar las presiones B y C en kp/m^2 (man).

Presión en B = Presión en C

$$\begin{aligned}
 P_A + \gamma \cdot h(\text{Agua}) &= P_B + \gamma \cdot h(\text{mercurio}) \\
 P_A + 1.000(3,60 - 3,00) &= 0 + (13,57 \bullet 1.000)(3,80 - 3,00) \\
 \text{Despejando, } P_A &= 10.256 \text{ kp} / \text{m}^2 \\
 P_A = 10.256 / 10^4 &\Rightarrow P_A = 1,0256 \text{ kp} / \text{cm}^2 (\text{man})
 \end{aligned}$$

Otra forma de solución: Empleando alturas de presión en metros de agua.

Altura de presión en B = Altura de presión en C

$$\begin{aligned}
 \frac{P_A}{\gamma} + 0,60 \text{ m. de agua} &= 0,80 \bullet 13,57 \\
 \frac{P_A}{\gamma} &= 10,256 \text{ m. de agua} \\
 P_A &= \frac{(1.000 \bullet 10,256)}{10^4} \quad \boxed{P_A = 1,0256 \text{ kp} / \text{cm}^2 (\text{man})}
 \end{aligned}$$

2.- Propósito u objetivo: Aplicar los conceptos de presión de la estática de fluidos y las formulas de densidad relativa, presión y peso específico.

Determinar la presión en $[KN/m^2]$ si el equivalente en columna de agua es de 400 (mm) de:

a) Mercurio de densidad relativa 13,6.

b) Agua.

c) Aceite de peso específico 7,9 KN/m³.

d) Liquido de densidad 520 KN/m³

Solución:

$$h = 400 \text{ (mm)} = 0,4 \text{ (m)}$$

$$\begin{aligned} D_R &= \frac{\gamma_{sust}}{\gamma_{H_2O}} & \gamma_{Hg} &= \rho_{Hg} \cdot g = (13,6)(9,81) \\ a) & & \gamma_{Hg} &= 133,42 [KN / m^3] \end{aligned}$$

$$P_{Hg} = \gamma_{Hg} \cdot h = (133,42)(0,4) \Rightarrow P_{Hg} = 53,4 [KN / m^2]$$

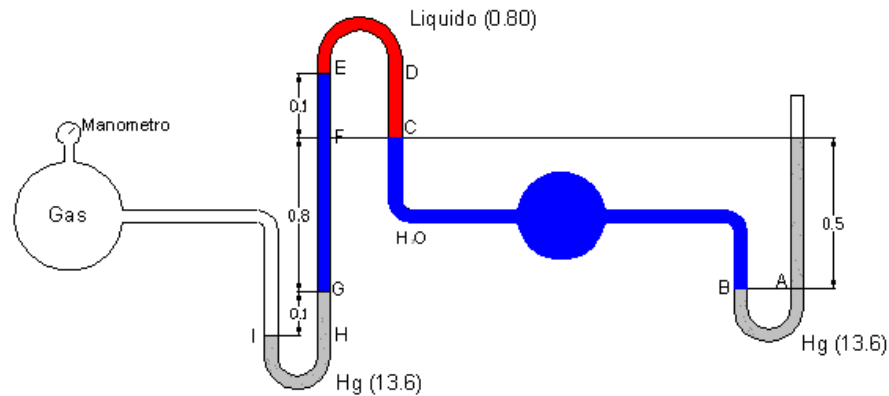
$$b) \quad P_{H_2O} = \gamma_{H_2O} \cdot h = (9,81)(0,4) \Rightarrow P_{H_2O} = 3,92 [KN / m^2]$$

$$c) \quad P_{ac} = \gamma_{ac} \cdot h = (7,9)(0,4) \Rightarrow P_{ac} = 3,16 [KN / m^2]$$

$$\begin{aligned} d) \quad \gamma_L &= \rho_L \cdot g = (520)(9,81) \Rightarrow \gamma_L = 5101,2 [N / m^3] \\ P_L &= \gamma_L \cdot h = (5,1012)(0,4) \Rightarrow P_L = 2,04 [KN / m^2] \end{aligned}$$

3.- Propósito u objetivo: Aplicando las ecuaciones deducidas de medición de presiones.

Determinar cuál es la lectura del manómetro de la siguiente figura:



Solución:

Se comienza el análisis de un punto de presión conocida, como el tubo del lado derecho esta cerrado se trabajara en presiones absolutas, además se tiene un valor de presión en el gas de tubo igual a cero.

Los valores entre paréntesis son las densidades relativas de los líquidos, por lo que se debe hallar los pesos específicos.

$$\gamma_{\text{Hg}} = D_{\text{R}_{\text{Hg}}} \gamma_{\text{Hg}} = (13.6)(9.81) \Rightarrow \gamma_{\text{Hg}} = 133.42 \left[\frac{\text{KN}}{\text{m}^3} \right]$$

$$\gamma_L = D_{R_{Hg}} \gamma_{H_2O} = (0.80)(9.81) \Rightarrow \gamma_L = 7.85 \left[\frac{\text{KN}}{\text{m}^3} \right]$$

Se debe hallar la presión que ejerce el mercurio en el punto A.

$$p_{A(\text{abs})} = h_A \gamma_{\text{Hg}} = (0.5)(133.42) \Rightarrow p_{A(\text{abs})} = 66.71 \left[\frac{\text{KN}}{\text{m}^2} \right]$$

Como los puntos A y B se encuentran sobre la misma horizontal y además el punto B es mercurio pero directamente en contacto con agua, las presiones serán iguales.

$$p_{A(\text{abs})} = p_{B(\text{abs})} = 66.71 \left[\frac{\text{KN}}{\text{m}^2} \right]$$

La presión en C, será igual a la presión en B menos la presión provocada por la columna de agua AC.

$$p_{C(abs)} = p_{B(abs)} - h_{BC} \gamma_{H_2O} = 66.71 - (0.5)(9.81) \Rightarrow p_{C(abs)} = 61.81 \left[\frac{KN}{m^2} \right]$$

La presión en D, de la misma manera que en C, será igual a la presión en C menos la presión provocada por la columna DC.

$$p_{D(abs)} = p_{C(abs)} - h_{DC} \gamma_L = 61.81 - (0.1)(7.85) \Rightarrow p_{D(abs)} = 61.03 \left[\frac{KN}{m^2} \right]$$

$$p_{E(abs)} = p_{D(abs)} = 61.03 \left[\frac{KN}{m^2} \right]$$

La presión G, será igual a la presión en E mas la presión provocada por la columna EG.

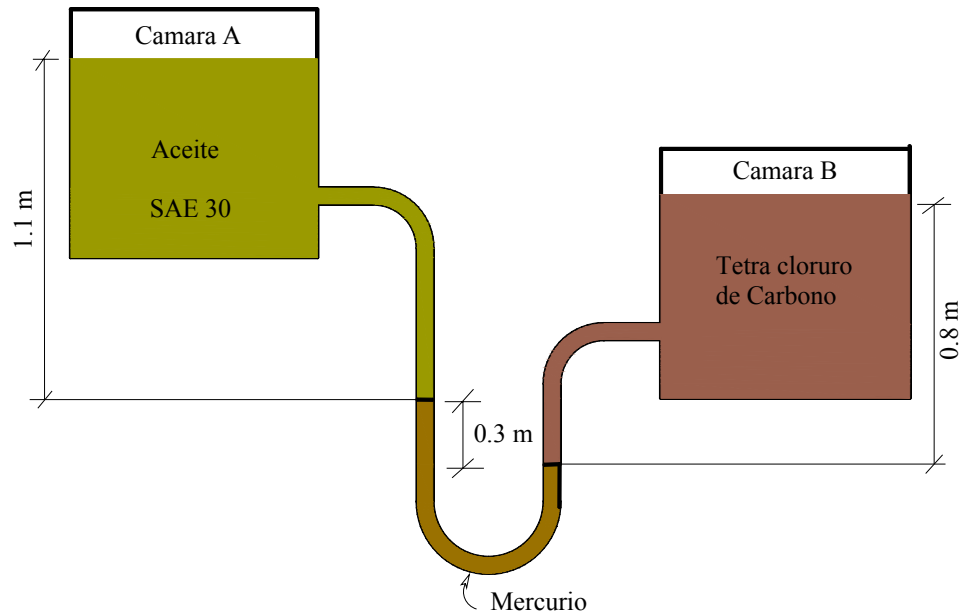
$$p_{G(abs)} = p_{E(bas)} + h_{EG} \gamma_{H_2O} = 61.03 + (0.9)(9.81) \Rightarrow p_{G(abs)} = 69.86 \left[\frac{KN}{m^2} \right]$$

$$p_{H(abs)} = p_{G(abs)} + h_{GH} \gamma_{Hg} = 69.86 + (0.1)(133.42) \Rightarrow p_{H(abs)} = 83.20 \left[\frac{KN}{m^2} \right]$$

$$\boxed{p_{man(abs)} = p_{I(abs)} = p_{H(abs)} = 83.20 \left[\frac{KN}{m^2} \right]}$$

4.- Propósito u objetivo: Con la deducción de las ecuaciones de medición de presiones.

Determinar la diferencia de presiones entre las cámaras A y B. De un manómetro diferencial esta acoplado entre dos depósitos tal como se muestra en la figura.



Solución:

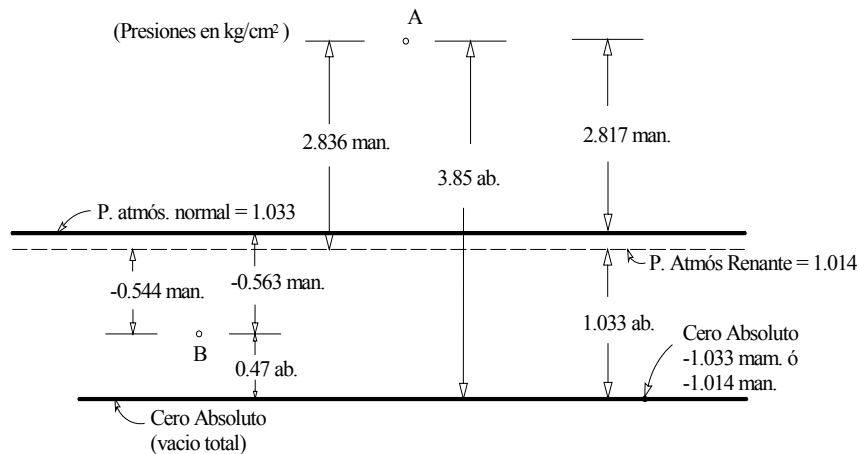
$$\gamma_{\text{mercurio}} = 132,8 \text{ kN} / \text{m}^3 \quad \gamma_{\text{ac.SAE30}} = 8,996 \text{ kN} / \text{m}^3$$

$$\gamma_{\text{tetracloruro.de.carbono}} = 15,57 \text{ kN} / \text{m}^3$$

$$p_A + (8,996)(1,1) + (132,8)(0,3) - (15,57)(0,8) = p_B$$

$$p_A - p_B = -37,28 \text{ kPa (es decir, } p_B > p_A)$$

5.- Propósito u objetivo: Preparar un grafico de forma que puedan compararse fácilmente las presiones manométricas (man.) y absolutas (abs.) con las limitaciones que se harán notar.



Solución:

Sea A un punto, a una presión absoluta de 3,85 kp/cm². La presión manométrica dependerá de la presión atmosférica reinante. Si tal presión es la atmosférica normal al nivel del mar (1,033 kp/cm²), la presión manométrica en A será:

$$P_{\text{man(A)}} = 3,850 - 1,033 = 2,817 \text{ kp/cm}^2$$

La lectura barométrica mas corriente equivale a una presión de 1,014 kp/cm², con lo que la presión manométrica obtenida seria $3,850 - 1,014 = 2,836 \text{ kp/cm}^2$ (man).

Sea B un punto a una presión absoluta de 0,47 kp/cm². Este valor viene representado gráficamente por debajo de la presión atmosférica normal 1,033 kp/cm², y la presión manométrica para B será:

$$P_{\text{man(B)}} = 0,470 - 1,033 = -0,563 \text{ kp/cm}^2(\text{man}).$$

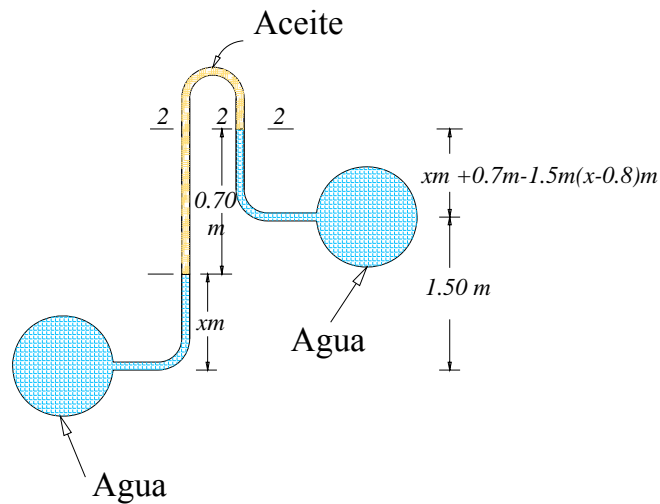
Si la presión atmosférica reinante es de 1,014 kp/cm², la presión manométrica para este valor será $0,470 - 1,014 = -0,544 \text{ kp/cm}^2$ (kp/cm²man).

Sea C un punto a una presión absoluta igual a cero. Esta condición es equivalente a una presión manométrica <<normal>> negativa de -1,033 kp/cm² y a una presión manométrica, representativa del valor más corriente, de -1,014 kp/cm².

Las conclusiones que se pueden sacar son importantes. Las presiones manométricas negativas no pueden exceder de un límite teórico de la presión manométrica reinante o del valor normal de 1,033 kp/cm². Las presiones absolutas no pueden tomar valores negativos.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Propósito u objetivo: Con la determinación de las ecuaciones de medición de presiones. Determinar la diferencia de presiones entre A y B para el sistema mostrado en la figura.

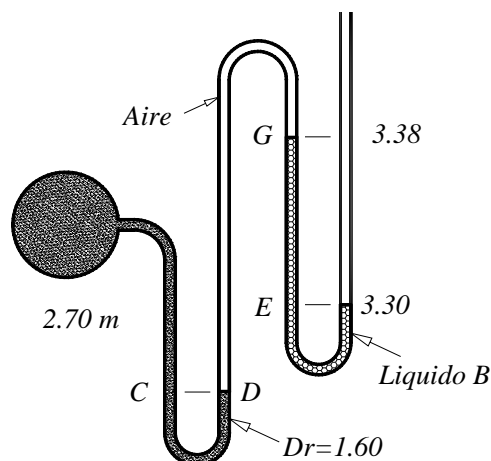


$$P_A - P_B = 13.3 \text{ Kpa}$$

Solución:

2.- Propósito u objetivo: Aplicar las ecuaciones de medición de presiones.

Encontrar la densidad relativa (Dr) del líquido manométrico del liquido B de la Figura. Para una presión manométrica en A de -10,89 kPa.

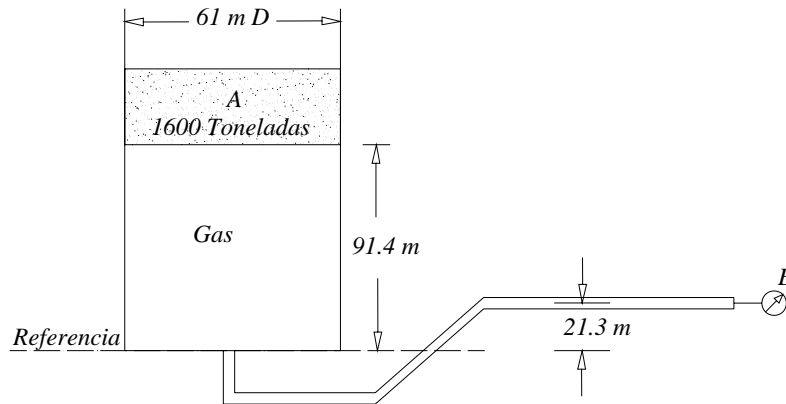


Solución:

$$Dr = 1,00$$

3.- Propósito u objetivo: Con la aplicación de las ecuaciones de medición de presiones.

Determinar la presión manométrica en B en cm de agua. Que se tiene como referencia la figura, despreciando el rozamiento entre el pistón A y el cilindro que contiene el gas, supóngase que el gas y el aire tiene pesos, específicos constantes e iguales, respectivamente, a 0.563 y 1.203 Kp/m³.

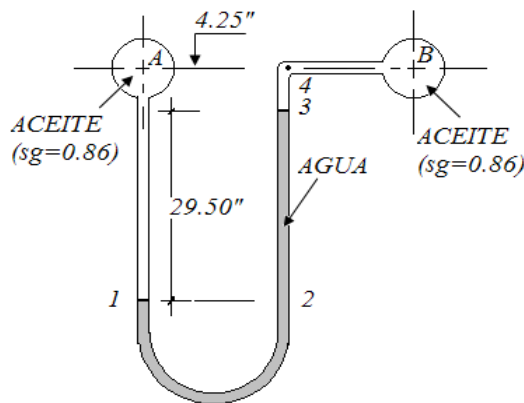


Solución.

$$p_{man} = 53,64 \text{ cm. de agua}$$

4.- Propósito u objetivo: Aplicar las ecuaciones deducidas de medición de presiones.

Calcule la presión en el punto B de la figura, si la presión en el punto A es de 22.4 lb/pulg² relativa. Este tipo de manómetro se conoce como manómetro diferencial debido a que indica la diferencia de presión entre los puntos A y B, pero no da el valor real en ninguno de los dos puntos.



Solución.-

$$p_B = 22.25 \text{ lb / pulg}^2 \text{ (relativa)}$$

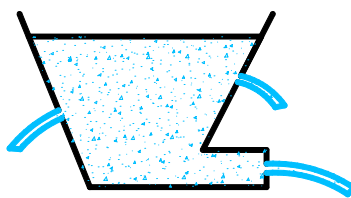
Capítulo 3:

FUERZA SOBRE SUPERFICIES SUMERGIDAS

1. INTRODUCCIÓN

Se debe calcular las fuerzas ejercidas por los fluidos con el fin de poder diseñar satisfactoriamente las estructuras que los contienen. En este capítulo se evaluarán las tres características de las fuerzas hidrostáticas, a saber módulo, dirección y sentido. Además se determinará también la localización de fuerzas.

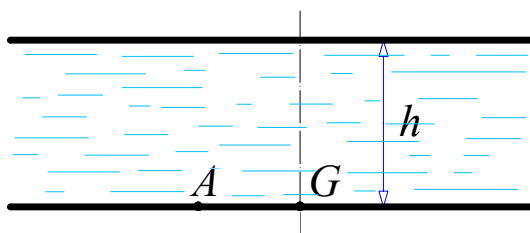
La presión en el seno de un líquido en reposo se ejerce siempre normalmente a la superficie, de tal modo que si tuviéramos un vaso que contiene un líquido y hacemos orificios en varios puntos del vaso, el líquido saldría en chorros cuyas direcciones son normales a las paredes (durante un corto trayecto por supuesto) en los puntos de salida (Fig. 3.1).



Fuente: Elaboración Propia

Fig. 3.1. Depósito cónico al cual se ha realizado diferentes perforaciones.

Supongamos que una superficie rectangular sumergida en el seno de un líquido, y a la que pondremos en diferentes posiciones con respecto a la superficie libre del líquido.



Fuente: Elaboración Propia

Fig. 3.2. Superficie plana colocada paralela con respecto a la superficie libre.

Primero la supondremos paralela a la superficie libre, sumergida a una profundidad h . La presión en todos los puntos de esa superficie es la misma, es decir, es uniforme. Para calcular el valor de

la presión es necesario conocer la profundidad h y el peso específico γ del líquido. Llamando A a un punto cualquiera de la superficie en cuestión, tenemos:

$$P_A = \gamma \cdot h \quad (1)$$

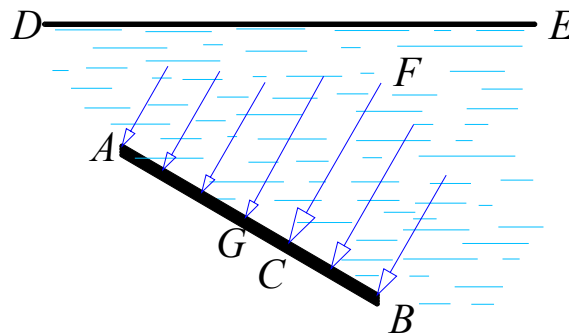
Para calcular la fuerza que obra sobre toda la superficie S (empuje del líquido sobre la superficie), que llamaremos F , tenemos:

$$F = \gamma * h * S \quad (2)$$

En la expresión anterior S es la superficie y debe tenerse cuidado de no confundir el empuje con la presión. Si la presión es uniforme sobre una superficie determinada, la resultante de las fuerzas que se están ejerciendo sobre cada punto es el empuje o fuerza total y pasa por el centro de gravedad de la superficie.

F se interpreta diciendo que "cuando la presión es uniforme sobre una superficie plana, el empuje tiene un valor igual a la intensidad de la presión en cualquier punto, multiplicado por la superficie". El empuje queda representado por un vector normal a la superficie, que pasa por el centro de gravedad de ésta.

Consideremos ahora una superficie pero inclinada con respecto a la superficie libre del líquido. Aquí la presión no es uniforme en todos los puntos de la superficie, sino que va variando siendo menor en A y aumentando hasta B (Fig. 3.3).



Fuente: Elaboración Propia

Fig. 3.3. Distribución de las fuerzas debida a una columna de líquido en una superficie plana inclinada

El empuje debe ser normal a la superficie y ya no pasa por el centro de gravedad de ésta sino más abajo porque la resultante del sistema de fuerzas paralelas formado por las distintas presiones estará cerca de las fuerzas de mayor intensidad. El punto por donde pasa el empuje que el líquido ejerce sobre la superficie se llama "centro de presión".

Para que quede determinado el empuje es necesario determinar primero su intensidad y enseguida la localización del centro de presión.

2. SUPERFICIE PLANA VERTICAL.

Como se menciono anteriormente, la presión varía en el sentido de la profundidad. A esta variación se denomina prisma de presiones. Si sobre una superficie vertical se tiene una compuerta de área A , se puede determinar la fuerza de presión que actúa sobre la misma.

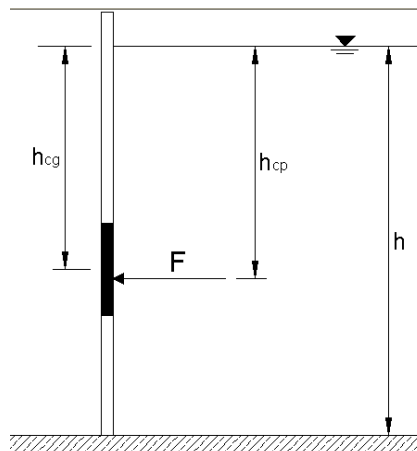
La fuerza resultante se define como la suma de las fuerzas que actúan sobre pequeños elementos del área de interés. La fuerza sobre la superficie vertical, es igual a la presión sobre dicha superficie, multiplicado por el área de la de la misma:

$$dF = p dA \quad \int dF = p \int dA$$

$$F = pA$$

$$F = \gamma h_{cg} A$$

(3)



[2] Fuente: Introducción a la Hidráulica - Ing. Marco Escobar Seleme (2004)

Fig. 3.4 Fuerza sobre superficie plana vertical

Donde:

h_{cg} ; es la distancia desde la superficie del liquido al centro de gravedad del área.

A ; área de la superficie.

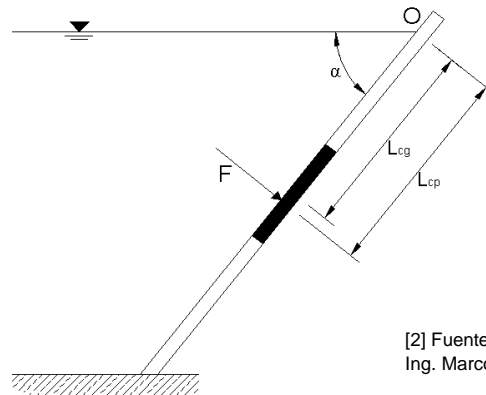
γ ; peso específico del fluido.

3. SUPERFICIE PLANA INCLINADA.

Sobre un área pequeña dA , existe una fuerza dF que actúa perpendicularmente al área debido a la presión del fluido, p .

$$dF = p dA = \gamma h dA$$

La variable h es la representación de la profundidad del fluido, por lo tanto se mide verticalmente con cero en la superficie del líquido y positivo hacia abajo. Se tomara el eje y en la misma dirección que la inclinación de la superficie.



[2] Fuente: Introducción a la Hidráulica - Ing. Marco Escobar Seleme (2004)

Fig. 3.5. Fuerza sobre superficie plana inclinada

Por lo tanto: $h = y \sin \alpha$

$$dF = \gamma \cdot y \cdot \sin \alpha \cdot dA$$

Integrando, la expresión anterior:

$$F = \int_A dF = \int_A \gamma y \sin \alpha dA = \gamma \sin \alpha \int_A y dA$$

$$\int_A y dA = L_{cg} A$$

Donde:

L_{cg} : Es la longitud inclinada desde el punto O hasta el centro de gravedad de la superficie.

Por lo que la fuerza resultante será:

$$F = \gamma \operatorname{sen} \alpha L_{cg} A$$

Por lo tanto: $h_{cg} = L_{cg} \operatorname{sen} \alpha$

$$\boxed{F = \gamma h_{cg} A} \quad (4)$$

El centro de presiones es aquel punto sobre un área en el que se puede suponer que actúa la fuerza resultante para tener el mismo efecto que la fuerza distribuida sobre el área entera representada por el prisma de presiones. Podemos expresar este efecto en términos del momento de una fuerza con respecto de un eje que pasa por el punto O, perpendicular al plano de la página.

El momento de cada pequeña fuerza, dF , con respecto al eje es:

$$dM = dF \cdot y$$

Se sabe que: $dF = \gamma y \operatorname{sen} \alpha dA$

$$dM = y [\gamma y \operatorname{sen} \alpha dA]$$

Integrando la ecuación previa, obtendremos el momento que produce la fuerza resultante, sobre la superficie.

$$M = \int \gamma y^2 \operatorname{sen} \alpha dA$$

El momento será la fuerza resultante multiplicando por la longitud de O hasta el centro de presiones L_{cp} .

$$F L_{cp} = \int \gamma y^2 \operatorname{sen} \alpha dA = \gamma \operatorname{sen} \alpha \int y^2 dA$$

La expresión $\int y^2 dA$ se define como el momento de inercia I del área completa respecto del eje desde el cual se mide y , entonces:

$$F L_{cp} = \gamma \operatorname{sen} \alpha I$$

$$L_{cp} = \frac{\gamma \operatorname{sen} \alpha I}{F}$$

$$L_{cp} = \frac{\gamma \operatorname{sen} \alpha I}{\gamma \operatorname{sen} \alpha L_{cg} A} = \frac{I}{L_{cg} A}$$

Se puede desarrollar una ecuación más conveniente mediante el uso del teorema de la transferencia para el momento de inercia de la mecánica.

$$I = I_{cg} + A L_{cg}^2 \quad (5)$$

Reemplazando en la ecuación del centro de presiones:

$$L_{cp} = \frac{I_{cg} + A L_{cg}^2}{L_{cg} A}$$

$$L_{cp} = \frac{I_{cg}}{L_{cg} A} + L_{cg} \quad (6)$$

Esta ecuación se usa para ambos casos, superficie plana vertical y superficie inclinada.

4. SUPERFICIE CURVA

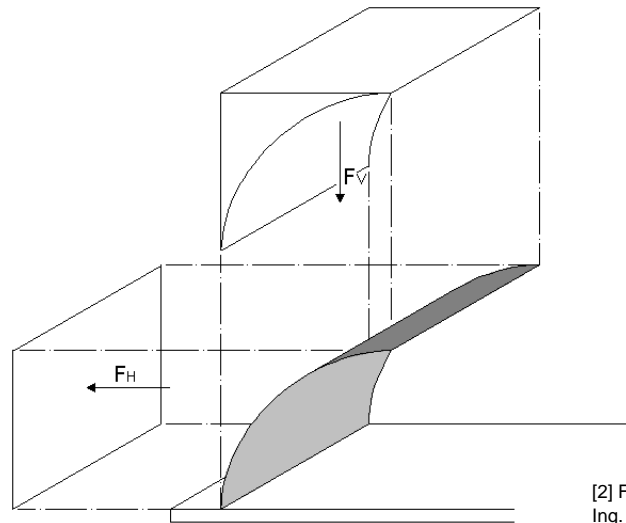
Para determinar la fuerza hidrostática en sobre una superficie curva, dividimos esta fuerza en dos componentes, F_H y F_V , fuerza horizontal y fuerza vertical respectivamente.

Para determinar la fuerza horizontal, hallaremos la fuerza sobre la proyección en el plano vertical de la superficie curva, que pasaría a ser una superficie plana vertical, y procedemos del mismo modo explicado en el aparte anterior de *superficie plana vertical*.

Para la fuerza vertical, la fuerza hidrostática será el peso del líquido que se encuentra sobre la superficie, es decir, el volumen que forma la superficie limitado por los contornos del mismo:

$$\boxed{F_V = \gamma \cdot V} \quad (7)$$

Donde: V; volumen



[2] Fuente: Introducción a la Hidráulica - Ing. Marco Escobar Seleme (2004)

Fig. 3.6. Fuerzas en superficies curvas.

Para determinar el centro del punto de aplicación de las dos fuerzas, horizontal y vertical, se resuelven las ecuaciones siguientes, siguiendo el mismo procedimiento, que el explicado para el caso de superficies rectas:

$$L_{cp(x)} F_H = \int_A y P dA \quad ; \quad L_{cp(y)} F_V = \int_A x P dA \quad (8)$$

Ver gráfica 2 (*Anexo*) para áreas e inercias para diferentes figuras geométricas.

5. APLICACIÓN DE LAS FUERZAS SOBRE SUPERFICIES.

Su aplicación se da en la determinación de las fuerzas ya sean horizontales o verticales que pueden actuar en el diseño de compuertas.

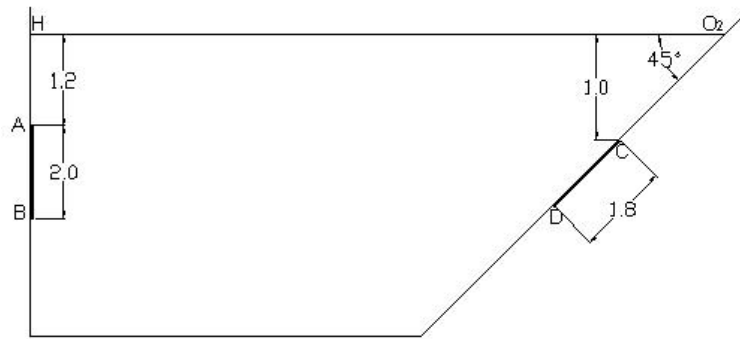
Con estas fuerzas generadas también se diseñan las compuertas de una represa, canales abiertos para riego o canales cerrados par agua potable, otros.

También se aplica para el diseño de dimensiones de orificios para un tanque de acuerdo a las fuerzas que ejercen los fluidos.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Propósito u objetivo: Determinar la fuerza aplicando los conceptos de estática de fluidos.

- a) Determinar la fuerza resultante F debido a la acción del agua sobre la superficie plana rectangular AB de medidas 1×2 [m]
- b) Determinar la fuerza resultante debido a la acción del agua sobre el área triangular CD de 1.2×1.8 [m] con c en el vértice del triángulo



Solución:

- a) Determinación de la fuerza sobre la compuerta AB :

$$F = \gamma h_{cg} A$$

Se determina las componentes de la ecuación previa.

$$A = b h = (1)(2) \Rightarrow A = 2 \text{ [m}^2\text{]}$$

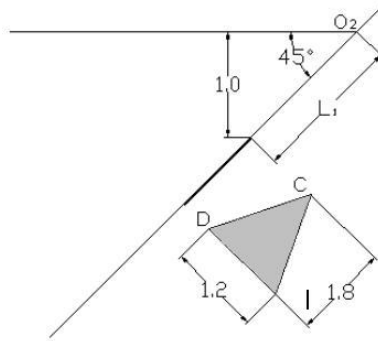
$$h_{cg} = 1.2 + \frac{h}{2} = 1.2 + 1 \Rightarrow h_{cg} = 2.2 \text{ [m]}$$

$$F = \gamma h_{cg} A = (9.81)(2.2)(2) \Rightarrow \boxed{F = 43.16 \text{ [KN]}}$$

Se debe hallar el centro de presiones:

$$h_{cp} = \frac{I_{cg}}{h_{cg} A} + h_{cg} = \frac{\frac{(1)(2)^3}{12}}{(2.2)(2)} + 2.2 \Rightarrow h_{cp} = 2.35 \text{ [m] desde } O_1.$$

b) Se hallar la longitud desde O_2 hasta el centro de gravedad de la compuerta.



$$L_1 = \frac{1}{\sin 45} = 1.41 \text{ [m]}$$

$$L_{cg} = 1.41 + \frac{2}{3} 1.8 = 2.61 \text{ [m]}$$

$$F = L_{cg} (\sin 45) \gamma A = (2.61) (\sin 45) (9.81) \left[\frac{(1.8)(1.2)}{2} \right]$$

$$\boxed{F = 19.55 \text{ [KN]}}$$

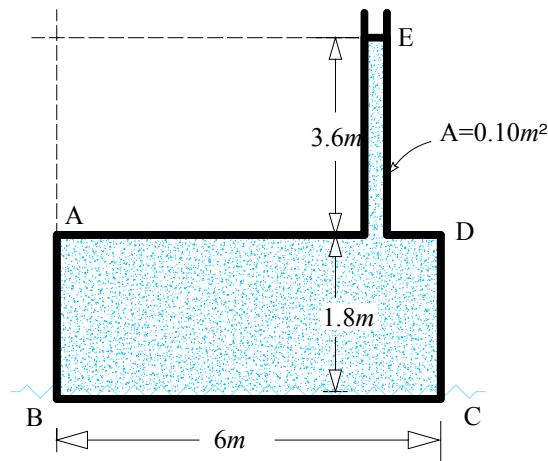
El punto de aplicación de la fuerza será:

$$L_{cp} = \frac{I_{cg}}{L_{cg} A} + L_{cg} = \frac{\frac{(1.2)(1.8)^3}{36}}{(2.61) \frac{(1.2)(1.8)}{2}} + 2.61 \Rightarrow L_{cp} = 2.68 \text{ [m]}$$

Comentario: Caso único para la determinación de fuerzas resultantes para el caso de compuertas.

2.- Propósito u objetivo: Con la aplicación apropiada de las formulas de estática. Situar y determinar la fuerza resultante y total.

Donde el agua alcanza el nivel E en la tubería unida al depósito ABCD que se muestra en la figura. Despreciando el peso del depósito y de la tubería de elevación, a) determinar y situar la fuerza resultante que actúa sobre el AB de 2,40 m de anchura, b) la fuerza total sobre el fondo del depósito y c) comparar el peso total del agua con la resultante obtenida en b) y explicar la diferencia.



Solución.

a) La profundidad del centro de gravedad de área AB, respecto de la superficie libre del agua en E, es de 4,50 m.

Por tanto: $F = \gamma \cdot h \cdot A = 1000(3,60 + 0,90)(1,80 \times 2,40) = 19,440 \text{ kp}$

Que actúa a la distancia: $L_{cp} = \frac{2,4(1,8^3)/12}{4,5(1,8 \times 2,4)} + 4,5 \Rightarrow \boxed{L_{cp} = 4,56 \text{ m de O}}$

b) La presión en el fondo BC es uniforme; por consiguiente la fuerza:

$$F = p_A = \gamma \cdot h \cdot A = 1000(5,40)(6 \times 2,40) \Rightarrow \boxed{P_A = 77,760 \text{ kp}}$$

El peso total del agua es $W = 1000(6 \times 1,8 \times 2,4 + 3,6 \times 0,10) \Rightarrow \boxed{W = 26,280 \text{ kp.}}$

El cuerpo libre constituido por la parte inferior del depósito (cortado por un plano horizontal justamente encima del nivel BC) pondrá de manifiesto una fuerza, dirigida hacia abajo, sobre el área BC de 77,760 kp, la fuerza vertical de tracción sobre las paredes del depósito y fuerza de reacción sobre el plano soporte. La reacción ha de ser igual al peso total del agua, es decir, 26,280 kp. La tracción en las paredes del depósito es producida por la fuerza vertical, dirigida hacia arriba, que actúa sobre la parte superior AD del depósito, que es igual

$$F_{AD} = \gamma \cdot h \cdot A = 1000(3,6)(14,4 - 0,1) = 51,480 \text{ kp hacia arriba}$$

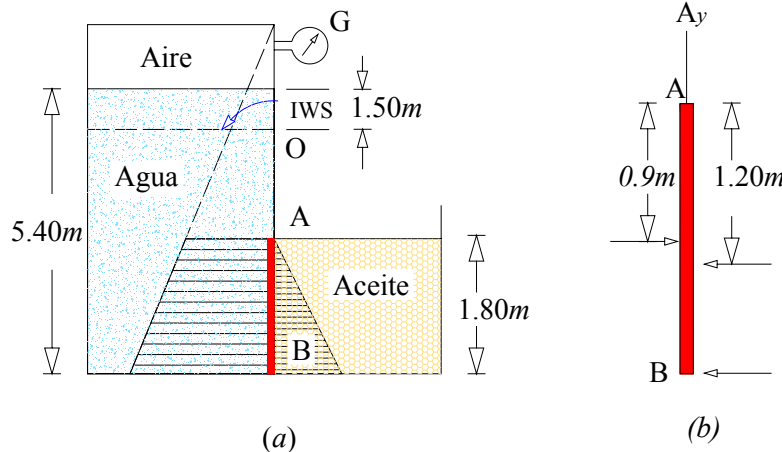
Comentario: Se ha aclarado así una aparente paradoja, pues el cuerpo libre considerado, la suma de las fuerzas verticales es igual a cero, es decir:

$$77,760 - 26,280 - 51,480 = 0$$

Con lo que se satisface la condición de equilibrio

3. Propósito u objetivo: Realizando la aplicación de conceptos de la estática y la fórmula deducida para la determinación del centro de presiones.

Determinar qué fuerza horizontal debe aplicarse en B para que la compuerta AB se mantenga en equilibrio. La compuerta AB de la figura (a) tiene 1,20 m de anchura y está articulada en A. La lectura manométrica en G es = 0,15 kp/cm² y el aceite que ocupa el depósito de la derecha tiene una densidad relativa de 0,750.



Solución:

Deben calcularse el valor de las fuerzas debidas a la acción de los líquidos y su posición. Para el lado derecho.

$$F_{ac} = \gamma \cdot h_{cg} \cdot A = (0,750 \times 1000)(0,9)(1,8 \times 1,2) = 1,460 \text{ kp hacia la izquierda}$$

$$L_{actua en} \quad L_{cp} = \frac{1,2(1,8^3)/12}{0,9(1,2 \times 1,8)} + 0,9$$

$$\boxed{L_{cp} = 1,2 \text{ m de A}}$$

Se observa que la presión que actúa sobre la parte derecha de la compuerta AB rectangular varia linealmente desde una presión manométrica nula hasta el valor que corresponde a los 1,80 m de aceite ($p = \gamma \cdot h$ es una ecuación lineal). El diagrama de cargas ABC pone de manifiesto este hecho. Solo para el caso de áreas rectangulares, el centro de gravedad de este diagrama de cargas coincide con el centro de presión. El centro de gravedad esta localizado a $(2/3)(1,8) = 1,2$ m de A, como ya se ha obtenido.

Para el lado izquierdo, es necesario convertir la presión negativa, debida al aire, en su equivalente en metros de agua.

$$h = -\frac{p}{\gamma} = -\frac{0,15 \times 10^4 \text{ kp/m}^2}{1.000 \text{ kp/m}^3} = -1,50 \text{ m}$$

Esta altura depresión negativa es equivalente a un descenso del nivel del agua de 1,50 m. Es útil y conveniente el empleo de una superficie de agua imaginaria (IWS: *Imaginary Water Surface*) 1,50 m por debajo de la superficie real y resolver el problema por aplicación directa de las ecuaciones fundamentales.

$F_{ag} = 1000(2,1 + 0,9)(1,8 \times 1,2) = 6,480 \text{ kp}$, que actúa hacia la derecha sobre el centro de presión.

Para el área rectangular sumergida, $L_{cp} = \frac{1,2(1,8^3)/12}{3(1,8 \times 1,2)} + 3 = 3,09 \text{ m de O}$ o bien el centro de presión esta a $(3,09 - 2,10) = 0,99$ m de A.

En la figura (b) se muestra el diagrama del cuerpo libre de la compuerta AB con las fuerzas actuantes. La suma de momentos con respecto de A debe ser igual a cero. Tomando como positivo el giro de las agujas del reloj.

$$+ 1,460 \times 1,2 + 1,8F - 6,480 \times 0,99 = 0$$

y

$$\boxed{F = 2,590 \text{ kp hacia la izquierda.}}$$

Comentario: Caso único para la solución del problema.

4.- Propósito u objetivo: Aplicar las formulas de fuerzas verticales y horizontales.

Para encontrar la fuerza resultante debido al agua, su inclinación con la vertical y la distancia desde O. En la figura se muestra la sección de una presa con una cara parabólica. El vértice de la parábola es en O.

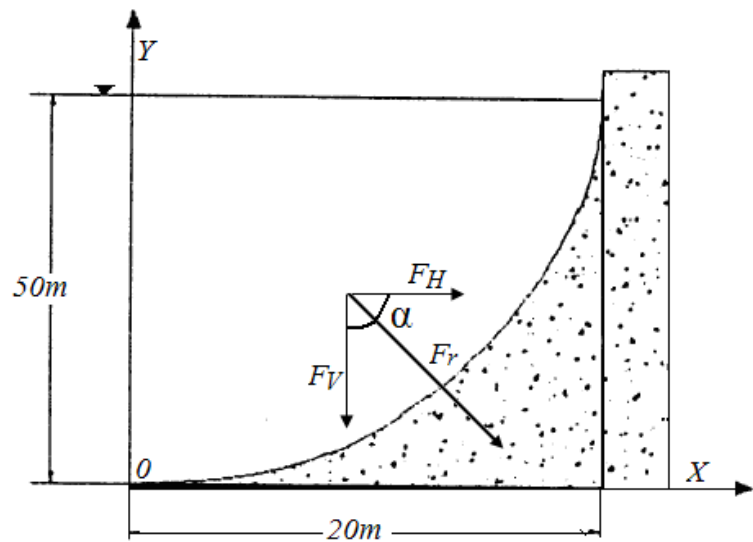
Solución.

Encontramos la curva que representa la presa:

$$y = ax^2 + b \quad \text{Con} \quad b = 0$$

$$50 = a(25)^2 \quad a = 0.08$$

$$y = 0.08x^2$$



Se tomara $D = 50[m]$ profundidad del agua con ancho unitario $W = 1[m]$

$$dF = \rho dA$$

Donde:

$$dF_x = PdA = PWdy = \gamma h W dy$$

$$dF_x = \gamma(D - y)Wdy$$

Integrando:

$$F_x = \int_0^{50} \gamma(D - y)Wdy = \gamma W \int_0^{50} (D - y)dy$$

$$F_x = \gamma \left[Dy - \frac{y^2}{2} \right]_0^{50} = (9.81) \left[(50)(50) - \frac{50^2}{2} \right] \quad F_x = 12262.5 [KN]$$

Fuerza vertical:

$$dF_y = PdA = PWdx = \gamma h Wdx = \gamma \gamma (D - y) Wdx$$

$$dF_y = \gamma (D - 0.08x^2) Wdx$$

Integrando:

$$F_y = \int_0^{25} \gamma (D - 0.08x^2) Wdx = \gamma W \int_0^{25} (D - 0.08x^2) dx$$

$$F_y = \gamma \left[Dx - 0.08 \frac{x^3}{3} \right]_0^{25} = (9.81) \left[(50)(25) - \frac{0.08(25)^3}{3} \right] \quad F_y = 8175 [KN]$$

Punto de aplicación:

$$x_{cp} dF_y = x P dA$$

Integrando:
$$x_{cp} F_y = \int_0^{25} \gamma (D - 0.08x^2) x W dx$$

$$x_{cp} = \frac{\gamma}{F_y} \int_0^{25} (Dx - 0.08x^3) dx$$

$$x_{cp} = \frac{\gamma}{F_y} \left[D \frac{x^2}{2} - 0.08 \frac{x^4}{4} \right]_0^{25} = \frac{9.81}{8175} \left[\frac{(50)(25)^2}{2} - \frac{(0.08)(25)^4}{4} \right]$$

$$x_{cp} = 9.38 [m] \quad \text{Desde O}$$

$$y_{cp} = \frac{I_{cg}}{y_{cg} A} + y_{cg} = \frac{(1)(50)^3}{(25)(50)} + 25$$

$$y_{cp} = 33.33[m]$$

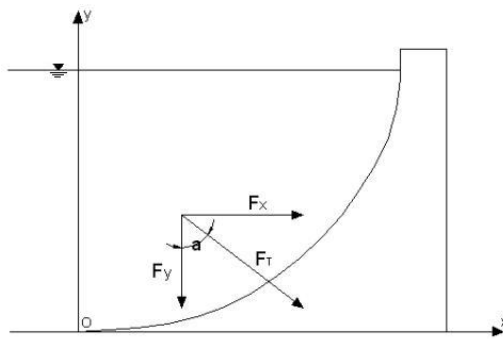
Desde la superficie del líquido.

$$F_T = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(12262.5)^2 + (8175)^2}$$

$$F_T = 14737.69[KN]$$

$$\tan(\alpha) = \frac{F_x}{F_y} = \frac{12262.5}{8175}$$

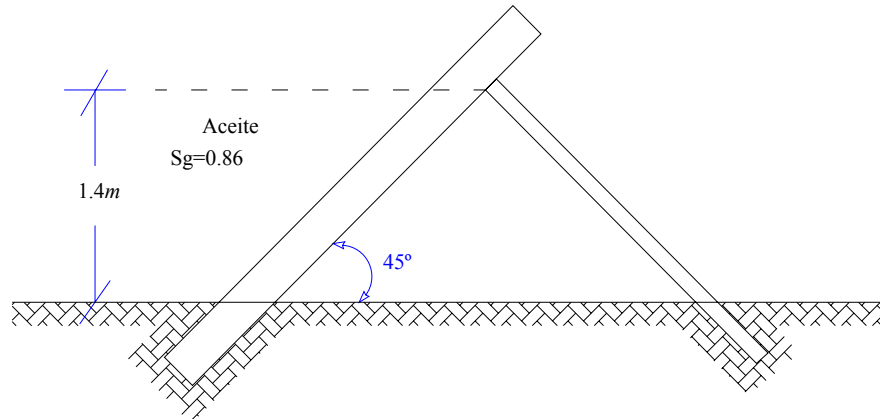
$$\alpha = 56.3^\circ$$



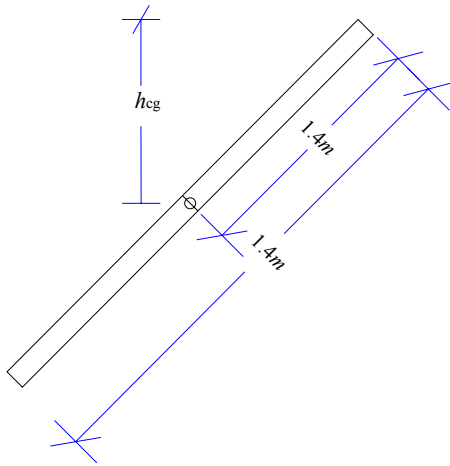
Comentario: Para cualquier problema donde se requiera determinar la inclinación de las fuerzas actuantes sobre una presa, este análisis será como caso único para poder solucionarlo.

5.- Propósito u objetivo: Aplicar las formulas de centro de gravedad y fuerzas desarrolladas en fuerzas sobre superficies.

Determinar la ubicación del centro de presión y mostrar la fuerza resultante sobre la pared. Si la pared de la figura tiene una longitud de 4 m, calcule además la fuerza total sobre la pared debida a la presión del aceite.



Solución:



$$c = \frac{1.4}{\sin 45^\circ} \Rightarrow c = 1.979\text{m}$$

$$d = \frac{1.979}{2} \Rightarrow d = 0.999\text{m}$$

$$h_{cg} = 0.7\text{m}$$

$$Y_{cg} = 0.999\text{m} = L_c$$

$$A = 1.4 * 4 \Rightarrow A = 5.6\text{m}^2$$

$$F = 0.86 * 9.81 * 0.7 * 5.6 \Rightarrow F_R = 33[\text{KN}]$$

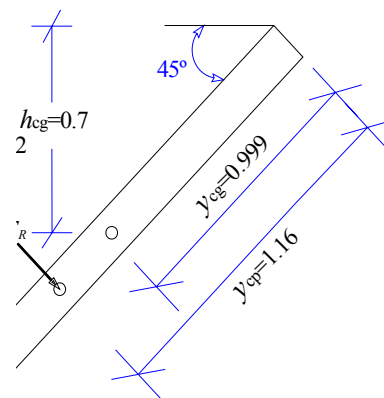
$$Y_{cp} = \frac{I_{cg}}{Y_{cg} A} + Y_{cg} \Rightarrow Y_{cp} = \frac{\frac{4 * 1.4^3}{12}}{0.999 * 5.6} + 0.999$$

$$Y_{cp} = L_p = 1.1624\text{m}$$

Se pueden calcular también

$$h_{cp} = 1.1624 * \sin 45^\circ$$

$$\boxed{h_{cp} = 0.82\text{m}}$$

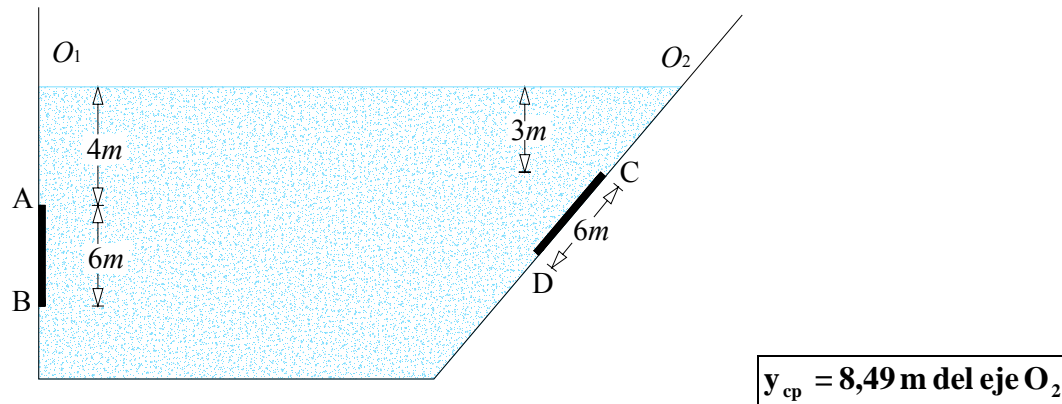


EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Propósito u objetivo: Aplicar los conceptos y formulas de fuerzas sobre superficies inclinadas.

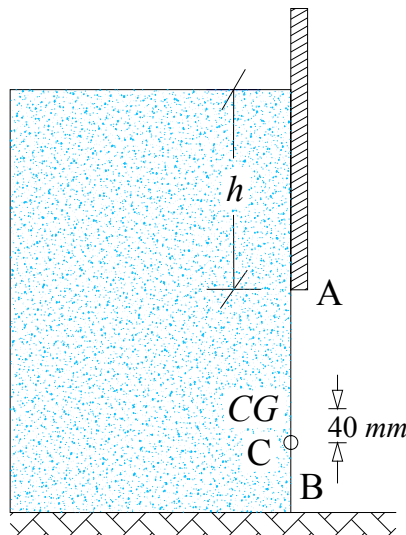
Determinar la fuerza resultante y el centro de presiones, debida a la acción del agua sobre el área triangular CD de 4m x 6m mostrada en la figura. C es un vértice del triángulo.

Solución:



2.- Propósito u objetivo: Aplicar la formula deducida de la superficie plana vertical.

Determinar hasta que altura h puede ascender el agua sin que se produzca un momento, no equilibrado respecto de C, en el sentido de las agujas de un reloj. Si la compuerta AB de 2 m de diámetro de la figura puede girar alrededor del eje horizontal C situado 40 mm por debajo del centro de gravedad.

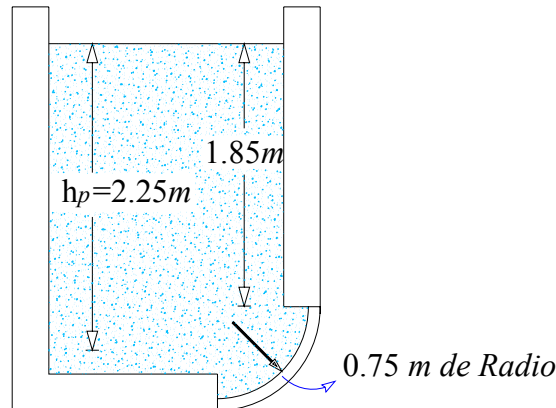


Solución:

$h = 5,25 \text{ m por encima de A.}$

3.- Propósito u objetivo: Se debe aplicar las formulas de fuerzas sobre superficies curvas.

Calcular la magnitud de la componente horizontal de la fuerza, y la componente vertical de la fuerza ejercida por el fluido en dicha superficie. Además calcular también la magnitud de la fuerza resultante y su dirección. Muestre la fuerza resultante que actúa sobre la superficie curva. Donde se muestra una superficie curva que retiene un cuerpo de fluido estático. La superficie de interés es una porción de un cilindro cuya longitud de superficie es de 2 m de longitud.



Solución:

$$F_H = 32,74 \text{ (KN)}$$

$$F_V = 8,28 \text{ (KN)}$$

$$F_R = 33,77 \text{ (KN)}$$

4.- Propósito u objetivo: Aplicar las formulas deducidas para superficies curvas.

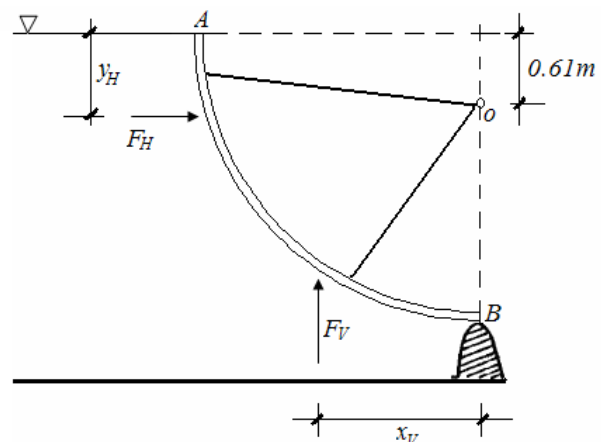
Determinar el momento no compensado respecto al eje de giro O, debido al agua, cuando esta alcanza el nivel mostrada en la figura, para una longitud de 2.44 de la compuerta, A.

Solución.

$$\Sigma M_0 = 0$$

$$6417.74(0.78) - 4085.66(0.61) = M_0$$

$$M_0 = 2513.58 \text{ Kp} \cdot \text{m}$$

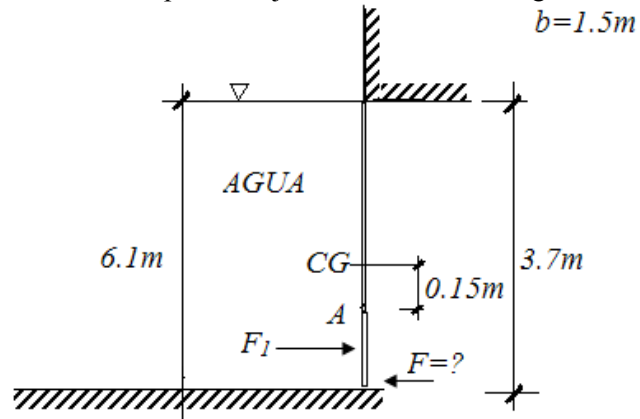


5.- Propósito u objetivo: Desarrollando los conceptos de fuerzas sobre superficie plana vertical, aplicar las formulas deducidas.

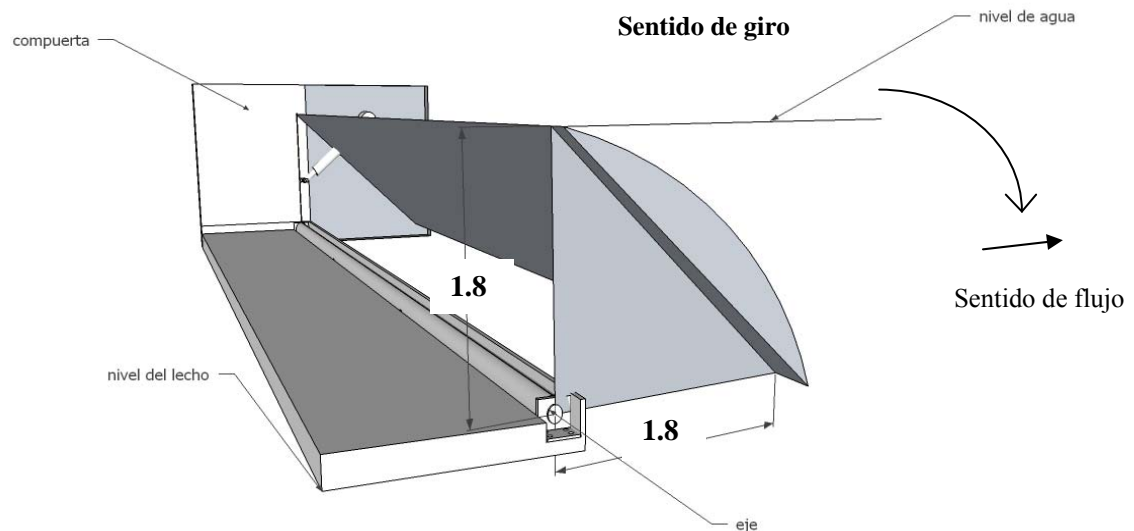
Determinar que fuerza horizontal F debe aplicarse a la parte inferior de la compuerta para que se mantenga en equilibrio. Si la compuerta vertical rectangular AB tiene 3.7 m de altura, 1.5 m de anchura y esta articulada en un punto 150 mm por debajo de su centro de gravedad. La profundidad total del agua es de 6.1 m.

Solución.

$$\boxed{F = 16.32 \text{ KN}}$$



6. Propósito u objetivo: En el diseño de una Central Hidroeléctrica de pasada, se debe considerar en el diseño del vertedero de excedencias la implementación de compuertas radiales, que tienen la finalidad de elevar el nivel de agua hasta la altura requerida para la generación de electricidad. Se desea saber cuál es el momento (torque) en el eje, para mantener la compuerta erguida en la etapa de generación.



Capítulo 4:

CUERPOS FLOTANTES Y FUERZA ASCENCIONAL

1. INTRODUCCIÓN

La fuerza ejercida por la presión sobre un cuerpo sumergido o flotante, se da por la presencia de diferencial de presiones en el sentido vertical, con la profundidad:

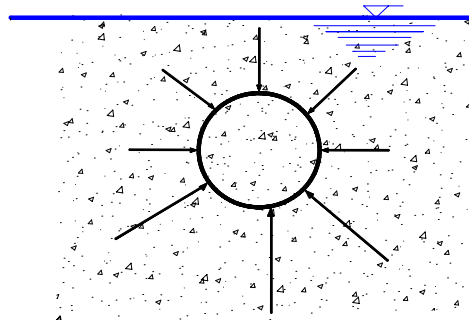
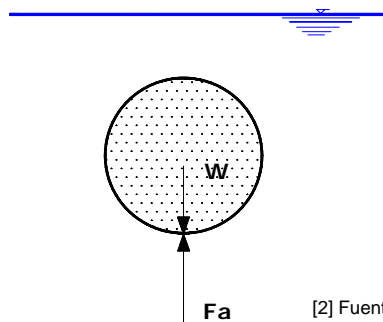


Fig. 4.1

[2] Fuente: Introducción a la Hidráulica – Ing. Escobar Seleme (2004)

En la figura (4.1) notamos que las fuerzas representadas en la parte inferior del cuerpo son mayores que los que se encuentran en la parte superior, esto debido a que la presión varía con la profundidad, no así horizontalmente. Si hacemos una sumatoria las fuerzas verticales tendríamos una fuerza vertical con sentido hacia arriba, esta fuerza se la denomina fuerza ascensional o empuje.

Por lo tanto la fuerza ascensional ejercida por el líquido sobre un cuerpo, en sentido vertical, es el volumen sumergido del sólido, multiplicado por el peso específico del líquido.



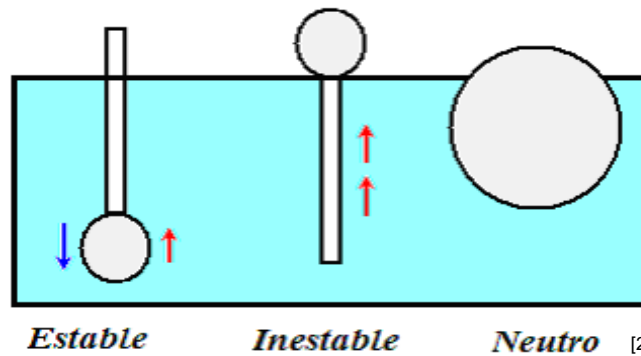
[2] Fuente: Introducción a la Hidráulica – Ing. Escobar Seleme (2004)

Fig. 4.2 Fuerza ascensional

$$Fa = \text{Fuerza ascensional: } Fa = V_{\text{sólido}} \gamma_{\text{fluido}}$$

$$W = \text{Peso del cuerpo.}$$

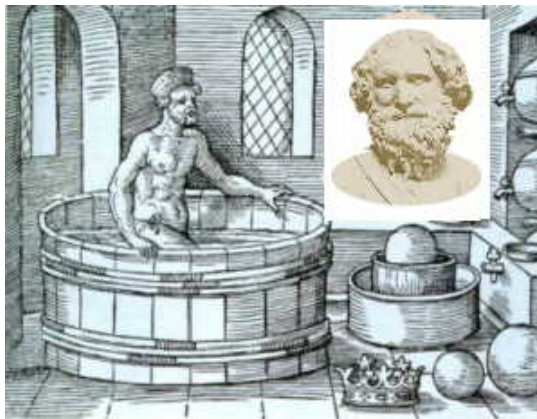
Un cuerpo puede flotar en equilibrio estable, inestable o neutro. Cuando un cuerpo se encuentra en equilibrio inestable, cualquier pequeño desplazamiento angular genera un par que tiende a incrementar dicho desplazamiento. Si el cuerpo se encuentra en estado neutral, cualquier pequeño desplazamiento angular no genera ningún par. Se ilustran los tres casos de equilibrio en la Fig. 4.3.



[2] Fuente: Introducción a la Hidráulica – Ing. Escobar Seleme (2004)

Fig. 4.3

2. PRINCIPIO DE ARQUIMIDES



"Un cuerpo total o parcialmente sumergido Experimenta una fuerza ascendente igual Al peso del líquido desplazado"

[2] Fuente: Hidráulica general – Ing. Escobar Seleme (2006)

El principio de Arquímedes viene siendo utilizado por el hombre desde hace unos 2200 años. El volumen de un sólido irregular puede determinarse midiendo la pérdida aparente de peso cuando se

introduce completamente en un líquido de densidad relativa conocida. La densidad relativa de los líquidos puede determinarse por la profundidad de inmersión de un hidrómetro. Otras aplicaciones comprenden la teoría general de la flotación y problemas de ingeniería naval.

Todo cuerpo, sumergido total o parcialmente en un líquido, sufre un empuje vertical hacia arriba igual al peso del líquido desplazado. El punto de aplicación de la fuerza de empuje ascensional se llama centro de empuje, coincide con el centro de gravedad del líquido desplazado.

Mediante el principio de Arquímedes, se pueden determinar los volúmenes de cuerpos irregulares, midiendo la pérdida aparente de peso cuando el sólido está totalmente sumergido en “n” líquido de densidad relativa conocida. También se pueden determinar las densidades relativas de líquidos por lectura de la profundidad a que se hunde un hidrómetro. Otras aplicaciones están relacionadas con los problemas generales de flotación o diseños de estructuras navales.

3. PROCEDIMIENTO PARA RESOLVER PROBLEMAS DE FLOTABILIDAD

- Dibujar un diagrama de cuerpo libre del objeto que se encuentre en el fluido, mostrando todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en la dirección vertical, incluyendo su peso, la fuerza boyante y las fuerzas externas.
- Escribir la ecuación del equilibrio estático en la dirección vertical, $\Sigma F_v = 0$, tomando como positivas todas las fuerzas en dirección hacia arriba.
- Resolver las ecuaciones para la fuerza, peso, volumen o peso específico, con las siguientes consideraciones:

$$F_b = \gamma_f V_d \quad \text{Fuerza boyante}$$

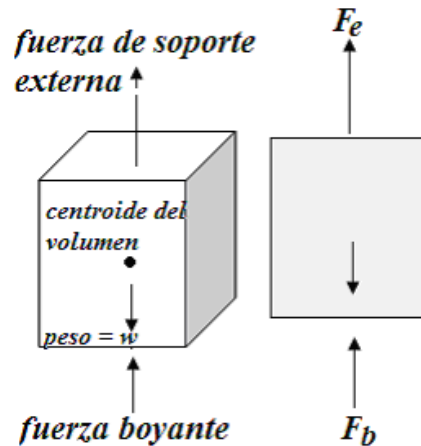
$$w = \gamma V$$

$$Si$$

$$w < F_b \quad \text{entonces el objeto tenderá a flotar}$$

$$w > F_b \quad \text{entonces el objeto tenderá a hundirse}$$

- La flotabilidad neutral se presenta cuando un cuerpo permanece en una posición dada en dondequiera que este sumergido en el fluido. Un objeto cuyo peso específico promedio sea igual al del fluido será neutralmente flotante.



[2] Fuente: Introducción a la Hidráulica – Ing. Escobar Seleme

Fig. 4.4

4. CONDICIONES DE EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS EN FLOTACION

El equilibrio de un cuerpo flotante se clasifica en tres tipos.

4.1. Equilibrio estable.

Cuando el par de fuerzas restauradoras devuelve el cuerpo a su posición original. Esto se produce cuando el cuerpo tiene mayor densidad en la parte inferior del mismo, de manera que el centro de gravedad se encuentra por debajo del centro de flotación.

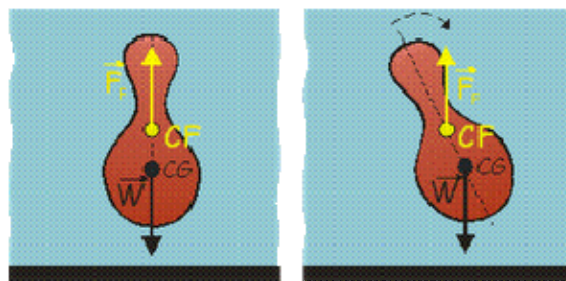


Fig. 4.5 (a)

[15] Fuente: www.oceanologia.ens.uabc.mx
(estabilidad de los cuerpos flotantes)

4.2. Equilibrio inestable.

Cuando el par de fuerzas tiende a aumentar el desplazamiento angular producido. Esto ocurre cuando el cuerpo tiene mayor densidad en la parte superior del cuerpo, de manera que el centro de gravedad se encuentra por encima del centro de flotación.

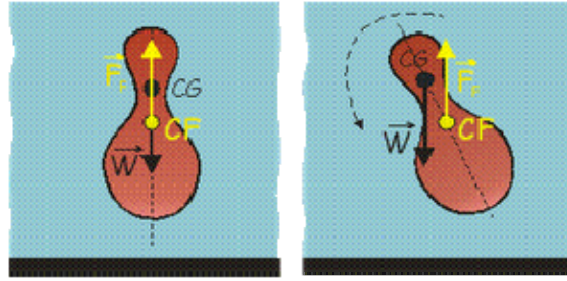


Fig. 4.5 (b)

[15]Fuente: www.oceanologia.ens.uabc.mx
(estabilidad de los cuerpos flotantes)

4.3. Equilibrio neutro.

Cuando no aparece ningún par de fuerzas restauradoras a pesar de haberse producido un desplazamiento angular. Podemos encontrar este tipo de equilibrio en cuerpos cuya distribución de masas es homogénea, de manera que el centro de gravedad y el centro de flotación coinciden.

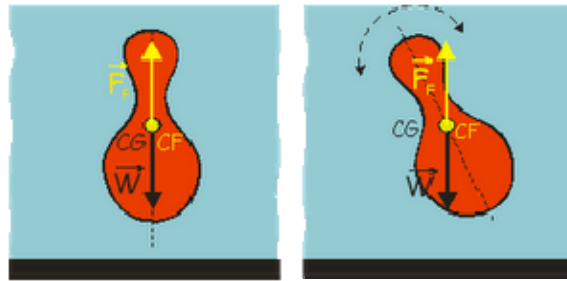


Fig. 4.5 (c)

[15]Fuente: www.oceanologia.ens.uabc.mx
(estabilidad de los cuerpos flotantes)

5. ESTABILIDAD DE CUERPOS FLOTANTES.

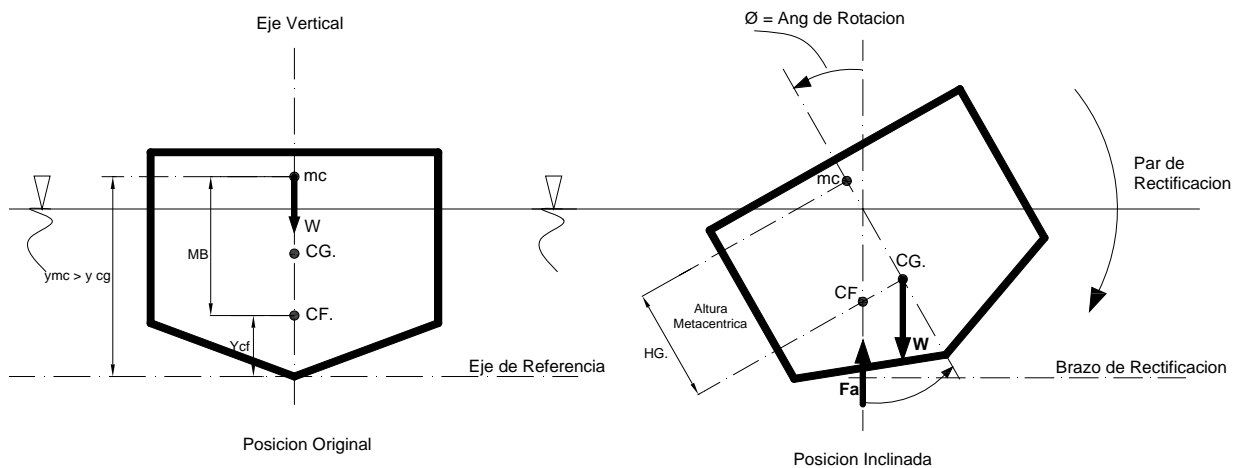


Fig. 4.6 Estabilidad de cuerpos flotantes

[2] Fuente: Introducción a la Hidráulica
– Ing. Escobar Seleme (2004)

mc = Metacentro, punto de intersección del eje vertical del cuerpo cuando se encuentra en equilibrio y la recta vertical que pasa por la nueva posición del C.F., cuando el cuerpo esta girando

Condición de equilibrio: un cuerpo flotante esta estable si su C.G. esta por debajo del metacentro.

Las condiciones de equilibrio de un cuerpo flotante se explican con claridad utilizando como ejemplo un barco (como mostrado en la figura 5) cuya superficie de flotación muestra una forma simétrica con un eje: Longitudinal y otro Transversal. La rotación alrededor del primer eje se conoce como balanceo, y del segundo, cabeceo.

En la posición de equilibrio (sin fuerzas ocasionales) sobre el barco actúa el peso W ejercido en el centro de gravedad G , además del empuje ascendente del líquido B que actúa en centro de flotación o de carena, G_1 . Ambas fuerzas son iguales, colineales y de sentido contrario.

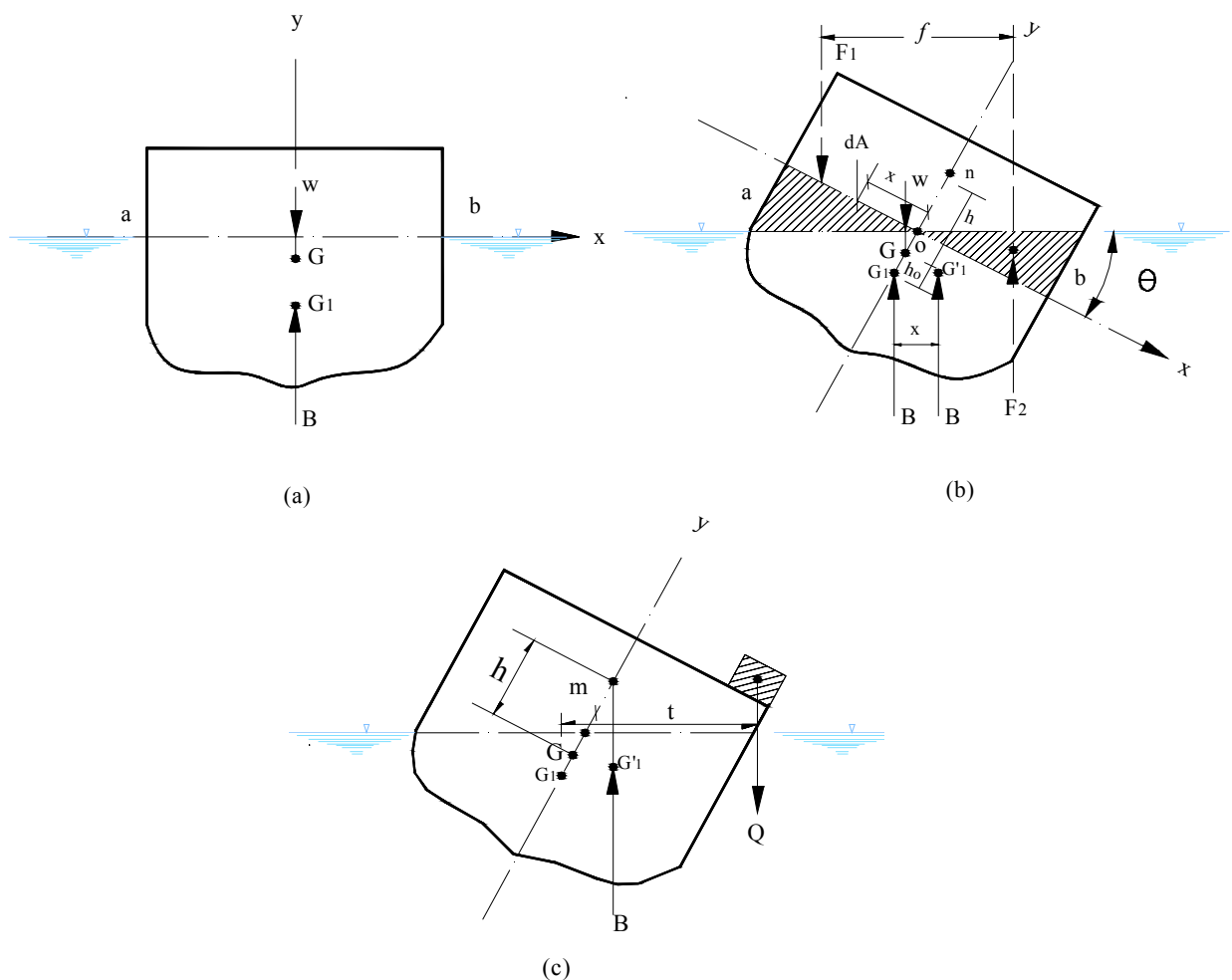


Fig. 4.7

Al producirse una fuerza ocasional el barco se inclina un ángulo θ y pasa a ocupar la posición mostrada en la figura.4.7 (b). el punto G_1 pasa ahora a la posición G'_1 .

Por efecto de las cuñas sombreadas una que se sumerge y otra que emerge por encima de la línea de flotación, se origina un movimiento producido por las fuerzas F_1 y F_2 . el empuje ascendente total B , en su nueva posición G'_1 , es la resultante de B en su posición original y las fuerzas $F_1 = F_2$ por efecto de las cuñas. El momento de la fuerza resultante con respecto a G_1 será igual a la suma algebraica de los momentos de sus componentes, por lo cual se cumple que:

$$n = \frac{F_1 \cdot f}{B} \gamma \quad (1)$$

Al elemento de volumen: $\gamma dA = x \tan \theta dA$, corresponde un momento de desequilibrio

$dM = \gamma x^2 dA \tan \theta$; el momento de la fuerza B con respecto a 0 es entonces:

$$F_1 \cdot f = \gamma \cdot \tan \theta \iint_A x^2 dA = \gamma \cdot \tan \theta \cdot I_z \quad (2)$$

Donde I_z representa el momento de inercia del area de la sección del Barco a nivel de la superficie de flotación $a \cdot b$ con respecto al eje longitudinal z del mismo que pasa por 0.

Substituyendo en la (ecuación 2) resulta que:

$$n = \frac{\gamma \cdot \tan \theta \cdot I_z}{B} \quad (3)$$

Además siendo $B = \gamma \cdot \mathcal{V}_0$ donde \mathcal{V}_0 es el volumen desplazado por barco, se obtiene:

El par de fuerzas B y W producen un momento $M_1 = W \cdot h \cdot \sin \theta$, que tratara de volver al barco a su posición original o de voltearlo mas, hasta hacerlo zozobra.

$$n = \frac{\tan \theta \cdot I_z}{\mathcal{V}_0} \quad (4)$$

Para predecir el comportamiento del barco es importante conocer la posición del punto m , de intersección de B en G_1 , con el eje y del barco inclinado; punto que se denomina *metacentro a la*

altura metacéntrica se indica con h . A medida que h aumenta es mas estable la flotación del cuerpo, es decir, mas rápidamente tratara de recobrar su posición original.

El equilibrio es estable si el punto m queda arriba del punto G ($h > 0$) y es inestable si m queda debajo de G ; por tanto, la estabilidad del barco exige que sea $h > 0$, esto es:

$$\begin{aligned} h &= \frac{n}{\text{sen}\theta} - h_0 \\ h &= \frac{\tan\theta \cdot I_z}{\text{sen}\theta \cdot \nu_0} - h_0 \\ \text{donde: } h &> 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Siendo θ pequeño, $\text{sen}\theta \approx \tan\theta$ y entonces:

$$\begin{aligned} h_0 &< \frac{n}{\text{sen}\theta} \\ h_0 &< \frac{I_z}{\nu_0} \end{aligned} \quad (6)$$

Las alturas metacentricas empleadas, en el diseño del barco son:

- para barcos de vela , 0.90 a 0.50 m ;
- para barcos de guerra , 0.75 a 1.30m ;
- para barcos cargueros , 0.60 a 0.90 m ;
- para barcos de pasajeros , 0.45 a 0.60 m .

el area de la superficie a nivel de la linea de flotacion vale:

$$A = \beta \cdot L \cdot B$$

Donde : B: ancho maximo del barco

L: Longitud maxima del barco

B: Coeficiente que para pontones varia entre 0.80 y 0.95, y, para la mayoria de los barcos cargueros de 0.75 y 0.85.

Cuando la inclinación del barco se debe a una carga asimétrica Q como se indica en la (figura 5c)

Cuya condición de equilibrio es con θ pequeña, se tiene que:

$$B \cdot h \cdot \theta = Q \times l \quad (7)$$

Y la altura metacéntrica vale:

$$h = \frac{Q \times l}{B \cdot \theta} \quad (8)$$

5.1 Procedimiento para la evaluación de estabilidad de cuerpos Flotantes.

- Determinar la posición del cuerpo flotante, utilizando los principios de la flotabilidad.
- Localizar el centro de flotabilidad, CF, y calcular la distancia desde algún eje de referencia a CE, “YCE”. Por lo general se toma el fondo del objeto como el eje de referencia.
- Localizar el centro de gravedad, CG, y calcular “YCG”, medida desde el mismo eje de referencia.
- Determinar la forma del área en la superficie del fluido y calcular el menor momento de inercia, “I”.
- Calcular $MB = I/V_d$
- Calcular $Y_{mc} = Y_{CF} + MB$
- Si $Y_{mc} > Y_{CG}$, el cuerpo es estable.
- Si $Y_{mc} < Y_{CG}$, el cuerpo es inestable.

Donde:

I ; inercia en el eje de rotación

V_d ; Volumen de fluido desalojado.

Las condiciones para la estabilidad de cuerpos en un fluido pueden resumirse en dos puntos:

- *Los cuerpos completamente sumergidos son estables si el centro de gravedad está por debajo del centro de flotabilidad.*
- *Los cuerpos que se encuentran flotando son estables si el centro de gravedad está por debajo del metacentro.*

6. CURVA DE ESTABILIDAD ESTÁTICA

Otra medida de la estabilidad de un objeto flotante es la cantidad de compensación entre la línea de acción del peso del objeto, que actúa a través del centro de gravedad, y la de la fuerza boyante, que actúa a través del centro de flotabilidad. Como se muestra (Fig. 4.7 (b)), el diagrama del casco de un bote en posición girada, en esta se representan el peso y la fuerza boyante. Una línea horizontal trazada a través del centro de gravedad intercepta a la línea de acción de la fuerza boyante en el punto H. La distancia horizontal, GH, se conoce como el brazo de rectificación y es una medida de la magnitud del par de rectificación. La distancia GH varía conforme cambia el ángulo de rotación; el la Fig. 4.8.

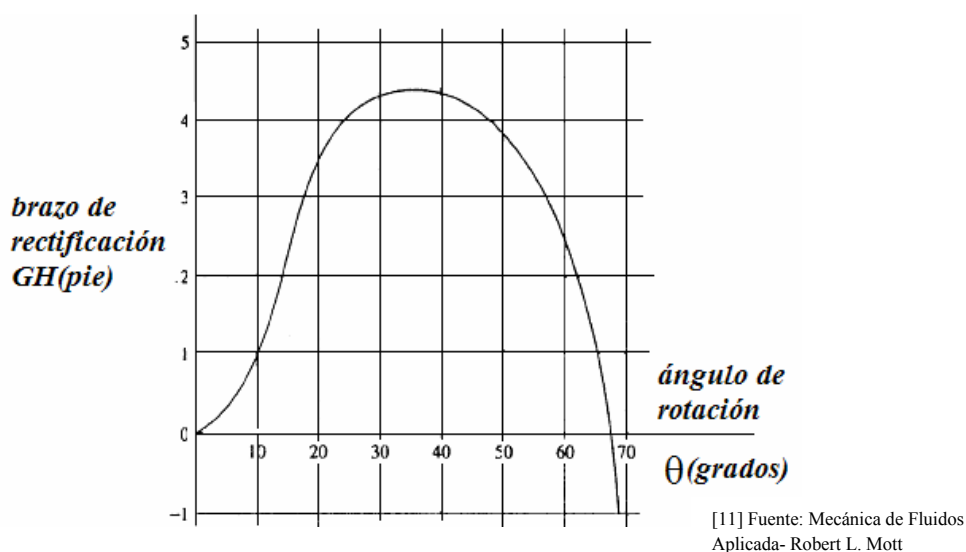


Fig. 4.8

Se muestra la figura (4.8) que relaciona este brazo con el ángulo de rotación, llamada **curva de estabilidad estática**. Siempre y cuando el valor de GH se mantenga positivo, la nave será estable. Al contrario, cuando GH se hace negativa, el barco es inestable y tendera a voltearse.

7. MASAS FLUIDAS SOMETIDAS A ACELERACIÓN CONSTANTE

Cuando a una masa fluida se le aplica una aceleración constante a , esta es adquirida por todas las partículas de dicha masa y por lo tanto no existe movimientos relativos entre estas. Una vez aplicada y mantenida permanentemente la aceleración, la masa adquiere un equilibrio relativo, por lo que puede ser analizada como un fluido en reposo.

Con relación al planteamiento general de la estática de fluidos (figura 2.2 (cap.2)), pero aplicando una aceleración al bloque de fluido obtenemos:

$$\text{Segun } X : \quad P_x \Delta_z - \left(P_x + \frac{\partial P_x}{\partial x} \Delta_x \right) \Delta_z = \rho \Delta_x \Delta_z a_x$$

$$\text{Segun } Z : \quad P_z \Delta_x - \left(P_z + \frac{\partial P_z}{\partial z} \Delta_z \right) \Delta_x - \gamma \Delta_z \Delta_x = \rho \Delta_x \Delta_z a_z$$

Llevando a un punto, es decir donde: $P_x = P_z$ (9)

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = \rho a_x = \frac{\gamma}{g} a_x} \quad (10)$$

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial z} = \rho a_z + \gamma = \frac{\gamma}{g} (a_z + g)} \quad (11)$$

Estas (ecuaciones 10 y 11) son para determinar la presión, sobre un fluido. El diferencial total de presión en función de sus derivadas parciales será:

$$\boxed{dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial z} dz} \quad (12)$$

Reemplazando 10 y 11 en 12

$$dP = -\frac{\gamma}{g} a_x dx - \frac{\gamma}{g} (a_z + g) dz$$

A lo largo de una línea de presión constante tenemos $dp = 0$

$$0 = -\frac{\gamma}{g} a_x dx - \frac{\gamma}{g} (a_z + g) dz$$

$$\frac{\gamma}{g} a_x dx = -\frac{\gamma}{g} (a_z + g) dz$$

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = -\frac{a_x}{a_z + g}} \quad (13)$$

Esta ecuación (13) viene a ser la pendiente de la recta de presión constante

7.1 EQUILIBRIO RELATIVO

En estática de fluidos la variación de la presión es simple de calcular, gracias a la ausencia de esfuerzos cortantes. En el movimiento de fluidos dado que ninguna capa se mueve con relación a capas adyacentes, el esfuerzo cortante también es cero en todo el fluido. Un fluido en traslación con velocidad uniforme sigue aun las leyes de la variación estática de la presión.

Cuando el líquido se acelera de tal forma que ninguna capa se mueve relativamente hacia una capa adyacente, es decir, cuando el fluido se mueve como si fuera un sólido, no ocurren esfuerzos cortantes y se puede determinar la variación de la presión planteando la ecuación de movimiento para un cuerpo libre apropiado.

Existen dos casos de interés, una aceleración lineal uniforme y una rotación uniforme alrededor de un eje vertical. Cuando se mueve de esta manera, se dice que el fluido se encuentra en *equilibrio relativo*.

7.2. Aceleración Lineal Constante.

Analizaremos los siguientes casos:

a) Si la aceleración tiene una sola componente vertical a_z .

La (ecuación 11) .como la aceleración no tiene la componente horizontal, es decir la aceleración horizontal es cero, las diferenciales parciales se las toma como totales.

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\gamma}{g}(a_z + g)$$

$$dP = \frac{\gamma}{g}(a_z + g)dz$$

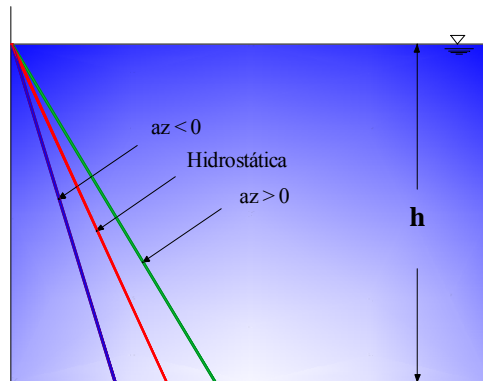
$$dP = \gamma dz + \frac{a_z}{g} \gamma dz$$

Esta ecuación es similar a la de los fluidos en reposo, solo que incluimos en ella la componente de la aceleración.

De la (ecuación 13)

$$\frac{dz}{dx} = 0$$

La superficie de presión constante es horizontal.



[2] Fuente: Introducción a la Hidráulica
– Ing. Escobar Seleme (2004)

Fig. 4.9 Aceleración Vertical

Cuando la aceleración es mayor que cero el fluido ira hacia arriba y cuando la aceleración es menor que 0 ira hacia abajo. Entonces si la aceleración vertical es positiva la presión hidrostática aumentara.

b) Si la aceleración tiene una, solo la componente horizontal a_x .

Para el caso de la componente horizontal:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\gamma}{g} a_x \quad (14)$$

Para el caso de la componente vertical:

$$-\frac{\partial P}{\partial z} = \gamma \quad (15)$$

La pendiente de la recta es presión constante:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{a_x}{g} \quad (16)$$

Las presiones en el sentido vertical tiene una distribución hidrostática, mientras que la presión en el sentido horizontal no es constante, las superficies de presión constante son rectas con pendiente.

$$m = -\frac{a_x}{g} \quad (17)$$

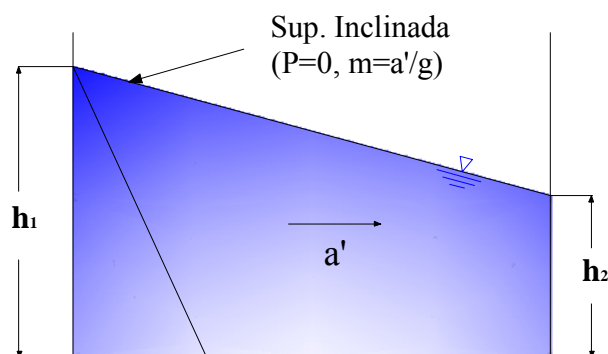
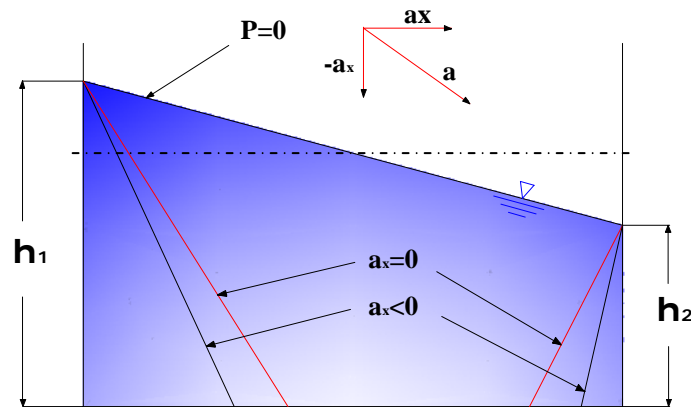


Fig. 4.10 Aceleración horizontal

[2] Fuente: Introducción a la Hidráulica
– Ing. Escobar Seleme (2004)

En el caso de que existan las dos componentes, se debe usar las ecuaciones (10).(11) y (13), como caso general.



[2] Fuente: Introducción a la Hidráulica
– Ing. Escobar Seleme (2004)

Fig. 4.11 Aceleración cualquiera

c) Velocidad angular constante.

Cuando una masa líquida se hace girar con una velocidad angular constante ω se introduce a cada una de sus partículas una aceleración centrípeta:

$$\boxed{a_c = \omega^2 r} \quad (18)$$

Donde r es la distancia de la partícula al eje de rotación.

De la ecuación (10) y (11)

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\gamma}{g} \omega^2 r} \quad (19)$$

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial z} = -\gamma} \quad (20)$$

Donde el eje x coincide con r , pero en sentido contrario y en tal forma que $az = 0$, el eje z coincide con el eje de rotación.

Por diferencial total:

$$\boxed{dP = \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{\partial P}{\partial z} dz} \quad (21)$$

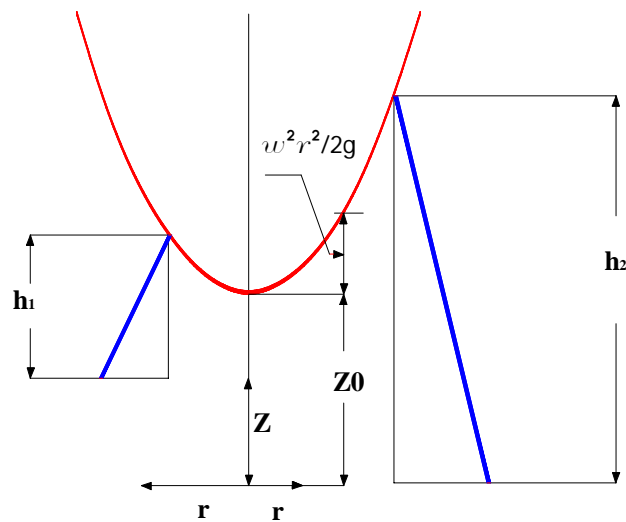
Sustituyendo (19) y (20) en (21)

$$dP = \frac{\gamma}{g} \omega^2 r dr - \gamma dz \quad dP = 0 \quad \frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

Integrando:

$$z - z_0 = \frac{\omega^2 r}{2g} (r^2 - r_0^2) \quad (22)$$

La ecuación (22) es la ecuación de una parábola.



[2] Fuente: Introducción a la Hidráulica
– Ing. Escobar Seleme (2004)

Fig. 4.12 Aceleración angular

8. APLICACIÓN DE LOS CUERPOS FLOTANTES

En este capítulo se calcula las diferentes estabilidades de los barcos u otros cuerpos, ya sea para guardar simetría tanto geométrica como dinámicamente al estar en el agua tranquila o inestable cuando está en movimiento el agua.

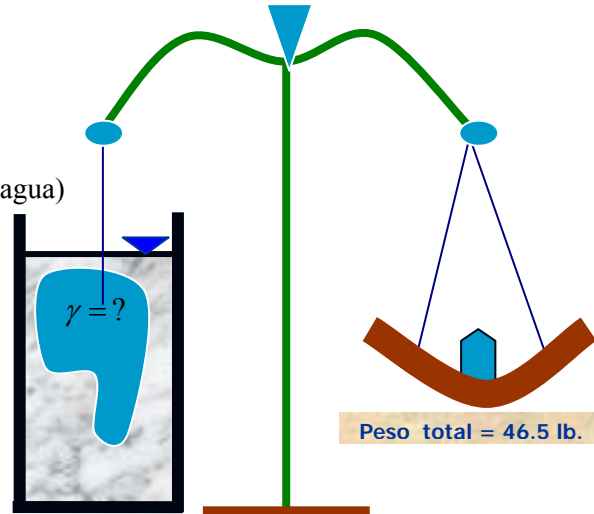
- Determinar en forma práctica las fuerzas de empuje generadas por un fluido sobre un cuerpo.
- Encontramos el principio de Arquímedes en forma experimental rápida y sencillamente.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Propósito u objetivo: Aplicando el concepto de flotabilidad, se pide calcular el peso específico para los siguientes datos:

$W = 60 \text{ lb.}$ (Medido en el aire)

$W_{\text{aparente}} = 46, \text{ lb.}$ (Medido en el agua)



Solución:

$$W = \gamma * V$$

$$\gamma_{H_2O} = 62.4 \frac{\text{lb.}}{\text{pie}^3}$$

Utilizando la ecuación $\sum F_v = 0$

$$F_a - W + F_e = 0$$

$$F_a = \gamma_f * V_d$$

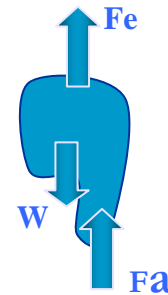
$$\gamma_f * V_d + F_e - W = 0$$

$$\gamma_f * V_d = W - F_e$$

$$V_d = \frac{W - F_e}{\gamma_f} = \frac{60 \text{ lb.} - 46.5 \text{ lb.}}{62.4 \frac{\text{lb.}}{\text{pie}^3}} = \frac{13.5}{62.4} = 0.216 \text{ pie}^3$$

Ahora :

$$\gamma_c = \frac{W_{\text{en el aire}}}{V_d} = \frac{60 \text{ lb.}}{0.216 \text{ pies}^3} \Rightarrow \boxed{\gamma_c = 278 \frac{\text{lb.}}{\text{pie}^3}}$$



2. Propósito u objetivo: Con los conceptos de estabilidad de cuerpos flotantes y la aplicación de las formulas deducidas.

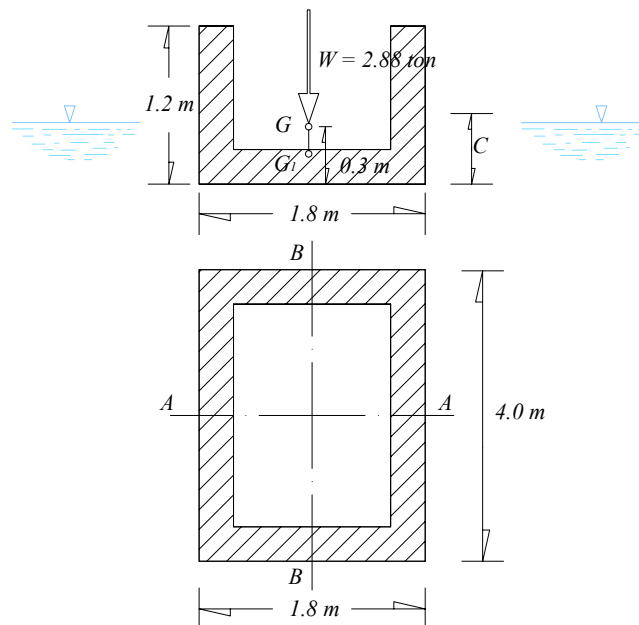
Estimar las condiciones de estabilidad del cajón cuyas dimensiones se indican en la figura: peso $W=2,88$ ton; altura del centro de gravedad, medida desde la base del cajón, $0,30$ m.

Solución:

Estabilidad respecto del eje A-A.

El momento de inercia del área de flotación respecto del eje A-A es:

$$I_A = \frac{1,8 \times 4^3}{12} = 9,6 m^4$$



Cajón Flotante

Y la profundidad de flotación:

$$c = \frac{W}{\gamma A} = \frac{2,88}{1 \times 1,8 \times 4} = 0,4 m$$

La distancia entre el centro de gravedad G (del cajón) y el centro de flotación, vale

$$h_0 = 0,3 - 0,2 = 0,10m$$

La altura metacéntrica según la ecuación es:

$$h = \frac{9,6}{2,88} - 0,10 = 3,23m > 0$$

Esto es, el cajón es estable por lo que se refiere al volteo alrededor del eje transversal.

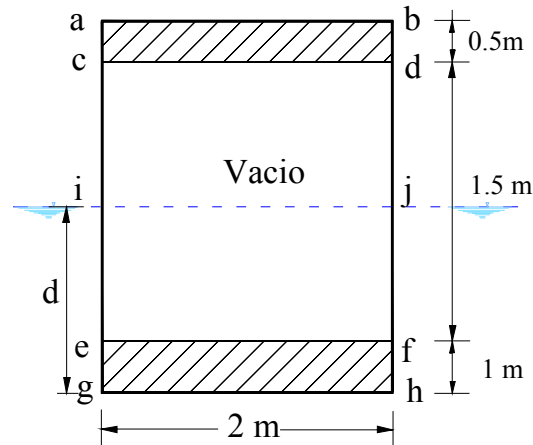
Estabilidad respecto del eje B-B

$$I_A = \frac{4 \times 1,8^3}{12} = 1,94m^4$$

$$h_B = \frac{1,94}{2,88} - 0,10 \Rightarrow \boxed{h_B = 0,57m > 0} \quad (\text{También es estable})$$

3. Propósito u objetivo: Aplicar los conceptos de estabilidad de cuerpos flotantes y las formulas deducidas de fuerza y centro de presiones.

Para un cuerpo hecho de dos trozos de madera pesada ($\gamma = 1150 \text{ kg/m}^3$) flota en un líquido de $D_r = 0,93$ tal como se muestra en la figura. Se desea calcular la profundidad de hundimiento del cuerpo en el líquido. Considere una unidad de ancho.



Solución:

Calculo del centro de gravedad CG del cuerpo:

- Taco superior de madera (abcd):

$$F = V \gamma_m = (0,5)(2)(1)(1150)$$

$$F = 1150 \text{ Kg.}$$

$$M_{ab} = FB = (1150)(0,25)$$

$$M_{ab} = 287,5 \text{ kg.m}$$

- Taco inferior de madera (efgh):

$$F = V \gamma_m = (1)(2)(1)(1150)$$

$$F = 2300 \text{ Kg.}$$

$$M_{ab} = FB = (2300)(2,5)$$

$$M_{ab} = 5750 \text{ kg.m}$$

La posición de l centro de gravedad de todo el sistema será:

Horizontalmente estará sobre el eje de simetría.

Verticalmente:

$$y_{cg} = \frac{5750 + 287,5}{2300 + 1150}$$

$$y_{cg} = 1,75 \text{ m de ab.}$$

El centro de flotación estará en el centro de gravedad del volumen (gijh):

Horizontalmente estará sobre el eje de simetría del sistema.

Verticalmente:

$$F_a = V_{gijh} \gamma = d(2)(0,93)(1000) \qquad F_a = 1860 d$$

Donde: F_a ; fuerza ascensional.

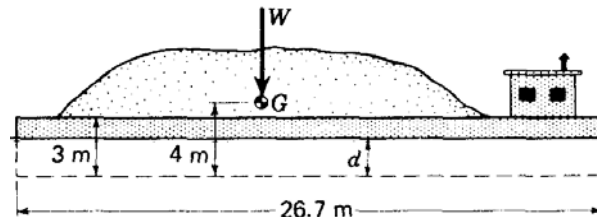
La fuerza ascensional debe ser igual al peso del cuerpo, para que el sistema se mantenga estático.

$$\begin{aligned} F_a &= W_{cuerpo} \\ 1860d &= 2300 + 1150 \\ d &= 1,85 m \end{aligned}$$

$$y_{cf} = 3 - \frac{1,85}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_{cf} = 2,075 m \text{ de ab.}}$$

Lo cual indica que el cuerpo flota con estabilidad por que el CF esta por debajo del CG.

4. Propósito u objetivo: Con las condiciones de equilibrio de estabilidad de los cuerpos flotantes y el concepto del Principio de Arquímedes. Se pide determinar la altura metacéntrica para una rotación alrededor del eje central más largo y determine si la barcaza es o no estable. Si la barcaza rota 10° alrededor de este eje, también se pide cual es el momento restaurador de la barcaza que se muestra en la figura que tiene la forma de un paralelepípedo rectangular con dimensiones de 10 m por 26.7 m Por 3 m. Cuando la barcaza esta cargada pesa 4,450 kN y su centro de gravedad se localiza a 4 m a partir del fondo.



Solución.-

Primero debe encontrarse el centro de boyamiento de la barcaza. Ésta desplaza un volumen de fluido que tiene una sección transversal rectangular de 10 m por 26.7 m y una profundidad d que se determina utilizando el principio de

Arquímedes. Luego,

$$[(10)(26.7)d](9806) = W = 4450 \times 10^3$$

$$d = 1.700 \text{ m}$$

El centro de boyamiento se localiza a una distancia de $1.700/2$ m por encima del fondo de la barcaza. La distancia l, necesaria para la ecuación (3.30), es entonces

$$l = 4 - (1.700/2) = 3.15 \text{ m}$$

Por consiguiente, la altura metacéntrica MG es

$$\overline{MG} = \frac{(9806) \left[\left(\frac{1}{12} \right) (26.7)(10^3) \right]}{(4450)(1000)} - 3.15 = 1.753 \text{ m}$$

Esto último significa que la barcaza es estable.

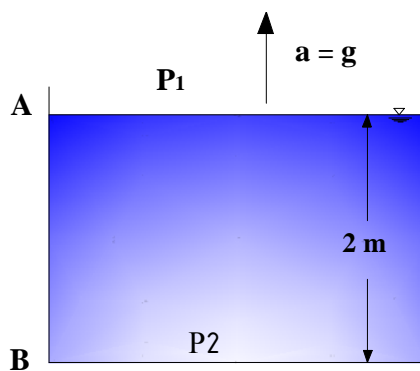
El momento restaurador para una rotación de $10''$ está dado por la siguiente ecuación;

$$C = \gamma \Delta \theta I_{yy} = (9806) \left(\frac{10}{360} \right) (2\pi) \frac{(26,7)(10^3)}{12}$$

$$C = 3808 \text{ kN/m}$$

5. Propósito u objetivo: Aplicar los conceptos de la aceleración lineal constante. Para determinar la fuerza sobre la cara AB, si el mismo cubo se aplica la aceleración indicada en el sentido horizontal, también se pide determinar qué cantidad de agua se vota. Repita el problema para el caso que la aceleración sea inclinada a 45° hacia arriba. Teniendo un cubo de lado 2 m , abierto en la parte superior y completamente lleno de agua ,se somete a una aceleración, como se indica en la figura.

Solución:



$$-\frac{dP}{dz} = \frac{\gamma}{g}(a_z + g)$$

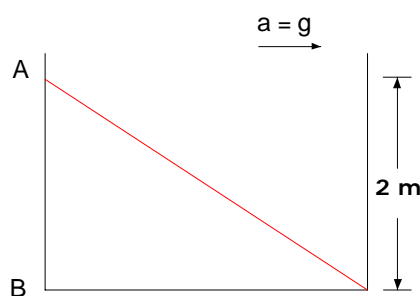
$$\int_1^2 dP = \int_1^2 \frac{\gamma}{g}(a_z + g) dz$$

$$P_2 - P_1 = \frac{\gamma}{g}(a_z + g)(z_1 - z_2)$$

$$P = \frac{\gamma}{g}(a_z + g)h$$

$$P = \frac{\gamma}{g}(2g)h = 2\gamma h = 2(9810)(2) \Rightarrow P = 39,24 \text{ KN/m}^2$$

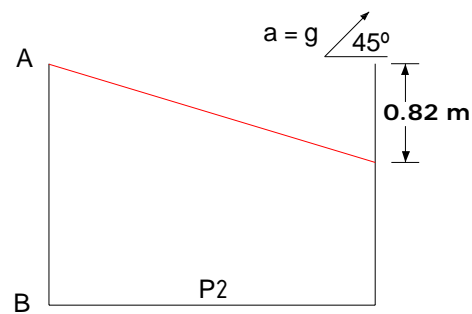
$$F = PA = (39,24)(2)(2) \Rightarrow FR = 156,96 \text{ [KN]}$$



$$\frac{dz}{dx} = -\frac{a_x}{g} = -\frac{g}{g} = -1$$

El volumen de agua que se vota sera :

$$V = \frac{1}{2} b \cdot h \cdot L = \frac{1}{2} (2)(2)(2) \Rightarrow V = 4 \text{ [m}^3\text{]}$$



$$a_x = a \cdot \cos 45^\circ = 6,94 \text{ m/s}^2$$

$$a_x = a \cdot \sin 45^\circ = 6,94 \text{ m/s}^2$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{a_x}{a_y + g} = -\frac{6,94}{6,94 + 9,81}$$

$$\frac{dz}{dx} = -0,41$$

$$\text{Para } x = 1\text{m} \Rightarrow z = -0,41 \text{ m}$$

$$\text{Para } x = 2\text{m} \Rightarrow z = -0,82 \text{ m}$$

Volumen derramasdo :

$$V = \frac{1}{2}(2)(0,82)(2)$$

$$V = 1,64[\text{m}^3]$$

Determinacion de la fuerza sobre la pared :

$$-\frac{dP}{dz} = \frac{\gamma}{g}(a_z + g)$$

$$P = \frac{\gamma}{g}(a_z + g)h = \frac{9810}{9,81}(6,94 + 9,81)(2)$$

$$P = 33500[_\text{N/m}^2]$$

$$F = P A = (33,50)(2)(2)$$

$$F = 134 [\text{KN}]$$

6.- Propósito u objetivo: Con las ecuaciones de velocidad angular. Determinar las presiones en A y B cuando el recipiente mostrado en la figura gira a 50 rpm para los casos siguientes.

a) El eje de rotación pasa por A

b) El eje de rotación pasa por B

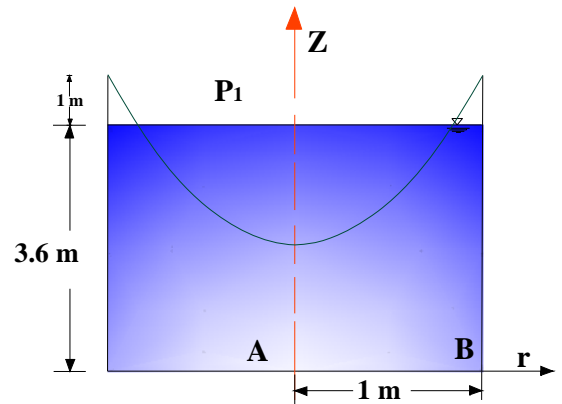
Solución:

$$\omega = 50 \text{ rpm} \left(\frac{2\pi}{60} \right) \Rightarrow \omega = 5.23 \text{ rad/s}$$

$$a) \quad z - z_0 = \frac{\omega^2}{2g} (r^2 - r_0^2)$$

$$z_0 = z - \frac{\omega^2}{2g} (r^2 - r_0^2) = 4.6 - \frac{5.23^2}{(2)(9.81)} (1 - 0)$$

$$z_0 = 3.21 \text{ m}$$



$$P_A = \gamma \cdot z_0 = (9.81)(3.21) \Rightarrow P_A = 31.5 \text{ KN/m}^2$$

$$P_B = \gamma \cdot z_0 = (9.81)(4.6) \Rightarrow P_B = 45.1 \text{ KN/m}^2$$

$$z - z_0 = \frac{\omega^2}{2g} (r^2 - r_0^2)$$

$$z_0 = z - \frac{\omega^2}{2g} (r^2 - r_0^2) = 4.6 - \frac{5.23^2}{(2)(9.81)} (2^2 - 0)$$

$$z_0 = -0.97 \text{ m}$$

$$p_B = 0$$

$$z_A = z_0 - \frac{\omega^2}{2g} (r^2 - r_0^2) = -0.97 + \frac{5.23^2}{(2)(9.81)} (1 - 0)$$

$$z_A = 0.42 \text{ m}$$

$$P_A = \gamma \cdot z_A = (9.81)(0.42) \Rightarrow$$

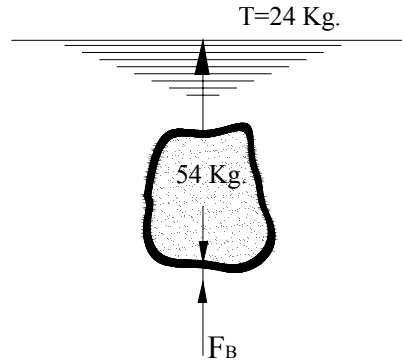
$$P_A = 4.12 \text{ KN/m}^2$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Propósito u objetivo: Aplicar los conceptos generales de la estática de fluidos y las condiciones de equilibrio de cuerpos sumergidos. Para una piedra que pesa 54 kg en el aire y 24 kg. Cuando esta sumergido en el agua. Calcular el volumen y la densidad relativa de la piedra.

Solución:

$$v = 0,024 \text{ m}^3$$



$\text{Densidad relativa} = \frac{\text{peso de la piedra}}{\text{peso de un volumen igual de agua}} = 2,25$
--

2.- Propósito u objetivo: Aplicar los conceptos de generales de la estática y flotabilidad. Determine qué fracción de volumen de una pieza sólida de metal de densidad relativa 7,25 flotara sobre la superficie del mercurio, de densidad relativa 13,57, contenido en un recipiente.

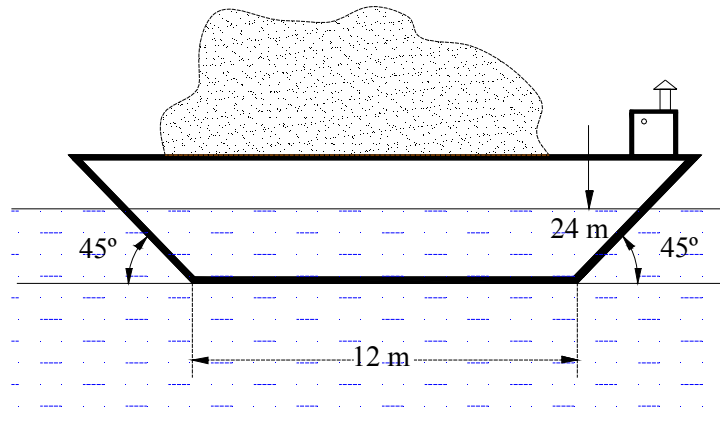
Solución:

Hallar la relación de los volúmenes v'/v

$\text{De aquí la fracción del volumen sobre el mercurio} = 1 - v'/v = 0,466.$
--

3.- Propósito u objetivo: Aplicar las condiciones de equilibrio de los cuerpos flotantes.

Para calcular el peso total de la barcaza y de su carga. Verificar si el cuerpo es estable o inestable. La barcaza tiene 6 m de ancho.

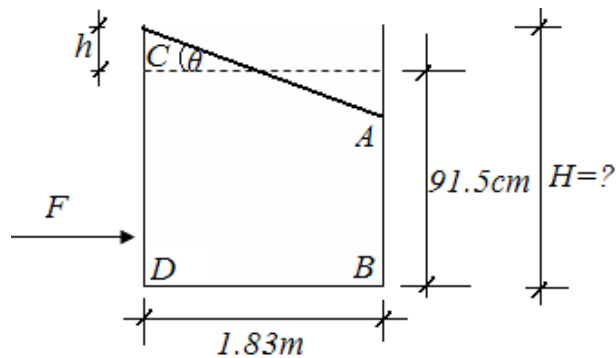


4.- Propósito u objetivo: Con las ecuaciones de la aceleración lineal constante determine:

a) ¿Cuál debe ser la altura de las paredes del depósito para que no se derrame el agua?

b) ¿Qué valor tiene la fuerza que actúa sobre la pared donde la profundidad es mayor?

Para un depósito abierto de sección cuadrada de 1.83m de lado tiene una masa de 349,6 kp y contiene 91,5 cm de agua. Esta sometido a la acción de una fuerza no equilibrada de 1057,8 kp, paralela a uno de los lados.



Solución

$$h=0,283m$$

$$a) H=h+0,915m=1,198m$$

$$b) F_{CD} = 1313,21kp$$

5.- Propósito u objetivo: Aplicar los conceptos de Aceleración Lineal para que se pueda calcular las presiones en Kp/cm², en los puntos C y D de la figura. Que tiene un depósito cilíndrico cerrado, de 2m de altura y 1 m de diámetro, contiene 1.5 m de agua. El aire sobre la superficie libre se encuentra a una presión de 1.09 kp/cm². Si el cilindro gira alrededor de su eje geométrico a una velocidad angular de 12.0 rad/s.

Solución.

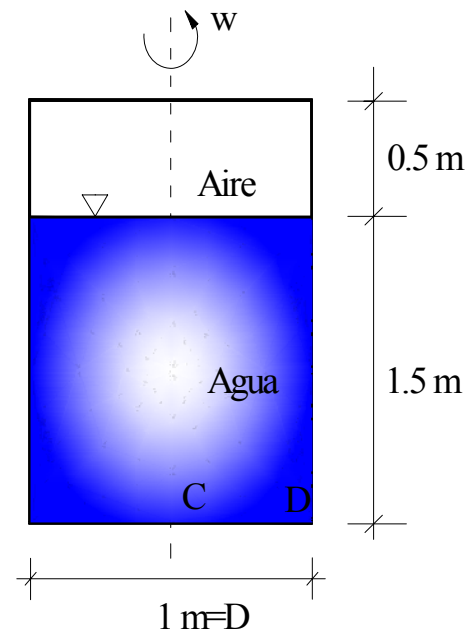
- EL VOLUMEN DE AIRE NO VARIA EN EL RECIPIENTE
- EL VOLUMEN SOBRE EL NIVEL A-A = VOLUMEN DEL PARABOLOIDE

$$\frac{1}{4}\pi 1^2 0.5 = \frac{1}{2}\pi x_2^2 y_2$$

$$x_2^2 y_2 = 0.25$$

$$p_c = 1.155 \text{ Kp} / \text{cm}^2$$

$$p_D = 1.34 \text{ Kp} / \text{cm}^2$$



Capítulo 5:

CINEMÁTICA DE FLUIDOS

1.-INTRODUCCIÓN.-

La cinemática es una parte de la mecánica de fluidos que analiza el movimiento sin tomar en cuenta los motivos por lo que se produjo este, este flujo se analiza en términos de velocidad, aceleración y desplazamiento.

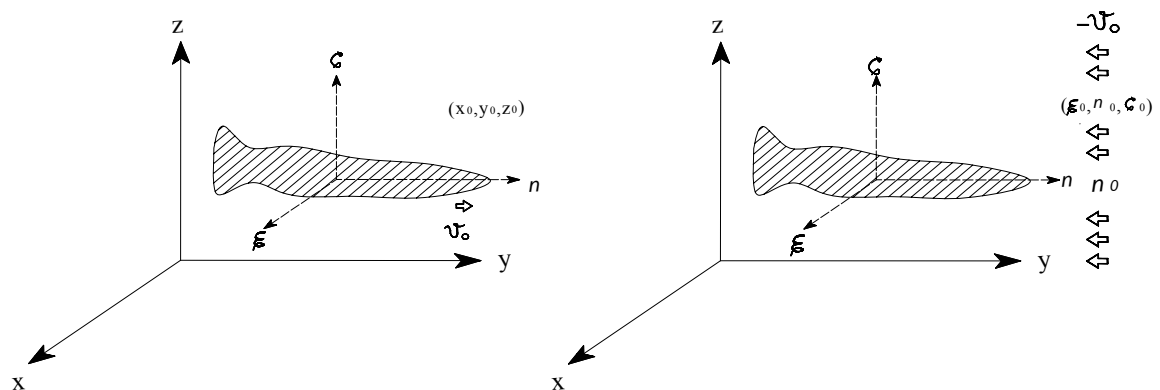
2. TIPOS DE FLUJO.-

Permanencia y uniformidad de las velocidades ver grafica 3(*Anexo*)

Consideraremos ahora algunas características generales de los diversos tipos de flujo.

(a) Flujo estacionario (permanente) y flujo no-estacionario (no permanente).-

Cuando las propiedades y características del flujo, en cada punto del espacio, permanecen invariables en el transcurso del tiempo, el flujo se llama estacionario o permanente; en caso contrario, se llama no estacionario o variable. El campo de velocidades en un flujo estacionario es función solamente de las coordenadas espaciales (x,y,z) , no siéndolo del tiempo t ; esto es, $v(x,y,z)$.



Fuente: Elaboración propia

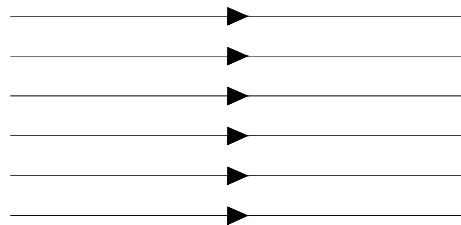
Fig. 5.1

Como ya sabemos, sólo en el régimen de flujo estacionario coinciden las líneas de corriente con las trayectorias seguidas por las partículas fluidas. Las condiciones de flujo estacionario se consiguen generalmente cuando las velocidades de flujo son pequeñas.

En ocasiones, es posible obtener un flujo estacionario a partir de otro no estacionario por un simple cambio del referencial. Así, por ejemplo, para un avión en vuelo, el flujo no es estacionario en absoluto si empleamos un referencial ligado a tierra (Fig. 5.1 izq.). Sin embargo, si el avión está volando con velocidad constante v_0 y empleamos un referencial solidario al avión (Fig. 5.1 dcha.), el flujo del aire en ese referencial, en el que el avión está en reposo, será (aproximadamente) estacionario. Obsérvese que ahora el fluido que se encuentra por delante del avión posee una velocidad $-v_0$ respecto al sistema de ejes (x,y,z) y que el paso del flujo no estacionario al estacionario podría haberse obtenido superponiendo una velocidad $-v_0$ al campo de flujo completo de la (Fig. 5.1 izq.).

(b) Flujo uniforme y flujo no-uniforme (variable).-

Cuando la velocidad de las partículas fluidas es la misma, en cada instante, en todos los puntos del espacio ocupado por el fluido, decimos que el flujo es *uniforme*; en caso contrario, sería *no-uniforme*. En el régimen de flujo uniforme, el patrón de líneas de corriente está constituido, en cada instante, por líneas rectas, paralelas e igualmente espaciadas



Fuente: Elaboración propia

Fig. 5.2

(c) Flujo compresible y flujo incompresible.-

En el régimen de flujo *incompresible* se supone que la densidad del fluido es constante, independiente de las coordenadas espaciales y del tiempo, simplificándose así extraordinariamente el análisis del movimiento. En caso contrario, el flujo es *compresible*. Ordinariamente, podemos considerar que los líquidos presentan regímenes de flujo incompresibles; sólo en situaciones tales como la propagación del sonido en líquidos es necesario tener en cuenta la compresibilidad de éstos. Pero hasta los gases, que son altamente compresibles, pueden experimentar cambios tan poco importantes en su densidad que su flujo pueda considerarse como incompresible; este es el caso de la *aerodinámica subsónica*, donde el aire se considera incompresible.

(d) Flujo laminar y flujo turbulento.-

Utilizamos el término de *flujo laminar* para indicar que el fluido fluye en láminas o capas (Fig. 5.3 izq.), en oposición al de *flujo turbulento*, cuando la velocidad en cada punto presenta fluctuaciones macroscópicas al azar que se imponen sobre sus valores medios (Fig. 5.3 derecha). El flujo laminar es un flujo *bien ordenado*, en el que las capas fluidas deslizan unas respecto a otras, sin entremezclarse; v.g., la miel espesa que se vierte de un tarro.

En el flujo turbulento ocurre lo contrario. El que el flujo sea laminar o turbulento queda determinado por su velocidad y por la configuración y tamaño del conducto. A medida que aumenta la velocidad, se produce una transición del régimen laminar al turbulento. Un ejemplo sencillo de esta transición lo tenemos si observamos el humo que se eleva de un cigarrillo. Durante un cierto tramo, el humo asciende en régimen laminar; después, casi bruscamente, el régimen se convierte en Turbulento y el humo se dispersa

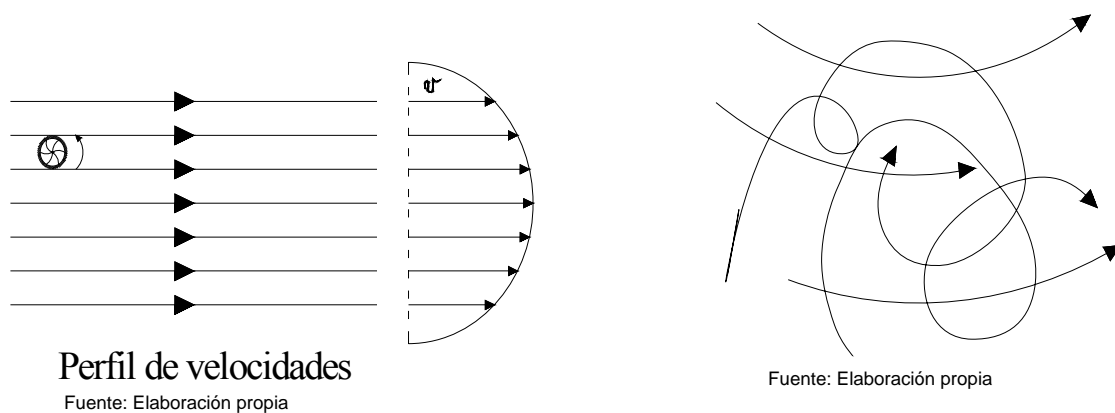


Fig. 5.3

Por tanto en el flujo turbulento las partículas fluidas se mueven de forma desordenada en todas las direcciones. Es imposible conocer la trayectoria de una partícula individualmente.

La tensión cortante en el flujo turbulento puede expresarse así:

$$\tau = (\mu + \eta) \frac{dv}{dy}$$

Donde η (eta)= un factor que depende de la densidad del fluido y de las características del movimiento. El primer término entre paréntesis (μ) representa los efectos debidos a la viscosidad, y el segundo (η) tiene los efectos debidos a la turbulencia.

Mediante los resultados obtenidos experimentalmente puede obtenerse la solución de las tensiones cortantes en el caso de flujos turbulentos. Prandtl sugirió la forma:

$$\tau = \rho L^2 \left(\frac{dv}{dy} \right)^2$$

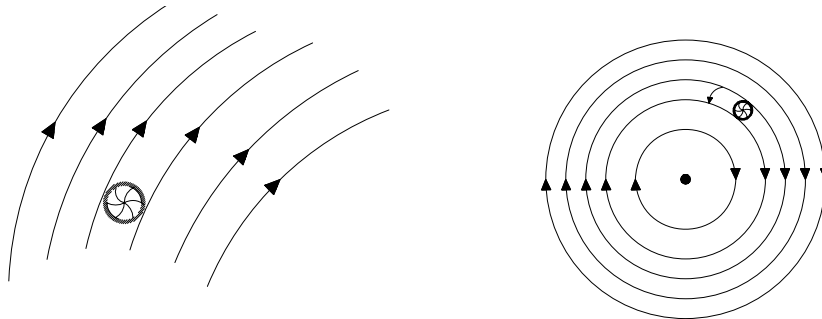
Para expresar las tensiones cortantes en flujos turbulentos. Esta formula tiene el inconveniente de que la longitud de mezcla L es función de y . Cuanto mayor es y , distancia a la pared de la tubería, mayor es el valor de L . Posteriormente, von Karman ha sugerido la formula:

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{r_0} \right) = \rho k^2 \frac{(dv/dy)^4}{(d^2v/dy^2)^2}$$

Aunque k no es una constante, este número adimensional se mantiene aproximadamente igual a 0,40.

(e) Flujo irrotacional y flujo rotacional.-

Decimos que el flujo es *irrotacional* cuando cualquier partícula fluida no posee velocidad angular neta respecto al punto en que se encuentra. En caso contrario, el flujo es *rotacional*. Podemos tener una aproximación intuitiva a estos dos tipos de flujo imaginando una ruedecilla con paletas inmersa en el fluido en movimiento. Si la ruedecilla tan sólo se traslada, el flujo es irrotacional (Fig. 5.4 izq.); si gira y se traslada (o sólo gira), el flujo es rotacional. El flujo rotacional incluye el movimiento de *vórtice* (remolinos) (Fig. 5.4 der.) y los flujos con gradiente transversal de velocidad (Fig. 5.4 izq.).

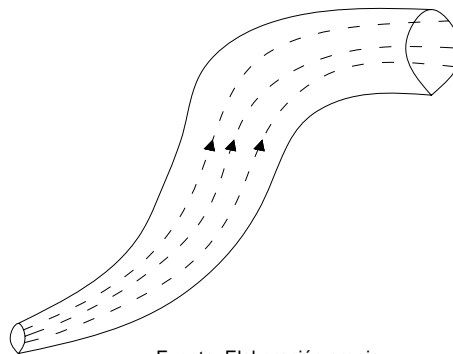


Fuente: Elaboración propia

Fig. 5.4

(f) Flujos unidimensional y bidimensional.-

El flujo unidimensional representa una simplificación en la que se supone que las características y propiedades del flujo son expresables en función de una sola coordenada espacial y del tiempo. Generalmente, la coordenada espacial se toma a lo largo de una línea de corriente o conducto (Fig. 5.5). La suposición de flujo unidimensional en un conducto exige que todas las magnitudes físicas de interés (velocidad, presión, ...) tengan un valor constante, en un instante dado, en todos los puntos de una sección recta cualquiera del conducto. En realidad, esta condición nunca se cumple rigurosamente. Sin embargo, si las diferencias no son muy grandes, o si sólo interesan los efectos medios en cada sección recta, puede suponerse la existencia de un flujo unidimensional. De forma análoga se define el flujo bidimensional.



Fuente: Elaboración propia

Fig. 5.5

(g) Flujo interno y flujo externo.-

El flujo *interno* es aquél en el que el fluido fluye confinado dentro de una estructura, como el que se produce en el interior de tuberías y canales. El flujo *externo* es el de un fluido alrededor de un objeto, como el que tiene lugar alrededor de un perfil de ala de avión, de un cohete, de un submarino, etc.

(h) Flujo viscoso y flujo no-viscoso.-

La viscosidad representa la fricción entre las diferentes capas fluidas que se mueven con distintas velocidades. La viscosidad introduce fuerzas tangenciales entre las capas fluidas en movimiento relativo y da lugar a la pérdida de energía mecánica. En muchos casos la viscosidad juega un papel importante en el movimiento del fluido (*flujo viscoso*); en otros casos, sus efectos son irrelevantes (*flujo no-viscoso*).

3. VELOCIDAD

La velocidad “ v ” se define como un vector V_x, V_y, V_z . El movimiento de un fluido puede ser descrito por el vector posición d_s , de una partícula, como una función vectorial del tiempo “ t ”:

$$\boxed{d_s = d_s(t) = dXi + dYj + dZk} \quad (1)$$

Donde i, j, k son los vectores unitarios direccionales de los tres ejes ortogonales x, y, z . A estas variables de la partícula fluida en el instante “ t ”, con respecto al sistema de ejes coordenados se les conoce como las variables de Lagrange.

El movimiento del fluido también lo podemos definir por el conocimiento de la curva que recorre la partícula fluida. En este caso la posición de la partícula se determina por la longitud del camino recorrido, siguiendo la curva como una función escalar del tiempo. El vector velocidad será la rapidez temporal del cambio de su posición:

$$\boxed{V = \frac{ds}{dt}} \quad [\text{m/s}] \quad (2)$$

Donde ds , representa el vector diferencial de la porción de curva que recorre la partícula fluida en el dt . La velocidad es entonces como ya se menciono anteriormente un campo vectorial dentro de un flujo y, al desplazarse en la curva, es un vector tangente en cada punto a la misma, que generalmente depende de la posición de la partícula fluida y del tiempo. $V = f(x, y, z)$

Podemos escribir la velocidad en función de los tres ejes coordenados esto será:

$$V = \frac{ds}{dt} = \left(\frac{dX}{dt} \right) i + \left(\frac{dY}{dt} \right) j + \left(\frac{dZ}{dt} \right) k$$

$$\begin{aligned} \text{Donde :} \quad & \frac{dX}{dt} = u, \text{ en la que } u = f(x, y, z, t) \\ & \frac{dY}{dt} = v, \text{ en la que } v = f(x, y, z, t) \\ & \frac{dZ}{dt} = w, \text{ en la que } w = f(x, y, z, t) \end{aligned}$$

Por lo que reemplazando en la ecuación tendremos:

$$\boxed{V = \frac{ds}{dt} = ui + vj + wk} \quad [\text{m/s}] \quad (3)$$

Esta ecuación nos representa al vector velocidad en función del campo de velocidades que lo representan u , v , y w que son las componentes de la velocidad en los respectivos ejes x , y , z respectivamente. Es necesario mostrar también la velocidad en coordenadas cilíndricas y polares ya que estas se verán mas adelante.

La velocidad en coordenadas cilíndricas, tiene tres componentes V_r, V_θ, V_z , cuyos ejes direccionales son i_r, i_θ, i_z , respectivamente.

$$\therefore V = V_r i_r + V_\theta i_\theta + V_z i_z$$

La velocidad en coordenadas polares, es similar a la de coordenadas cilíndricas, con la diferencia que en estas no se considera el eje "z";

$$\boxed{V = (V_r) i_r + (V_\theta) i_\theta} \quad [\text{m/s}] \quad (4)$$

4. CAMPOS DE FLUJO

Un campo de flujo es cualquier región en el espacio donde hay un fluido en movimiento, a condición de que la región o sub-región del flujo este ocupada por el fluido. Es importante mencionar que en cada punto del campo de fluido es posible determinar o especificar una serie de magnitudes físicas, ya sean escalares, vectoriales o tensoriales, que forman a su vez campos independientes o dependientes dentro del flujo.

4.1 Campo de Aceleración

El campo vectorial de las aceleraciones es una consecuencia derivada de las velocidades, dado que el vector aceleración de una partícula fluida en un punto se define como la variación temporal de la velocidad en ese punto. Empleando las variables de Lagrange, tendríamos que la velocidad de una partícula fluida estaría en función de X, Y, Z, t ; es decir (x, y, z, t) no permanece constante sino que varia en forma continua y dan en cada instante la posición de la partícula que estudiamos. Dado esto la aceleración de la partícula será:

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d/(ds/dt)}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

pero como $s = f(x, y, z, t)$, tenemos que la aceleración la podemos expresar de la siguiente forma :

$$a = \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) \left(\frac{dx}{dt} \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) \left(\frac{dy}{dt} \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) \left(\frac{dz}{dt} \right)$$

pero :

$$\frac{dx}{dt} = u \quad \frac{dy}{dt} = v \quad \frac{dz}{dt} = w$$

Estas son las componentes de la velocidad en los tres ejes ortogonales x, y, z respectivamente; por lo que la ecuación anterior podemos escribirla como:

$$\boxed{a = \frac{\partial V}{\partial t} + u \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) + w \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)} \quad [\text{m/s}^2] \quad (5)$$

Esta ecuación (5) es la derivada tomada con respecto al tiempo siguiendo el movimiento del punto, y como podemos apreciar no tiene dirección como en el caso de la velocidad.

A esta derivada se la conoce como la dedicada total y corresponde a la aceleración de las partículas fluidas, que puede asumirse como la superposición de dos efectos.

- a. En el instante “t”, supuesto el campo permanente. La partícula, bajo estas circunstancias, cambiará de posición en este campo permanente. Así su velocidad sufrirá variaciones en los diversos puntos del campo que, en general, serán diferentes de un instante a otro. Esta aceleración debida al cambio de posición es llamada aceleración convectiva o de transporte.
- b. Si consideramos, que la aceleración no proviene del cambio de posición ocupada por la partícula fluida, sino de la variación de la velocidad, en la posición ocupada por la partícula, por el tiempo, tenemos que la aceleración es la aceleración local y corresponde al porcentaje local de variación de velocidad debido a la no-permanencia del flujo.

$$\frac{dV}{dt}$$

Podemos simplificarla y expresarla como:

$$a = \frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V$$

Las ecuaciones escalares correspondientes al campo de aceleraciones serán:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

Donde a_x, a_y, a_z son las componentes de la aceleración en los ejes x, y, z respectivamente.

En ciertos análisis es muy útil emplear el sistema de coordenadas en el que un conjunto de líneas de corriente formen parte del mismo. Para tal caso podemos partir de la velocidad $V=V(s,t)$; de donde podemos deducir que la aceleración de la partícula fluida vendrá dada por:

$$a = \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right) \cdot \left(\frac{ds}{dt} \right) + \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$a = V \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

Consideremos el caso de flujo permanente, en el que, la configuración de las líneas de corriente es fija en el tiempo y además, son coincidentes las trayectorias en dos componentes escalares no nulas, una de ellas tangente a la trayectoria que llamamos aceleración normal. Por lo tanto la aceleración será:

$$\boxed{a = a_n + a_t} \quad [\text{m/s}^2] \quad (6)$$

Donde a_n es la aceleración normal y a_t es la aceleración tangencial; estas pueden representarse de acuerdo a lo estudiado en la física del cuerpo sólido por:

$$\boxed{a_n = \frac{V^2}{r} \quad [\text{m/s}^2]} \quad (7)$$

$$\boxed{a_t = V \frac{\partial V}{\partial s} \quad [\text{m/s}^2]} \quad (8)$$

4.2 Campo Rotacional.

Este es otro campo derivado de el de las velocidades, y evalúa la rotación local de una partícula fluida y se define matemáticamente por el producto vectorial del operador *nabla* (∇), por el vector velocidad (V). O sea que : $rot = \nabla \times V$, que en forma matemática es el determinante siguiente:

$$rot V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

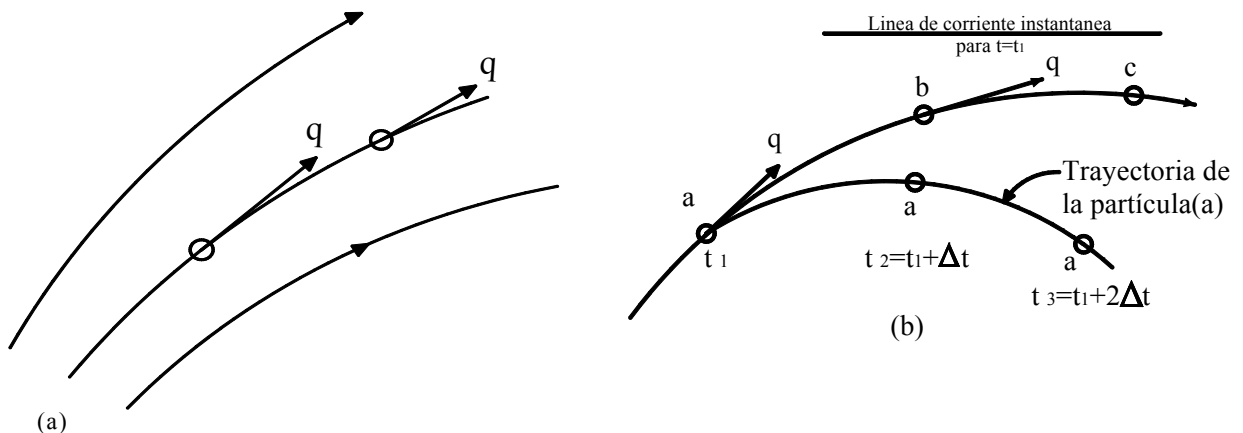
desarrollando

$$rot V = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) k \quad (9)$$

Que también es función, tanto de posición como de tiempo y es una medida de la rotación o vorticidad de la partícula dentro del flujo; por ésta razón se le conoce también como *campo vorticoso*.

5. TRAYECTORIAS Y LINEAS DE CORRIENTE

Una línea de corriente es una curva imaginaria que conecta una serie de puntos en el espacio en un instante dado, de tal forma que todas las partículas que están sobre la curva en ese instante tienen velocidades cuyos vectores son tangentes a la misma, como se indica en la fig. 5.6(a). De aquí, las líneas de corriente indican la ***dirección del movimiento*** de las partículas que se encuentran a lo largo de ellas, en el instante dado.



[4] Fuente: Dinámica de los fluidos – Jhames W. Daily ; Donald R. F. Harleman

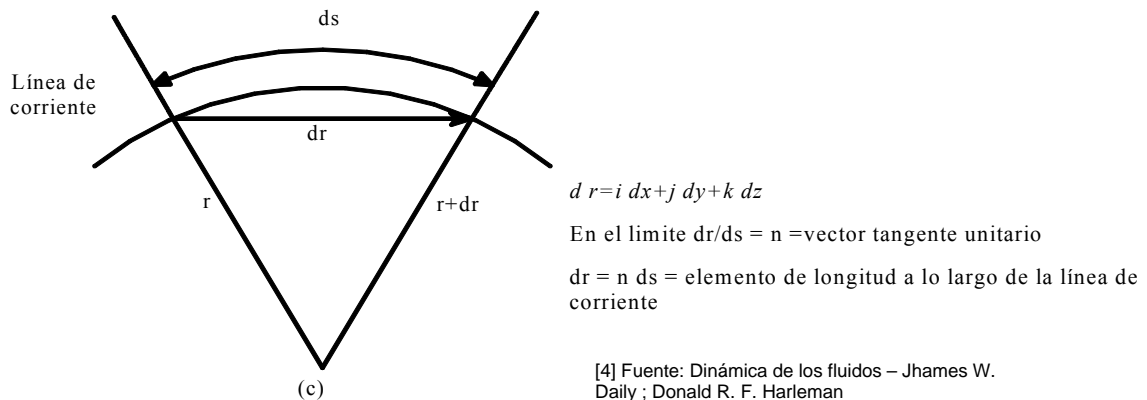


Fig. 5.6 Líneas de corriente y trayectorias: (a) vectores de velocidad tangentes a una línea de corriente ; (b) línea de corriente trayectoria; (c) longitud de un elemento de arco a lo largo de una línea de corriente

Un tubo de corriente o filamento de flujo es un tubo pequeño imaginario o <<conducto>>, cuya frontera está-formada por líneas de corriente. Las líneas de corriente son fronteras en el mismo sentido que las paredes son fronteras de los conductos reales. Recíprocamente, las fronteras de un conducto real o de cualquier sólido inmerso en el fluido son líneas de corriente. Si las fronteras son paredes sólidas no hay componente normal de la velocidad en las mismas.

En el movimiento permanente, las líneas de flujo se conservan fijas con respecto al sistema de referencia. Más aún, las líneas del flujo permanente coinciden con las trayectorias de las partículas móviles. En el movimiento variable o no permanente, una partícula del fluido no permanecerá, en general, sobre la misma línea de flujo; por lo tanto, las trayectorias de las partículas y las líneas de corriente no coinciden. El flujo uniforme variable es una excepción de esta regla. La fig. (5.6b) muestra una línea de corriente y la trayectoria de una partícula para un fluido no uniforme y variable. Se muestran los vectores velocidad de las partículas **a**, **b** y **c**, sobre la línea de corriente para el tiempo t_1 . Para los tiempos t_2 y t_3 , se muestra la partícula **a**, ocupando sucesivas posiciones sobre su trayectoria, apartándose de la línea de corriente.

Para una línea de corriente en un espacio bidimensional, xy por ejemplo, la ecuación diferencial de la línea de corriente se obtiene observando.

$$\mu = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt},$$

De donde se concluye que

$$\boxed{\frac{dx}{\mu} = \frac{dy}{v}} \quad (10)$$

Alternativamente, notamos que debido a que el vector velocidad es tangente a una línea de corriente, para los puntos de ésta se tendrá que:

$$q \times dr = 0, \quad \text{Donde}$$

dr = un elemento del vector de posición, para dos puntos vecinos de la línea de corriente mostrada en la fig. (5.6c).

En general, para el espacio en tres dimensiones, en coordenadas cartesianas.

$$vdx = udy,$$

$$wdx = udz,$$

$$\boxed{w \cdot dy = v \cdot dz} \quad (11)$$

Tendremos ocasión de usar estas ecuaciones cuando, tengamos que efectuar la integración a lo largo de una línea de corriente.

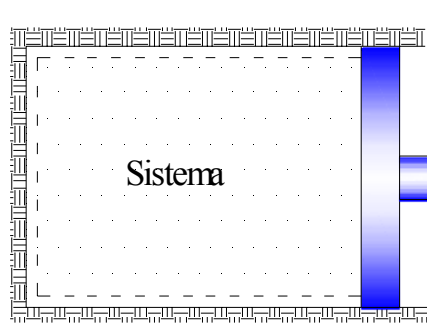
6. VOLÚMENES DE CONTROL

Al emplear las leyes básicas y secundarias, pueden adoptarse cualquiera de los siguientes modos de aplicación:

1. Las actividades de todas y cada una de las masas deben ser tales que se satisfagan las leyes básicas y las leyes secundarias pertinentes.
2. Las actividades de todos y cada uno de los volúmenes en el espacio deben ser tales que se satisfagan las leyes básicas y las leyes secundarias pertinentes.

En el primer caso, las leyes se aplican a una cantidad de materia determinada conocida como sistema. Un sistema puede cambiar de forma, posición y condición térmica, pero debe contener siempre la misma materia. Por ejemplo, puede escogerse como el sistema el vapor dentro del

cilindro de una máquina (véase la fig. 5.7) después del cierre de la admisión. A medida que el pistón se mueve, el volumen del sistema cambia pero no existe cambio en la cantidad ni en la identidad de la masa.



[6] Fuente: Mecánica de Fluidos – Irving H. Shames

Fig. 5.7
Un sistema

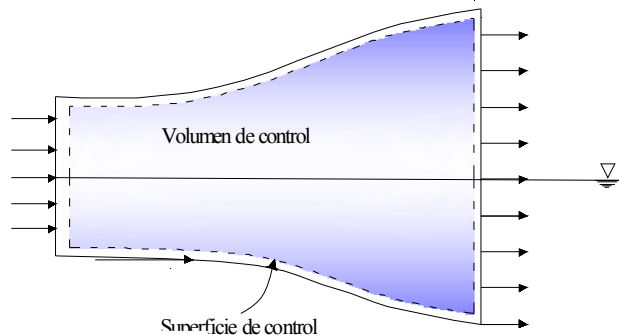


Fig. 5.8 Volumen de control para el interior de una boquilla.

Para el segundo caso, un volumen definido, conocido como volumen de control, se establece en el espacio, y la frontera de este volumen se conoce como *superficie de control*. La cantidad y la identidad de la materia en el volumen de control puede cambiar con el tiempo, pero la forma de volumen de control permanece fija”. Por ejemplo, para estudiar el flujo a través de una boquilla, podría escogerse como volumen de control el interior de la boquilla, como se muestra en la figura.

7. LEYES DEL COMPORTAMIENTO DE UN FLUIDO.

Las tres ecuaciones fundamentales son: la ecuación de continuidad, la ecuación de la cantidad de movimiento, y la ecuación de la conservación de la energía (Cap.6). Estas ecuaciones pueden darse en su formulación integral o en su forma diferencial, dependiendo del problema. A este conjunto de ecuaciones dadas en su forma diferencial también se le denomina ecuaciones de Navier-Stokes (Cap. 6) (las ecuaciones de Euler (Cap. 6) son un caso particular de las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos sin viscosidad).

No existe una solución general a dicho conjunto de ecuaciones debido a su complejidad, por lo que para cada problema concreto de la mecánica de fluidos se estudian estas ecuaciones buscando simplificaciones que faciliten la resolución del problema. En algunos casos no es posible obtener una solución analítica.

8. ECUACIÓN DE CONTINUIDAD.

8.1 Principio de conservación de la materia.-

La masa de fluido que en la unidad de tiempo entra a un volumen especificado dentro del flujo, una parte se queda almacenada en su interior y el resto sale del volumen. Si el volumen que se estudia es de forma y magnitud constantes (volumen de control), el almacenaje no puede ser indefinido.

Matemáticamente es preferible tratar con la cantidad neta de masa que sale y que entra, sumadas algebraicamente; así el principio de la conservación de la materia, aplicada a un volumen de control fijo completamente arbitrario dentro del flujo, se expresa en la forma siguiente.

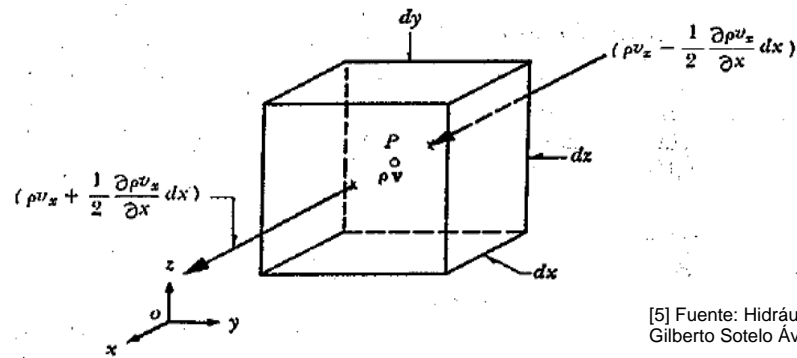
$$\left[\begin{array}{l} \text{Cantidad neta de masa} \\ \text{que atraviesa la superficie} \\ \text{de frontera del volumen,} \\ \text{en la unidad de tiempo.} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{Rapidez de variacion} \\ \text{de la masa contenida} \\ \text{en el volumen} \end{array} \right] = 0$$

Este principio se aplica lo mismo a un volumen de control de tamaño diferencial que a uno finito, de lo cual se deriva la llamada ecuación de continuidad.

8.2 Ecuación diferencial de la continuidad.-

Si bien esta ecuación no tiene mucha aplicación en los problemas de flujo uniforme dimensional en hidráulica, aquí se presenta su derivación para ser utilizada en los problemas de flujo con potencial. Para obtenerla se aplica el principio de conservación de la materia al volumen de control diferencial, mostrado en la (fig. 5.9) (de lados dx , dy , dz).

En el centro de masa del volumen considerado corresponden los valores ρ y v como funciones de punto y del tiempo, o bien, el producto ρv como función vectorial.



[5] Fuente: Hidráulica General vol.1–
Gilberto Sotelo Ávila

Fig. 5.9 Derivación de la ecuación diferencial de la continuidad

Al pasar a las caras normales del eje x, que limitan al elemento de fluido, la función ρv se incrementa y decrementa en la misma cantidad:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} dx,$$

Donde el subíndice x indica la componente de la función ρv según x. de este modo, considerando positiva la masa que sale del volumen y negativa la que entra, la cantidad neta de masa que atraviesa estas caras es:

$$\left(\rho v_x + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \left(\rho v_x - \frac{1}{2} \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} dx \right) dy dz = \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} dx dy dz$$

Por un razonamiento semejante, la cantidad neta de masa que atraviesa las caras normales al eje y es:

$$\frac{\partial \rho v_y}{\partial y} dx dy dz;$$

Y, la que atraviesa a las normales al eje z:

$$\frac{\partial \rho v_z}{\partial z} dx dy dz;$$

Finalmente, la rapidez de variación de la masa contenida en el volumen elementa es

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho dx dy dz);$$

De tal manera que el principio de conservación de la masa establece lo siguiente:

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} dx dy dz + \frac{\partial}{\partial t} (\rho dx dy dz) = 0$$

Y, puesto que el volumen elemental escogido no cambia con el tiempo, la ecuación anterior se puede simplificar y resulta:

$$\boxed{\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \quad (12)$$

O bien, recordando que:

$$\text{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z},$$

La ecuación anterior también se expresa en la forma

$$\boxed{\text{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \quad (13)$$

Las ecuaciones. 12 y 13 son dos formas de expresar la ecuación diferencial de continuidad, que es la más general para un flujo compresible no permanente; admite las siguientes simplificaciones:

a) Flujo compresible permanente

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \quad (14)$$

b) Flujo incompresible no permanente ($\rho = \text{constante}$)

$$\boxed{\text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0} \quad (15)$$

c) Flujo incompresible permanente

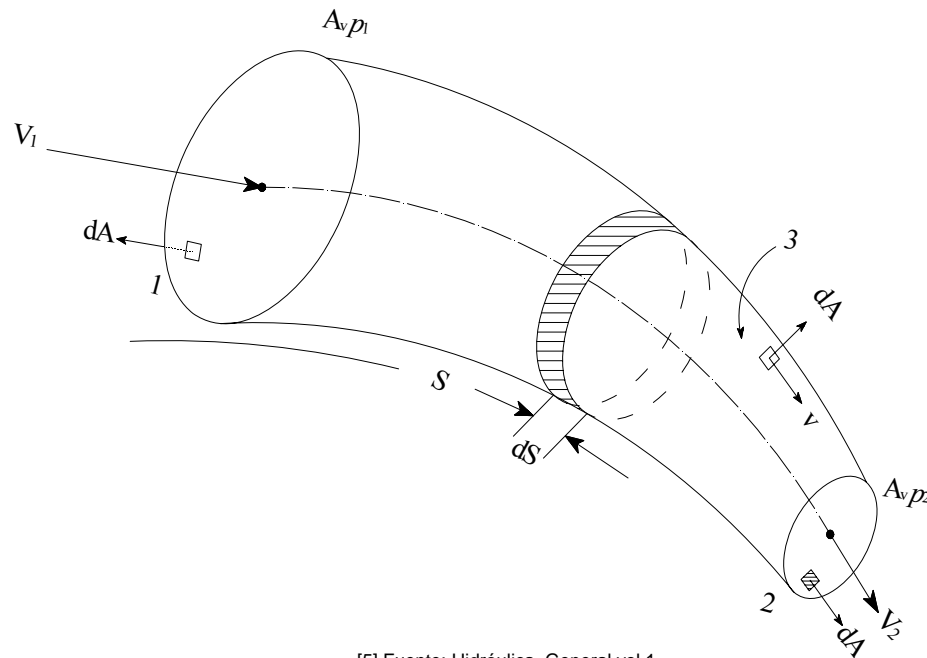
$$\boxed{\text{div}(\mathbf{v}) = 0}$$

$$\rho = \text{constante}, \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\text{div}(\mathbf{v}) = 0$$

Igual que la ecuación 15 para un flujo incompresible, sea o no permanente.

8.3 Ecuación de Continuidad de la Vena Liquida.



[5] Fuente: Hidráulica General vol.1–
Gilberto Sotelo Ávila

Fig. 5.10 Ecuación de continuidad para una vena líquida

La vena líquida mostrada en la (fig. 5.10) está limitada por la superficie 3 (que generalmente coincide con una frontera sólida, y una superficie libre) y por las secciones transversales 1 y 2, normales al eje que une los centros de gravedad de todas las secciones. Las velocidades en cada punto de una misma sección transversal poseen un valor medio V , que se considera representativo de toda la sección y de dirección tangencial al eje de la vena.

Se considera el volumen elemental de líquido – mostrado en la (fig. 5.10) limitado lateralmente por la superficie que envuelve a la vena líquida, así como por dos secciones transversales normales al eje de la vena, separadas la distancia ds , donde s representa la coordenada curvilínea siguiendo el eje de la vena.

La cantidad neta de masa que atraviesa la superficie de frontera, del volumen elemental en estudio es:

$$\left[\rho VA + \frac{\partial(\rho VA)}{\partial s} ds \right] - \rho VA = \frac{\partial(\rho VA)}{\partial s} ds$$

Y, la rapidez con que varía la masa dentro del mismo, es $\partial(\rho VA)/\partial t$. Por tanto, el principio de conservación de la masa establece que

$$\boxed{\frac{\partial(\rho VA)}{\partial s} ds + \frac{\partial}{\partial t}(\rho A ds) = 0} \quad (16)$$

Sin cometer prácticamente error se puede aceptar, en la mayoría de los problemas que la longitud ds del elemento del volumen considerado, no depende del tiempo. Este puede salir de la derivada del segundo término de la ecuación anterior y simplificarse con el que aparece en el primero, de lo cual resulta:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho VA)}{\partial s} ds + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} ds = 0} \quad (17)$$

Recordando que ρ , V , A son funciones de s y t , al desarrollar las derivadas parciales indicadas se obtiene:

$$\boxed{\rho A \frac{\partial V}{\partial s} + \rho V \frac{\partial A}{\partial s} + VA \frac{\partial \rho}{\partial s} + \rho \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \quad (18)$$

O, bien, con $V=ds/dt$:

$$\boxed{\rho A \frac{\partial V}{\partial s} + \rho \left(\frac{\partial A}{\partial s} + \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial t} \right) + A \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} + \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = 0} \quad (19)$$

Dividiendo la ecuación (19) entre ρA y recordando el desarrollo de la derivada total, resulta entonces:

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \quad (20)$$

Que es la ecuación de la continuidad para una vena líquida donde se produce un flujo no permanente y compresible. Un ejemplo clásico de su aplicación lo constituye el golpe de ariete. En problemas de flujo no permanente a superficie libre (transito de ondas avenida en canales y de mareas en estuarios), donde se considera que el líquido es incompresible, desaparece el último término de la ecuación (20).

Si el escurrimiento es permanente las derivadas con respecto a t que aparecen en la ecuación (17) se eliminan y esta ecuación resulta:

$$\frac{\partial(\rho VA)}{\partial s} = 0 \quad (21)$$

O, bien,

$$\rho VA = \text{constante} \quad (22)$$

Si, además, el fluido es incompresible:

$$VA = \text{constante} \quad (23)$$

Esto significa que es constante el gasto que circula por cada sección de la vena líquida en flujo permanente, o bien, que para dos secciones transversales 1 y 2 de la misma, se cumple lo siguiente:

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad (24)$$

9. CONSERVACIÓN DE MOMENTO-ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

La ecuación de cantidad de movimiento se deriva de la consideración vectorial de la segunda ley de Newton. Este establece que el impulso es igual al cambio de la cantidad de movimiento, siendo ambas cantidades vectoriales.

El impulso es la resultante de las fuerzas que actúan sobre un determinado volumen de control, multiplicando por el tiempo que ellas actúan. La cantidad de movimiento es el producto de la masa por la velocidad.

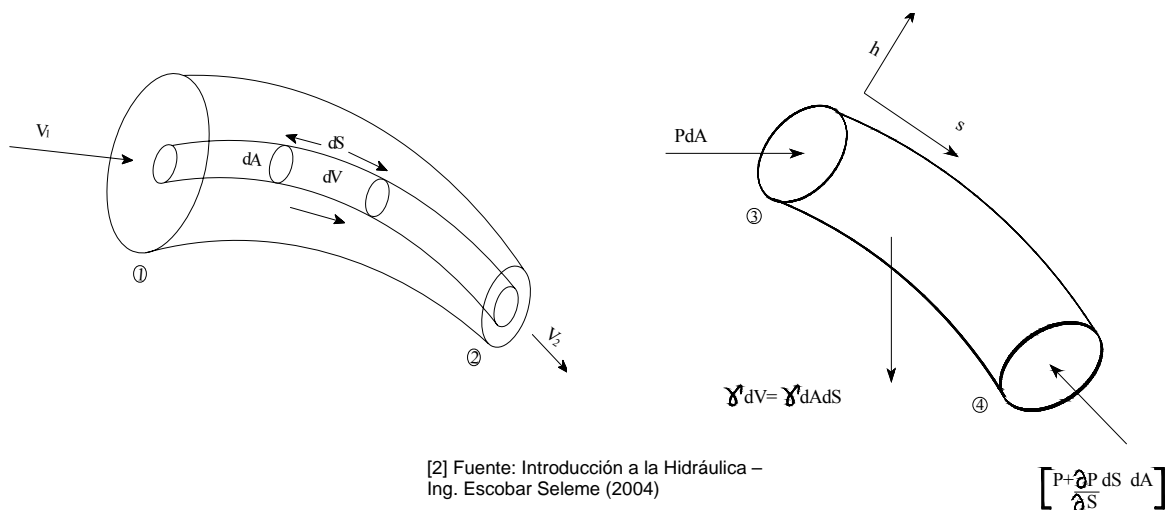


Fig. 5.11

Con referencia a la (fig. 5.11) tomamos tres ejes cartesianos orientados arbitrariamente:

Para el eje x:

$$dF_x dt = d(Mv)_x$$

$$dF_x dt = \rho ds dA dv_x$$

Donde:

dF_x = Sumatoria de todas las componentes x de las fuerzas que actúan sobre el elemento diferencial.

Para el fluido incompresible y cuando el flujo es permanente:

$$\begin{aligned}\rho ds dA dv_x &= \rho ds dA \frac{\partial v_x}{\partial S} dS \\ dS &= v dt \quad v dA = dQ \\ \rho ds dA dv_x &= \rho \frac{\partial v_x}{\partial S} dS dQ dt\end{aligned}$$

La ecuación general puede tomarse:

$$\boxed{dF_x = \rho \frac{\partial v_x}{\partial S} dS dQ} \quad (25)$$

Integrando esta ecuación a lo largo de una línea de corriente, con dQ constante (1) y (2).

$$\boxed{\Delta F_x = \rho (v_{x_2} - v_{x_1}) dQ} \quad (26)$$

Integrando la última ecuación en una sección normal a la línea de corriente:

$$\boxed{\sum F_x = \rho \left[\int_{A_2} v_{x_2} dQ - \int_{A_1} v_{x_1} dQ \right]} \quad (27)$$

La integral:

$$\int_A v_x dQ = \beta Q V_x \quad \sum F_x = (\beta Q V_x)_2 - (\beta Q V_x)_1$$

Donde:

$$\beta = \frac{1}{Q} \int_A \frac{v_x}{V_x} dQ = \frac{1}{A} \int_A \frac{v_x}{V_x} \frac{v}{V} dA \quad (28)$$

Se produce análogamente para los ejes y y z.

La expresión más general de la ecuación de la cantidad de movimiento, es:

$$\sum \vec{F} = \Delta(\beta Q \rho \vec{V}) \quad (29)$$

Donde: \vec{F} ; suma vectorial de todas las fuerzas exteriores.

\vec{V} ; Vector velocidad media de cada sección.

Se debe tomar secciones con una distribución transversal razonablemente uniforme de velocidades, para que β sea prácticamente 1 y las presiones sean hidrostáticamente distribuidas.

Esta última ecuación es la ecuación de la cantidad de movimiento lineal, pues esta solo halla la magnitud y la dirección de las fuerzas exteriores. Para encontrar la localización usamos la cantidad de movimiento angular, es el momento de las fuerzas respecto un punto determinado que es igual al momento del momentum respecto al mismo punto:

$$\sum (\vec{F} \times \vec{r})_o = (\beta Q \rho \vec{V} \times \vec{r})_o \quad (30)$$

Donde: r : distancia al punto seleccionado y el subíndice identifica el punto.

9.1. Método de solución de problemas.

Los problemas que involucran las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, deben tomar en cuenta la dirección en la que estas fuerzas actúan. La ecuación de general de la cantidad de movimiento es una ecuación vectorial, donde la fuerza y la velocidad son cantidades vectoriales. Por lo tanto la ecuación es validad solo cuando todos los términos tengan la misma dirección. Por lo tanto, lo mejor para resolver problemas de este tipo es el de descomponer la ecuación para cada dirección, es decir, en los ejes x, y y z.

$$F_x = \rho Q \Delta V_x$$

$$F_y = \rho Q \Delta V_y$$

$$F_z = \rho Q \Delta V_z$$

Para resolver problemas aplicando la ecuación de la cantidad de movimiento puede especificarse el siguiente procedimiento:

1. Identificar la porción de la corriente del fluido que se va a considerar como un cuerpo libre. Esta será la parte donde el fluido cambia de dirección o donde se modifica la geometría de la corriente del flujo del fluido.
2. Establecer los ejes de referencia para las direcciones de las fuerzas. Normalmente se selecciona un eje que sea paralelo a una parte de la corriente del flujo.
3. Identificar y mostrar en el diagrama de cuerpo libre todas las fuerzas externas que actúan sobre el fluido. Todas las superficies sólidas que afecten la dirección de la corriente de flujo ejercen fuerzas. Asimismo, la presión del fluido actuando sobre el área transversal de la corriente ejerce una fuerza en la dirección paralela a la corriente en el contorno del cuerpo libre.
4. Mostrar la dirección de la velocidad del flujo en la forma que este ingresa al cuerpo libre y cómo éste abandona el cuerpo libre.
5. Utilizando la información que se muestra en el diagrama de cuerpo libre, escribir la ecuación de la cantidad de movimiento en las direcciones pertinentes.
6. Sustituir los datos y despejar la cantidad deseada.

10. APLICACIÓN DE CINEMÁTICA DE FLUIDOS.

Se desarrolla los fundamentos de flujo de fluidos y las diferentes aplicaciones y restricciones en su estudio, donde se definen las relaciones entre los tipos de flujo y el flujo de los mismos, también poder diferenciar las distintas velocidades que pueden alcanzar los diferentes fluidos.

Con estas definiciones podrá realizarse el diseño sistemas de abastecimiento de agua potable ya que en este caso la conducción del agua es mediante tuberías y es donde se podrá tomar en cuenta los conceptos de velocidades del flujo, aceleración para el diseño.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.-Propósito u objetivo: Aplicando la deducción de la ecuación de la velocidad en cinemática de fluidos. Se desea calcular el gasto y la velocidad media correspondiente.

Supóngase que para un tubo circular de 50 cm de diámetro la distribución de velocidades, en las condiciones de flujo de este problema, puede ser representada por un paraboloide, cuya generatriz es:

$$v = 21,2 (r_0^2 - r^2); \quad [\text{m/s}]$$

Donde r_0 es el radio del tubo en metros y r la distancia medida desde el centro del tubo.

Solución:

Para aplicar la siguiente ecuación:
$$V = \frac{1}{A} \int_A v dA$$

Debemos presentar dA en función a r :

$$\begin{aligned} dA &= 2\pi r dr \\ A &= \pi r_0^2 = \pi (0,25)^2 \quad A = 0,126[\text{m}^2] \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación de la velocidad media:

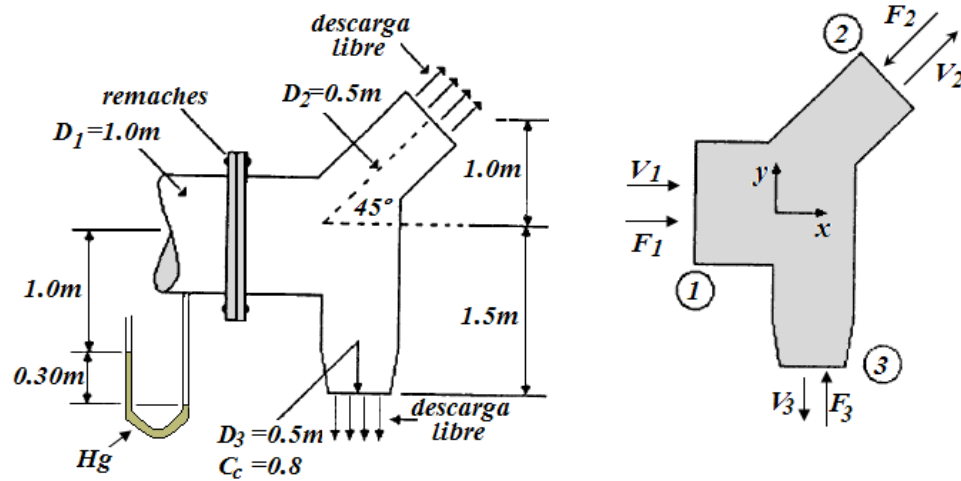
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{A} \int_A v dA \\ V &= \frac{1}{A} \int_0^{r_0} 21,2(r_0^2 - r^2) 2\pi r dr = \frac{\pi(21,2)(2)}{0,196} \int_0^{0,25} (0,25^2 r - r^3) dr \\ V &= 0,66 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Encontrada la velocidad media del flujo, encontramos el caudal

$$Q = VA = 0,66 \left(\frac{\pi 0,25^2}{4} \right)$$

$$Q = 0,13[\text{m}^3/\text{s}] = 130[\text{lps}]$$

2.- Propósito u objetivo: Aplicando conceptos de manómetros vistos en el capítulo 2 para medición de presiones y el desarrollo del capítulo presente. Determinar la fuerza total ejercida sobre los remaches de la pieza final. Considerando el peso del agua igual a 1300 Kg, en el eje y en el sentido vertical, y α y β iguales a la unidad, para una tubería de 1,0 m de diámetro descarga agua a la atmosfera a través de dos tuberías, como se indica en la figura.



Solución.

Debemos calcular la presión y velocidad en la sección 1. La presión se obtiene de la lectura del manómetro de mercurio:

$$P_1 = 27.27 \text{ [Kg / cm}^2\text{]}$$

$$F_1 = P_1 A_1 = (27.27) \left(\frac{\pi 1^2}{4} \right)$$

$$F_1 = 21.42 \text{ [KN]}$$

En las secciones 2 y 3 la descarga es en la atmósfera, por esto la fuerza de la presión será nula.

$$F_1 = F_2 = 0$$

La velocidad en la sección 1 será:

$$V_1 = \frac{4Q_1}{\pi(1)^2} = 5.09 Q_2$$

$$\frac{27.27}{9.81} + 0.083Q_2 = 1 + \frac{(5.09Q_2)^2}{2g}$$

$$\frac{27.27}{9.81} + 0.083Q_2 = 1 + 1.32Q_2$$

$$1.32Q_2 - 0.083Q_1 = 4.28 \quad (1)$$

Tomando la ecuación de la energía entre las secciones 1 y 3

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_3 + \frac{V_3^2}{2g}$$

$$V_3 = \frac{4Q_3}{\pi(0.5)^2(0.80)} \longrightarrow V_3 = 6.37Q_3$$

$$\frac{27.27}{9.81} + 0.083Q_1 = -1.5 + \frac{(6.37Q_3)^2}{2g}$$

$$\frac{27.27}{9.81} + 0.083Q_1 = -1.5 + 2.068Q_3$$

$$\frac{27.27}{9.81} + 0.083Q_1 = -1.5 + 2.068Q_3$$

$$2.068Q_3 - 0.083Q_1 = 4.28 \quad (2)$$

Aplicando la ecuación de continuidad tendremos:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad (3)$$

Con las ecuaciones (1), (2) y (3) formamos un sistema de ecuaciones, que podemos resolver por el método que se prefiera, desarrollando:

$$Q_1 = 2.92[m^3/s] \quad ; \quad Q_2 = 1.37[m^3/s] \quad ; \quad Q_3 = 1.55[m^3/s]$$

Las velocidades correspondientes serán:

$$V_1 = 3.71[m/s] \quad ; \quad V_2 = 6.97[m/s] \quad ; \quad V_3 = 9.87[m/s]$$

Aplicando la ecuación de cantidad de movimiento tendremos:

en el eje x:

$$F_1 + R_x = \rho(Q_2 V_{2x} - Q_3 V_{3x}) - \rho Q_1 V_{1x}$$

$$21.42 R_x = 1[(1.37)(6.97) \cos 45^\circ + 0] - (1)(2.92)(3.71) \longrightarrow \boxed{R_x = -4.08 [KN]}$$

En el eje y:

$$R_y = \rho(Q_2 V_{2y} - Q_3 V_{3y}) - \rho Q_1 V_{1y}$$

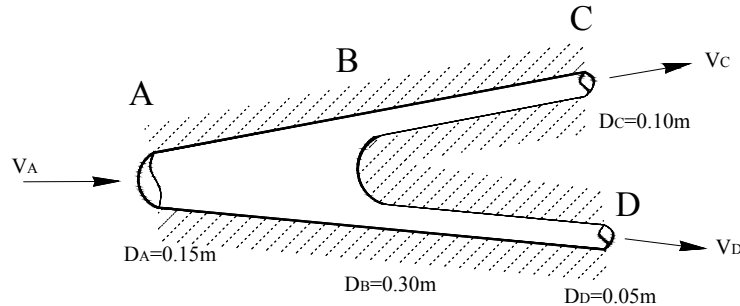
$$R_y = 1[(1.37)(6.97) \sin 45^\circ + (1.55)(9.87)] - 0 \longrightarrow \boxed{R_y = 22.05 [KN]}$$

Los resultados indican que los remaches resistirán una fuerza axial de tensión de 4.08 KN y una fuerza de corte hacia arriba de 2.05KN.

Caso: Único

3.- Propósito u objetivo: Aplicar la Ecuación de la Continuidad.

Calcular las velocidades medias en A y D, el gasto total, y el gasto en cada rama de la tubería, teniendo la siguiente figura donde se muestra la bifurcación de un tubo circular que tiene los diámetros indicados. El agua que escurre dentro del tubo, entra en A y sale en C y D. si la velocidad media en B es de 0,60m/seg, y en C es de 2,70 m/seg.



Flujo en la bifurcación del problema

Solución:

La ecuación de la continuidad aplicada en la vena líquida, considerada en la figura, conduce a que:

$$v_A = \frac{\pi \cdot D_A^2}{4} = v_B \frac{\pi \cdot D_B^2}{4}$$

De donde

$$v_A = 0,60 \left(\frac{0,30}{0,15} \right)^2 = 2,40 \text{ m / seg}$$

en forma análoga :

$$v_B = \frac{\pi \cdot D_B^2}{4} = v_C \frac{\pi \cdot D_C^2}{4} + v_D \frac{\pi \cdot D_D^2}{4}$$

$$\begin{aligned} v_D &= 0,60 \left(\frac{0,30}{0,05} \right)^2 - 2,7 \left(\frac{0,10}{0,05} \right)^2 \\ &= 21,6 - 10,8 = 10,8 \text{ m / seg} \end{aligned}$$

El gasto total es

$$\begin{aligned} Q &= v_A \frac{\pi \cdot D_A^2}{4} = v_C \frac{\pi \cdot D_C^2}{4} + v_D \frac{\pi \cdot D_D^2}{4} \\ Q &= 2,4 \times 0,785 \times 0,0225 = 0,042 \text{ m}^3 / \text{seg} \end{aligned}$$

El gasto por el tubo C es entonces:

$$Q_C = v_C \frac{\pi \cdot D_D^2}{4} = 2,70 \times 0,785 \times 0,01 = 0,021 m^3 / seg$$

y, el gasto por el tubo D, el siguiente:

$$Q_D = v_D \frac{\pi \cdot D_D^2}{4} = 10,8 \times 0,785 \times 0,0025 = 0,021 m^3 / seg$$

El gaso total vale:

$$Q = Q_C + Q_D = 0,021 + 0,021 = 0,042 m^3 / seg$$

Que comprueba el resultado anterior

Caso: Único

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Propósito u objetivo: Aplicar la ecuación de continuidad.

Determinar los siguientes campos de flujo incompresible, para aquellos que satisfagan la ecuación de continuidad.

a) $v_x = (x-2y)t$

$v_y = -(2x+y)t$

b) $v_x = x^2 \cos y$

$v_y = -2x \sin y$

c) $v_x = x + y$

$v_y = x - y$

d) $v_x = \ln x + y$

$v_y = x y - (y/x)$

e) $v_x = A(x + y)$

$v_y = -A(x + y)$

Solución:

a) En todos los casos la ecuación a satisfacer es la ecuación (15)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = t;$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -t$$

$$\text{div } v = t - t = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -2t;$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -2t;$$

Flujo no permanente

b)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 2x \cos y;$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -2x \cos y$$

$$\text{div } v = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -2 \sin y;$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -x^2 \sin y;$$

Flujo permanente

c) $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 1;$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -1$$

$$\text{div } v = 0$$

Flujo permanente

$$\text{d)} \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{x}; \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = x - \frac{1}{x} \quad \text{div } v = x$$

No satisface la ecuación de continuidad por lo cual no puede existir un flujo incompresible con el campo de velocidades propuesto.

$$\text{e)} \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = A; \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = -A \quad \text{div } v = 0$$

El flujo es permanente, incompresible

2.- Propósito u objetivo: Aplicar la ecuación de velocidad para calcular el coeficiente numérico de la ecuación dada.

$$V = C (r_0^2 - r^2)$$

Teniendo como datos del ejercicio 1 resueltos, donde el tubo se conecta mediante una transmisión con otro de diámetro 30 cm. En una sección de este tubo la distribución de velocidades puede ser representada por una ecuación similar a la del tubo precedente.

Solución:

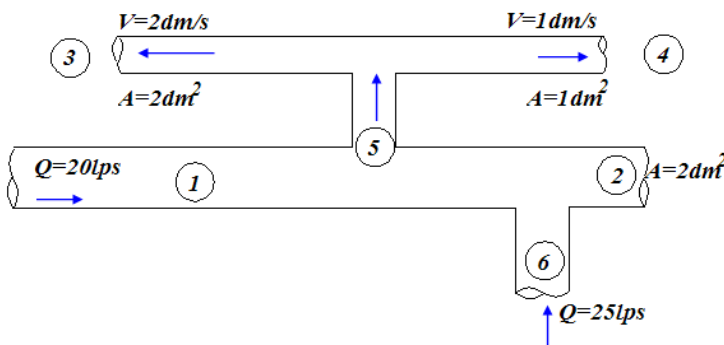
$$C = 163,47$$

Por lo tanto la ecuación que describe la distribución de velocidades en el segundo tubo será:

$$v = 163,47 (0,15^2 - r^2) \text{ [m/s]}$$

3.- Propósito u objetivo: Aplicando las ecuaciones deducidas para la velocidad en cinemática de fluidos.

Determinar la velocidad media en la sección 2, en el esquema de tuberías mostrado en la figura,



Solución.

$$Q_2 = Q_1 - Q_3 + Q_6$$

$$Q_2 = \frac{A_2 V_2 Q_2}{A_2}$$

$$V_2 = 2 \text{ [m/s]}$$

Capítulo 6:

DINÁMICA DE FLUIDOS

1.- INTRODUCCIÓN

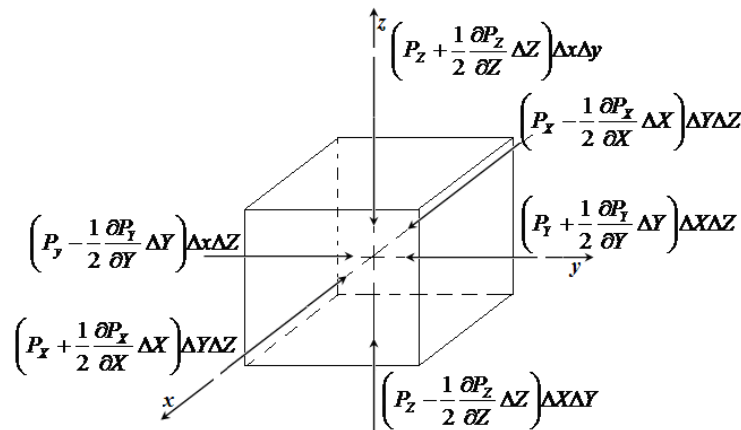
En este capítulo se refiere al estudio de los fluidos, tomando en cuenta las condiciones de inicio de movimiento. El capítulo se divide en dos partes: la primera es el estudio de la dinámica de los fluidos ideales donde no se consideran las fuerzas cortantes o de fricción, eliminando el concepto de la viscosidad, la segunda parte es la dinámica de los fluidos reales; donde los planteamientos son los mas aproximados a la realidad.

Sobre masas fluidas actúan las fuerzas cortantes, de presión y de gravedad (peso propio). Para fluidos ideales estas dos ultimas dos fuerzas deben combinarse de manera que cumplan la segunda ley de Newton, para fluidos reales deben incluirse las fuerzas viscosas.

2. DINÁMICA DE FLUIDOS IDEALES INCOMPRESIBLES

2.1 Ecuación de Euler

La figura 6.1, muestra el volumen de control de forma cúbica de lados Δx , Δy , Δz , colocado de forma que el origen de los ejes cartesianos esta justo en el centro de gravedad del elemento y el eje de la z coincide con la vertical, sobre este elemento actúan las siguientes fuerzas:



[2] Fuente: Introducción a la Hidráulica – Ing. Escobar Seleme (2004)

Fig. 6.1

Fuerzas de presión, la presión que actúa en los lados del elemento debido al fluido que no tomamos en cuenta, para tomarla como fuerza se debe multiplicar por el área en contacto, en este

caso por el área del lado del cubo. Estas fuerzas estarán en cada lado del mismo. Estas fuerzas de presiones desbalanceadas en cada eje son:

$$F_x = \left(-\frac{\partial p_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z$$

$$F_y = \left(-\frac{\partial p_y}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta z$$

$$F_z = \left(-\frac{\partial p_z}{\partial z} \Delta z \right) \Delta y \Delta x$$

Dividiendo todas estas fuerza por unidad de masa: $m = \rho \Delta x \Delta y \Delta z$

$$F_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad ; \quad F_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad ; \quad F_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}$$

Fuerza de gravedad, esta es debido al peso propio del volumen de control, y actúan en sentido contrario al eje Z:

$$\boxed{P_e = \gamma V} \quad (1)$$

$$P_e = \gamma \Delta x \Delta y \Delta z$$

Las fuerzas totales que actúan sobre el volumen de control serán:

$$F_x = \left(-\frac{\partial p_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z$$

$$F_y = \left(-\frac{\partial p_y}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta z$$

$$F_z = \left(-\frac{\partial p_z}{\partial z} \Delta z \right) \Delta y \Delta x + \gamma \Delta x \Delta y \Delta z$$

Se aplica la segunda ley de Newton, esta especifica que la fuerza es igual a la masa por la aceleración del cuerpo.

$$\sum F = m a \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{F}{m}} \quad (2)$$

Se sabe que la masa es:

$$m = \rho \Delta x \Delta y \Delta z$$

Por lo que las fuerzas por unidad de masa:

$$\frac{F_x}{m} = \frac{\left(-\frac{\partial p_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z}{\rho \Delta x \Delta y \Delta z}$$

$$\frac{F_y}{m} = \frac{\left(-\frac{\partial p_y}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta z}{\rho \Delta x \Delta y \Delta z}$$

$$\frac{F_z}{m} = \frac{\left(-\frac{\partial p_z}{\partial z} \Delta z \right) \Delta y \Delta x + \gamma \Delta x \Delta y \Delta z}{\rho \Delta x \Delta y \Delta z}$$

Eliminando términos y organizando se tiene:

$$\frac{F_x}{m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{F_y}{m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{F_z}{m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

Las fuerzas por unidad de masa halladas deben ser iguales a sus correspondientes aceleraciones en los mismos ejes:

$$a_x = \frac{F_x}{m}$$

$$a_y = \frac{F_y}{m}$$

$$a_z = \frac{F_z}{m}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\
 \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\
 \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g
 \end{aligned} \tag{3}$$

Estas últimas son las ecuaciones de Euler del movimiento de fluidos ideales, cualquier fuerza externa que existiera en el análisis esta se adicionara en el segundo miembro, según sus componentes por unidad de masa.

Estas ecuaciones se interpretan de la siguiente manera: En los ejes x e y las aceleraciones locales o convectivas se traduce en un cambio de presiones en esa misma dirección, es decir que una aceleración en este sentido provoca presión. En el sentido z toda aceleración provoca un cambio en la presión ayudado por el peso del cuerpo, es decir que habrá una variación en $F_z = -1/\rho(\partial P/\partial z) - g$, por que esto introduce en cambio en la altura piezométrica: $P/\gamma + z$

2.2 Planteamiento Bidimensional:

Para desarrollar un planteamiento bidimensional de las ecuaciones de Euler, usaremos un sistema de coordenadas naturales: Este sistema e coordenadas se refiere a tomar como eje x el eje tangente a la línea de corriente que llamaremos eje s y el eje y a la perpendicular esta ultima denominada eje n.

Tomaremos la figura 6.2. un volumen de control de forma cilíndrica colocado en el sentido de las líneas de corriente:

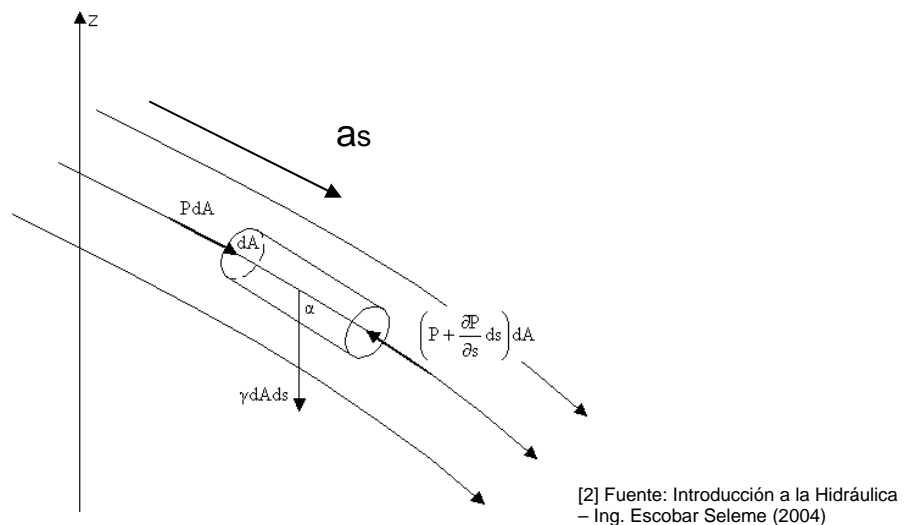


Fig. 6.2 Volumen de control cilíndrico en el sentido de las líneas de corriente.

De acuerdo a la segunda ley de Newton:

$$\sum F = m.a \Rightarrow p dA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) dA + \gamma dA ds \cos \alpha = \rho dA ds a_s$$

Como: $\cos \alpha = -\frac{dz}{ds}$

$$-\frac{\partial p}{\partial s} ds dA - \gamma \frac{\partial z}{\partial s} ds dA = \rho dA ds a_s$$

Por lo tanto: $-\frac{\partial}{\partial s} (p + \gamma z) = \rho a_s$

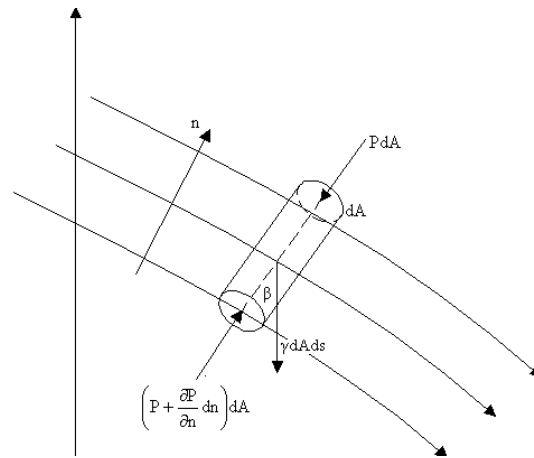
En el sentido normal a las líneas de corriente:

De la misma manera que el caso anterior, con referencia a la figura 6.3:

$$-\frac{\partial}{\partial n} (p + \gamma z) = \rho a_n$$

Por lo tanto:

$$-\frac{\partial}{\partial s} (p + \gamma z) = \rho \left[\frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial (v^2)}{\partial s} \right]$$



[2] Fuente: Introducción a la Hidráulica – Ing. Escobar Seleme (2004)

Fig. 6.3 Volumen de control cilíndrico en sentido normal a las líneas de corriente

$$-\frac{\partial}{\partial n} (P + \gamma z) = \rho \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{v^2}{r} \right)$$

2.3 Ecuación de Euler para Flujo Permanente, Ecuación de Bernoulli.

Utilizaremos las ecuaciones previamente halladas, para iniciar el análisis de esta ecuación.

Cuando planteamos el análisis para flujo permanente decimos que la variación de la velocidad con el tiempo es nula.

$$-\frac{\partial}{\partial s}(p + \gamma z) = \frac{\rho}{2} \frac{\partial(v^2)}{\partial s}$$

$$-\frac{\partial}{\partial n}(p + \gamma z) = \rho \frac{v^2}{r}$$

Integrando la primera ecuación a lo largo de s , tendremos:

$$-d\left(p + \gamma z + \frac{1}{2} \rho v^2\right) = 0$$

O bien:

$$\boxed{p + \gamma z + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{cte.}} \quad (4)$$

Esto quiere decir que la suma de los tres términos a lo largo de una misma línea de corriente es constante

Para la segunda ecuación:

$$-\frac{\partial}{\partial n}(p + \gamma z) = \rho v \frac{\partial v_n}{\partial s}$$

Donde: $\frac{v}{r} = \frac{\partial v_n}{\partial s}$

Si al segundo término se le suma y resta $\rho v \frac{\partial v_s}{\partial n}$

$$-\frac{\partial}{\partial n}(p + \gamma z) = \rho v \frac{\partial v_n}{\partial s} + \rho v \frac{\partial v_s}{\partial n} - \rho v \frac{\partial v_s}{\partial n}$$

$$-\frac{\partial}{\partial n}(p + \gamma z) = \rho v \frac{\partial v_n}{\partial s} + \rho v \left(\frac{\partial v_n}{\partial s} - \frac{\partial v_s}{\partial n} \right)$$

Integrando la ecuación, con $v_s = v$:

$$p + \gamma z + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{cte.} \quad \text{Ec. Bernoulli} \quad (5)$$

Por lo tanto, en un campo de flujo permanente, bidimensional e irrotacional, la variación del trabajo por unidad de volumen realizado por las fuerzas de presión y de gravedad de una masa fluida es igual al cambio de la energía cinética por unidad de volumen.

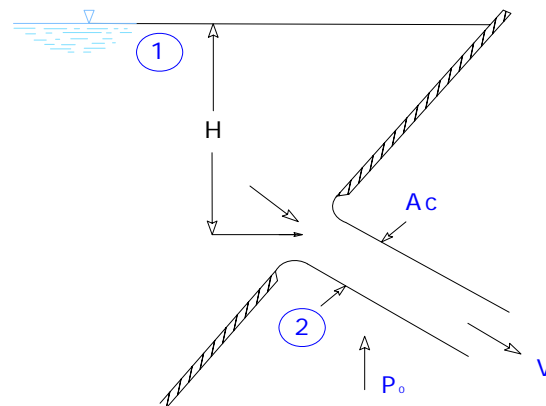
Tomando la ecuación entre dos puntos de una línea de corriente y dividiendo todo entre γ :

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \quad \text{Ec. Bernoulli desarrollada} \quad (6)$$

2.4 Flujo en Orificios

2.4.1. Ecuación general de los orificios

En la figura 6.4 se tiene un reservorio con un orificio lateral, situado a una profundidad H , desde centro de gravedad del orificio. Por este se descarga un gasto Q que se quiere hallar, pero la altura H se mantiene constante, por tratarse de un gran volumen en el reservorio o por que ingresa el mismo caudal que sale. El único contacto entre el agua y la pared en el orificio es una pequeña arista afilada, por eso se trata de un orificio de pared delgada.



Fuente: Elaboración propia

Fig. 6.4

Las partículas próximas al orificio se dirigen al centro del orificio, esto causa que a la salida se produzca una contracción del chorro la cual se produce en la sección 2 mostrada en la figura. Esta es llamada contraída y tiene un área A_c menor al área del orificio.

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre (1) y (2) y tomando como referencia un eje que pase por el centro de gravedad del orificio, tenemos:

$$z + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} ; \quad H = Z_1 + P_1/\gamma$$

$$H = \frac{V_2^2}{2g}$$

Se toma en cuenta el centro de gravedad del orificio y no así el de la contraída, este hecho puede ser despreciable. Despejando la velocidad:

$$\boxed{V = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}} \quad (7)$$

Esta última ecuación se denomina ecuación de Torricelli.

La ecuación de Torricelli indica que la velocidad varía parabólicamente con la altura H. si esto ocurre la velocidad en la parte superior del orificio será menor que en la parte inferior, estas velocidades tienden a ser iguales cuando el orificio se hace más pequeño. Esto también se soluciona con la aplicación de un coeficiente de velocidad C_v :

$$V = C_v \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$

El área de la contracción es más pequeña que el área del orificio, para considerar este hecho, también incluimos un coeficiente de contracción C_c al área del orificio:

$$\begin{aligned} A_c &= C_c A \\ Q &= C_v C_c A \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \\ Q &= C_d A \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \\ \text{donde } : C_d &= C_v C_c \end{aligned}$$

Donde:

C_d : coeficiente de gasto.

2.4.2- Trayectoria de la vena liquida

En la Figura 6.5 se ilustra una vena que se derrama por un orificio vertical bajo una carga h . La abscisa y la ordenada de un punto m , situado en la trayectoria del chorro son respectivamente x e y . Si v es la velocidad en la vena contracta, al final del tiempo t , entonces;

$$x = vt$$

Por la ley de la caída de los cuerpos,

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

Igualando a t y reemplazando

$$x^2 = \frac{2V^2}{g} y \quad (8)$$

Esta es la ecuación de una parábola con su vértice en el orificio, como

$$V = C_v \sqrt{2gh}$$

Ec. para calcular la velocidad real de la partícula fluida.

La ecuación (8) podrá escribirse en la forma:

$$x^2 = 4C_v^2 hy$$

Ec. de una parábola

(9)

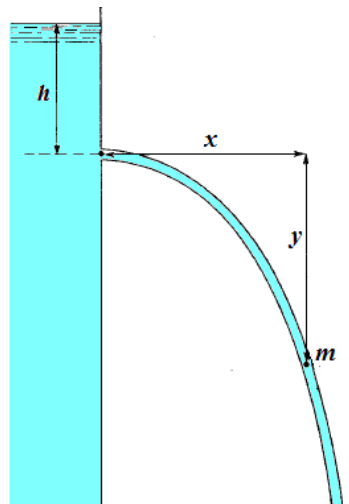


Fig. 6.5

[2] Fuente: Introducción a la Hidráulica
– Ing. Escobar Seleme (2004)

2.4.3.- Coeficiente de velocidad, contracción y gasto, en orificios de pared delgada

- Coeficiente de velocidad

Este se obtiene generalmente haciendo una serie de mediciones de trayectoria del chorro. Si una partícula sale del orificio con una velocidad V_r , y después de “t” segundos se halla la posición en un punto determinado de la trayectoria de la vena líquida, de donde tomando las ecuaciones del punto anterior tenemos:

$$V_r = C_v \sqrt{2gh}$$

Despejando obtendremos:

$$C_v = \frac{x \sqrt{\frac{g}{2y}}}{\sqrt{2gh}} \quad (10)$$

- V_r ; velocidad real de la partícula fluida
- C_v ; coeficiente de velocidad

- Coeficiente de contracción

Como se comentó anteriormente el chorro de líquido al salir del orificio se contrae de manera que el área efectiva del chorro es ligeramente menor que el área del orificio, entonces podemos hacer una relación de áreas, esta relación se denomina coeficiente de contracción (C_c), este coeficiente varía ligeramente con el tamaño del orificio y con la carga de líquido, tienen un valor promedio de 0.62 aproximadamente, para orificios Standard. Su uso principal se halla en la determinación del área transversal de la vena líquida, en la sección contraída (Fig. 6.6).

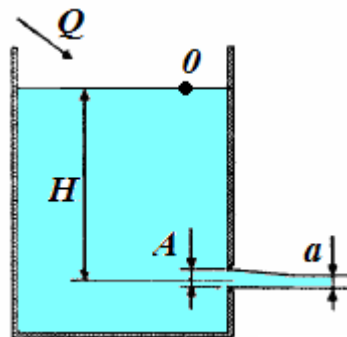


Fig. 6.6

[2] Fuente: Introducción a la Hidráulica
– Ing. Escobar Seleme (2004)

Este coeficiente será:

$$C_c = \frac{a}{A} \Rightarrow a = AC_c \quad (11)$$

Donde:

- a ; área de la vena líquida
- A ; área del orificio
- C_c ; coeficiente de contracción

Por relación entre las formulas vistas anteriormente, podemos relacionar directamente los tres coeficientes vistos:

$$C_d = C_c C_v$$

Se muestra a continuación una tabla donde se observan las variaciones de estos coeficientes con el uso de esta ecuación (**Tabla. 7 Anexo**).

Mediante experimentos se determino que los coeficientes de velocidad contracción y gasto son función del número de Reynolds, con lo cual se presenta un grafico, donde observamos que para $Re > 10^5$, los coeficientes de contracción, velocidad y gasto son independientes de este número y adquieren valores constantes:

$$C_v = 0.99$$

$$C_c = 0.605$$

$$C_d = 0.60$$

coeficientes para orificios de pared delgada Gráfica 4 (Anexo)

- Coeficiente de gasto o descarga

La cantidad o volumen “Vol” que fluye del orificio, por unidad de tiempo “t”, puede expresarse por el producto del área efectiva “a” de la sección contraída, por la velocidad efectiva “ V_r ”, adquirida por el agua al pasar por dicha sección; tenemos:

$$Q_r = aV_r = (AC_c)(C_v\sqrt{2gh}) = C_c C_v A\sqrt{2gh} \quad (12)$$

Donde: $C_c.C_v = C_d$, por lo que la ecuación (12) puede escribirse como:

$$Q_r = C_d A \sqrt{2gh} \quad [\text{m}^3/\text{s}] \quad (13)$$

$$C_d = \frac{Q_r}{Q_t} \quad (14)$$

- Q_r ; caudal real
- $Q_t = A(2gh)^{1/2}$; caudal teórico

Este caudal teórico tendría lugar si no hubiera fricción, ni contracción de la vena líquida.

2.4.4. Perdida de carga en un orificio

A causa del rozamiento y de la viscosidad, la velocidad del agua que se derrama por un orificio es menor que $\sqrt{2gh}$, o sea:

$$v = C_v \sqrt{2gh}$$

La carga total que produce el derrame es, por lo tanto,

$$h = \frac{1}{C_v^2} \frac{v^2}{2g} \quad [\text{m}] \quad (15)$$

La carga perdida es igual a la carga total menos la carga de velocidad, o sea, si h_o es la carga perdida,

$$h_o = \frac{1}{C_v^2} \frac{v^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} = \left(\frac{1}{C_v^2} - 1 \right) \frac{v^2}{2g} \quad [\text{m}]$$

Como $v = C_v v_t$; donde $v_t = \text{velocidad teorica}$,

$$h_o = (1 - C_v^2) h \quad [\text{m}] \quad (16)$$

Si, para un orificio de arista viva, $C_v = 0.98$, se obtiene la siguiente relación:

$$h_o = 0.041 \frac{v^2}{2g} = 0.040 h \quad [\text{m}] \quad (17)$$

2.4.5.-Orificios con descarga sumergida

Cuando un orificio descarga a otro tanque cuyo nivel esta por arriba del canto inferior del orificio, se dice que la descarga es ahogada. El ahogamiento puede ser total fig. 6.7 o puede ser parcial fig. 6.8.

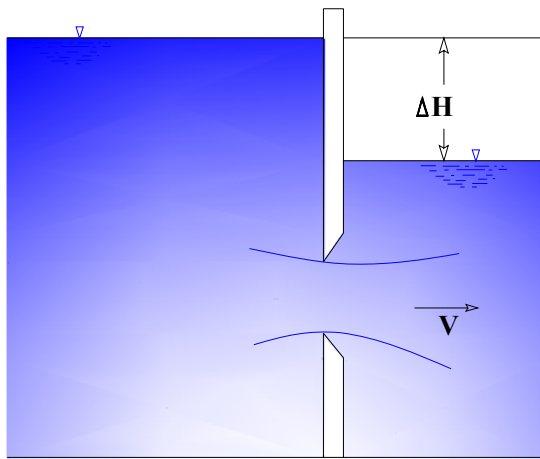


Fig. 6.7

Fuente: Elaboración Propia

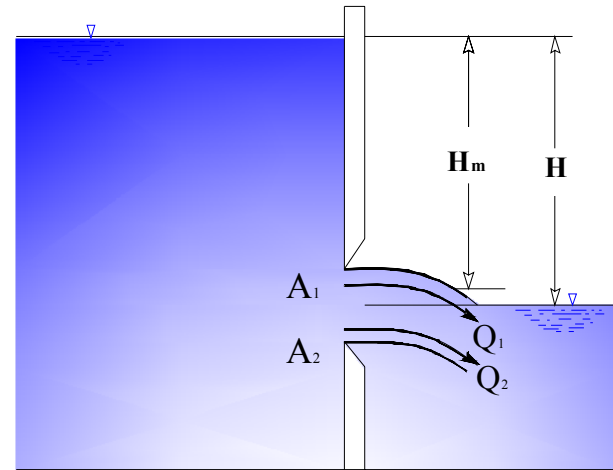


Fig. 6.8

En el caso de descarga ahogada total se puede derivar una ecuación análoga a la general, con la única diferencia que la energía total H se cambia por la diferencia de energía entre los dos tanques ΔH (diferencia de niveles entre los dos tanques), entonces la ecuación es:

$$Q = C_d A \sqrt{2g\Delta H}$$

Se recomienda utilizar el mismo coeficiente de gasto que el de un orificio de descarga libre.

Cuando el ahogamiento es parcial, como en la figura 6.8, el gasto descargado por el orificio se puede expresar como la suma Q_1 y Q_2 , donde Q_1 es el gasto correspondiente a la porción del orificio con descarga libre, es decir:

$$Q_1 = C_{d1} A_1 \sqrt{2gH}$$

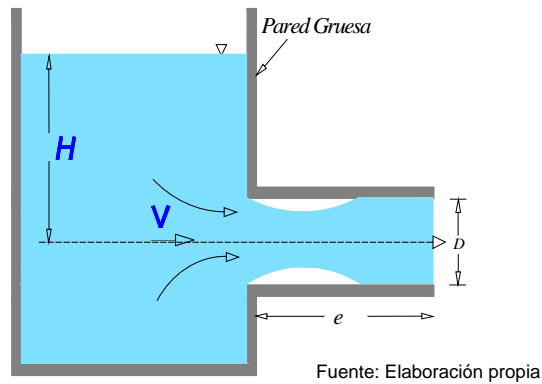
Y Q_2 es el gasto de porción del orificio con descarga ahogada, a saber:

$$Q_2 = C_{d2} A_2 \sqrt{2gH_m}$$

No hay investigaciones confiables acerca de los coeficientes de gasto C_{d1} y C_{d2} , al respecto Schlang propone que $C_{d1} = 0.70$ y $C_{d2} = 0.675$, en el caso de que un orificio tenga un umbral en el fondo.

2.4.6. Gasto en orificios de pared gruesa

Cuando el contorno del orificio en estudio no tiene aristas afiladas, se dice que el orificio es de pared gruesa. En este tipo de orificios podemos notar que después de la sección contraída, el chorro aun tiene espacio dentro del tubo para expandirse y llenar la totalidad de la sección (Fig. 6.9).

**Fig. 6.9**

Entre la vena contraída y el final del tubo ocurre un rápido descenso en la velocidad, acompañado de una turbulencia y una fuerte pérdida de energía, en este caso la velocidad será:

$$V = C_v \sqrt{2gh} \quad (18)$$

Donde:

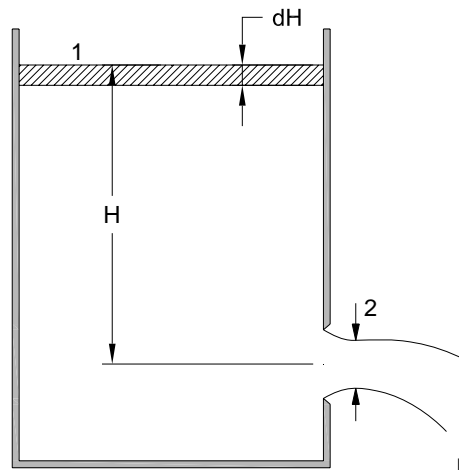
- $C_v = 0.82$ para $e/D = 3$
- $C_c = 1$ por lo que $C_d = C_v = 0.82$

Por lo que el gasto es aproximadamente, un tercio mayor que en un orificio de pared delgada. Este se debe a que en la sección contraída se forma un vacío parcial con presión ligeramente menor a la atmosférica, lo que aumenta el valor efectivo de la carga H. (**Tabla 8. Anexo** - Coeficientes de gasto para diferentes tipos de Orificios de pared gruesa)

2.5. Vaciado de Tanques.

En la ecuación de Torricelli hallada para determinar la velocidad de flujo por un orificio, se puede notar que esta velocidad es función de la altura H piezométrica en el tanque, es decir de la profundidad de agua, donde esta altura es constante para una velocidad determinada. Pero que pasa en el caso que esta altura para descendiendo en función del flujo que sale.

Ahora se desarrollará un método para calcular el tiempo requerido para vaciar un tanque, tomando en cuenta la variación de la velocidad a medida que disminuya la profundidad del fluido.



[2] Fuente: Introducción a la Hidráulica
– Ing. Escobar Seleme (2004)

Fig. 6.10 Flujo a través de orificios, con estanque de área conocida.

Para determinar la velocidad de salida se aplica la ecuación de Torricelli:

$$V_s = C_v \sqrt{2gH}$$

Por lo tanto el caudal de salida será:

$$Q = A_c V_s$$

Donde: A_c es el área contraída.

El Volumen de líquido que sale del tanque después de un diferencial de tiempo dt , será:

$$V = Q dt = A_c V_s dt$$

En el mismo tiempo en el tanque el nivel de agua desciende un dH , el volumen que descendió el líquido será:

$$V_d = -A_T dH$$

Donde: A_T es el área de la sección interior del tanque. El signo negativo se debe a que el nivel del líquido está descendiendo.

El volumen del líquido que sale debe ser igual al volumen de líquido que desciende en el tanque:

$$V_d = V \Rightarrow -A_T dH = A_c V_s dt$$

Despejando dt :

$$dt = -\frac{A_T}{A_c V_s} dH$$

$$dt = - \frac{A_T}{A_c C_v \sqrt{2gH}} dH$$

$$dt = - \frac{A_T}{A_c C_v \sqrt{2g}} H^{-1/2} dH$$

Integrando entre dos niveles a y b, donde a es el nivel de la superficie en el tiempo 0 y b el nivel en el tiempo dt.

$$t = - \frac{A_T}{A_c C_v \sqrt{2g}} \left[\frac{H^{1/2}}{\frac{1}{2}} \right]_{H_a}^{H_b}$$

$$t = - \frac{2A_T}{A_c C_v \sqrt{2g}} \left(H_b^{1/2} - H_a^{1/2} \right)$$

$$t = \frac{2A_T}{A_c C_v \sqrt{2g}} \left(H_a^{1/2} - H_b^{1/2} \right)$$

El área contraída es igual a: $A_c = C_c A$ donde A es el área del orificio. Además $C_d = C_c C_v$ coeficiente de gasto.

$$t = \frac{2A_T}{C_d A \sqrt{2g}} \left(H_a^{1/2} - H_b^{1/2} \right)$$

Esta ecuación se aplica para determinar el tiempo que tarda en vaciarse un tanque, teniendo en cuenta la variación de la velocidad de salida del flujo por el orificio.

2.6. Ecuación de la Energía

El principio de la conservación de la energía basada en la segunda ley de Newton, establece que el trabajo hecho por las fuerzas que actúan sobre una masa fluida es igual al cambio en la cantidad de energía de esa masa.

Las fuerzas que actúan en masas fluidas son: las fuerzas de presión, originadas por la presión que ejerce al mismo fluido multiplicado por una área determinada, la fuerza de gravedad, referente al peso propio de la masa fluida, las fuerzas viscosas, o también llamadas fuerzas tangenciales, y cualquier fuerza exterior, estas producen energía que se añade o se sustrae al sistema.

Entonces:

$$dT = dE$$

$$dT = dE_p + dE_c + dE_e$$

Donde:

T = Trabajo

E_p = Energía potencial

E_c = Energía cinética

E_e = Energía añadida o extraída.

Para el análisis tomamos un volumen de control de dimensiones finitas, de la forma de la (figura 6.11). Además tomamos otro volumen de dimensiones diferenciales dentro del primer volumen de control.

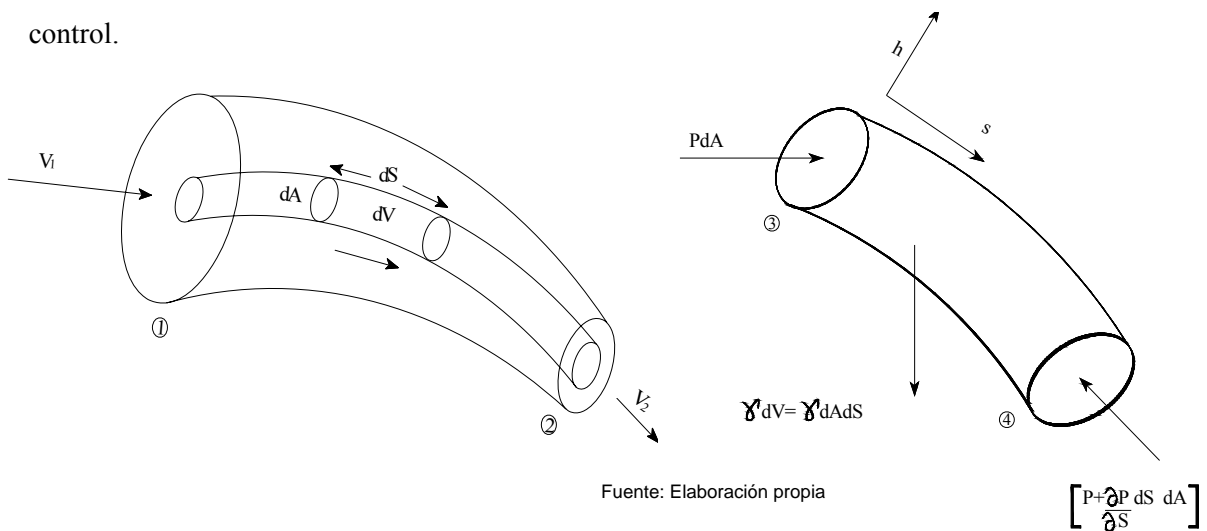


Fig. 6.11

Tomamos una sección (3) en el elemento diferencial y al cabo de un diferencial de tiempo dt este tomara otra posición (4) .

La fuerza de presión contenida entre las secciones (3) y (4) será:

$$dP = PdA - \left(p + \frac{\partial P}{\partial s} ds \right) dA$$

$$dP = \left(- \frac{\partial P}{\partial s} ds \right) dA$$

El trabajo que realiza esta fuerza será:

$$dT = dP ds$$

$$dT = \left(-\frac{\partial P}{\partial s} ds \right) dA ds$$

La energía potencial será el trabajo realizado por el peso del elemento al desplazarse un dz:

$$dE_p = \gamma \cdot dV dz \qquad dE_p = \gamma \cdot (dA ds) \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)$$

La energía cinética es igual a:

$$dE_c = d \left(\frac{1}{2} M v^2 \right) = d \left(\frac{1}{2} \rho \cdot V \cdot v^2 \right)$$

Para un fluido incompresible:

$$\boxed{dE_c = \frac{1}{2} \rho \cdot dA ds \left(\frac{\partial v^2}{\partial s} ds \right)} \qquad (19)$$

Reemplazando las ecuaciones halladas en la ecuación general de la energía, tenemos:

$$\left(-\frac{\partial P}{\partial s} ds \right) dA \cdot ds = \gamma (dA \cdot ds) \left(\frac{\partial z}{\partial s} ds \right) + \rho (dA \cdot ds) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial s} ds \right)$$

Sabemos que: $v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v dt$

$$\left(-\frac{\partial P}{\partial s} ds \right) dA \cdot v \cdot dt = \gamma (dA \cdot v \cdot dt) \left(\frac{\partial z}{\partial s} ds \right) + \rho (dA \cdot v \cdot dt) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial s} ds \right)$$

Además: $dQ = v \cdot dA$

$$\left(-\frac{\partial P}{\partial s} ds \right) dQ \cdot dt = \gamma (dQ \cdot dt) \left(\frac{\partial z}{\partial s} ds \right) + \rho (dQ \cdot dt) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial s} ds \right)$$

$$\left(-\frac{\partial P}{\partial s} ds \right) dQ \cdot dt - \gamma (dQ \cdot dt) \left(\frac{\partial z}{\partial s} ds \right) - \rho (dQ \cdot dt) \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial s} ds \right) = 0$$

Toda esta expresión también puede escribirse de la siguiente manera:

$$-\frac{\partial}{\partial s} \left(P + \gamma \cdot z + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) dQ \cdot ds = 0$$

Integrando esta ecuación sobre una línea de corriente entre (1) y (2), tenemos:

$$\left[\left(p_1 + \gamma \cdot z_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 \right) - \left(p_2 + \gamma \cdot z_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 \right) \right] dQ = 0$$

En el sentido normal a la línea de corriente, debemos integrar en toda el área de la sección (1) y (2):

$$\int_{A_1} \left(p_1 + \gamma \cdot z_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 \right) dQ - \int_{A_2} \left(p_2 + \gamma \cdot z_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 \right) dQ = 0$$

Se deben elegir secciones donde las aceleraciones normales sean despreciables, es decir, secciones sobre líneas de corriente aproximadamente rectas. Si elegimos de esa manera, entonces:

$$p_1 + \gamma \cdot z_1 = Ctte. \quad y \quad p_2 + \gamma \cdot z_2 = Ctte.$$

Con esto, la ecuación general queda:

$$\boxed{(p_1 + \gamma \cdot z_1)Q + \int_{A_1} \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 dQ = (p_2 + \gamma \cdot z_2)Q + \int_{A_2} \frac{1}{2} \rho \cdot v_2^2 dQ} \quad (20)$$

La integral de la expresión anterior se la representa también:

$$\int_A \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 dQ = \alpha \cdot Q \rho \frac{V^2}{2}$$

Donde:

V = velocidad media en la sección respectiva.

α = Coeficiente de Coriolis, coeficiente de corrección del hecho de tomar la velocidad media en el análisis y no así la distribución de velocidad real.

$$\alpha = \frac{1}{Q} \int_A \left(\frac{v}{V} \right)^2 dQ = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{v}{V} \right)^3 dA$$

$$\left(p_1 + \gamma \cdot z_1 + \frac{1}{2} \alpha_1 V_1^2 \right) Q = \left(p_2 + \gamma \cdot z_2 + \frac{1}{2} \alpha_2 V_2^2 \right) Q$$

Dividiendo todo entre γ :

$$\left(\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} \right) Q = \left(\frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} \right) Q$$

Por el principio de conservación de la masa sabemos que por un tubo de corriente el caudal se mantiene constante, entonces:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g}$$

$$H = \frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = ctte.$$

Estas dos últimas ecuaciones se denominan ecuación de la Energía.

Cuando existan fuerzas externas que produzcan energía añadida o extraída, la ecuación de la energía se completa así:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} \pm H_e$$

Donde: $E_e = \gamma \cdot V H_e$

Cuando se usa la ecuación de la energía entre dos secciones de tuberías, también incluimos la pérdida de carga H_e en el análisis. Esta pérdida es debida a la fricción que existe entre la tubería y el fluido. Además se debe incluir un factor de corrección correspondiente al cambio de local velocidad, esta es debido a cambios de dirección o cambios de velocidad instantáneos:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + H_e + \sum_1^2 H_r + \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial(\beta \cdot v)}{\partial t} ds \quad (21)$$

Donde:

α y β : Se conocen como coeficiente de Coriolis y de Bousinesq.

$\sum_1^2 H_r$: Disipación de energía interna entre (1) y (2) . Pérdida de carga

Z : Carga de posición, medido desde un plano de referencia , hasta en el caso de tuberías al eje de la tubería.

$\frac{p}{\gamma}$: Carga de presión. Carga piezométrica.

$\alpha \frac{V^2}{2g}$: Carga de velocidad.

$\frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial(\beta \cdot v)}{\partial t}$: Carga correspondiente al cambio local de velocidad.

H_e : Carga de energía añadida o extraída.

Esta última ecuación es la presentación más general de la ecuación de la energía, que se aplica para una misma línea de corriente entre dos secciones.

2.6.1 Interpretación de la ecuación de la Energía.

Con el objeto de entender mejor las diferentes aplicaciones de la ecuación (21) es adecuado hacer una interpretación física de los diferentes términos que intervienen en ella. El análisis de cada uno de sus términos muestra que corresponden a los de una longitud o carga.

La ecuación (21) establece las relaciones entre las diferentes transformaciones de la energía mecánica del líquido, por unidad de peso del mismo [F L/F]. la carga de posición es la energía potencial; la carga de presión es la energía correspondiente al trabajo mecánico ejecutado por las fuerzas debido a la presión; la carga de velocidad es la energía cinética de toda la vena líquida; la

perdida de carga es la energía transformada en otro tipo de energía (transferencia de calor) que, en el caso de los líquidos, no es utilizable en el movimiento; y finalmente, la carga correspondiente al cambio local de la velocidad es la energía utilizada para efectuar dicho cambio.

- a) $\frac{\partial \beta V}{\partial t} = 0$ y la ecuación (21) se reduce a la expresión:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \sum_1^2 H_r \quad (22)$$

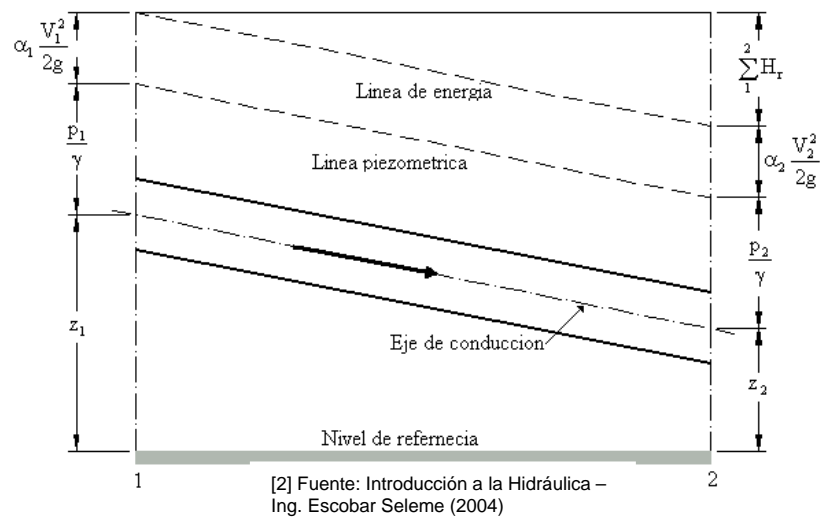


Fig. 6.12 Interpretación gráfica de la ecuación de la energía

- b) Si , además no hay pérdida de energía , $\sum_1^2 H_r = 0$ y los coeficientes $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, la ecuación anterior a) adopta la forma llamada ecuación de Bernoulli para una vena líquida, esto es:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

- c) Si $H = \frac{p}{\gamma} + z + \alpha \frac{V^2}{2g}$ representa la energía por unidad de peso que tiene el líquido en una determinada sección, la cual es medida desde el plano horizontal de referencia, la ecuación (22) se simplifica así:

$$H_1 = H_2 + \sum_1^2 H_r$$

En una determinada sección la energía de un volumen v del líquido, respecto del plano horizontal de referencia, es:

$$E = \gamma.H.v$$

Y, por definición de energía y potencia, en esa sección esta última vale:

$$\boxed{P = \gamma.Q.H} \quad (23)$$

Donde:

- γ : peso específico del líquido, en kg/m^3 ;
- H : energía total respecto del plano de referencia, en m;
- Q : gasto en la sección considerada, en m^3/seg .
- P : potencia del líquido, en kg.m/seg .

Si se multiplican ambos miembros de la ecuación 23 por γQ , para el flujo permanente, esta ecuación se puede expresar también en la forma:

$$P_1 = P_2 + \sum_1^2 P_r$$

Una interpretación física de cada uno de los términos de la ecuación (21) para una conducción forzada con escurrimiento no permanente, se muestra en la figura 6.13, la cual tendría validez para un instante determinado. Con este esquema se pueden hacer las siguientes definiciones.

1. La línea de energía une los puntos que indican en cada sección la energía de la corriente.
2. La línea de cargas piezométricas o gradiente de cargas de presión, une los puntos que marcan en cada sección la suma de las cargas $z + P/\gamma$ por arriba del plano de referencia.

De acuerdo con estas definiciones la línea de cargas piezométricas está separada de la línea de energía, una distancia vertical $\alpha \frac{V^2}{2g} + \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial(\beta.v)}{\partial t} ds$, correspondiente a cada sección. Al mismo tiempo se pueden hacer las siguientes generalizaciones.

1. La línea de energía no puede ser horizontal o con inclinación ascendente en la dirección del escurrimiento, si el líquido es real y no adquiere energía adicional desde el exterior. la

diferencia de nivel de la línea de energía en dos puntos distintos representa la pérdida de carga o disipación de energías por unidad de peso del líquido fluyente.

2. La línea de energía y la de cargas piezométricas coinciden y quedan al nivel de la superficie libre para un volumen de líquido en reposo (por ejemplo, un deposito o un embalse).
3. En el caso de que la línea de cargas piezométricas quede en algún tramo por debajo del eje de la vena líquida, las presiones locales en ese tramo son menores que la presión cero de referencia que se utilice (comúnmente la presión atmosférica).

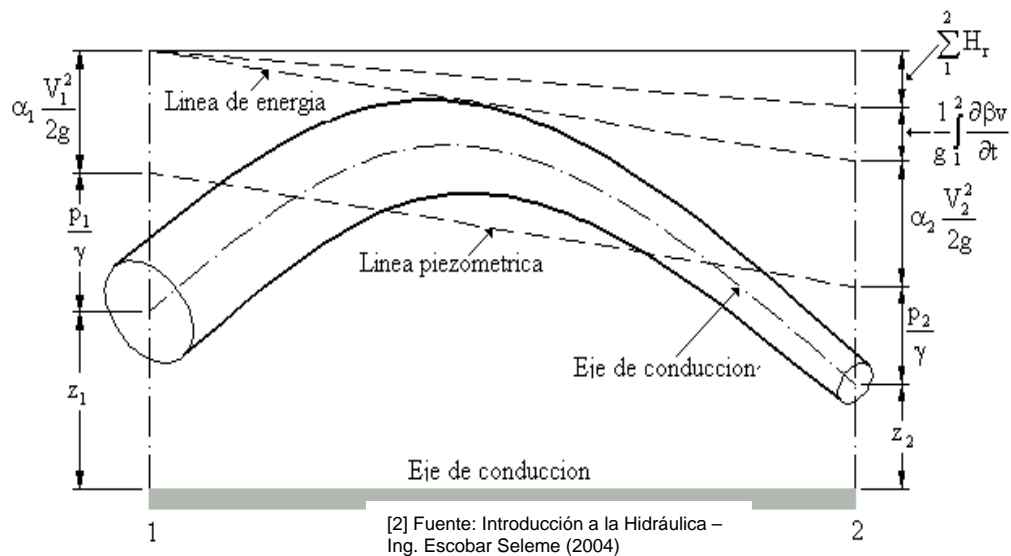


Fig. 6.13 Interpretación de la ecuación de la Energía para una conducción forzada

En la figura 6.14 se muestra la disposición de las líneas de energía, y de cargas piezométricas de una instalación hidroeléctrica donde el flujo es permanente; la turbina aprovecha la energía disponible $H_{a,b}$, en la figura 6.15 se muestra el mismo esquema, pero en este caso se trata de una instalación de bombeo. Para los dos casos la ecuación 21 se escribe como sigue:

$$z_1 = z_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \sum_1^a H_r + \sum_b^2 H_r + H_{a,b} \quad (24)$$

En la instalación hidroeléctrica la turbina queda generalmente muy próxima a la sección 2 y el término $\sum_b^2 H_r$ es despreciable.

Por lo que respecta al termino $H_{a,b}$ este se ha empleado en la ecuación (24) como una energía cedida o añadida al flujo y tiene las dimensiones de una longitud. En efecto, por definición de potencia ecuación (23) tenemos que:

$$H_{a,b} = \frac{P}{\gamma \cdot Q}$$

Es la energía neta por unidad de peso que se cede o se transmite al líquido por efecto de la máquina; tiene signo positivo en la ecuación (24) cuando el líquido cede energía (turbina) o negativo cuando la recibe (bomba). Aun más si, P_n es la potencia nominal de la máquina y η su eficiencia, entonces:

$$H_{a,b} = \frac{P_n}{\eta \cdot \gamma \cdot Q} \text{ si se trata de una turbina; y } H_{a,b} = -\frac{\eta P_n}{\gamma \cdot Q} \text{ si es una bomba.}$$

En el caso de una conducción a superficie libre en escurrimiento continuo (figura 6.14) , con líneas de corriente curvatura despreciable y paralelas, es mas adecuado medir la carga de posición desde el plano de referencia hasta el punto mas bajo de la sección transversal, esto es, hasta la plantilla del canal. La carga de presión coincide con el tirante y de la sección, es decir, con el desnivel entre

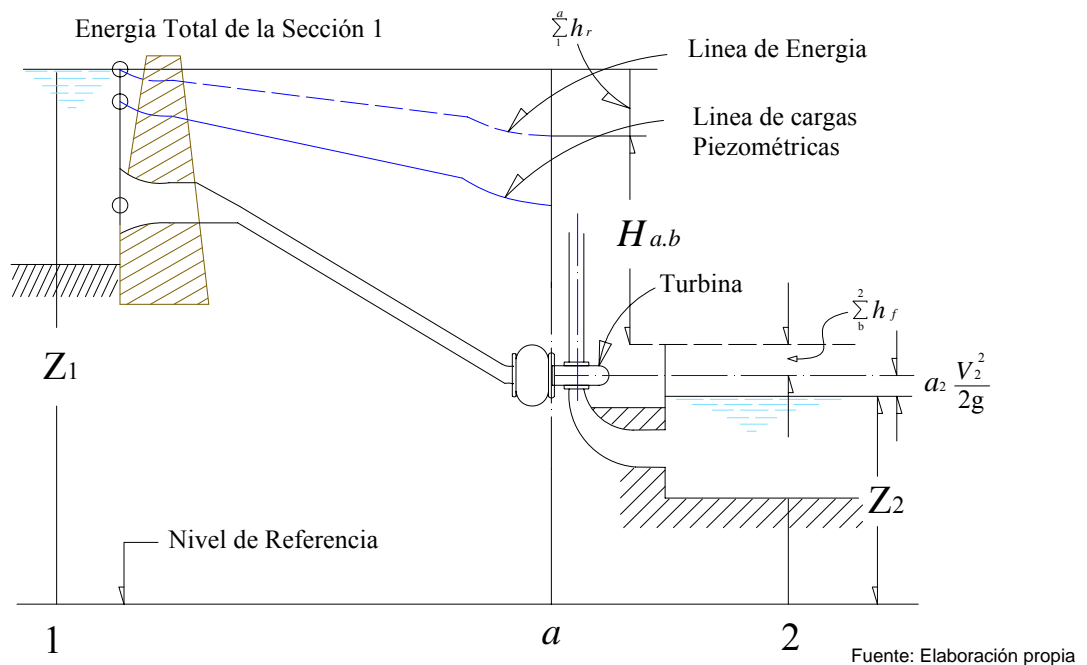
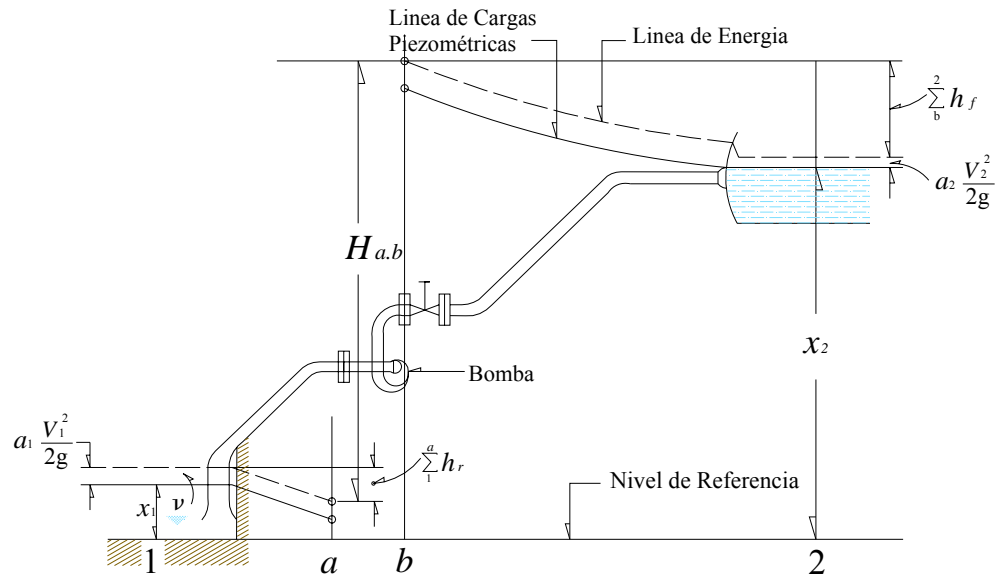


Fig. 6.14 Líneas de energía y de cargas piezométricas en una instalación hidroeléctrica



Fuente: Elaboración propia

Fig. 6.15 Líneas de energía y de cargas piezométricas en una instalación de bombeo

la superficie libre y la plantilla, siempre que sea pequeño el ángulo θ de inclinación de la plantilla. Esto equivale a considerar que la distribución de presiones es hidrostática y que no existen componentes de la aceleración normales a la dirección del flujo.

3. DINÁMICA DE FLUIDOS REALES

Al incluir el análisis del movimiento de los fluidos, se debe tomar en cuenta varios factores que intervienen en el movimiento de estos fluidos, uno de estos factores es la viscosidad, esta influye en la velocidad directamente, de tal manera que los flujos son rotacionales, por lo tanto las deformaciones mencionadas anteriormente juegan un papel importante en el estudio de estos.

Los fluidos reales se mueven generalmente bajo dos tipos de flujo, estos son el laminar o viscoso, donde el flujo es dominado por las acciones de la viscosidad, es decir, este se mueve en capas paralelas, y el otro tipo de flujo turbulento, además de las fuerzas debidas a la viscosidad, actúan otras originadas por el intercambio aleatorio y permanente de cantidad de movimiento dentro del campo de flujo, produciendo así un movimiento inestable.

3.1 Efecto de la viscosidad - Ecuación de Navier Stokes

A las ecuaciones de Euler, tomando en cuenta solo las fuerzas de presión y la del peso propio, añadimos los esfuerzos cortantes que se producen en cada cara del elemento diferencial de la figura 6.1.

En cada lado del elemento el esfuerzo cortante se presenta en dos direcciones, cada una de ellas paralelas a los ejes que conforman el plano de la cara correspondiente. Adicionalmente, los esfuerzos sufrirán una variación desde una cara hasta la cara paralela. Los esfuerzos multiplicados por el área del lado respectivo dará la fuerza cortante correspondiente, que puede reducirse fuerza por unidad de masa dividiendo por. $\rho\Delta x\Delta y\Delta z$.

Las fuerzas unitarias cortantes o de resistencia sumadas en el sentido de cada eje, llevan a las siguientes expresiones de fuerzas totales por unidad de masa, f_c :

$$f_{cx} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

$$f_{cy} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right)$$

$$f_{cz} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right)$$

Los esfuerzos en cada cara son tales que:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

De acuerdo a la ecuación general de la viscosidad cuya versión bidimensional que ya la vimos en el capítulo 1, ahora podemos usarla en su forma tridimensional:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)$$

Sustituyendo estas ecuaciones en las fuerzas por unidad de masa, realizando simplificaciones:

$$f_{cx} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_x$$

$$f_{cy} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_y$$

$$f_{cz} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_z$$

Entonces añadiéndose estos términos en las ecuaciones de Euler obtenemos las ecuaciones de Navier – Stokes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_x \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_y \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z &= -\left(g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}\right) + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_z \end{aligned}$$

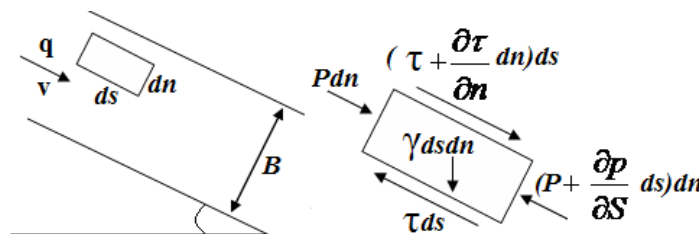
Donde el operador ∇^2 es:

$$\boxed{\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}} \quad (25)$$

3.2 Flujo viscoso uniforme y permanente.

3.2.1 Flujo entre placas paralelas

La figura 6.16 muestra dos placas paralelas separadas una distancia B e inclinadas un ángulo “ α ”. En el sentido normal a la figura, las placas tienen una longitud infinita, entre ellas se mueve un fluido de densidad y viscosidad constante y el gasto también constante. Las líneas de corriente serán rectas y paralelas a los bordes y entre sí.



[2] Fuente: Introducción a la Hidráulica
– Ing. Escobar Seleme (2004)

Fig. 6.16

Dentro este flujo aislamos un volumen de control diferencial bidimensional de dimensiones ds por dn . El equilibrio según las líneas de corriente:

$$Pdn - \left(P + \frac{\partial P}{\partial s} ds \right) dn + \gamma ds dn \sin \alpha - \tau dn + \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial n} dn \right) ds = 0$$

$$-\frac{\partial P}{\partial s} ds dn + \gamma \sin \alpha ds dn + \frac{\partial \tau}{\partial n} dn ds = 0 \quad ; \quad \sin \alpha = -\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial s} (P + \gamma z) ds dn + \frac{\partial \tau}{\partial n} dn ds = 0$$

Si no existe aceleración normal entonces el valor $P + \gamma z$ es constante, si no hay movimiento en el sentido normal no habrá variación longitudinal del esfuerzo de corte, por lo que la ecuación será:

$$\gamma \frac{dh}{ds} = \frac{d\tau}{dn} \quad ; \quad h = \frac{P}{\gamma} + z = \text{Altura piezométrica}$$

Integrando la ecuación:

$$\int \frac{d\tau}{dn} dn = \int \gamma \frac{dh}{ds} dn$$

la expresión $\frac{dh}{ds}$ no varia con n , entonces se tendrá:

$$\boxed{\tau = \gamma \frac{dh}{ds} n + C} \quad (26)$$

El esfuerzo cortante varia linealmente con “ n ”, puesto que el flujo entre las dos placas es simétrico, no queda otra que las magnitudes de los esfuerzos cortantes en los contornos sean iguales, dado que en el punto medio $n=B/2$, el esfuerzo cortante es nulo:

$$\tau = 0 = \gamma \frac{dh}{ds} \frac{B}{2} + C$$

$$C = -\gamma \frac{dh}{ds} \frac{B}{2}$$

Sustituyendo tendremos:

$$\tau = -\gamma \frac{dh}{ds} \left(\frac{B}{2} - n \right) \quad (27)$$

De la ecuación diferencial de la viscosidad y sustituyendo en la ecuación tendremos:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

$$\mu \frac{dv}{dn} = -\gamma \frac{dh}{ds} \left(\frac{B}{2} - n \right)$$

$$dv = -\frac{\gamma}{\mu} \frac{dh}{ds} \left(\frac{B}{2} - n \right) dn$$

$$\int dv = -\int \frac{\gamma}{\mu} \frac{dh}{ds} \left(\frac{B}{2} - n \right) dn$$

$$v = -\frac{\gamma}{2\mu} \frac{dh}{ds} (Bn - n^2) + C_1 \quad (28)$$

La constante de integración puede obtenerse de la condición que en los contornos la velocidad de estos y la del fluido es la misma, es decir, si son estos estacionarios, $v = \text{nula}$ para $n = 0$ ó B , por lo que C_1 también será cero, entonces:

$$v = -\frac{\gamma}{2\mu} \frac{dh}{ds} (Bn - n^2) \quad (29)$$

La variación de la velocidad será parabólica como la ecuación anterior lo demuestra.

Como la distribución de velocidades es parabólica, la velocidad máxima se dará en la mitad de la separación “ $B/2$ ”, por lo que la ecuación máxima será:

$$v_{\max} = -\frac{\gamma}{8\mu} \frac{dh}{ds} (B^2) \quad (30)$$

En el caso de una distribución parabólica la velocidad media será 2/3 de la máxima:

$$v = \frac{2}{3} v_{\max} = -\frac{\gamma}{12\mu} \frac{dh}{ds} (B^2) \rightarrow \frac{dh}{ds} = -\frac{12\mu V}{\gamma B^2} \rightarrow \int_1^2 -dh = \int_1^2 \frac{12\mu V}{\gamma B^2} ds$$

Considerando que la velocidad media es un valor constante:

$$\boxed{-\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{12\mu V}{\gamma B^2}} \quad (31)$$

Esta ecuación permite calcular la variación de la altura piezométrica a lo largo del conducto. Como el cambio de dicha altura es proporcional a L. la línea piezométrica es una línea recta. Si el flujo es uniforme Δh = la pérdida de energía.

3.2.2 Flujo en tuberías circulares de sección constante

Tomando un volumen de control concéntrico (Fig. 6.17) con el tubo de forma cilíndrica, la ecuación de equilibrio en el sentido del flujo será:

$$P\pi r^2 - \left(P + \frac{\partial P}{\partial s} \Delta s\right)\pi r^2 + \gamma\pi r^2 \Delta s \sin\alpha - \tau 2\pi r \Delta s = 0$$

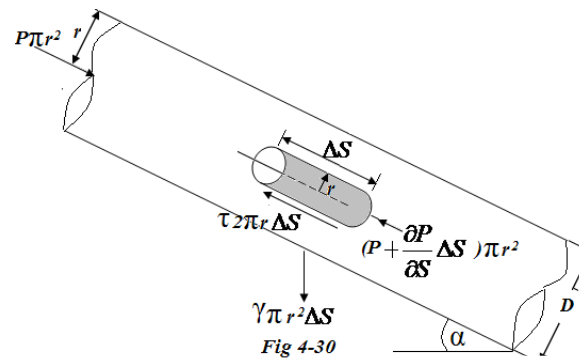


Fig. 6.17

[2] Fuente: Introducción a la Hidráulica – Ing. Escobar Seleme (2004)

El esfuerzo cortante a una distancia r del centro es constante, por cuanto el flujo es axialmente simétrico, por tanto $\sin\alpha = -\frac{dz}{ds}$, por lo que la ecuación se convierte en:

$$\tau = -\frac{r}{2} \frac{d}{ds} (P + \gamma z) = -\frac{r}{2} \gamma \frac{dh}{ds}$$

Igualando la ecuación:

$$\mu \frac{dv}{dn} = -\frac{r}{2} \gamma \frac{dh}{ds}$$

$$\boxed{dv = -\frac{\gamma}{2\mu} \gamma \frac{dh}{ds} dn} \quad (32)$$

Integrando a lo largo de “n”, donde $\frac{dh}{ds}$ es constante y $dr = -dn$.

4. NÚMERO DE REYNOLDS

El comportamiento de un fluido, particularmente con respecto a las pérdidas de energía, depende bastante de si el flujo es laminar o turbulento. Por esta razón deseamos tener medios para predecir el tipo de flujo sin necesidad de observarlo. En efecto, la observación directa es imposible para fluidos que se encuentran en conductos opacos. Se puede mostrar experimentalmente y analíticamente que el carácter del flujo en un conducto redondo depende de cuatro variables.

Este número viene de la relación entre las fuerzas inerciales (FI) y las fuerzas de viscosidad (FV):

$$F_I = Ma = \left(\rho L^3 \right) \left(\frac{L}{T^2} \right)^d = \frac{\rho L^4}{T^2} = V \rho \frac{L^3}{T} \quad ; \quad F_V = \tau A = \left(\mu \frac{dv}{dy} \right) A = \mu \frac{L}{T} L^2 = \mu \frac{L^2}{T}$$

$$\frac{F_I}{F_V} = \frac{V \rho \frac{L^3}{T}}{\mu \frac{L^2}{T}} = \frac{V \rho L}{\mu} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\text{Re} = \frac{V \rho L}{\mu} = \frac{VL}{\nu}} \quad (33)$$

Donde:

L ; longitud característica del campo de flujo, en caso de tuberías el diámetro, en caso de placas paralelas, la separación entre ellas.

V ; velocidad media del campo de flujo.

ρ ; densidad del fluido.

μ ; viscosidad del fluido.

ν ; viscosidad cinemática del fluido.

Mientras mayor sea el número de Reynolds, mayor será la turbulencia y viceversa, esto hace presumir que si dicho número tiende a infinito, la deformación viscosa tenderá cada vez más a ser relativamente menor.

Como se mencionó previamente este número ayuda a determinar si el flujo es laminar o turbulento:

Flujo laminar se da cuando las fuerzas viscosas son de mayor importancia que las fuerzas inerciales, haciendo que el flujo se desarrolle en laminas paralelas, las líneas de corriente son paralelas. Este flujo se da comúnmente cuando las velocidades son bajas.

Flujo turbulento se da cuando las fuerzas inerciales son mucho mayores que las fuerzas viscosas, haciendo que el flujo sea caótico, habiendo un gran intercambio de cantidad de movimiento entre las partículas.

Para determinar este número el científico Osborne Reynolds desarrolló un experimento, para el cual diseñó un aparato, el cual consiste en: Una tubería circular que en uno de sus extremos está sujeta a un tanque y el otro tiene una válvula que permite regular el caudal. El lado de la tubería que da al tanque está redondeado para evitar en lo posible las perturbaciones en el flujo. Adicionalmente se coloca un inyector de tinta no soluble en agua.

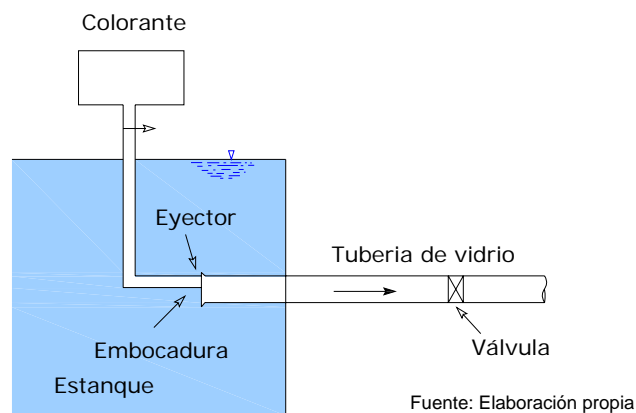


Fig. 6.18 Aparato de Reynolds

Con este sencillo aparato Reynolds pudo determinar este número, el cual nos permite distinguir el flujo laminar del turbulento.

El experimento se inicia abriendo la válvula y dejando salir un gasto pequeño (velocidad media pequeña), se inyecta la tinta, se observa que la tinta define una línea recta en el tubo. Se continúa

abriendo la llave, con lo que aumenta el gasto y también la velocidad media, viendo que la línea de tinta se mantiene invariable, hasta que para una abertura mayor la línea comienza a ondularse erráticamente, a medida que se abre mas la válvula la perturbación aumenta, hasta que finalmente la tinta se difunde por toda la tubería.

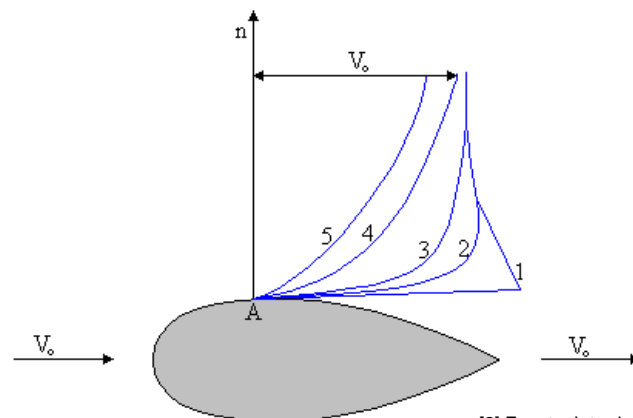
Para el experimento original la perturbación comienza con $Re = 2000$, experimentos posteriores, en los cuales se hizo todo lo posible para reducir las perturbaciones de ingreso, utilizando materiales mas finos hallaron valores de Re de hasta 40000 para el inicio de la perturbación. Por lo que se dice que el flujo es laminar para $Re \leq 2.000$

5. TEORIA DE LA CAPA LIMITE

La teoría de la capa limite fue introducida por Prandtl. Esta teoría establece que, para un fluido en movimiento, toda las perdidas por fricción tienen lugar en una delgada capa adyacente al contorno del sólido (llamada capa limite), y que el flujo exterior a dicha capa puede considerarse como carente de viscosidad.

La distribución de velocidades en la zona próxima al contorno es influenciada por la tensión cortante en el contorno. En general, la capa limite es muy delgada en la parte de aguas arriba del contorno y va aumentando su espesor hacia aguas abajo por la acción continuada de las tensiones cortantes.

Para números de Reynolds bajos, toda capa limite es gobernada por la acción de las fuerzas viscosas y en su interior el flujo es laminar. Para valores intermedios del numero de Reynolds la capa limite es laminar cerca de la superficie del contorno y turbulenta en las zonas algo más alejadas. Para valores del números Reynolds muy elevados la capa limite es totalmente turbulenta.



[2] Fuente: Introducción a la Hidráulica – Ing. Escobar Seleme (2004)

Fig. 6.19

La (figura 6.19) representa el movimiento de un fluido cualquiera alrededor de una superficie sin que exista separación.

Para un fluido ideal, con velocidad de aproximación V_0 , utilizando conceptos del capítulo 5, se determina la distribución de velocidades en la sección A (caso 1 en la figura 6.20). De máxima velocidad en el contorno, que va decreciendo hasta que a una velocidad suficiente este toma V_0 .

Para un fluido real, para número de Reynolds muy bajo, la velocidad al contorno será cero y seguirá luego un perfil creciente de tipo parabólico hasta confundirse asintóticamente con V_0 (caso 5 en la figura 6.19). Los demás casos es el paso de un flujo laminar a uno turbulento.

La observación de la (figura 6.19) lleva a la conclusión que a medida que el número de Reynolds crece, se hace más pequeña la zona de divergencia entre las distribuciones ideales y reales de velocidad. A esta zona se denomina capa límite y puede variar desde un espesor igual a la totalidad del flujo cuando este es laminar, a uno muy pequeño, casi insignificante, cuando el flujo es altamente turbulento.

No debe entenderse que dentro la capa limite, por estar concentrados en ella los efectos de la viscosidad, no existe turbulencia. En realidad existen capas limites laminares (solo efecto de la viscosidad) y capas limites turbulentas o subcapa laminar (efecto de la viscosidad y de la turbulencia).

El espesor de la capa limite correspondería al valor de n para el cual v es igual a v_i (velocidad ideal). Como en rigor matemático esto no ocurre (ambas curvas de distribución son asintóticas), se ha acordado definir δ al espesor en cuyo borde v es el 99% de v_i .

6. TURBULENCIA

El fenómeno turbulento es ocasionado por la inestabilidad del flujo laminar, creando pequeños remolinos que se mueven de manera aleatoria a lo largo y ancho del campo de flujo. Esta situación ocasiona un cambio constante de la magnitud y dirección del vector velocidad en cualquier punto. La turbulencia es un intercambio continuo y aleatorio de masa entre las diferentes zonas del campo de flujo que propicia la mezcla. Esto implica que materia de mayor energía cinética que pasa por el centro de la tubería pase a las zonas laterales y viceversa ocasionado una mayor uniformidad de las velocidades promedio en sentido del movimiento general (Fig. 6.20)

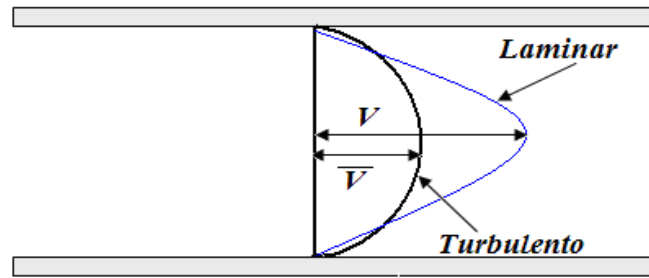


Fig. 6.20

[2] Fuente: Introducción a la Hidráulica –
Ing. Escobar Seleme (2004)

El flujo turbulento representa un incremento sustancial en la pérdida de energía. En resumen, la turbulencia se caracteriza por su condición aleatoria en el tiempo y en el espacio, un rápido proceso de mezcla, la fluctuación tridimensional de las velocidades y la alta disipación de energía, y por eso un fenómeno controlado por las características del flujo como por las del fluido. La turbulencia se presenta para números de Reynolds elevados y es un movimiento macroscópico de pequeños remolinos.

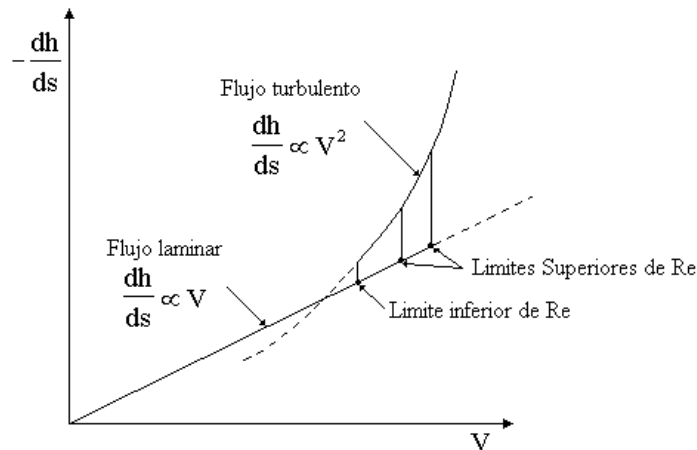


Fig. 6.21

[2] Fuente: Introducción a la Hidráulica –
Ing. Escobar Seleme (2004)

Para la determinación de esfuerzos cortantes en flujo turbulento se parte de la ecuación,

$$\tau = \mu \frac{dV}{dh}$$

Pero esta deja de tener validez, por lo que debe definirse como un promedio, pues tiene características aleatorias,

$$\boxed{\bar{\tau} = \eta \frac{d\bar{V}}{dh}} \quad (34)$$

Donde:

η ; viscosidad del remolino

\bar{V} ; Velocidad promedio

La naturaleza de esta viscosidad de remolino “ η ”, presenta toda la dificultad del análisis de flujo turbulento, pues este será función no solo del fluido, sino también de las características del flujo.

Para situaciones intermedias donde la viscosidad y la turbulencia tiene influencia, el esfuerzo cortante se puede expresar como:

$$\boxed{\bar{\tau} = (\eta + \mu) \frac{d\bar{V}}{dh}} \quad (35)$$

μ ; viscosidad dinámica ya conocida

7. DISTRIBUCION DE VELOCIDADES

7.1 Superficies lisas.

Conocer la distribución de velocidades y régimen turbulento, supone la integración de la ecuación de Newton: $\tau = \mu \frac{dv}{dy}$ en la subcapa laminar y la ecuación de Bousinesq: $\bar{\tau} = \eta \frac{d\bar{v}}{dh}$ en el resto del campo de flujo.

Las superficies lisas son las que no representan ninguna rugosidad, ya que en realidad todos los materiales presentan algún grado de rugosidad. Esta superficies son las que el flujo no esta influenciado por la rugosidad del contorno.

En estas superficies el esfuerzo cortante en sentido normal al movimiento dentro de la capa limite se conserva constante e igual al esfuerzo en el contorno (τ_0) por lo que la subcapa laminar tendremos:

$$\tau_0 = \mu \frac{dv}{dy} \quad \frac{\tau_0}{\rho} = \frac{\mu}{\rho} \frac{dv}{dy}$$

Debido a que el espesor de la subcapa laminar es muy pequeño, se puede suponer que:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{v}{y}$$

Es decir una distribución lineal de velocidades. Recordando que en el contorno la velocidad es nula:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{\mu}{\rho} \frac{dv}{dy} = \nu \frac{v}{y}$$

Esta expresión también puede escribirse así:

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{y}{\nu} = \frac{v}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}}$$

$$\frac{v^* y}{\nu} = \frac{v}{v^*}$$

(36)

Donde: $v^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$; *velocidad de corte o de fricción*

En la zona turbulenta dentro de la capa límite, el esfuerzo cortante viene dado por la teoría de la capa límite:

$$\tau_0 = \rho \cdot K^2 \cdot y^2 \left(\frac{dv}{dy} \right)^2 \quad ; K : \text{cte de Karmam.}$$

$$\frac{dv}{dy} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho \cdot K^2 \cdot y^2}} = \frac{1}{K \cdot y} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \Rightarrow \frac{dv}{dy} = \frac{v^*}{K \cdot y}$$

$$\frac{dv}{v^*} = \frac{1}{K} \frac{dy}{y}$$

Integrando esta ultima ecuación:

$$\frac{v}{v^*} = \frac{1}{K} \ln y + C$$

Karmam determino experimentalmente el valor de K como 0.44, por lo que la ecuación será:

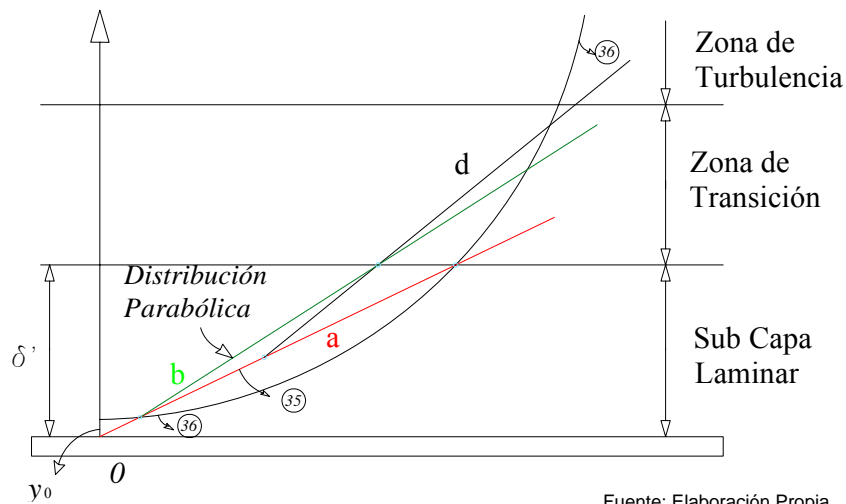
$$\frac{v}{v^*} = 2.5 \ln y + C$$

Al resolver esta última ecuación notamos que da como resultado un número de infinito de velocidades en el contorno en otras palabras la velocidad se hace cero para un valor finito de la ordenada vertical, esta ordenada se determina y_0 . Este hecho no esta bien y que la velocidad en el contorno debe ser nulo. Pero esta ecuación corresponde a la zona turbulenta de la capa limite, debe enlazarse con la ecuación de la subcapa laminar, la ecuación (36), haciendo $v=0$.

$$0 = 2.5 \ln y_0 + C \Rightarrow C = -2.5 \ln y_0$$

$$\frac{v}{v^*} = 2.5 \ln y - 2.5 \ln y_0 = 2.5 \ln \frac{y}{y_0}$$

$$\boxed{\frac{v}{v^*} = 5.75 \log \frac{y}{y_0}} \quad (37)$$



Fuente: Elaboración Propia

Fig. 6.22

Tramo oa esta dentro de la subcapa laminar y tiene una distribución lineal de velocidades, se expresa matemáticamente mediante la ecuación (36).

Tramo ad es una curva de transición no definida analíticamente, pero ajusta de manera casi perfecta al análisis de los fluidos.

Tramo sobre d corresponde a flujo turbulento, expresada analíticamente por la ecuación (37).

El espesor de la socapa laminar δ' está definida como la distancia normal desde el contorno de la superficie al punto c (figura 6.22) cruce de la línea recta con la parabólica. Esta definición no es exacta ya que no necesariamente para una ordenada δ' comienza el flujo turbulento. Decimos mejor que para un valor de δ' se inicia la perturbación. Este hecho se representa mejor con un parámetro de inestabilidad de flujo viscoso χ :

$$\chi = \frac{\rho \cdot n^2 \frac{dv}{dn}}{\mu} \Rightarrow \frac{dv}{dn} = \frac{\chi \cdot \mu}{\rho \cdot n^2} = \frac{\chi}{\nu \cdot n^2}$$

$$\chi = \frac{y^2 \frac{dv}{dy}}{\nu} \quad \text{con : } y = n$$

Para la subcapa laminar se utiliza la ecuación de Newton:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{\tau_0}{\mu}$$

Reemplazando la última ecuación en la anterior y con $y = \delta'$:

$$\chi = \frac{y^2 \cdot \tau_0}{\nu \cdot \mu}$$

$$\delta' = \frac{\chi^{\frac{1}{2}} \nu}{\nu^*}$$

Con una serie de experimentos Nikuradse pudo determinar el valor de χ , para el cual la ecuación anterior queda:

$$\delta' = \frac{11.6 \nu}{\nu^*}$$

y_0 tiene una proporción directa con δ' , ya que si δ' crece un $\Delta \delta'$ la curva de la ecuación de la (figura 6.22) se desplazara hacia arriba justo un $\Delta \delta'$, por lo que también y_0 crece $\Delta \delta'$. Por ello planteamos:

$$y_0 = \frac{\delta^*}{C}$$

Nikuradse también en función a múltiples experimentos determino que $C=107$, por lo que.

$$y_0 = \frac{\delta^*}{107} = \frac{0.108 \nu}{v^*}$$

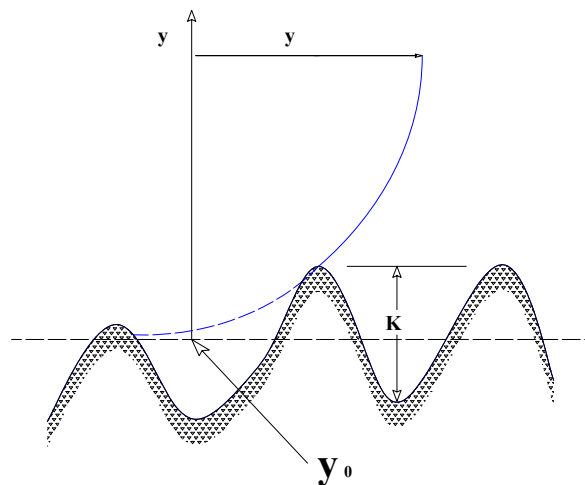
Reemplazando esta ultima ecuación en la ecuación (37), tenemos:

$$\frac{v}{v^*} = 5.75 \log \frac{v^* y}{\nu} + 5.50 \quad (38)$$

Esta es la ecuación de Karmam-Prandtl de la distribución de velocidades en flujo turbulento en superficies lisas.

7.2 Superficies rugosas.

Todos los materiales tienen irregularidades en su superficie, es decir, son rugosas. Estas rugosidades producen en el campo de flujo.



Fuente: Elaboración propia

Fig. 6.23

Cuando las rugosidades del contorno pueden ser amortiguadas por los esfuerzos cortantes viscosos existentes en la subcapa laminar, la superficie se comporta como lisa. Por lo que la ecuación (38) es valida:

$$\frac{v}{v^*} = 5.75 \log \frac{v^* y}{\nu} + 5.50$$

Cuando los esfuerzos constantes viscosos son sobrepasados por la turbulencia generada por la rugosidad, dejara de tener influencia la viscosidad, entonces la superficie se comporta como rugosa.

El que una superficie se comporte como lisa o rugosa no es solo función de la geometría o el valor de K , si no de la interacción de las fuerzas que promueven la turbulencia (Fuerzas de Inercia, F_I) y las que se oponen (Fuerzas Viscosas, F_v) o mejor dicho, son función del numero de Reynolds Re .

Determinada superficie debe depender de $\frac{K}{\delta}$, por lo que y_0 (de la ec. 37) es directamente proporcional a este valor. Donde K es la magnitud de rugosidad, cuando la superficie funcione como rugosa, la única variable que influye es K , por lo que y_0 es función solo de K .

Nikuradse determino que y_0 cuando la superficie se comporta como rugosa, es:

$$y_0 = \frac{K}{30} \quad y \quad K \geq 6 \delta$$

Reemplazando esta ecuación en la ec. (36), tenemos:

$$\boxed{\frac{v}{v^*} = 5.75 \log \frac{y}{K} + 8.50} \quad (39)$$

Esta ultima ecuación de Karmam-Prandtl de la distribución de velocidades en flujo turbulento para superficie rugoso.

Se puede resaltar los siguientes puntos:

- Un material cualquiera no tiene una configuración homogénea de la rugosidad K , ni de su distribución en la superficie. Nikuradse obvio este problema, realizando sus experimentos en tuberías circulares empleando una rugosidad artificial. Logro adherir a las paredes de la tubería granos de arena de tamaño K uniforme. Por lo que la ecuación (39) solo es valida para superficies de rugosidad artificial de grano de arena. Sin embargo esto se puede aplicar como veremos mas adelante.

- Para $K > 6 \delta'$ la superficie se comporta como rugosa, esto no significa que cuando $K < 6 \delta'$ la superficie se comporta como lisa. Entre ambas situaciones existe una transición entre $K = 0.4 \delta'$ y $K = 6 \delta'$ donde no existe en la subcapa laminar un dominio preponderante ni de las fuerzas viscosas, ni de la turbulencia esta zona no esta cubierta por las ecuaciones Karmam-Prandtl.

8. PERDIDAS DE ENERGIA EN FLUJO TURBULENTO

8.1. Planteamiento general.

La ecuación de la energía aplicada a los fluidos reales se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + H_r$$

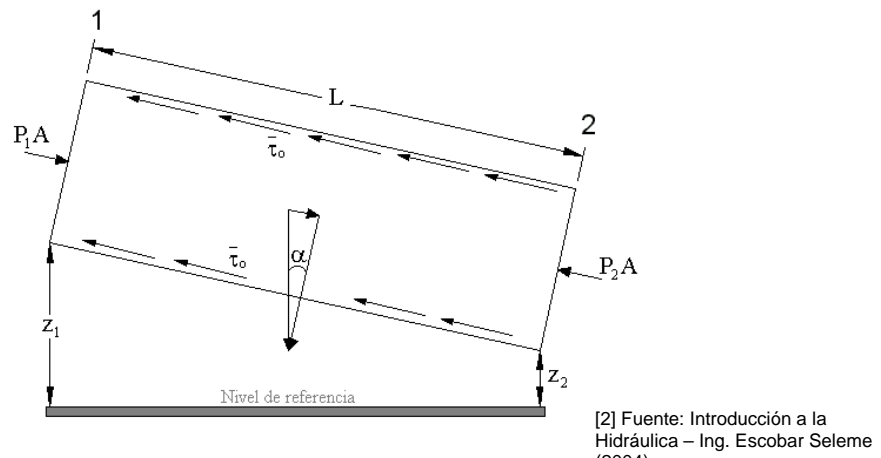


Fig. 6.24 Esquema de flujo real en una tubería.

Consideremos un volumen de control limitado por dos secciones iguales (figura 6.24) (flujo uniforme de velocidad media constante) la ecuación podrá escribirse:

$$h_f = h_2 - h_1 = \Delta h$$

Donde:

h: altura piezométrica.

Por equilibrio de fuerzas en volumen de control tenemos:

$$P_1 A - P_2 A + \gamma A L \sin \alpha - \bar{\tau} P_m L = 0$$

Donde:

P_m : perímetro mojado.

$\bar{\tau}_0$: Esfuerzo de corte en perímetro mojado.

Si dividimos todo entre γA y $L \sin \alpha = (z_1 - z_2)$ tenemos dos puntos:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 - \left(\frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) = \frac{\bar{\tau}_0 \cdot P_m \cdot L}{\gamma \cdot A} = h_f$$

$$\bar{\tau}_0 = \frac{\gamma \cdot R \cdot h_f}{L} \quad ; \quad R : \text{Radio Hidraulico} \quad R = \frac{A}{P_m}$$

$$h_f = \frac{\bar{\tau}_0 \cdot L}{\gamma \cdot R}$$

(40)

El valor del esfuerzo cortante medio no puede hallarse de las ecuaciones de distribución de velocidades, para superficies lisas y rugosas, debido a que esas expresiones solo funcionan para flujo bidimensional. En el caso tridimensional podemos utilizar la ecuación (40) ya que es fácil de hallar h_f .

8.2. Planteamiento para tuberías circulares

Supóngase un flujo bidimensional para obviar el cálculo del esfuerzo cortante promedio. Tomamos una tubería circular de sección constante, el esfuerzo cortante será constante e igual a τ_0 por lo que podemos usar la ecuación (38) (39).

En superficies lisas se pueden integrar la ecuación (38) sobre toda la sección transversal. Esta integración dará el gasto que pasa por la tubería, reemplazando a y por $(r_0 - r)$ y a dy por $(-dr)$, tendremos:

$$Q = \int_A v \cdot dA = \int_0^{r_0} 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v \cdot dr = \int_0^{r_0} 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v \cdot \left(5.75 \cdot \log v \cdot \frac{r_0 - r}{v} + 5.50 \right) dr$$

$$Q = \pi \cdot r_0^2 \cdot v^* \left(5.75 \log \frac{v^* \cdot r_0}{v} + 1.75 \right) \quad \text{como : } V = \frac{Q}{\pi \cdot r_0^2}$$

$$\boxed{\frac{V}{v^*} = 5.75 \cdot \log \frac{D \cdot v^*}{2 \cdot v} + 1.75} \quad (41)$$

Realizaremos la misma integración para la superficie rugosa, con la ecuación (38), tenemos:

$$\boxed{\frac{V}{v^*} = 5.75 \cdot \log \frac{D}{2 \cdot K} + 4.75} \quad (42)$$

Las ecuaciones de distribución de velocidades de Karman-Prandtl y de las de velocidades medias puedan reducirse a una sola unidad de expresión. Si la ecuación (38) restamos miembro a miembro la ecuación (41) y la (39) la (42), obtendremos la misma ecuación en ambos casos:

$$\frac{v - V}{v^*} = 5.75 \cdot \log \frac{2 \cdot y}{D} + 3.75$$

Esta ecuación se puede utilizar para hallar la distribución de velocidades cualquiera el comportamiento de la superficie.

Para el caso de tubería circular la ecuación (40) será:

$$h_f = \frac{\tau_0 \cdot L}{\gamma \cdot R} \quad h_f = \frac{\tau_0 \cdot L}{\gamma \cdot \frac{A}{P_m}} = \frac{\tau_0 \cdot L}{\gamma \cdot \frac{\pi \cdot r_0^2}{2\pi \cdot r_0}} = \frac{2\tau_0 \cdot L}{\gamma \cdot r_0}$$

$$h_f = \frac{4\tau_0 \cdot L}{\gamma \cdot D}$$

$$\boxed{\tau_0 = \frac{\gamma \cdot D \cdot h_f}{4 \cdot L}} \quad (43)$$

Con anterioridad a Karmam-Prandtl; Darsy y Weisbach propusieron una formula para evaluar las perdidas de energía en tubería circulares. Esta es denominada ecuación de Darsy-Weisbasch:

$$\boxed{h_f = f \cdot \frac{L}{D} \frac{V^2}{2 \cdot g} \quad (D.W.)}$$

Comparando la ecuación (D.W.) con la ecuación (43), obtenemos:

$$f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = \frac{4\tau_0 L}{\gamma D}$$

$$f \frac{V^2}{2g} = \frac{4\tau_0}{\gamma} = \frac{4\tau_0}{\rho \cdot g}$$

$$\tau_0 = f \frac{\rho \cdot V^2}{8}$$

La velocidad de corte será:

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{f \frac{\rho \cdot V^2}{8}}{\rho}} \Rightarrow \boxed{v^* = V \sqrt{\frac{f}{8}}} \quad (44)$$

Si reemplazamos la ecuación (44) en la ecuación (41), se obtienen la ecuación de karmam-Prandtl para tuberías circulares con superficie lisa en flujo turbulento:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2. \log(\text{Re} \cdot \sqrt{f}) - 0.8$$

Donde: $\text{Re} = \frac{V \cdot D}{\nu}$; *Numero de Reynolds*

Se realiza un procedimiento similar, para la ecuación (41), lleva a la ecuación de –karmam-Prandtl para tuberías circulares en superficies rugosas en flujo turbulento:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2. \log\left(\frac{D}{2. K}\right) - 1.74$$

Nikuradese, en base a sus experiencias en tuberías circulares de rugosidad artificial, pudo encontrar varias relaciones del factor de fricción de Darcy-Weisbach con el número de Reynolds, estos son:

▪ Para $\text{Re} < 2000$, limite inferior de Reynolds en tuberías, todos los casos estudiados se agrupan en una sola curva cuya expresión es:

$$f = \frac{64}{\text{Re}}$$

En este caso la variable influyente es Re por que existe un total dominio de las fuerzas viscosas.

- Para $Re > 2000$, comienza la turbulencia y el valor de f da un salto brusco cualquiera sea D o K . Re sigue siendo la variable determinante, K todavía no influye por que esta sumergida en la subcapa laminar.
- Para Re bastante mayor que 2000 se empieza a usar el valor de K/D que se denomina rugosidad relativa.

9. APLICACIÓN DE DINÁMICA DE FLUIDOS

Una vez definido la dinámica de fluidos en fluidos incompresibles ideales y las diferentes ecuaciones, podremos determinar las distintas ecuaciones como la ecuación de Bernoulli, ecuación de Euler, ecuación de la Energía, ecuación de Navier-stokes y la aplicación del número de Reynolds.

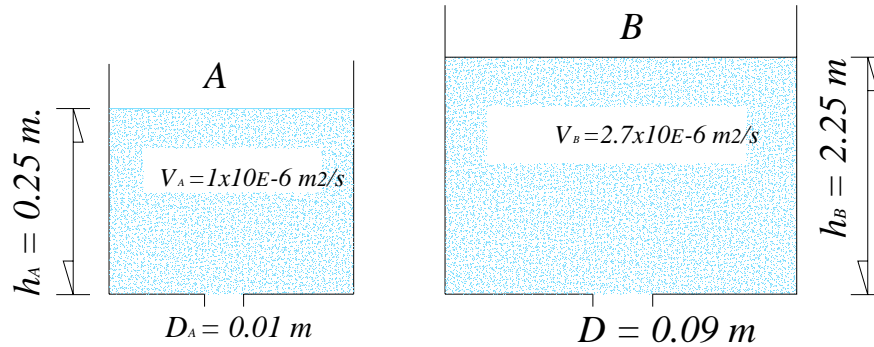
Las diferentes ecuaciones deducidas nos ayudaran a solucionar problemas como flujo en orificios el cual se aplicara a su vez por ejemplo en el diseño de vaciado de tanques donde se determinara velocidades de salidas, tiempo en el cual llega a vaciarse un tanque; determinación de alturas piezometricas en flujos a través de tuberías; distribución de velocidades y perdidas de energía que existen.

Estos conceptos podremos aplicarlo por lo tanto dentro de lo que se refiere a la construcción civil en construcciones de: tanques de almacenamiento de agua, construcción de canales donde se aplicaran las definiciones del tipo de flujo que circulara en estas ya sea uniforme o turbulento así como también la teoría de la capa limite.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Propósito u objetivo: Aplicando las ecuaciones deducidas para flujo en orificios. Encontrar las descargas que salen a través de los orificios de los siguientes reservorios mostrados en las figuras A y B.

Solución:



$$Q = C_d A_0 \sqrt{2gh}$$

$$C_d = f(\text{Re})$$

$$\text{Re} = \frac{V.L}{\nu} = \text{cte.}$$

$$\text{Re} = \frac{V_A.L_A}{\nu_A} = \frac{\sqrt{2g \cdot 0.25}}{1.10^{-6}}$$

$$\text{Re} = 22147 \rightarrow C_d = 0.625 \quad (\text{ver grafica 1})$$

$$Q_A = C_d A_{0A} \sqrt{2gh_A} = 0.625 \times \frac{\pi \times 0.01^2}{4} \times \sqrt{2g \times 0.25}$$

$$\boxed{Q_A = 1.09 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}}$$

$$Q_B = Q_A \cdot \alpha_Q \quad \text{con} \quad \alpha_Q = \alpha_s^{5/2} = 9^{5/2} = 243 \quad (\alpha_t = \alpha_s^{1/2})$$

$$\boxed{Q_B = 0.0264 \text{ m}^3/\text{s}}$$

Caso: Único

2.- Propósito u objetivo: Utilizando los conceptos de Reynolds y la ecuación deducida. Determinar el diámetro de tubería que será necesario para transportar $0,0057 \text{ m}^3/\text{s}$. Para un flujo en régimen laminar,

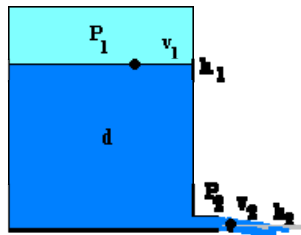
Solución:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi \cdot d^2} = \frac{0,0228}{\pi \cdot d^2}$$

$$\text{Re} = \frac{V \cdot d}{\nu} \quad ; \quad 2000 = \frac{0,0228}{\pi \cdot d^2} \left(\frac{d}{6,09 \times 10^{-6}} \right)$$

$$\boxed{d = 0,596 \text{ m}}$$

3.- Propósito u objetivo: Utilizando el teorema de Bernoulli y la ecuación desarrollada. Determinar la velocidad de salida del agua por un grifo situado a 6 m por debajo del nivel del agua. Para un depósito que contiene agua, densidad, $d = 1 \text{ kg/l}$, que está herméticamente cerrado, teniendo en la cámara interior una presión de 3 atmósferas. ¿Qué velocidad de salida habría? Si se rompiese el depósito por su parte superior.



Solución:

Los datos son los siguientes:

$$1 \text{ atm} = 1'033 \text{ kp/cm}^2 = 101234 \text{ N/m}^2$$

$$P_1 = 3 \text{ atm} = 303702 \text{ N/m}^2$$

$$P_2 = 1 \text{ atm} = 101234 \text{ N/m}^2 \text{ por estar en contacto con el exterior}$$

$$h_1 = 6 \text{ m}$$

$$h_2 = 0 \text{ m por estar en el origen de medidas}$$

$$v_1 = 0 \text{ suponiendo que el depósito es extenso comparado con el orificio de salida.}$$

$$v_2 \text{ variable a determinar}$$

Aplicamos el teorema de Bernoulli entre un punto situado en el nivel superior del agua del depósito y otro punto situado en el grifo de salida:

$$P_1 / \rho + h_1 + v_1^2 / (2g) = P_2 / \rho + h_2 + v_2^2 / (2g)$$

$$P_1 / \rho + h_1 = P_2 / \rho + v_2^2 / (2g) \rightarrow (P_1 - P_2) / \rho + h_1 = v_2^2 / (2g)$$

$$v_2 = [2 \cdot g \cdot ((P_1 - P_2) / \rho + h_1)]^{1/2}$$

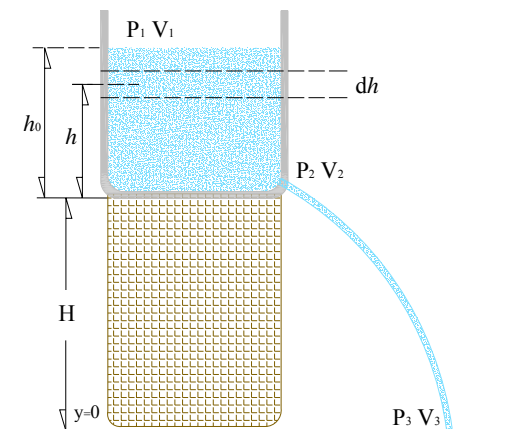
$$\text{Sustituyendo datos} \rightarrow v_2 = 22,9 \text{ m/s}$$

Si el depósito se rompiese por la parte superior la presión de la cámara pasaría a ser de 1 atm, igual a la presión de salida, resultando una velocidad de:

$$v_2 = (2 \cdot g \cdot h_1)^{1/2} = 10,8 \text{ m/s}$$

Caso: Único

4.- Propósito u objetivo: Aplicando las fórmulas deducidas en dinámica de fluidos para orificios. Determinar qué velocidad fluye inicialmente el agua del orificio y cuánto tiempo necesita el tanque para vaciarse por completo. Si el tanque cilíndrico de 1,80 m de diámetro descansa sobre una plataforma de una torre a 6 m de altura, como se muestra en la figura. Inicialmente, el tanque está lleno de agua, hasta la profundidad $h_0 = 3$ m. De un orificio que está al lado del tanque y en la parte baja del mismo, se quita un tapón que cierra el área del orificio, de 6 cm^2 .



Solución:

Al soltar el tapón, se tiene una situación regulada por la ec. de Bernouilli; de tal manera que se puede calcular la velocidad con que sale inicialmente el agua por el orificio:

$$P_1 + \rho \cdot g h_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot V_1^2 = P_2 + \rho \cdot g h_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot V_2^2$$

Consideraremos la referencia en el piso; además tanto en 1 como en 2 la presión es la atmosférica, y $V_1 = 0$, puesto que la relación entre las áreas del tanque y del orificio permite despreciarlo a través de la ecuación de continuidad.

Note que:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\pi \cdot r^2}{6 \text{ cm}^2} = 4239$$

Y la velocidad en 2 será 4239 veces mayor que la velocidad en 1!).

De lo anterior:

$$P_0 + \rho \cdot (H + H_0) + \frac{1}{2} \rho \cdot [0]^2 = P_0 + \rho \cdot g H + \frac{1}{2} \rho \cdot V_2^2$$

de donde :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho \cdot V_2^2 &= \rho \cdot g (H + H_0) - \rho \cdot g H \\ V_2^2 &= 2 \cdot g \cdot H_0 \end{aligned}$$

Tal como lo habíamos previsto según Torricelli. Es interesante esta expresión, puesto que la velocidad no depende de la densidad del líquido, tal como la caída de un objeto no depende de su masa en ausencia de aire.

Por lo tanto:

$$v_2 = \sqrt{2 \left(9,8 \frac{m}{s^2} \right) (3m)} = 7,7 \frac{m}{s}$$

Luego, aplicando nuevamente Bernouilli para los puntos 2 y 3, podemos calcular la velocidad con que llega el agua al suelo:

$$P_2 + \rho \cdot g h_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 = P_3 + \rho \cdot g h_3 + \frac{1}{2} \rho V_3^2$$

$$\text{con } P_2 = P_3 = P_0 :$$

$$P_0 + \rho \cdot g \cdot H + \frac{1}{2} \rho V_2^2 = P_0 + \rho \cdot g [0] + \frac{1}{2} \rho V_3^2$$

de donde :

$$V_3^2 = \sqrt{58,8 \frac{m^2}{s^2} + 2 \left[9,8 \frac{m}{s^2} \right] [6m]}$$

$$V_3 = 13,3 \frac{m}{s}$$

Hasta aquí, el problema es resuelto como ha predicho la teoría expuesta. Sin embargo, calcular el tiempo que demora el tanque en vaciarse requiere de consideraciones distintas, puesto que la profundidad no será constante, como en los casos anteriores. Esto producirá que la velocidad con que baja el fluido en el tanque, así como la velocidad con que sale el líquido por el orificio, no sean constantes en el tiempo.

Para resolver esto, consideraremos que la altura h del líquido disminuye en dh durante un intervalo de tiempo dt (ver figura). Entonces, la velocidad con que baja el fluido en el tanque V_1 , queda determinada por la expresión:

$$v_1 = -\frac{dh}{dt}$$

Negativa puesto que h disminuye en el tiempo. Adicionalmente, se tiene que

$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$

Como ya sabemos, expresión que es cierta para todo t , de donde:

$$v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1}$$

Al igualar ambas expresiones, se tiene:

$$-\frac{dh}{dt} = v_2 \frac{A_2}{A_1}$$

Además, según Torricelli como hemos visto:

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad \text{Por lo que:}$$

$$-\frac{dh}{dt} = \left[\sqrt{2 \cdot g \cdot h} \right] \frac{A_2}{A_1}$$

Que se puede expresar como:

$$-\frac{dh}{dt} = \left[\sqrt{2 \cdot g} \right] \frac{A_2}{A_1} dt$$

Integrando la expresión para el intervalo entre $t = 0$, donde la profundidad es h_0 y el tiempo $t = t$, donde la profundidad es h , se tiene:

$$-\int h^{\frac{1}{2}} dh = \left[\sqrt{2 \cdot g} \right] \frac{A_2}{A_1} \int dt$$

Integrando:

$$-2 \int \left[h^{\frac{1}{2}} - h_0^{\frac{1}{2}} \right] = \left[\sqrt{2 \cdot g} \right] \frac{A_2}{A_1} t$$

despejando t :

$$t = \frac{-2A_1 \left[h^{\frac{1}{2}} - h_0^{\frac{1}{2}} \right]}{\left[\sqrt{2 \cdot g} \right] A_2}$$

Cuando el tanque se vacíe, $h = 0$, por lo que:

$$t = \frac{-2A_1 \left[-h_0^{\frac{1}{2}} \right]}{\sqrt{2 \cdot g} \cdot A_2}$$

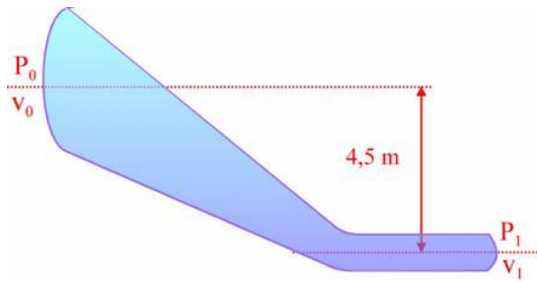
$$t = \frac{2\pi \cdot r_1^2 \left[-h_0^{\frac{1}{2}} \right]}{\sqrt{2 \cdot g} \cdot A_2}$$

Remplazando valores:

$$t = \frac{2(3,14)(0,9m)^2(3m)^{1/2}}{\sqrt{2\left(9,8 \frac{m}{s^2}\right)}(0,0006m^2)}$$

$$\boxed{t = 3263,3 \text{ segundos}}$$

5.- Propósito u objetivo: Aplicando el teorema de Bernoulli deducido en dinámica de fluidos. Encontrar la presión P_1 en el extremo de un tubo cilíndrico para un fluido incompresible que fluye de izquierda a derecha por el tubo como el que se muestra en la figura aplicando la ecuación de Bernoulli. La densidad de la sustancia es de 105 utm/m^3 . Su velocidad en el extremo de entrada es $v_0 = 1,5 \text{ m/s}$, y la presión allí es de $P_0 = 1,75 \text{ Kgf/cm}^2$, y el radio de la sección es $r_0 = 20 \text{ cm}$. El extremo de salida está $4,5 \text{ m}$ abajo del extremo de entrada y el radio de la sección allí, es $r_1 = 7,5 \text{ cm}$.



Solución:

La presión se puede encontrar mediante la ecuación de Bernoulli ; sin embargo, previamente necesitaremos calcular la velocidad v_1 con la ecuación de continuidad :

$$A_0 v_0 = A_1 v_1 \quad \text{de donde :}$$

$$v_1 = A_0 \frac{v_0}{A_1} = \pi r_0^2 \cdot \frac{v_0}{\pi r_1^2} = r_0^2 \frac{v_0}{r_1^2}$$

$$v_1 = \frac{(20^2 \times 10^{-4} \text{ m}) \left(1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{7,5 \times 10^{-4} \text{ m}} = 10,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ahora, según Bernoulli :

$$P_0 + \rho \cdot g h_0 + \frac{1}{2} \rho \cdot V_0^2 = P_1 + \rho \cdot g h_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot V_1^2$$

$$P_1 = \rho \cdot g (h_0 - h_1) + \frac{1}{2} \rho (V_0^2 - V_1^2)$$

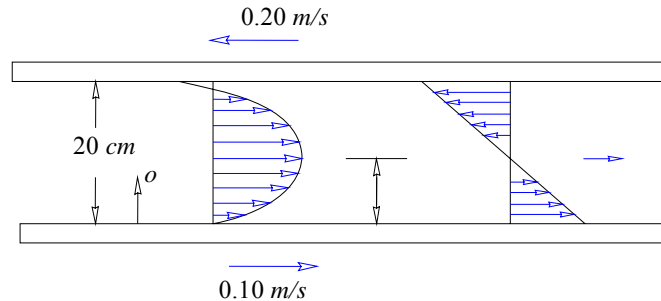
$$P_1 = 1,75 \times 10^4 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2} + 105 \frac{\text{utm}}{\text{m}^3} 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 4,5 \text{ m} + \frac{1}{2} \left[105 \frac{\text{utm}}{\text{m}^3} (1,5^2 - 10,7^2) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right]$$

$$P_B = 16237,9 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^2} = 1,62 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

Note que si ponemos una válvula y cortamos el flujo de agua, $P_1 = 2,21 \text{ Kgf/m}^2$: sube !

6.- Propósito u objetivo: Aplicando las fórmulas de distribución de velocidades y velocidades máximas deducidas en flujo entre placas paralelas.

Calcular el esfuerzo cortante máximo y la velocidad máxima entre dos placas paralelas separadas a 20 cm. Fluye un caudal de 10 l/s, la placa superior se mueve a 0,20 m/s en sentido contrario al flujo y la inferior en el mismo sentido a 0,10 m/s. El fluido es el aceite de $\text{Dr} = 0,93$ y viscosidad $10^{-2} \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s}$.



Solución:

Como las velocidades de las placas son diferentes, no se producirá la simetría del flujo. Aplicando la expresión original del esfuerzo cortante:

$$\tau = \gamma \frac{dh}{ds} n + c$$

Reemplazando τ por la ecuación de Newton de la viscosidad: $\tau = \mu \frac{dv}{dn}$

$$\mu \frac{dv}{dn} = \gamma \frac{dh}{ds} n + C$$

$$dv = \frac{\gamma}{\mu} \frac{dh}{ds} n \cdot dn + \frac{C}{\mu} dn$$

Integrando esta ecuación, tenemos:

$$v = \int \frac{\gamma}{\mu} \frac{dh}{ds} n \cdot dn + \int \frac{C}{\mu}$$

$$v = \frac{\gamma}{\mu} \frac{dh}{ds} \frac{n^2}{2} + \frac{C \cdot n}{\mu} + C_1$$

Determinamos los valores de C y C_1 , con la condición de contorno:

$$v = 0,10 \text{ (m/s)} \quad \text{para } n = 0$$

$$v = -0,20 \text{ (m/s)} \quad \text{para } n = 0,20 \text{ m}$$

Por lo tanto:

$$v = \frac{\gamma}{\mu} \frac{dh}{ds} \frac{n^2}{2} + \frac{C \cdot n}{\mu} + C_1$$

$$0,10 = 0 + 0 + C_1 \quad C_1 = 0,10$$

$$-0,20 = \frac{0,93 \times 1000}{10^{-2}} \frac{dh}{ds} \frac{0,2^2}{2} + \frac{C \times 0,2}{10^{-2}} + 0,10 \rightarrow C = -0,1015 - 93 \frac{dh}{ds}$$

La expresión de velocidad será:

$$v = \frac{\gamma}{2\mu} \frac{dh}{ds} n^2 + \frac{n}{\mu} \left(-0,015 - 0,93 \frac{dh}{ds} \right) + 0,10$$

$$v = \frac{930}{2 \times 10^{-2}} \frac{dh}{ds} n^2 - \frac{\left(0,015 + 0,93 \frac{dh}{ds} \right) n}{10^{-2}} + 0,10$$

$$v = \frac{dh}{ds} (46500 n^2 - 9300 n) - 1,5 n + 0,10$$

Por otro lado:

$$q = 10 \text{ lps} = 0,01 (m^3 / s)$$

$$q = v dA \quad ; \quad dA = b dn; \quad b = 1m$$

$$q = \int_0^{0,20} \left[\frac{dh}{ds} (46500 n^2 - 9300 n) - 1,5 n + 0,10 \right]$$

$$0,01 = \frac{dh}{ds} \left[46500 \frac{n^3}{3} - 9300 \frac{n^2}{2} \right]_0^{0,2} + \left[-1,5 \frac{n^2}{2} + 0,10 n \right]_0^{0,2}$$

$$0,01 = -0,62 \frac{dh}{ds} - 0,1$$

$$\frac{dh}{ds} = -3,23 \times 10^{-4}$$

La ecuación de la distribución de las velocidades, para este caso será:

$$v = \left(-3,23 \times 10^{-4} \right) (46500 n^2 - 9300 n) - 1,5 n + 0,10$$

$$v = -15 n^2 + 1,5 n + 0,10$$

La velocidad máxima se dará para

$$\frac{dv}{dn} = 0:$$

$$\frac{dv}{dn} = 0 = -30n + 1,5$$

$$n = 0,05(0,05)$$

En este punto la velocidad es máxima:

$$v = -15(0,05)^2 + 1,5(0,05) + 0,10$$

$$v = 0,14 (m / s)$$

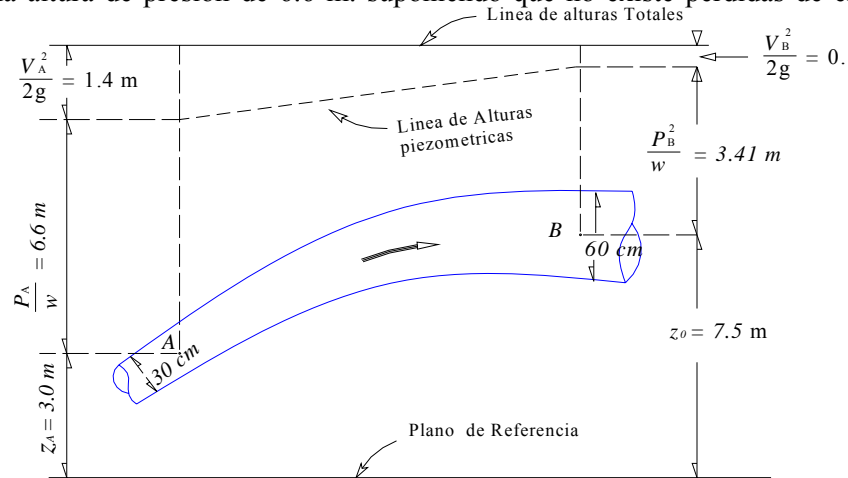
El valor máximo de τ ocurre para $n = 0,20 m$

$$\tau = \mu \left(\frac{dv}{dn} \right)_{\max} \quad \tau = (10^{-2}) [1,5 - (30 \times 0,2)]$$

$$\boxed{\tau = -0,045 (kg/m^2)}$$

Caso: El signo negativo indica el sentido, el esfuerzo de corte es contrario al flujo.

7.- Propósito u objetivo: Determinar la altura de presión en B y dibujar la línea de alturas totales aplicando la ecuación de Bernoulli, de la figura donde esta circulando $0.370 \text{ m}^3/\text{seg}$ de agua de A a B, existiendo en A una altura de presión de 6.6 m. suponiendo que no existe perdidas de energía entre A y B.



Solución:

Se aplica la ecuación de Bernoulli entre A y B, tomando como plano de referencia el horizontal que pasa por A.

Energía en a + energía añadida - energía perdida = energía en B

$$\left(\frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A \right) + 0 - 0 = \left(\frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + z_B \right)$$

Donde $V_{30} = Q/A_{30} = 0.370 / (\frac{1}{4}\pi 0.3^2) = 5.24 \text{ m/seg}$ y

$V_{60} = (\frac{1}{2})^2 (5.24) = 1.31 \text{ m/seg}$. Sustituyendo.

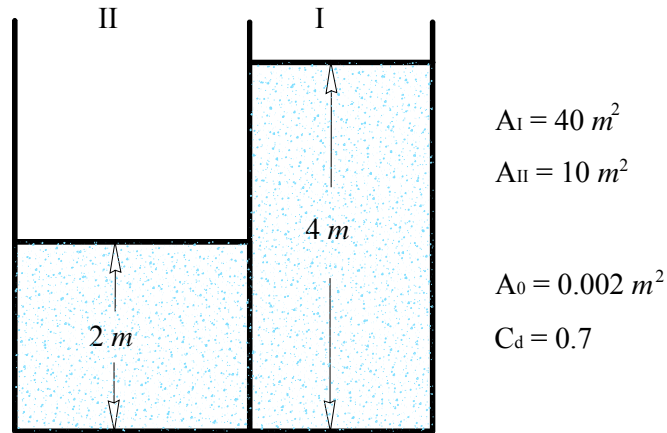
$$\left(6.6 + \frac{(5.24)^2}{2g} + 0 \right) - 0 = \left(\frac{P_B}{\gamma} + \frac{(1.31)^2}{2g} + 4.5 \right) \quad \text{y} \quad \frac{P_B}{\gamma} = 3.41 \text{ m de agua}$$

Puede representarse la energía total en una sección cualquiera como altura sobre un plano horizontal de referencia. Utilizando en este caso el plano que pasa por D-D,

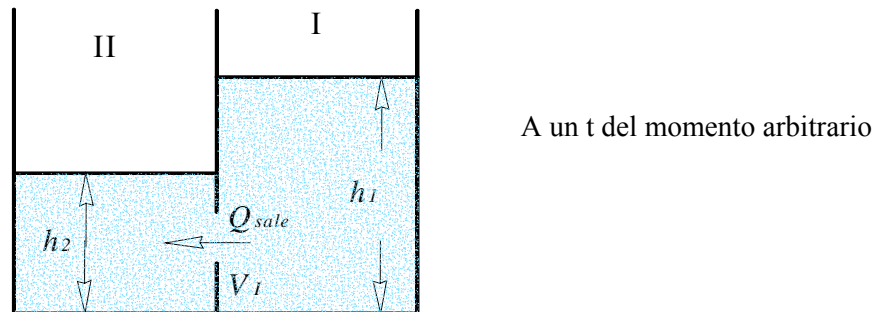
<p>Altura total en A $= \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_{30}^2}{2g} + z_A = 6.6 + 1.4 + 3.0 = 11.0 \text{ m}$</p> <p>Altura total en B $= \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_{60}^2}{2g} + z_B = 3.41 + 0.09 + 7.5 = 11.0 \text{ m}$</p>

Caso: Se observa que tienen lugar la transformación de una forma de energía en otra durante el flujo. En caso presente, parte de la energía de presión y de la energía cinética en A se transforma en energía potencial en B.

8. Propósito u objetivo: Aplicando los conceptos de vaciado de tanque y la ecuación de continuidad. Determinar el tiempo en el cual el nivel de agua esta en equilibrio en ambos reservorios, donde en la figura se muestra dos reservorios de agua los cuales están contruidos unidos por una sola pared, si dicha pared tiene un orificio, ¿cuanto tiempo toma para alcanzar el equilibrio?



a) *Primera solución*



Ecuación de continuidad para el vaso I

$$\frac{dV}{dt} = -Q_{\text{Sale}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{con : } Q_{\text{Sale}} &= C_d * A_0 * \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_1 - h_2)} \\
 &= 0.7 * 0.002 * \sqrt{2 \cdot 9.81 * (h_1 - h_2)} \\
 &= 0.0062 * \sqrt{(h_1 - h_2)} \\
 \frac{dV}{dt} &= A_I \frac{dh}{dt} \\
 40 \frac{dh}{dt}
 \end{aligned}$$

La ecuación de continuidad puede escribirse así como también para el vaso II.

Q_{sale} Para el vaso I se vuelve Q_{entra} Para el vaso II.

La relación entre h_1 y h_2 :

$$A_I * h_1 + A_{II} * h_2 = A_I * 4 + A_{II} * 2$$

$$40 * h_1 + 10 * h_2 = 40 * 4 + 10 * 2$$

$$h_2 = \frac{180 - 40h_1}{10}$$

$$h_2 = 18 - 4h_1$$

A equilibrio: $h_1 = h_2 = 3.6 \text{ m}$

$$40 \frac{dV}{dt} = -0.0062 * \sqrt{h_1 - (18 + 4h_1)}$$

$$40 \frac{dV}{dt} = -0.0062 * \sqrt{5h_1 - 18}$$

$$dt = -\frac{40}{0.0062} * \frac{1}{\sqrt{5h_1 - 18}} * dh_1$$

$$dt = -\frac{40}{0.0062} * \int_4^{3.6} \frac{1}{\sqrt{5h_1 - 18}} * dh_1$$

$$t = -\frac{40}{0.0062} * \frac{2}{5} \left(\sqrt{5h_1 - 18} * \int_4^{3.6} \right)$$

$$\boxed{t = 3649 \text{ s}}$$

b) *Segunda solución :*

Ecuación de continuidad para el vaso I*

$$\frac{dV}{dt} = -Q_{\text{sale}}$$

$$\begin{aligned} \text{con: } Q_{\text{sale}} &= C_d * A_0 * \sqrt{2 * g * H} \\ &= 0.0062 * \sqrt{H} \end{aligned}$$

$$\frac{dV}{dt} = 40 * \frac{dh}{dt}$$

Relación entre h_1 y H

$$A_I * h_1 + A_{II} * (h_1 - H) = \text{ctte}$$

$$50 * h_1 - 10 * H = \text{ctte}$$

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{10}{50} * \frac{dH}{dt}$$

A equilibrio: $H=0$

$$40 * \frac{10}{50} * \frac{dH}{dt} = -0.0062 \sqrt{H}$$

$$8 * \frac{dH}{dt} = -0.0062 \sqrt{H}$$

$$dt = -\frac{8}{0.0062} * \frac{1}{\sqrt{H}} * dH$$

$$\int_0^t dt = -\frac{8}{0.0062} * \frac{0}{2} * \frac{1}{\sqrt{H}} * dH$$

$$t = -\frac{8}{0.0062} * \frac{1}{0.5} * H^{0.5} \int_2^0$$

$$t = -\frac{8}{0.0062} * \frac{1}{0.5} * H^{1/2} \int_2^0$$

t = 3649 segundos

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Propósito u objetivo: Aplicando el teorema de Torricelli y la ecuación deducida.

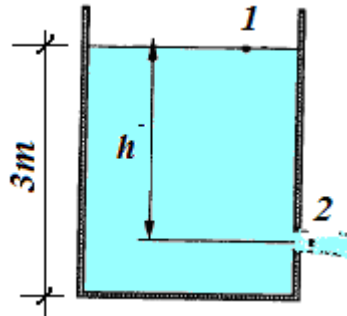
Calcular la velocidad de flujo que sale de la boquilla, para una profundidad de fluido de 3.0 m .

Para el tanque mostrado en la figura.

Solución.

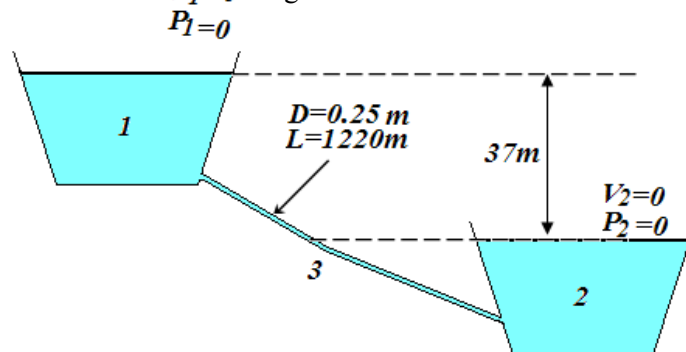
$$v_s = 7.67\text{m/s}$$

Aplicación directa del teorema de Torricelli:



2. Propósito u objetivo: Aplicando los conceptos de dinámica de fluidos.

Determinar (a) la pérdida de carga total, b) la presión que existe a la mitad de la tubería, si dicha sección se encuentra a la misma elevación que el nivel del tanque inferior, siendo que la mitad de la energía disponible se pierde desde el tanque superior hasta dicha sección. Mostrado en la figura donde dos tanques de agua están conectados por una tubería de 1220 m de longitud y 0.25 m de diámetro. El nivel en el recipiente superior está a 37 m por encima del nivel del tanque inferior. El gasto que transporta la tubería es de $0.128\text{ m}^3/\text{seg}$.



Solución: a) $\sum_1^3 H_r = 18.5[\text{m}]$

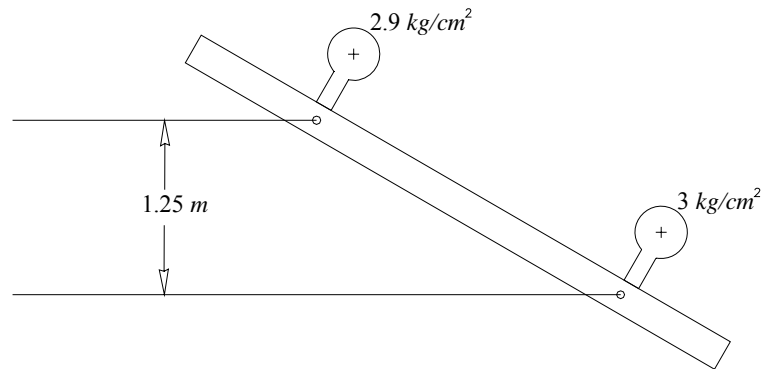
b) $P_3 = 178.1[\text{KN/m}^2]$

3.- Propósito u objetivo: Aplicando las formulas de planteamiento para tuberías circulares.

Calcular el caudal en la tubería, la velocidad máxima, el esfuerzo cortante en el borde y la fuerza cortante ejercidos sobre las paredes del tubo. Para dos manómetros colocados en una tubería de 10 cm de diámetro y separado entre si 250 m, donde indican las medidas mostradas en la figura. El liquido tiene una densidad relativa de 0.95 y una viscosidad de 2×10^{-3} (kg seg/m²).

Solución

$Q = 0.00093 \text{ m}^3/\text{seg}$
$V_{\max} = 0.24 \text{ m/seg}$
$\tau = 0.019 \text{ kg/m}^2$
$F_c = 1.49 \text{ kg}$



4.- Propósito u objetivo: Aplicar los conceptos de dinámica de fluidos. Para determinar la velocidad crítica de: a) gasolina a 20°C que fluye a través de una tubería de 20 mm de diámetro, y b) Agua a 20°C que circula por la tubería de 20 mm.

Solución:

a) Para que el flujo sea laminar, el máximo número de Reynolds es 2000. De la (tabla 3) la viscosidad cinemática a 20°C es $6.48 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{seg}$.

$V_c = 0.0648 \text{ m/seg}$

b) De la (tabla 3) $v = 1.02 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}$ para el agua a 20°C.

$V_c = 0.102 \text{ m/seg}$

5.- Propósito u objetivo: Determinar el tipo de flujo según la ecuación de Reynolds que tiene lugar en una tubería de 30 cm cuando, a) Fluye Agua a 15°C a una velocidad de 1.00 m/seg, y b) Fluye un fuel-oil pesado a 15°C y a la misma velocidad.

Solución:

- a) El flujo es turbulento.
- b) El flujo es laminar.

Capítulo 7:

SIMILITUD HIDRÁULICA

1. INTRODUCCIÓN

La teoría matemática y los resultados experimentales han desarrollado soluciones prácticas de muchos problemas hidráulicos. En la actualidad numerosas estructuras hidráulicas se proyectan y construyen solo después de haber efectuado un amplio estudio sobre modelos. La aplicación del análisis dimensional y de la semejanza hidráulica permite al ingeniero organizar y simplificar las experiencias, así como el análisis de los resultados obtenidos.



Prototipo



Modelo

Fig. 7.1

En este capítulo solo se presenta la derivación de las leyes de similitud mas comunes y sus aplicaciones en el estudio experimental de los sistemas de flujo mas importantes; sin embargo, no significa que se haga una exposición completa de las técnicas de investigación. Estas pueden ser tan variadas como los problemas que presentan los diferentes flujos que ocurren en la naturaleza o en las estructuras hidráulicas, especialmente por las aportaciones de la matemática estadística que permite hacer una planeación adecuada de las pruebas y una interpretación más racional de los resultados experimentales. En ellos interviene una amplia variedad de factores sujetos a la exactitud en la construcción del modelo; apreciación de las mediciones por el operador; decisión del instrumental que se utiliza; los efectos de escala y, desde luego reconocer que no existe similitud absoluta sino, mas bien, varias similitudes imperfectas y susceptibles a emplearse según se requiera.

La técnica seguida en la selección, tanto de las leyes de la similitud como de las escalas, en la construcción, medición y operación de los modelos, así como en la interpretación de los resultados experimentales, constituye por si misma una disciplina que, por su extensión, no es posible incluir totalmente en este capítulo.



Fuente: Fotografía “Presa La Puna-S. C.” –
Laboratorio de Hidráulica UMSS

Fig. 7.2 Modelo hidráulico “Presa La Puna” Santa Cruz

2. MODELOS HIDRAULICOS

Los modelos hidráulicos, en general, pueden ser o bien modelos verdaderos o modelos distorsionados. Los modelos verdaderos tienen todas las características significativas del prototipo reproducidas a escala (semejanza geométrica) y satisfacen todas las restricciones de diseño (semejanza cinemática y dinámica). El estudio comparativo entre modelo y prototipo ha mostrado con evidencia que la correspondencia de comportamiento es frecuentemente buena, fuera de las limitaciones esperadas, como lo atestigua el correcto funcionamiento de muchas estructuras diseñadas a partir de ensayos sobre modelos.

3. ANÁLISIS DIMENCIONAL

El análisis dimensional trata de las relaciones matemáticas de las dimensiones de las magnitudes físicas y constituye otra herramienta muy útil de la moderna Mecánica de los Fluidos. En toda ecuación que exprese una relación física entre magnitudes debe verificarse la igualdad al sustituir las magnitudes por sus valores numéricos y también por sus dimensiones. En general, todas las relaciones físicas pueden reducirse a una relación entre las magnitudes fundamentales, fuerza F , longitud L y tiempo T (o bien la masa M , longitud L y tiempo T). Entre las aplicaciones se incluyen 1) conversión de un sistema de unidades en otro; 2) desarrollo de ecuación; 3) reducción del numero de variables requeridas en un programa experimental, y 4) establecimiento de los principios para el diseño de modelos.

Podemos concluir mencionando que al abordar un fenómeno físico, lo que primero debemos hacer es una lista de todas las variables que intervienen en este, lo cual puede ser el resultado de la experiencia y el buen juicio; luego debemos hacer el análisis dimensional de las variables que intervienen en el fenómeno físico.

4. NÚMEROS ADIMENSIONALES Y SIMILITUD HIDRÁULICA

Si tenemos un elemento pequeño y otro elemento de dimensiones considerables geométricamente similar al anterior en ambos se producen las mismas manifestaciones físicas en las proporciones adecuadas a los elementos, por lo que se puede hacer una similitud entre ambos y relacionarlos proporcionalmente.

Esta relación se hace por medio de los conocidos como números adimensionales, uno de los cuales anteriormente lo hemos utilizado y que lo hemos llamado el numero de Reynolds. Estos números los hallamos a partir de las fuerzas más importantes que se manifiestan en todo fenómeno físico de las cuales consideraremos las fuerzas que se manifiestan en un fluido, que son: las fuerzas inerciales, las fuerzas gravitatorias, las fuerzas viscosas, las fuerzas debido a la presión, las fuerzas elásticas, y las fuerzas debidas a la tensión superficial. Estas fuerzas las relacionaremos adecuadamente y de acuerdo a la fuerza que predomine en el fenómeno físico; y para ello, cada una de estas fuerzas se representará por sus equivalentes correspondientes:

- Fuerzas inerciales: $F_i = ma = \rho L^3 \left(\frac{V^2}{L} \right) \rightarrow F_i = \rho L^2 V^2$
- Fuerzas gravitatorias: $F_g = mg = \rho L^3 g \rightarrow F_g = \rho L^3 g$
- Fuerzas viscosas: $F_\mu = \mu \left(\frac{\Delta V}{\Delta Y} \right) A = \mu \left(\frac{V^2}{L} \right) L^2 \rightarrow F_\mu = \mu V L$
- Fuerzas debidas a la presión: $F_p = PA \rightarrow F_p = PL^2$
- Fuerzas elásticas: $F_E = EA \rightarrow F_E = EL^2$
- Fuerzas debidas a la tensión superficial: $F_\sigma = \sigma L$

4.1. Leyes De Similitud

4.1.1. Número de Froude

Dividamos las fuerzas inerciales entre las fuerzas gravitatorias:

$$\frac{F_i}{F_g} = \frac{\rho L^2 V^2}{\rho L^3 g} = \frac{V^2}{Lg} \quad (1)$$

Con el fin de obtener información por medios experimentales, es a menudo más conveniente y menos costoso realizar las mediciones reales sobre un modelo más bien que sobre el original. El modelo es usualmente menor que el original comúnmente llamado prototipo y son geométricamente semejantes. Es preciso observar ciertas leyes de similitud para asegurar los datos obtenidos mediante las pruebas en los modelos; es por ello que la ecuación (1) podemos igualarla para el modelo y el prototipo, de manera que:

$$\left(\frac{V^2}{Lg}\right)_M = \left(\frac{V^2}{Lg}\right)_P$$

$$\left(\frac{V}{\sqrt{Lg}}\right)_M = \left(\frac{V}{\sqrt{Lg}}\right)_P \quad (2)$$

En la ecuación (2) los subíndices M y P se refieren al modelo y el prototipo respectivamente, y es la relación que existe entre ambos.

La ecuación (2) se conoce como el número de Fraude **F** y se utilizara cuando en el fenómeno físico predominen las fuerzas gravitatorias. Es el caso de las olas superficiales producidas por el casco de un barco o de un hidroavión, o bien, el flujo de un canal abierto.

Finalmente podemos escribir la ecuación (2) como el número de Froude:

$$\boxed{F = \frac{V}{\sqrt{Lg}}} \quad \text{Numero de Froude} \quad (3)$$

4.1.2. Número de Reynolds

Para un flujo completamente encerrado (tuberías, medidores de flujo, ventiladores, bombas, turbinas) o para un flujo en el que hay cuerpos totalmente sumergidos (submarinos, aeronaves, estructuras) en un fluido de forma que no se tomen en cuenta fuerzas debidas a la gravedad o que estas estén equilibradas por medio de las fuerzas de flotación, las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas son la únicas que se manifiestan, por lo que podemos dividir las fuerzas inerciales entre las fuerzas viscosas de manera que:

$$\frac{F_i}{F_\mu} = \frac{\rho L^2 V^2}{\mu V L} = \frac{\rho L^2 V^2}{\mu V L} \quad (4)$$

Si las fuerzas de viscosidad e inercia determinan el flujo para un prototipo, entonces la similitud mecánica entre el modelo y el prototipo se alcanza cuando el número adimensional de la ecuación (4) del modelo es igual para el prototipo, de manera que se cumple la siguiente condición:

$$\left(\frac{\rho LV}{\mu} \right)_M = \left(\frac{\rho LV}{\mu} \right)_P \quad (5)$$

Esta ecuación se conoce como el número de Reynolds (Re) y se utilizara cuando en el fenómeno físico predomine las fuerza viscosas.

Finalmente podemos escribir el número de Reynolds como:

$$\boxed{\text{Re} = \frac{\rho LV}{\mu}} \quad \text{Número de Reynolds} \quad (6)$$

4.1.3. Número de Euler

En algunos cuerpos sumergidos es necesario considerar la presión que se manifiesta en ellos, y algunas veces estas son considerables por lo que es necesario considerarlas como predominantes en el fenómeno físico, ya que las caídas de presión son lo suficientemente bajas que provocan la formación de vapor (Cavitacion) en un liquido; en razón de ello dividimos las fuerzas inerciales entre las fuerzas debidas a la presión, de manera que:

$$\frac{F_i}{F_p} = \frac{\rho L^2 V^2}{P L^2} = \frac{\rho V^2}{P} \quad (7)$$

Si las fuerzas de presión e inercias determinan el flujo para un prototipo, entonces la similitud mecánica entre el modelo y el prototipo se alcanza cuando el número adimensional de la ecuación (7) del modelo es igual para el prototipo, de manera que se cumpla la siguiente condición:

$$\left(\frac{\rho V^2}{P} \right)_M = \left(\frac{\rho V^2}{P} \right)_P \quad (8)$$

Esta ecuación se denomina como el numero de Euler (E) y se utilizara cuando en el fenómeno físico predominen las fuerzas debidos a la presión. Finalmente podemos escribir que:

$$\boxed{E = \frac{\rho V^2}{P}} \quad \text{Número de Euler} \quad (9)$$

4.1.4. Número de Mach

Los tres números adimensionales que hemos visto generalmente se aplican generalmente a fluidos incompresibles a fin de establecer la similitud dinámica, pero si el fluido es compresible en torno a dos cuerpos geoméricamente similares (o dos canales geoméricamente similares), donde las fuerzas predominantes son las inerciales, de presión y las fuerzas elásticas podemos dividir las fuerzas inerciales entre las fuerzas elásticas de manera que:

$$\frac{F_i}{F_E} = \frac{\rho L^2 V^2}{E L^2} = \frac{\rho V^2}{E} \quad (10)$$

Si las fuerzas elásticas e inerciales determinan el flujo para un prototipo, entonces la similitud mecánica entre el modelo y el prototipo se alcanza cuando el número adimensional de la ecuación (10) del modelo es igual para el prototipo, de manera que se cumple la siguiente condición:

$$\left(\frac{\rho V^2}{E} \right)_M = \left(\frac{\rho V^2}{E} \right)_P \quad (11)$$

Si a esta ecuación dividimos numerador y denominador por la densidad y le sacamos la raíz cuadrada se obtendrá:

$$\left(\frac{V}{\sqrt{E/\rho}} \right)_M = \left(\frac{V}{\sqrt{E/\rho}} \right)_P \quad (12)$$

Donde $\sqrt{E/\rho}$ es la velocidad de las ondas sonoras, por lo que la podemos remplazar por

$C = \sqrt{E/\rho}$, en consecuencia la ecuación (12) se convierte en:

$$\left(\frac{V}{C} \right)_M = \left(\frac{V}{C} \right)_P \quad (13)$$

Esta ecuación se denomina como el numero de Mach(M) y se utiliza cuando el fenómeno físico predominen las fuerzas elásticas. Finalmente podemos escribir que:

$$\boxed{M = \frac{V}{C}} \quad \text{Número de Mach} \quad (14)$$

4.1.5. Número de Weber

Otro de los casos importantes que debemos mencionar es aquel donde intervienen las fuerzas inerciales, las fuerzas debido a la presión y las fuerzas debido a la tensión superficial; ya que la tensión superficial es una propiedad molecular de los líquidos que produce ciertos fenómenos en las superficies. Cuando decimos superficies nos referimos a las de separación entre los líquidos y el aire ó las que separan dos líquidos no miscibles.

La tensión superficial es el resultado de fuerzas que se ejercen en las moléculas superficiales desde moléculas del interior del líquido y las fuerzas resultantes ejercidas por las moléculas de la sustancia en contacto con el líquido.

De acuerdo a lo anterior, entonces, podemos dividir las fuerzas inerciales entre las fuerzas producidas por la tensión superficial, de manera que:

$$\frac{F_i}{F_\sigma} = \frac{\rho L^2 V^2}{\sigma L} = \frac{\rho L V^2}{\sigma} \quad (15)$$

Si las fuerzas debido a la tensión superficial e inercial determinan el flujo para un prototipo, entonces la similitud mecánica entre el modelo y el prototipo se alcanza cuando el número adimensional de la ecuación 15 del modelo es igual para el prototipo, de manera que se cumple la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{\rho L V^2}{\sigma} \right)_M = \left(\frac{\rho L V^2}{\sigma} \right)_P \quad (16)$$

Esta ecuación se denomina como el Numero de Weber (W) y se utilizara cuando en el fenómeno físico predominen las fuerzas debido a la tensión superficial. Si a esta ecuación dividimos numerador y denominador por ρL y sacamos la raíz cuadrada se tendrá:

$$\left(\frac{V}{\sqrt{\frac{\sigma}{\rho L}}} \right)_M = \left(\frac{V}{\sqrt{\frac{\sigma}{\rho L}}} \right)_P \quad (17)$$

De acuerdo a esta ecuación podemos concluir que el número de Weber podemos escribirlo de la siguiente forma:

$$W = \frac{V}{\sqrt{\sigma/\rho L}} \quad \text{Número de Weber} \quad (18)$$

El numero de Weber se utiliza en caso de olas superficiales muy pequeñas, pero raramente se emplea en modelos, salvo aquellos casos en que la tensión superficial gobierna el movimiento (como lo son las ondas capilares en pequeños canales o el movimiento capilar en los suelos) no tiene mayor trascendencia en problemas de Ingeniería Hidráulica.

5. SIMILITUD GEOMÉTRICA

Considere dos flujos, como los mostrados en la (figura 7.2), que se designara como modelo y prototipo. Mientras que el primero tiene, en general, dimensiones menores que el segundo y es el que se reproduce en el laboratorio, el segundo representa la estructura real por construir.

La similitud geométrica implica, de un modo estricto, que sea igual la relación de todas las *longitudes homogéneas* en los dos sistemas. Esto es, si dentro de los fluidos ciertas dimensiones se seleccionan y, además, se designa con *p* al prototipo y con *m* al modelo (fig. 7.2), la similitud geométrica significaría, por ejemplo, que:

$$L_e = \frac{H_p}{H_m} = \frac{B_p}{B_m} = \frac{S_p}{S_m} = \dots \quad (19)$$

Donde L_e es la escala de longitudes que cuantifica el tamaño relativo de los dos sistemas.

Una consecuencia de la similitud geométrica exacta es que la relación de áreas y volúmenes en ambos sistemas se puede expresar en términos del cuadrado y del cubo de L_e esto es:

$$A_e = \frac{A_p}{A_m} = L_e^2$$

$$V_e = \frac{V_p}{V_m} = L_e^3$$

En algunos casos, es factible que la similitud geométrica exista solo en lo que se refiere a las dimensiones sobre planos horizontales y las dimensiones verticales pueden quedar *distorsionadas* con otra escala de líneas (como es el caso de los modelos de ríos o puertos) donde se conserva la misma escala de líneas en las tres direcciones significaría tener tirantes muy pequeños en los modelos. Se tendría así por ejemplo, escalas de líneas de dimensiones verticales y horizontales, como sigue:

$$L_{ev} = \frac{H_p}{H_m} = \frac{S_p}{S_m} = \dots$$

$$L_{eh} = \frac{B_p}{B_m} = \dots$$

La similitud geométrica se extiende también a la rugosidad superficial de las paredes que limitan al flujo, pues si el modelo tiene un tamaño igual a un décimo del prototipo ($L_e=10$), entonces la altura de las proyecciones de las rugosidades deben estar en la misma relación.

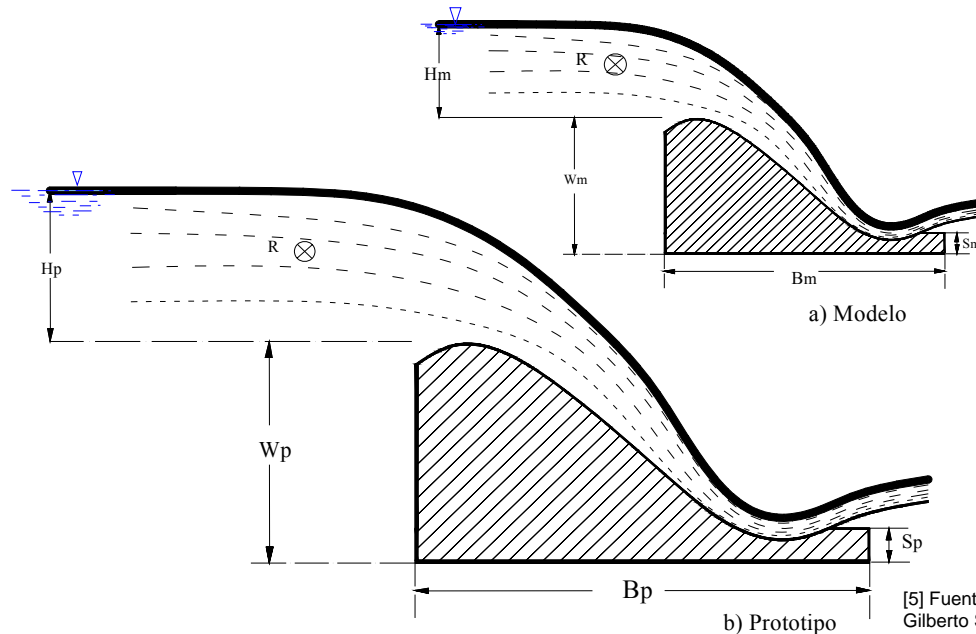
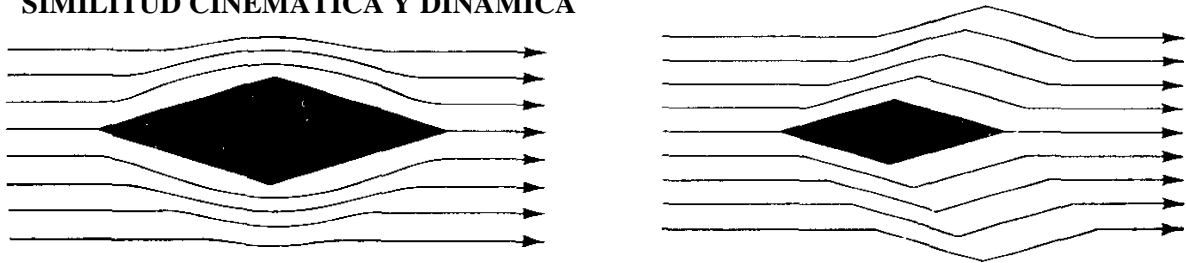


Fig. 7.2 Similitud entre dos fluidos del modelo y el prototipo (a y b).

Esto es difícil de lograr en la práctica, por lo que en ocasiones es necesaria una distorsión geométrica en la dimensión longitudinal de la conducción respecto a las otras dos dimensiones, con objeto de lograr la misma relación de pérdidas de energía en ambas estructuras.

6. SIMILITUD CINEMÁTICA Y DINÁMICA



[4] Fuente: Dinámica de los fluidos – Jhames W. Daily ; Donald R. F. Harleman

Fig.7.3 Similitud Dinámica

La similitud cinemática entre dos sistemas de flujo se interpreta como la semejanza geométrica entre las líneas de corriente de ambos flujos, sin distorsión o con ella. La similitud dinámica implica que

haya similitud geométrica, o bien, distorsionada, además de que sea la misma relación de las fuerzas dinámicas en puntos homólogos.

En la similitud dinámica, al igual que en la similitud geométrica, existen escalas de velocidades, de fuerzas, tiempos, densidades, viscosidades, etc., que miden la relación entre las características de los flujos o propiedades de los fluidos utilizados en los mismos y referidas a dos puntos homólogos, que se designaran con el símbolo hasta ahora utilizado, pero añadiendo el subíndice (escala). Por ejemplo, ρ_e , μ_e , ν_e , se refieren a las propiedades de los fluidos que se utilicen en el prototipo y el modelo. Estos fluidos pueden ser distintos en ambos sistemas. La escala g_e se refiere a las aceleraciones de la gravedad que pueden considerarse distintas entre el sitio que se localiza el prototipo y el lugar donde se prueba el modelo; sin embargo, se acepta en general que $g_e = 1$ debido a la poca variación de g con la latitud geográfica y la elevación sobre el nivel del mar. Además, por definición, sabemos que:

$$V_e = \frac{L_e}{T_e} \Rightarrow \alpha_v = \frac{\alpha_s}{\alpha_t}$$

$$T_e = \frac{L_e}{V_e}$$

$$Q_e = A_e V_e \Rightarrow \alpha_Q = \frac{\alpha_s^3}{\alpha_t} ; \alpha_t = \alpha_s^{1/2}$$

$$a_e = \frac{L_e}{T_e^2}$$

$$\rho_e = \frac{\gamma_e}{g_e}$$

$$\nu_e = \frac{\mu_e}{\rho_e}$$

$$\alpha_s = \frac{P_m}{P_p}$$

$$\alpha_s = \frac{h_m}{h_p}$$

$$Q_p = \frac{Q_m}{a_Q}$$

α_s :Escala de aceleracion

α_t =Escala de tiempo

α_Q =Escala de caudal

α_v =Escala de velocidad

7. SISTEMAS A PRESIÓN

En este caso, los cambios de presión se deben a una combinación de los efectos dinámicos producidos por la aceleración, viscosidad y gravedad. En el caso común de un flujo de densidad constante el efecto de gravedad es una distribución de presiones hidrostáticas, superpuesta a una presión variable debido a otros efectos, de ahí que el número de Reynolds sea el más importante y deba ser igual que el modelo y prototipo esto es:

$$\frac{V_p L_p}{\nu_p} = \frac{V_m L_m}{\nu_m}$$

O bien:

$$\boxed{\frac{V_e L_e}{\nu_e} = 1} \quad (20)$$

Donde: V_e es la escala de velocidades y ν_e de viscosidad cinemática; resulta entonces lo siguiente:

$$\boxed{V_e = \frac{\nu_e}{L_e} = \frac{\mu_e}{\rho_e L_e}} \quad (21)$$

La escala de tiempos es:

$$\boxed{T_e = \frac{L_e}{V_e} = \frac{\rho_e L_e^2}{\mu_e}} \quad (22)$$

La de aceleraciones:

$$\boxed{a_e = \frac{V_e}{T_e} = \frac{V_e^2}{L_e^3} = \frac{\mu_e^2}{\rho_e^2 L_e^3}} \quad (23)$$

La de fuerzas viscosas:

$$\boxed{F_e = m_e a_e = \rho_e L_e^3 \frac{\mu_e^2}{\rho_e^2 L_e^3} = \frac{\mu_e^2}{\rho_e}} \quad (24)$$

Y, por ultimo, la de presiones:

$$\boxed{P_e = \frac{F_e}{A_e} = \frac{\mu_e^2}{\rho_e L_e^2}} \quad (25)$$

Al utilizar el criterio de semejanza de Reynolds puede demostrarse que las fuerzas gravitacionales se anulan y no tienen, por tanto efectos sobre las características del flujo. Sin embargo, en la mayoría de los estudios con modelos el número de Reynolds varia desde 1×10^6 a 20×10^6 , por lo cual la utilización de este criterio de semejanza es poco usual en la práctica.

8. SISTEMAS A SUPERFICIE LIBRE

En este caso, la presión relativa (medida a partir de la atmosférica en un punto cualquiera) no se puede modificar arbitrariamente sin afectar la geometría de la superficie libre. Como la fuerza de

gravedad es la más importante, el número de Froude debe ser igual en el modelo y el prototipo, o sea:

$$\frac{V_e}{\sqrt{g_e L_e}} = 1 \quad (26)$$

La escala de velocidades, suponiendo que $g_e = g_m$, es:

$$V_e = \sqrt{L_e} \quad (27)$$

Si las fuerzas viscosas tuvieran importancia (simultáneamente el número de Reynolds), se pueden igualar las ecuaciones (21) (27), entonces la escala de longitudes sería:

$$L_e = V^{2/3} \quad (28)$$

Para la similitud dinámica de las fuerzas de gravedad y viscosas, simultáneamente la escala de longitudes queda sujeta a la selección de los fluidos en ambos sistemas o visversa. Así, se tiene el caso del flujo de infiltración a superficie libre de una presa. Debido a que el intervalo de viscosidades cinemáticas en los líquidos comunes es muy, limitado usualmente es muy difícil satisfacer la condición anterior a menos que el modelo se construya prácticamente del mismo tamaño que el prototipo.

En la mayoría de los flujos a superficie libre (canales, vertederos, salto hidráulico, compuertas, válvulas, ondas superficiales, modelos marítimos, etc.) los efectos viscosos carecen de importancia y el efecto de fricción provoca pequeños cambios en el aspecto dinámico del flujo. Puede ser así que el número de Froude sea la ley de similitud escogida, cuidando tan solo de que el Reynolds se encuentre dentro del intervalo necesario para que se tenga el mismo tipo de flujo en ambos sistemas. En algunos debe procurarse producir la rugosidad en el modelo para que haya similitud en los efectos de fricción; por ejemplo, cuando se trata de canales, ríos y estuarios (en los que es necesario producir grandes rugosidades para lograr esa similitud) se requiere gran experiencia y buen juicio para interpretar los resultados.

Si conforme el número de Froude únicamente se necesita la similitud, la ecuación (27) es válida y la escala de tiempos es:

$$T_e = \sqrt{L_e} \quad (29)$$

La de gasto será:

$$Q_e = V_e A_e = L_e^{5/2} \quad (30a)$$

$$Q_e = V_e A_e = \sqrt{L_{ev}} L_{ev} L_{eh} = L_{ev}^{3/2} L_{eh} \quad (30b)$$

De aceleraciones

$$a_e = g_e = 1 \quad (31)$$

Y de fuerzas

$$F_e = \rho_e L_e^3 g_e = \gamma_e L_e^3 \quad (32 a)$$

$$F_e = \rho_e L_{ev} L_{eh}^2 g_e = \gamma_e L_{ev} L_{eh}^2 \quad (32 b)$$

En el caso de sistemas a superficie libre con poco tirante y baja velocidad, en que llegara a tener importancia la tensión superficial, la ley de similitud seria:

$$\frac{V_e^2 \rho_e L_e}{\sigma_e} = 1 \quad (33)$$

Y la escala de velocidades:

$$V_e = \sqrt{\frac{\sigma_e}{\rho_e L_e}} \quad (34)$$

La de tiempos:

$$T_e = L_e^{2/3} \sqrt{\frac{\rho_e}{\sigma_e}} \quad (35)$$

Y, por ultimo, la de fuerzas:

$$F_e = \sigma_e L_e \quad (36)$$

La validez simultanea de las leyes de Froude y Weber no es posible, esto es, no se puede lograr semejanza dinámica en fenómenos – por ejemplo – de la descarga de un vertedero u orificio con cargas bajas.

La similitud dinámica en la maquinaria hidráulica se establece con los parámetros adimensionales obtenidos.

Las aproximaciones en las leyes de similitud y las dificultades inherentes a la similitud geométrica exacta, se conoce comúnmente con el nombre de *efecto de escala*, las cuales pueden tener muy diversos orígenes. La estimación aproximada de dichos efectos no es posible si se construye modelos de diferente tamaño y se comparan los resultados obtenidos, deduciendo con ello la verificación o aproximación de la ley de similitud utilizada.

9. PLANEACIÓN Y CONSTRUCCIÓN DEL MODELO

Desde el punto de vista de la economía, el modelo debe ser tan pequeño como sea posible y, aun así, obtenerse resultados validos. Sin embargo, es necesario considerar que los modelos demasiados pequeños puede resultar incomodo para efectuar mediciones adecuadas. En un modelo a escala mediana habrá mayor flexibilidad para obtener con mayor facilidad los objetivos perseguidos, si bien estos implican disponibilidad de espacio y suficiente caudal de agua.

No existen reglas específicas para elegir la escala de un modelo hidráulico, a pesar de ser uno de los factores más importantes en la planeación del modelo. Una buena practica es la de procurar siempre que exista semejanza geométrica exacta, a menos de haber razones de peso para optar por modelos distorsionados.

Los planos del modelo, lo mas aproximado posible, evitan los errores con el consiguiente ahorro en el tiempo de construcción. Aquellos pueden ser esquemas y bosquejos para construcciones más o menos rutinarias, o bien planos minuciosamente detallados de las porciones más importantes y criticas del modelo.

El modelo no necesita ser estrictamente igual al prototipo, si las superficies sobre las cuales fluye el agua se producen en su forma, el modelo usualmente cumplirá con su cometido. Los modelos para vertederos pueden construirse de lámina metálica sobre bastidores. Los lechos de ríos o canales se pueden modelar con mortero de cemento sobre tela metálica o construyendo sobre plantillas las disposiciones adecuadas de grava y arena. El uso de los materiales plásticos es particularmente

apropiado para la simulación de conductos de acero o mampostería para facilitar la observación visual.

Las escalas distorsionadas son empleadas cuando es necesario apartarse de la similitud geométrica para servir objetivos definidos y limitados. Generalmente se debe recurrir a la distorsión de modelos de canales fluviales, puertos y estuarios, para los cuales las dimensiones horizontales son muy grandes en proporción a las dimensiones verticales. En tales casos, las escalas horizontales están limitadas por el espacio y por restricciones de costo. Cuando las dimensiones resultantes en el modelo, en lo que se refiere a tirantes y pendientes, son muy pequeñas para producir resultados significativos, se requerirá una escala vertical distorsionada, la cual no conviene que sea mayor de cinco veces la escala horizontal.

10. APLICACIÓN DE SIMILITUD HIDRÁULICA

En los capítulos anteriores se han visto una serie de formulas matemáticas, que son herramientas analíticas para la resolución de los diferentes problemas que se nos presentan en la mecánica de fluidos. Pero estas herramientas analíticas, a veces son insuficientes cuando se presentan ciertos fenómenos físicos (*ejm: la turbulencia*), los que muchas veces son simulados en los laboratorios de la especialidad para así complementar estas deficiencias, ya que, las herramientas mencionadas anteriormente han sido deducidas para ciertas características especiales y no considerando todo el fenómeno físico en si.

La teoría matemática y los resultados experimentales han desarrollado soluciones prácticas de muchos problemas hidráulicos. De esta manera hoy en día se aplica la similitud hidráulica en especial para realizar construcciones aplicadas en la hidráulica donde numerosas estructuras se proyectan y construyen solo después de haber efectuado un amplio estudio sobre modelos. La aplicación del análisis dimensional y de la semejanza hidráulica permite al ingeniero organizar y simplificar las experiencias, así como el análisis de los resultados obtenidos.

Es por ello que es necesario la experimentación de estos fenómenos físicos en los laboratorios y generalmente estas experiencias se complementan con las aplicaciones de ecuaciones dimensionales y a dimensionales que dependen de las magnitudes que intervienen en dichos fenómenos físicos.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Propósito u objetivo: Aplicando en concepto de escala de velocidades en similitud hidráulica. Determinar a que velocidad deberá fluir el agua en un tubo de 0,076m, para que exista similitud dinámica, si la viscosidad cinemática del agua es de $0,01 \text{ cm}^2/\text{seg}$. Y de un aceite con viscosidad cinemática de $\nu = 0,14 \text{ cm}^2/\text{seg}$. que fluye en un tubo de 0,76 m de diámetro a una velocidad media de 2,44 m/seg..

Solución:

Si los subíndices 0 y w denotan aceite y agua respectivamente, se tiene que $Re_0 = Re_w$

$$\frac{V_0 D_0}{\nu_0} = \frac{V_w D_w}{\nu_w}$$

o bien

$$\frac{244 \times 76}{0,14} = \frac{V_w \times 7,6}{0,01}$$

$$V_w = \frac{244 \times 76 \times 0,01}{7,6 \times 0,14} = 174$$

$V_w = 1,74 \text{ m/seg}$

Caso: Único en la determinación de la escala de velocidades

2.- Propósito u objetivo: Aplicar las formulas de escala de longitud, viscosidad, densidad y fuerza de similitud hidráulica. Para un dispositivo de investigación que se encuentra sostenido de una barra cilíndrica de 0,15m de diámetro, la cual a su vez esta sujeta a una lancha y sumergida verticalmente en aguas profundas a 15°C , donde la velocidad, por el movimiento de la lancha, alcanza 3m/seg.

Se desea determinar la fuerza de resistencia en la barra (inducida por el movimiento) con un modelo geoméricamente similar, de 0,03m de diámetro, en un túnel de viento de presión variable, donde es posible lograr velocidades hasta de 30m/seg, a una temperatura de 15°C .

Solución:

Suponiendo que el túnel de viento se opera a 30m/seg, se puede obtener la densidad del aire, requerida por la condición de que el número de Reynolds sea igual en los dos sistemas. Para la

temperatura de 15°C las escalas de viscosidades de ambos fluidos, de velocidades y de longitudes son, respectivamente:

$$\mu_e = \frac{\mu_p}{\mu_m} = \frac{1,18 \times 10^{-4}}{2,0 \times 10^{-6}} = 0,59 \times 10^2$$

$$V_e = \frac{V_p}{V_m} = \frac{3}{30} = 0,1$$

$$L_e = \frac{L_p}{L_m} = \frac{0,15}{0,03} = 5$$

Por lo tanto de la (ecuación 21) resulta:

$$\rho_e = \frac{\mu_e}{V_e L_e} = \frac{0,59 \times 10^2}{0,1 \times 5} = 1,18 \times 10^2$$

Debido a que la densidad del agua es $\rho_p = 101,87 \text{ kg seg}^2/\text{m}^4$, la del aire deberá ser:

$$\rho_m = \frac{101,87}{1,18 \times 10^2} = 0,8633 \text{ kg seg}^2/\text{m}^4$$

Como la densidad del aire a presión atmosférica estándar es $0,125 \text{ kg seg}^2/\text{m}^4$, el túnel debe controlarse con una presión de 6 atm, aproximadamente, para alcanzar la densidad deseada.

De la ecuación (24) la escala de fuerzas es:

$$F_e = \frac{(0,59 \times 10^2)^2}{1,18 \times 10^2} = 29,5$$

La fuerza de resistencia en prototipo será entonces:

$$\boxed{F_p = 29,5 F_m}$$

Caso: Único

3.- Propósito u objetivo: Aplicando las ecuaciones deducidas en similitud. Determinar las escalas de velocidad, gasto y fuerzas, para un modelo construido a escala $L_e=100$ de una obra de excedencias que descargara un gasto de $10\,000\text{ m}^3/\text{seg}$.

Solución:

El fenómeno que se presenta esta sujeto a la ley de Froude, por lo que si se aplica la ecuación 18 la escala de velocidades resulta:

$$V_e = \sqrt{100} = 10$$

O sea, que para obtener las velocidades del prototipo se necesita multiplicar por 10 las velocidades medidas en el modelo.

De la (ecuación 21a), la escala de gastos vale:

$$Q_e = 100^{5/2} = 100\,000$$

Entonces el gasto que deberá fluir en el modelo es

$$Q_m = \frac{10\,000}{100\,000} = 0,1\text{ m}^3 / \text{seg} = 100\text{ lt} / \text{seg}$$

La escala de fuerzas, para $\gamma_e = 1$, de la (ecuación 23 a) resulta ser:

$$\boxed{F_e = 1 \times 100^2 = 1\,000\,000}$$

Caso: Único

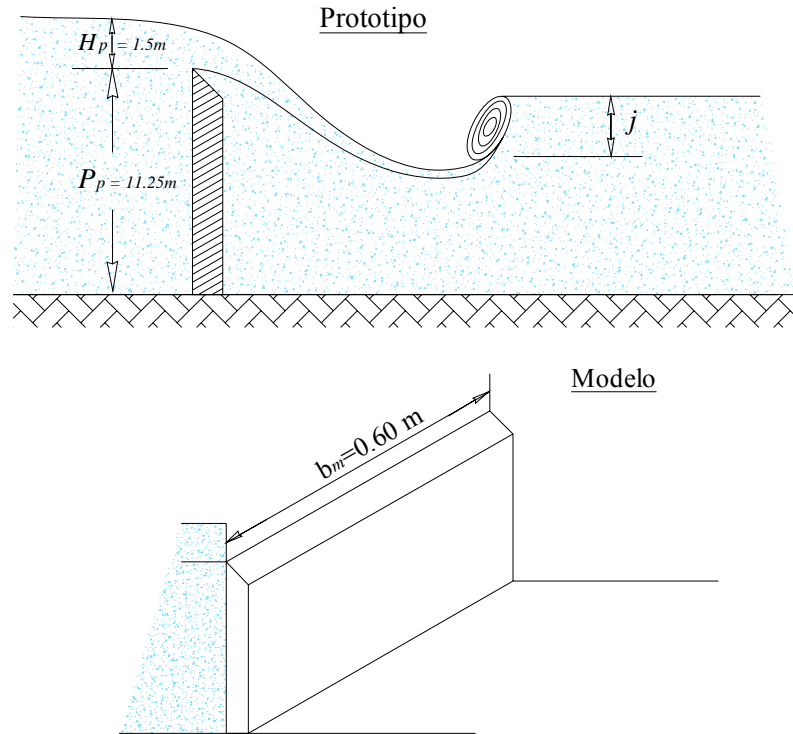
4.- Propósito u objetivo: Aplicando las ecuaciones de escalas de presión, altura, descarga desarrollados en similitud. Determinar:

a). Presión y altura para el modelo.

b). Si la descarga encima del modelo es 20 l/s , para $h_m=0.06\text{ m}$. ¿Cual será la descarga para m encima del prototipo?

c) Si nosotros llegamos al modelo un salto hidráulico de 0.025 m, ¿Cual será la dimensión del salto en prototipo?

d). Si el poder disipado en el salto hidráulico del modelo es igual 1 KW, Cuanto poder se disipa en el prototipo.



Solución.

a)

$$a_s = \frac{s_m}{s_p} = \frac{1}{25}$$

$$P_m = P_p * a_s = 11.25 * \frac{1}{25} = 0.45m$$

$$h_m = h_p * a_s = 1.50 * \frac{1}{25}$$

$$\boxed{h_m = 0.65m}$$

$$b) \quad a_Q = a_s^{5/2} = \left(\frac{1}{25}\right)^{5/2} = \frac{1}{3125} \quad \Rightarrow \quad a_Q = \frac{a_s^3}{a_t} = \frac{a_s^3}{a_s^{1/2}} = a_s^3 * a_s^{-1/2} = a_s^{5/2}$$

$$Q_p = \frac{Q_m}{Q_Q} \quad \Rightarrow \quad Q_m = Q_p * Q_Q = 0.02 * 3125 = 62.5 \text{ m}^3 / s$$

$$\text{para una Anchura : } b_p = \frac{b_m}{a_s} = 0.60 * 25 = 15 \text{ m}$$

$$Q_p(\text{ para m }) = \frac{Q_m}{b_m} = \frac{62.5}{15}$$

$$\boxed{Q_p(\text{para m}) = 4.167 \text{ m}^3/\text{s}}$$

c)

$$j_p = \frac{j_m}{a_s} \quad \Rightarrow \quad j_m = j_p * a_s = 0.025 * 25 = 0.625 \text{ m}$$

$$\boxed{j_m = 0.625 \text{ m}}$$

d)

$$a_w = a_p * a_s = 1 * \left(\frac{1}{25}\right)^{7/2} \quad \Rightarrow \quad a_w = \frac{a_p * a_s^5}{a_t^3} = \frac{a_p * a_s^5}{(a_s^{1/2})^3} = \frac{a_p * a_s^5}{a_s^{3/2}}$$

$$a_w = \frac{1}{78125}$$

$$W_p = \frac{W_m}{a_w} = 1 * 78125$$

$$a_w = a_p * a_s^5 * a_s^{-3/2} = a_p * a_s^7$$

$$\boxed{W_p = 78125 \text{ KW}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Propósito u objetivo: Aplicar las ecuaciones de similitud dinámica y cinemática.

Determinar las escalas de velocidad, caudal y fuerzas, para un modelo construido a escala $L_{eh}=100$, $L_{ev}=50$ de una obra de excedencias que descargara un gasto de $10\,000\text{ m}^3/\text{seg}$. Utilizar las (ecuaciones 30 b, 32 b)

Solución:

$$V_e = 7,07$$

$$Q_m = 0,283\text{ m}^3 / \text{seg}$$

2.- Propósito u objetivo: Aplicando los números adimensionales obtenidos en similitud. Obtener la similitud dinámica para un análisis dimensional que revelará tres grupos que intervienen en la determinación del arrastre sobre el casco: el coeficiente de presión, el número de Reynolds y el número de Euler. Por consiguiente, para obtener la similitud dinámica es necesario que por lo menos el número de Euler y el de Reynolds se dupliquen en el flujo del prototipo y en el flujo del modelo, geoméricamente similar.

Supóngase que el prototipo tiene una longitud de 100 pies y una velocidad de 10 nudos, y debe impulsarse a través de agua dulce con una viscosidad de $2.10 \times 10^{-7}\text{ lbf-s/pie}^2$ y una densidad de 62.4 lbf/pie^3 . Escala del modelo 1:20

Solución:

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = 1.559 \times 10^8$$

$$Eu = \frac{V^2}{L h} = 0.0886$$

En un modelo geoméricamente similar a escala de 1:20 con respecto al prototipo, con el fin de duplicar el número de Euler se requiere una velocidad determinada como

$$\frac{V^2}{(L h) \times \left(\frac{1}{20}\right)} = 0,0886 \Rightarrow V_m = 2,24\text{ kN}$$

Para duplicar el número de Reynolds se requiere:

$$\frac{\rho V D}{\mu} = \frac{V D}{v_m} \Rightarrow v_m = 1,2113 \times 10^{-7}\text{ pies}^2 / \text{s}$$

Capítulo 8:

FLUJO EN TUBERÍAS

1. INTRODUCCIÓN

El presente capítulo se refiere al movimiento confinado en tuberías de fluidos reales incompresibles (líquidos a presión y temperaturas ordinarias). Se plantea las ecuaciones básicas de flujo en tuberías, además de pérdidas por fricción y localizadas. En este capítulo también se presenta los criterios de diseño básico de sistemas de tuberías simples y redes.

Pasaremos a encontrar la pérdida de energía producida por la fricción en las tuberías utilizando las ecuaciones de Darcy –Weisbach y Hazen - Williams. Conocida la pérdida producida por los tubos, se conocerá la pérdida de energía producida por los accesorios tales como: Válvulas, codos, reducciones, Ampliaciones, etc.

2. RESISTENCIA AL FLUJO EN TUBERÍAS COMERCIALES

2.1 Tuberías Circulares.

Para la determinación de las pérdidas de carga en tuberías circulares, se han deducido varias ecuaciones empíricas entre las más conocidas tenemos la ecuación de *Darcy – Weisbach* (1850):

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (1)$$

Donde: h_f : Pérdida de carga por fricción (m)

D: Diámetro de la tubería (m)

L: Longitud del tubo (m)

V: velocidad media del flujo, en (m/s);

g: aceleración de la gravedad, en (m/s²);

f: Factor de fricción, adimensional.-

El factor de fricción f es funcional de la rugosidad de la tubería y el número de Reynolds. La relación de la pérdida de la energía y la longitud del tubo se denomina pendiente de fricción S_f :

$$S = \frac{h_f}{L} = \frac{f}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (2)$$

En la ecuación de Darcy-Weisbach todos los términos son fácilmente aplicables, menos el factor de fricción f . Este puede encontrarse con la aplicación de ecuaciones determinadas para este efecto a través de investigaciones.

Cuando el régimen de flujo es laminar o cuando funciona como lisa, la rugosidad no tiene ninguna influencia y, en consecuencia, la ecuación de Hagen – Poseville y la de Karman – Prandtl pueden ser utilizadas sin restricciones para calcular los factores de fricción, conjuntamente con la ecuación de Darcy-Weisbach:

2.2 Ecuación de Hagen – Poseville:

$$f = \frac{64}{Re} \quad \text{Solo para flujo laminar} \quad (3)$$

Reemplazando la última ecuación en la ecuación de Darcy-Weisbach tenemos la ecuación de Hagen-Poiseville:

$$h_f = \frac{32\mu VL}{\gamma D^2} \quad (4)$$

Ecuación de Kármán _ Prandtl, para flujo turbulento pero en tuberías funcionando como lisas.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log(Re \sqrt{f}) - 0.8 \quad (5)$$

Para tuberías circulares trabajando con superficie rugosa se utiliza la ecuación de Karman-Prandtl para tubería rugosas:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log\left(\frac{D}{2Ke}\right) + 1.74 \quad (6)$$

Todavía tenemos el problema del régimen de transición, es decir aquellas, donde las tuberías no son lisas ni rugosas. Para esta zona Colebrook y White presentaron una ecuación empírica para determinar el factor de fricción:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log\left(\frac{K}{3.71D} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}}\right) \quad (7)$$

2.3 Diagrama De Moody

Con los resultados de la ecuación 7 L. F. Moody (1914) confecciono un diagrama universal, para determinar el factor de fricción introduciendo el número de Reynolds y la rugosidad equivalente K/D . El diagrama de Moody se presenta en la (gráfica 5. *Anexo*).

Con el diagrama de Moody, conocido el número de Reynolds y la rugosidad equivalente relativa, encontrar el correspondiente factor de fricción. Sin embargo si se conoce el número de Reynolds, por ser incognitos el gasto o el diámetro, el factor de fricción se obtiene por aproximaciones sucesivas.

En la (tabla. 11. *Anexo*) se presenta valores de rugosidad equivalente relativa para diferentes materiales de uso común, suponiendo que ellas son nuevas. Para tuberías usadas, en algunos casos como concreto o acero remachado se dan rangos, en otros no, para esto Colebrook y White propusieron una formula:

$$K_e = K_{eo} + \alpha t \quad (8)$$

Donde: K_e : Rugosidad equivalente para tubo nuevo

α : Coeficiente de envejecimiento.

t :Tiempo en años.

2.4 Formula de Hazen – Williams (1903)

La formula de Hazen-Williams ha sido empleada para tuberías de agua y alcantarillados. Sus autores se basaron en experiencias con los siguientes materiales (tubos): acero, concreto, plomo, estaño, fierro forjado, fierro fundido, madera, ladrillo, vidrio. En el sistema tecnico de unidades la ecuación es la siguiente:

$$V = 1.538 C_{HW} R h^{0.63} S^{0.54} \quad (9)$$

Donde:

Rh ; radio hidráulico (m)

S ; pendiente de la línea de energía

C_{HW} ; coeficiente de Hazen-Williams, adimensional

Para tuberías funcionando a presión tenemos:

$$Rh = \frac{D}{4} \quad ; \quad S = \frac{h_f}{L} \quad (10)$$

Por lo que la ecuación de Hazen-William, se escribirá:

$$V = 1.538 C_{HW} \left(\frac{D}{4} \right)^{0.63} \left(\frac{h_f}{L} \right)^{0.54} \quad (11)$$

Despejando,

$$h_f^{0.54} = \frac{4^{0.63} V L^{0.54}}{1.538 C_{HW} D^{0.63}} \quad \boxed{h_f = 2.271 \frac{V^{1.85} L}{C_{HW}^{1.85} D^{1.16}}} \quad (12)$$

Si multiplicamos y dividimos el segundo miembro por L/D , tendremos:

$$\boxed{h_f = 2.271 \frac{V^{1.85}}{C_{HW}^{1.85} D^{1.16}} \frac{L}{D}} \quad (13)$$

De la misma manera, multiplicamos y dividimos el segundo miembro por $V^2/2g$, tenemos:

$$h_f = \left[\frac{44.56}{C_{HW}^{1.85} D^{1.16} V^{0.15}} \right] \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = \left[\frac{44.56}{C_{HW}^{1.85} D^{0.01} (DV)^{0.15}} \right] \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (14)$$

Multiplicando y dividiendo por $\nu^{0.15}$,

$$\boxed{h_f = \left[\frac{44.56}{C_{HW}^{1.85} D^{0.01} Re^{0.15} \nu^{0.15}} \right] \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}} \quad (15)$$

Igualando esta ecuación a la ecuación de Darcy-Weisbach, tendremos:

$$\boxed{f = \left[\frac{44.56}{C_{HW}^{1.85} D^{0.01} Re^{0.15} \nu^{0.15}} \right]} \quad (16)$$

Para el C_{HW} , existen distintos valores dependiendo de los materiales, en la (*tabla 12. Anexo*) se muestran valores para algunos tipos de materiales.

2.5 Fórmula de Manning

Esta es una formula empírica, obtenida por experimentación, y es otra alternativa de dar solución a problemas de flujos en conductos cerrados y canales abiertos.

$$\boxed{V = \frac{1}{n} R h^{2/3} S^{1/2}} \quad (17)$$

Donde:

Rh ; radio hidráulico

S ; pendiente de la línea de energía

n ; coeficiente de Manning, adimensional

Además:

$$S = \frac{h_f}{L} \quad (18)$$

Para tuberías a presión, es decir a sección llena tendremos:

$$V = \frac{1}{n} \left(\frac{D}{4} \right)^{2/3} \left(\frac{h_f}{L} \right)^{1/2} \quad (19)$$

Despejando h_f , tenemos:

$$h_f = 6.34 \frac{n^2 L V^2}{D^{4/3}} \quad (20)$$

Multiplicando y dividiendo el segundo miembro por D y por $2g$, tendremos:

$$h_f = \left[124.4 \frac{n^2}{D^{1/3}} \right] \frac{L V^2}{D 2g}$$

igualando esta ecuación a la ecuación de Darcy-Weisbach, tendremos:

$$f = \left[124.4 \frac{n^2}{D^{1/3}} \right] \quad (21)$$

El coeficiente “ n ” depende del material de que esta construido el tubo, el la **tabla 13 (Anexo)** se muestran algunos materiales con sus respectivos valores de “ n ”.

2.6 Pérdidas localizadas - Fórmula general

Las tuberías de conducción están compuestas por tramos rectos y también curvos, para ajustarse mejor a los accidentes de la topografía o al sistema de tuberías. Estas no solo son curvas, también puede haber cambios de diámetro, división de tuberías, etc. Estos cambios originan perdidas de energía, localizadas en el mismo sitio de cambio de geometría o de la alteración de flujo. A este tipo de pérdidas se denomina pérdidas localizadas, la formula general de pérdida local es:

$$h_L = K \frac{V^2}{2g} = K \frac{(V_2 - V_1)^2}{2g} \quad (22)$$

Donde:

K : Coeficiente adimensional que depende del tipo de artefacto que causa la pérdida.

Como:

$$\begin{aligned}
 Q &= VA \Rightarrow V = \frac{Q}{A} \\
 V^2 &= \frac{Q^2}{A^2} \Rightarrow \frac{V^2}{2g} = \frac{Q^2}{2g A^2} \\
 h_L &= K \frac{1}{2g A^2} Q^2 \\
 h_L &= K k' Q^2
 \end{aligned} \tag{23}$$

Donde:

$$k' = \frac{1}{2g A^2} \tag{24}$$

Entradas:

La salida de un estanque por una tubería es un caso extremo de contracción brusca:

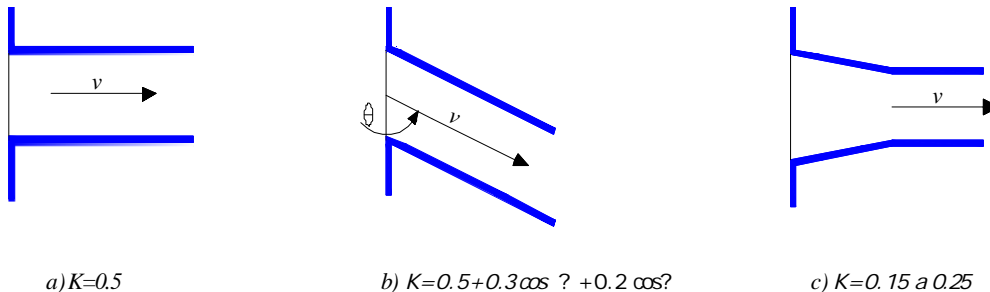
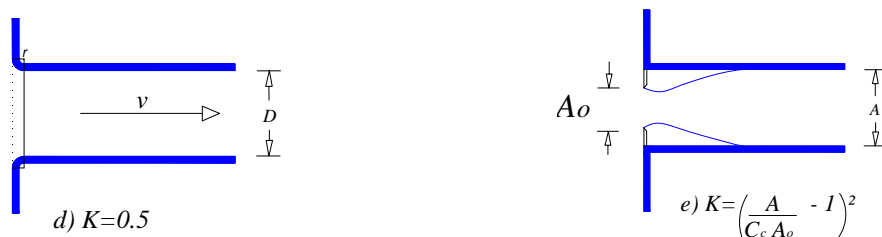


Fig. 8.1 Valores de K para diferentes tipos de salidas



r/D	0	0,04	0,08	0,12	0,16	> 2
K	0	0,26	0,15	0,09	0,06	$> 0,03$

[3] Fuente: Hydraulics of pipe and canal networks – prof. Berlamont

Fig. 8.2 Valores de K para diferentes tipos de salidas (Cont.)

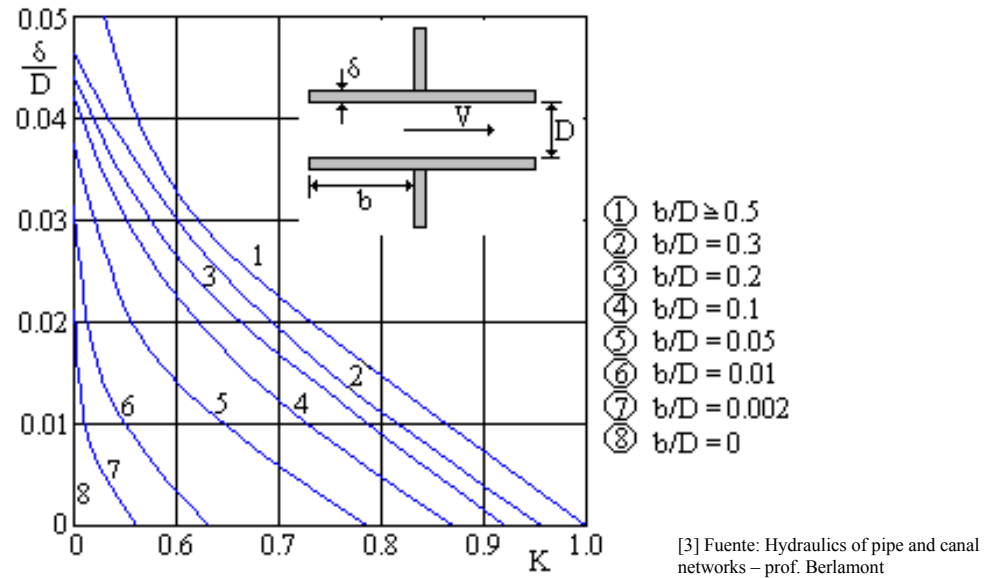


Fig. 8.3 Diagrama para determinar K en salidas con entrante

Expansión:

Esta se origina al producirse una ampliación de la sección transversal del tubo. El coeficiente K depende de la brusquedad de la ampliación y para encontrarlo se usa la formula de Borda – Carnot, donde C_d depende del ángulo θ del difusor:

$$K = C_d \left(\frac{A}{A_1} - 1 \right)^2 \quad (25)$$

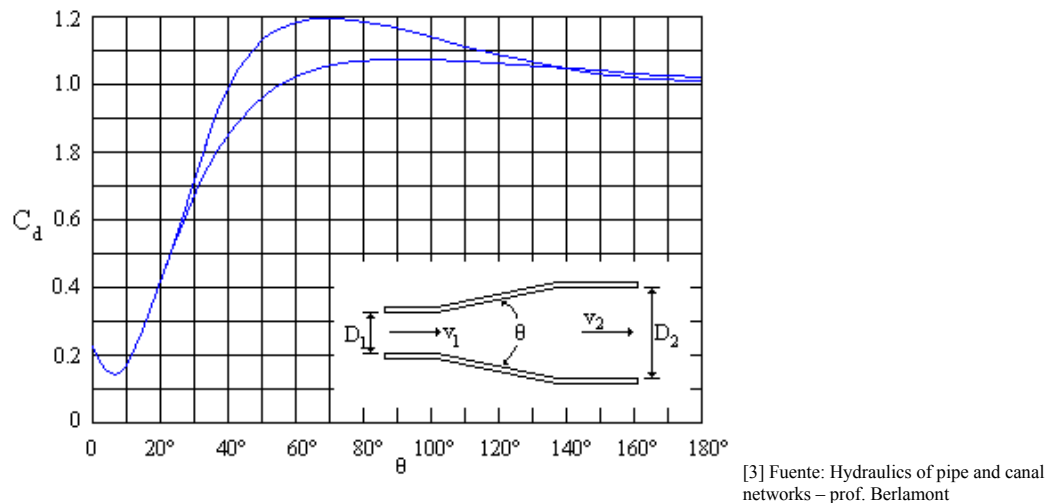


Fig. 8.4 Diagrama para determinar K en expansiones graduales

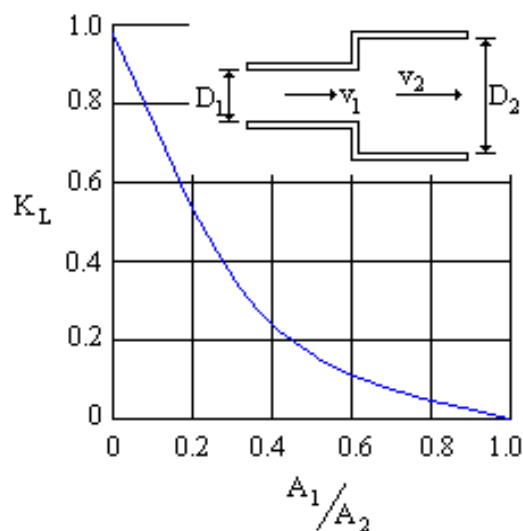
Para evitar separaciones y cavitaciones, el ángulo θ del difusor debe ser:

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{gD}}{2V} \quad \text{para } \theta < 20^\circ$$

Donde:

$$D = \frac{D_1 + D_2}{2} \quad V = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

Para ampliaciones bruscas se puede evidenciar una amplia zona de separación y formación de remolinos. Para determinar la pérdida de carga para este tipo de artefacto debemos trabajar con la velocidad mayor.



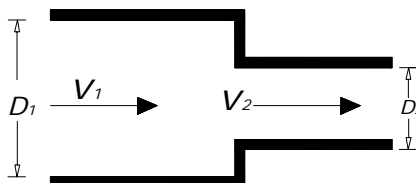
[3] Fuente: Hydraulics of pipe and canal networks – prof. Berlamont

Fig. 8.5 Diagrama para determinar K en expansiones bruscas

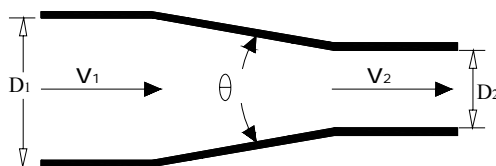
Contracciones:

Cambio de área mayor a área menor, para la contracción brusca, el flujo se caracteriza por la formación de una sección contraída, similar a la de un orificio.

Valores de K para contracción brusca



A_2/A_1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
D_2/D_1	0	0.32	0.45	0.55	0.63	0.71	0.77	0.84	0.89	0.95	1
C_C	0.611	0.624	0.632	0.634	0.659	0.681	0.712	0.755	0.813	0.892	1
K	0.41	0.36	0.34	0.31	0.27	0.22	0.16	0.11	0.05	0.01	0

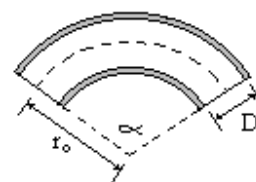
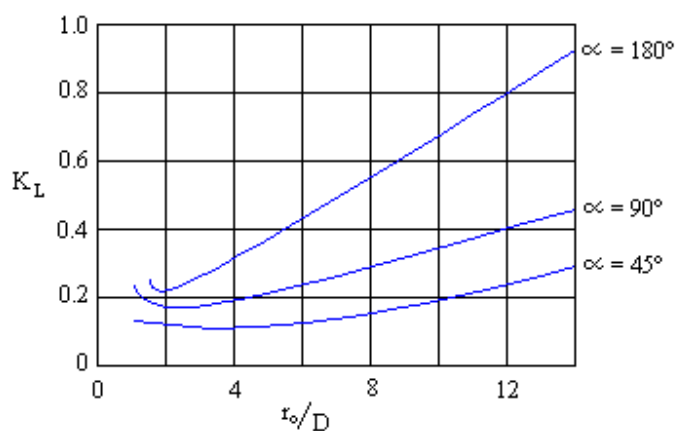
Valores de K para contracciones gradual

D_2/D_1	1.15	1.25	1.50	1.75	2.00	2.50
α	1.44	1.80	3.05	4.89	7.50	15.9
6°	0.006	0.018	0.085	0.23	0.5	1.5
8°	0.009	0.028	0.138	0.37	0.8	2.4
10°	0.012	0.04	0.20	0.53	1.1	3.4
15°	0.022	0.07	0.34	0.93	2.0	6.1
20°	0.045	0.12	0.60	1.73	3.5	11.0
30°	0.280	0.25	1.25	3.4	7.0	-

Fuente: Elaboración propia

Cambios de dirección:

La forma del codo viene dado por el diámetro de la tubería (D), el radio del codo (r_o) y el ángulo central (α). Para codos funcionando en régimen turbulento (numero de Reynolds 2×10^5) y material de contorno liso, se presenta una grafica donde tenemos los valores de K en función del radio de giro del codo y el diámetro de la tubería (H. Ito, 1960).

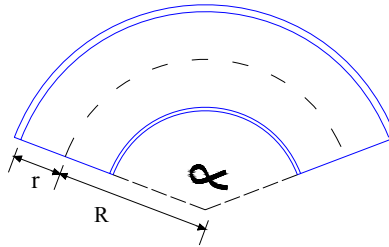


[3] Fuente: Hydraulics of pipe and canal networks – prof. Berlamont

Fig. 8.6 Diagrama para determinar K en cambios de dirección

$$h_L = K_L \frac{V^2}{2g} \quad (26)$$

Otra forma de realizar este cálculo por la formula encontrada por Hinds:

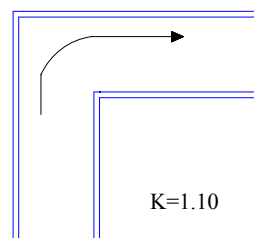


[3] Fuente: Hydraulics of pipe and canal networks – prof. Berlamont

Fig. 8.7 Diagrama para determinar K en cambios de dirección

$$K = \left[0,13 + 1,85 \left(\frac{r}{R} \right)^{3,5} \right] \sqrt{\frac{\alpha}{180}}$$

Para un cambio de dirección brusco:



Fuente: Elaboracion propia

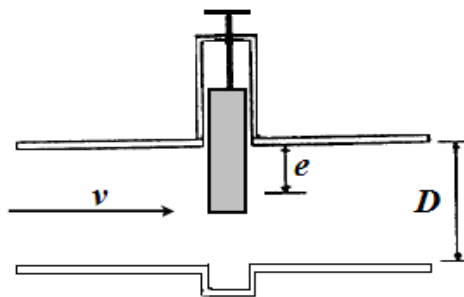
Fig. 8.8 Diagrama para determinar K en cambios de dirección brusca

3. PÉRDIDAS POR VALVULAS

Los coeficientes de perdida por válvulas varían de acuerdo con el tipo de válvula y según las posiciones, estas deben ser proporcionadas por los fabricantes. A falta de estos datos, se puede utilizar los valores medios.

3.1 Válvulas de Compuerta

Según los valores mostrados en la (figura. 8.9).



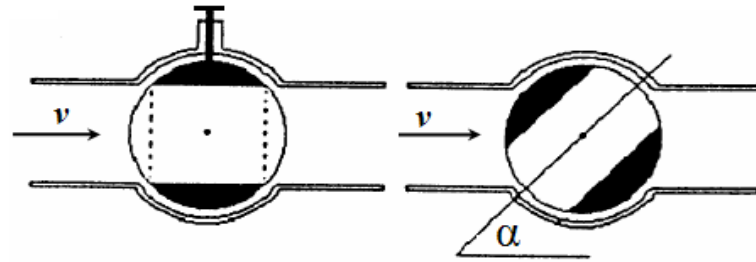
e/D	0	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8
K	0.15	0.26	0.81	2.06	5.52	17.0	97.8

Fig. 8.9

[3] Fuente: Hydraulics of pipe and canal networks – prof. Berlamont

3.2 Válvulas Esféricas

Según valores de la (Fig. 8.10)



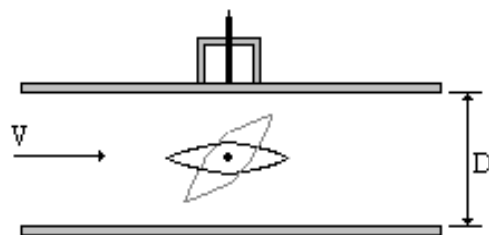
θ	K
5°	0.05
10°	0.29
15°	0.75
20°	1.56
25°	3.10
30°	5.17
35°	9.68
40°	17.3
45°	31.2
50°	52.6
55°	106
60°	206
65°	486
82°	∞

[3] Fuente:Hydraulics of pipe and canal networks – prof. Berlamont

Fig. 8.10

3.3 Válvulas Mariposas

Según valores de la (Fig. 8.11)



θ	K
5°	0.24
10°	0.52
15°	0.90
20°	.154
25°	2.51
30°	3.91
35°	6.22
40°	10.8
45°	18.7
50°	32.6
55°	58.8
60°	118
65°	256
70°	751
90°	∞

[3] Fuente:Hydraulics of pipe and canal networks – prof. Berlamont

Fig. 8.11

4. PÉRDIDAS POR CAMBIO DE DIRECCIÓN

Estas pérdidas son ocasionadas por distintos accesorios y estas pérdidas pueden variar según el sentido, posición y tamaño del accesorio, así como la dirección del flujo.

4.1 Bifurcaciones

Las bifurcaciones generalmente denominadas por su forma suelen ser “tes o yes”, éstas ocasionan pérdidas que dependen del ángulo que forman la tubería secundaria con la principal o maestra, la relación entre los diámetros de ambas tuberías y de la dirección de la corriente. Esta pérdida es mayor donde sucede la unión de ambas tuberías, es decir donde esta la bifurcación.

En la (Fig. 8.12(a, b, c, d, e, f, g, h, i)) se muestran varias situaciones en las que se podrían presentar este tipo de bifurcaciones.

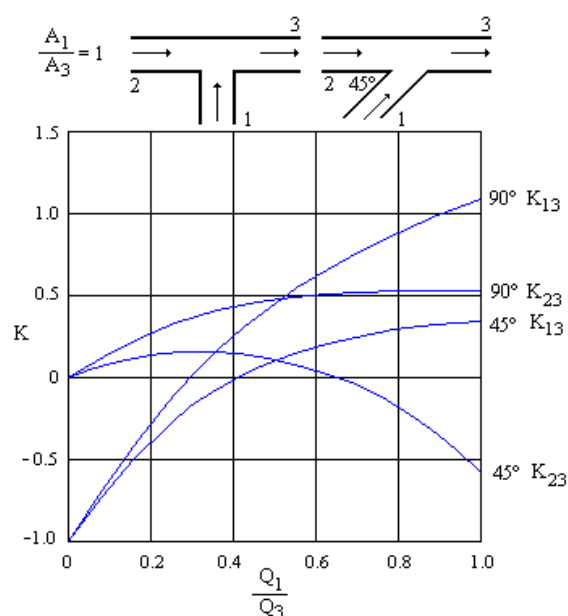


Fig. 8.12(a) Diagrama para determinar K
para combinación de flujo

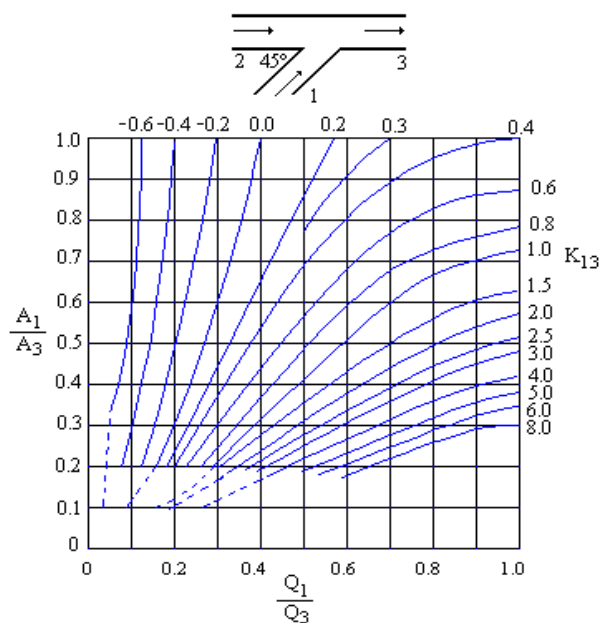
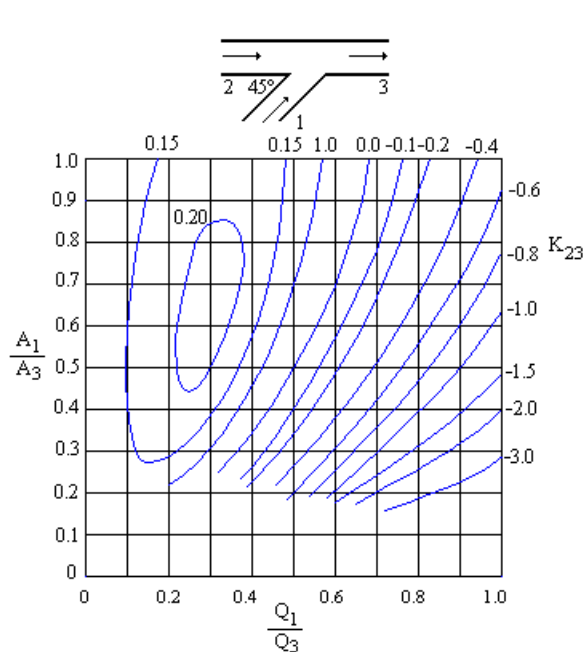
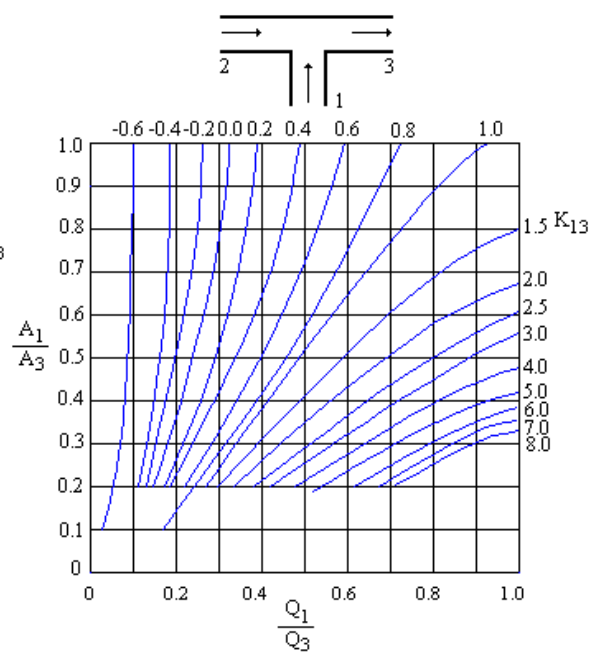
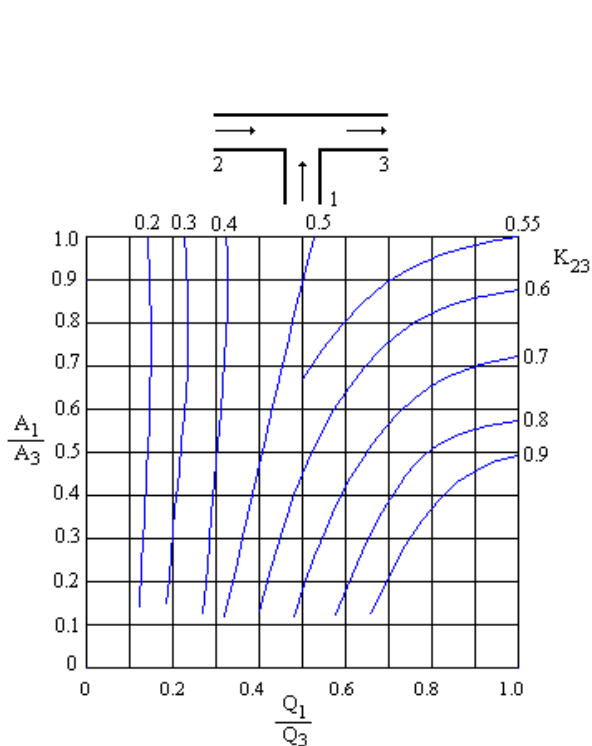
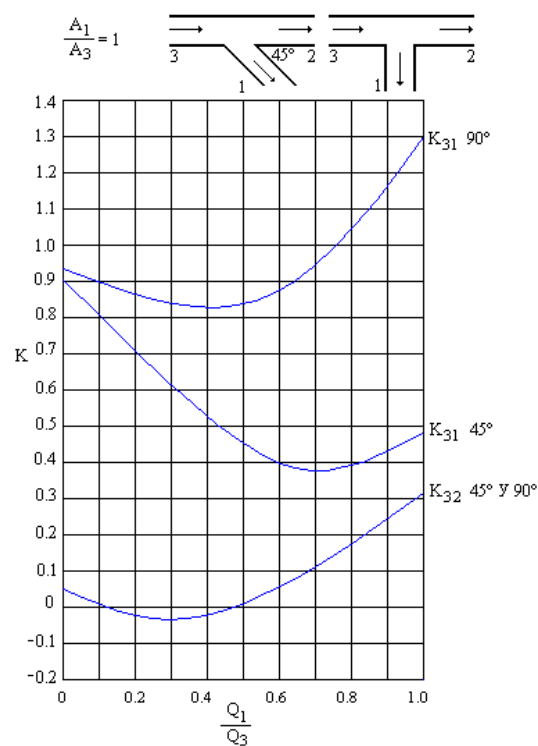
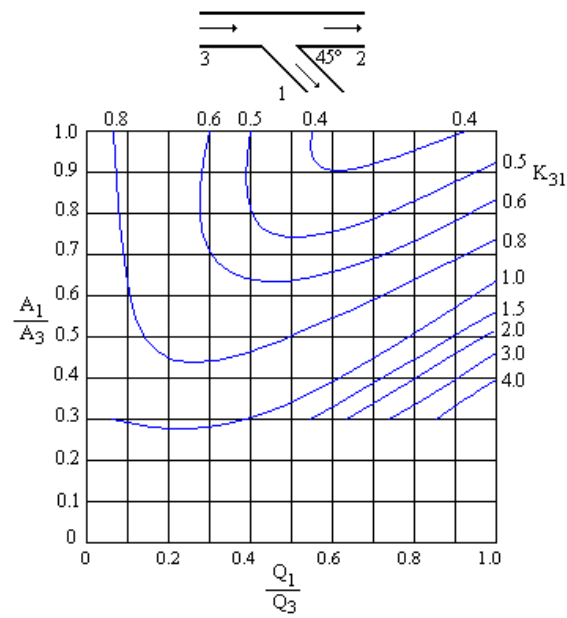
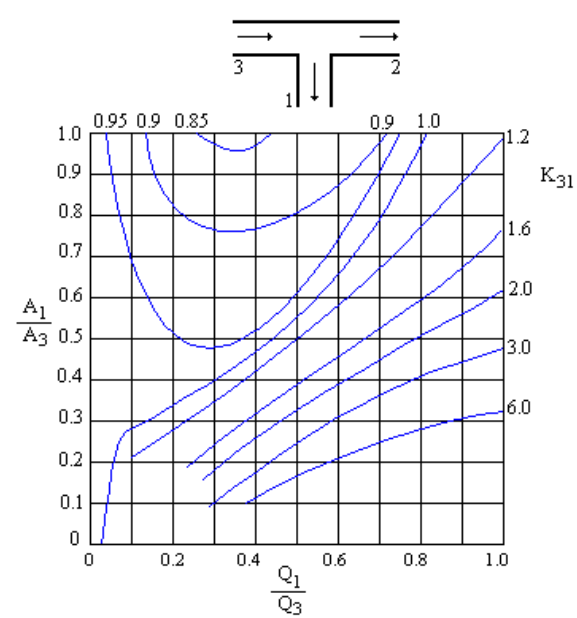
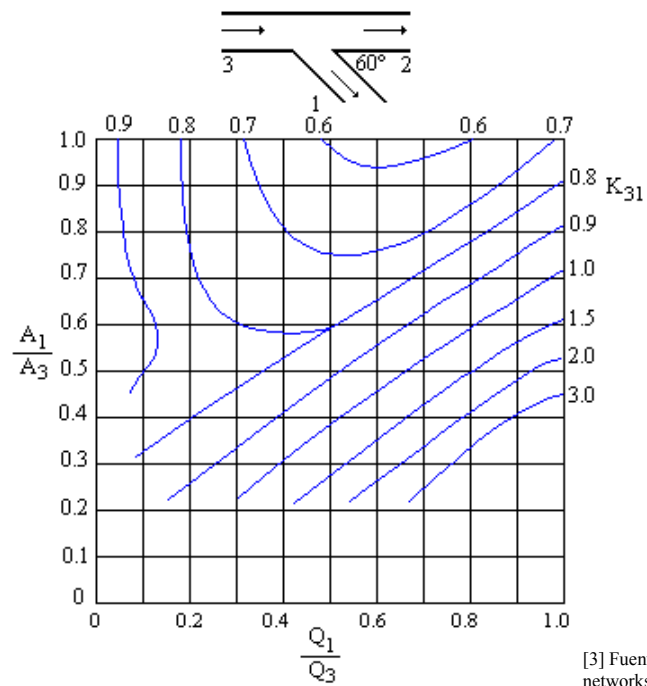


Fig . 8.12(b) Combinación de flujo 45°

**Fig. 8.12(c)** Combinación de flujo 45°**Fig. 8.12(d)** Combinación de flujo 90°**Fig. 8.12(e)** Combinación de flujo 90°**Fig. 8.12(f)** División de flujo

**Fig. 8.12(g)** . División de flujo 45°**Fig. 8.12(i)** División de flujo 90°**Fig. 8.12 (h)** División de flujo 60°

[3] Fuente:Hydraulics of pipe and canal networks – prof. Berlamont

5. FLUJO PERMANENTE

a) Ecuaciones básicas.

Los problemas de flujo permanente pueden ser resueltos con las siguientes ecuaciones:

a.1) Ecuación de la continuidad:

Sin división de flujo.
$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad (27)$$

Con división de flujo:
$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n$$

a.2) Ecuación de la energía:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + H_e + \sum_1^2 H_r \quad (28)$$

Donde:

$$\sum_1^2 H_r : \text{Perdidas totales} = \sum h_f + \sum h_L$$

H_e : Energía añadida o extraída

$\sum h_f$: Perdidas por fricción.

$\sum h_L$: Perdidas locales.

Las perdidas por fricción se pueden expresar de forma genérica, como;

$$h_f = K_f Q^n \quad (29)$$

Donde:

K_f y n : Son coeficientes que se expresan para tuberías circulares dependiendo de la ecuación que se utiliza para resolverlo.

- **Para la ecuación de Darcy – Weisbach:**

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (30)$$

$$\boxed{K_f = f \frac{L}{D}} \quad (31)$$

Donde:

$$V = \frac{Q}{A} \Rightarrow V^2 = \frac{Q^2}{A^2} = \frac{Q^2}{\frac{\pi^2 D^4}{16}} \Rightarrow V^2 = 1,62 \frac{Q^2}{D^4}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{h_f = f \frac{L}{D} \frac{1,62}{2g} \frac{Q^2}{D^4}} \quad (32)$$

$$\boxed{h_f = 0,0826 f \frac{L}{D^5} Q^2 \Rightarrow K_f = 0,0826 f \frac{L}{D^5}} \quad (33)$$

- **Ecuación de Hazen – Williams:**

$$\boxed{V = 1,538 C_{HW} S^{0,54} Rh^{0,63}} \quad (34)$$

Para tuberías funcionando a presión:

$$V = 1,538 C_{HW} \left(\frac{D}{4} \right)^{0,63} \left(\frac{h_f}{L} \right)^{0,54}$$

$$\boxed{h_f = 2,271 \frac{V^{1,85} L}{C_{HW}^{1,85} D^{1,16}}} \quad (35)$$

Donde:

$$V = \frac{Q}{A} \Rightarrow V^{1,85} = 1,56 \frac{Q^{1,85}}{A^{3,7}}$$

Por lo tanto:

$$h_f = \frac{3,54}{C_{HW}^{1,85}} \frac{L}{D^{4,86}} Q^{1,85} \Rightarrow K_f = \frac{3,54}{C_{CW}^{1,85}} \frac{L}{D^{4,86}}$$

- **Ecuación de Manning:**

$$V = \frac{1}{n} R h^{2/3} S^{1/2} \quad (36)$$

Para tuberías funcionando a presión:

$$V = \frac{1}{n} \left(\frac{D}{4} \right)^{2/3} \left(\frac{h_f}{L} \right)^{1/2} \quad h_f = 6,35 \frac{n^2 L V^2}{D^{4/3}} \quad (37)$$

Donde:

$$V = \frac{Q}{A} \quad \Rightarrow \quad V^2 = 1,62 \frac{Q^2}{D^4}$$

Por lo tanto:

$$h_f = 10,29 n^2 \frac{L}{D^{16/3}} Q^2 \quad \Rightarrow \quad K_f = 10,29 n^2 \frac{L}{D^{16/3}}$$

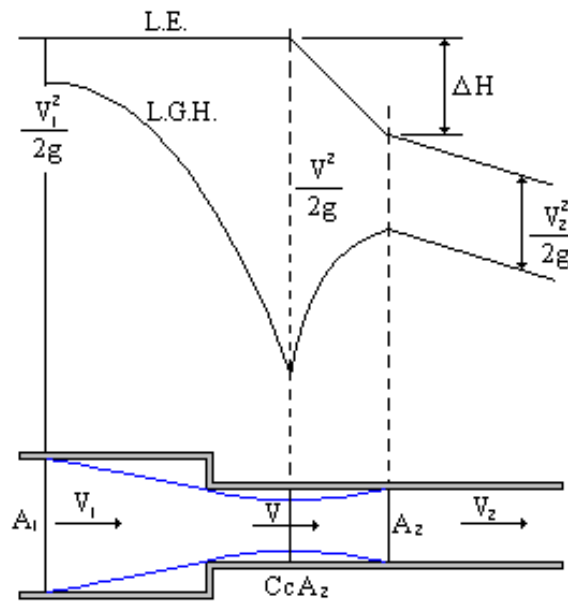
Las pérdidas localizadas se expresan:

$$h_L = K_L \frac{V^2}{2g} \quad (38)$$

Donde:

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{A} \quad \Rightarrow \quad V^2 = \frac{Q^2}{A^2} \\ h_L &= K_L \frac{1}{2g A^2} Q^2 \\ h_L &= K_L k' Q^2 \quad \Rightarrow \quad k' = \frac{1}{2g A^2} \end{aligned}$$

Para el caso de contracciones u orificios, debemos incluir el efecto de Cc.

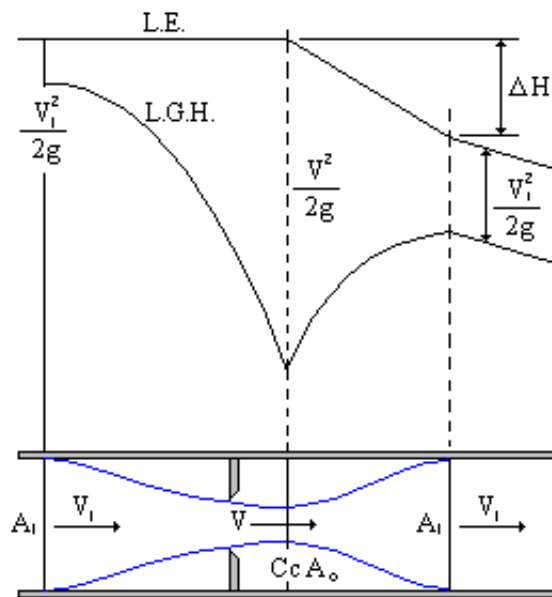
Contracciones:

$$h_L = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = \left(\frac{1}{C_c} - 1 \right)^2 \frac{V_1^2}{2g}$$

$$\frac{V_1^2}{2g} = \left(\frac{1}{C_c} \right)^2 k' Q^2$$

Fig. 8.13 Contracción

[2] Fuente: Introduccion a la hidraulica- Ing. Marco Escobar (año 2004)

Orificios:

$$h_L = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = \left(\frac{A_1}{C_c A_0} - 1 \right)^2 \frac{V_1^2}{2g}$$

$$\frac{V_1^2}{2g} = \left(\frac{1}{C_c A_0} \right)^2 k' Q^2$$

Fig. 8.14 Orificio

[2] Fuente: Introducción a la hidráulica- Ing. Marco Escobar (año 2004)

Para energía añadida o extraída exteriormente, es decir, para la utilización de bomba o turbina, respectivamente, tenemos:

$$\text{Bomba:} \quad P_B = \frac{Q \gamma H_B}{\eta} \quad (39)$$

$$\text{Turbina:} \quad P_T = \eta Q \gamma H_T \quad (40)$$

Donde:

η : Eficiencia de la maquina.

P_B : Potencia del motor de la bomba (suministra).

P_T : Potencia del generador de la turbina (extrae).

H_B, H_T : Energía por unidad de peso (altura) realmente añadida o extraída, respectivamente.

b) Tipos de problemas.

Se puede considerar cinco tipos de problemas, considerando como datos las propiedades del fluido:

- Calcular las pérdida de energía (h_f y h_L), conocido el gasto (Q) y las características de la tubería (D, L, K_e , piezas especiales).
- Calcular el gasto conocidas las pérdidas de energía y las características de la tubería.
- Calcular el diámetro de las tuberías conocidas las otras características de la tubería, el gasto y la pérdida de energía.
- Calcular la rugosidad conocidas las otras dos características de la tubería, el gasto y la pérdida de energía.
- Calcular la longitud conocidas las otras características de la tubería, el gasto y la pérdida de energía.

En el primer tipo, como se conocen Q y D , se puede calcular el número de Reynolds (conocido el fluido), y con la rugosidad relativa, se puede encontrar el factor de fricción, con alguno de los métodos ya explicados. Siendo por lo tanto un problema directo.

Al no ser datos Q y D , el segundo y el tercer tipo de problema se resuelve por aproximaciones sucesivas, pues el factor de fricción y los coeficientes de pérdidas localizadas dependen del numero de Reynolds.

El procedimiento de aproximaciones sucesivas consiste en hacer un supuesto para transformar el problema en uno directo y comprobar su validez con base en un dato no utilizado. Por ejemplo en el problema del segundo tipo, se supone un gasto, se calculan las pérdidas y se comprueba si ellas son iguales a las pérdidas dadas. En el tercer tipo, se supone un diámetro y se comprueba, nuevamente, con la pérdida de energía. Lo anterior se significa repetir varias veces el procedimiento hasta ajustarse razonablemente al valor del dato utilizado.

6. TUBERÍAS SIMPLES.

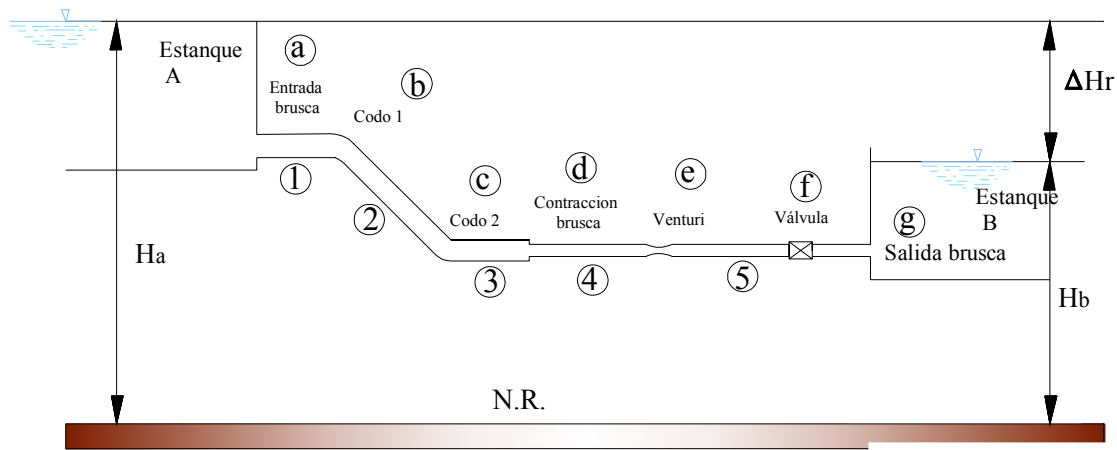


Fig. 8.15 Sistema Simple de tuberías

[2] Fuente: Introducción a la hidráulica- Ing. Marco Escobar (año 2004)

Diámetro D_1 para las tuberías 1,2 y 3 y el diámetro D_2 para las tuberías 4 y 5.

En los siguientes literales se explicara la manera de resolver un sistema de tuberías simple, como el presentado en el grafico.

Aplicando la ecuación de la energía:

$$\frac{p_A}{\gamma} + z_A + \alpha_A \frac{V_A^2}{2g} = \frac{p_B}{\gamma} + z_B + \alpha_B \frac{V_B^2}{2g} + H_e + \sum_A^B H_r \quad (41)$$

La presión en la superficie de los estanques es la presión atmosférica, por esta razón la presión relativa en esos puntos es cero. Las velocidades en los mismos puntos de los estanques son también cero. Por lo que la ecuación de la energía quedara:

$$z_A = z_B + \sum_A^B H_r \quad \Rightarrow \quad H_A - H_B = \sum_A^B H_r$$

$$\Delta H = h_{f_1} + h_{f_2} + h_{f_3} + h_{f_4} + h_{f_5} + h_{L_a} + h_{L_b} + h_{L_c} + h_{L_d} + h_{L_e} + h_{L_f} + h_{L_g} \quad (42)$$

Las pérdidas por fricción se resuelven por los métodos ya mencionados (Darcy – Weisbach, Hazen-Williams o Manning), donde:

$$h_f = K_f Q^n \quad (43)$$

Las pérdidas localizadas se resuelven por:

$$h_L = K_L k' Q^2 \Rightarrow k' = \frac{1}{2g A^2}$$

Con lo antes mencionado, tenemos:

$$\Delta H = (K_{f_1} + K_{f_2} + K_{f_3} + K_{f_4} + K_{f_5}) Q^n + (K_{L_a} + K_{L_b} + K_{L_c} + K_{L_d} + K_{L_e} + K_{L_f} + K_{L_g}) Q^2 \quad (44)$$

Si para las pérdidas por fricción trabajamos con Darcy – Weisbach o Manning, el valor de n será 2, por lo que la ecuación anterior será:

$$\Delta H = (\sum K_f + \sum K_L) Q^2$$

$$Q = \sqrt{\frac{\Delta H}{\sum K_f + \sum K_L}} \quad (45)$$

Para el caso de que la salida del sistema de tuberías no sea a otro estanque sino al ambiente, mediante una contracción:

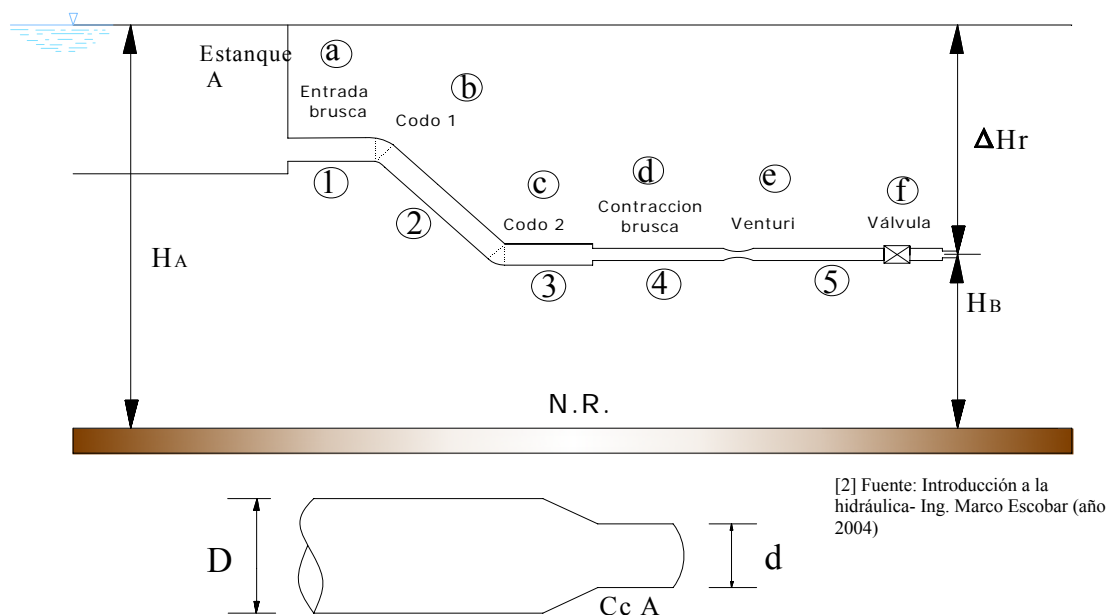


Fig. 8.16 Sistema simple de tuberías con salida a la atmósfera.

Se procede de la misma manera que el caso anterior. Primero la ecuación de la energía:

$$\frac{p_A}{\gamma} + z_A + \alpha_A \frac{V_A^2}{2g} = \frac{p_B}{\gamma} + z_B + \alpha_B \frac{V_B^2}{2g} + H_e + \sum_A^B H_r$$

A diferencia del caso anterior, en la sección B existe velocidad, aunque la presión sigue siendo la atmosférica. Por lo que la ecuación de la energía queda:

$$z_A = z_B + \frac{V_B^2}{2g} + \sum_A^B H_r \quad \Rightarrow \quad \Delta H = \frac{V_B^2}{2g} + \sum_A^B H_r$$

El valor de $\sum_A^B H_r$ se halla como en el caso anterior.

Lo nuevo en este análisis es el valor de la carga de velocidad $\frac{V_B^2}{2g}$, este será:

$$\frac{V_B^2}{2g} = \frac{1}{2g} \frac{Q^2}{C_c^2 A_0^2} = \frac{1}{2g} \frac{Q^2}{C_c^2 \pi d^4}$$

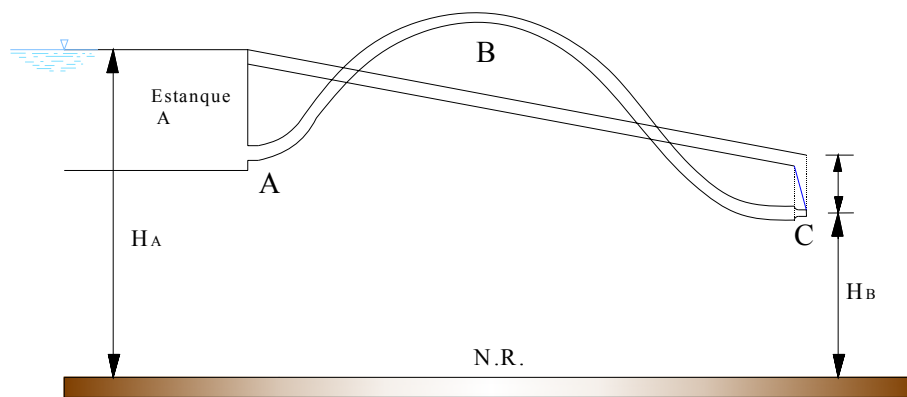
$$\boxed{\frac{V_B^2}{2g} = 0,083 \frac{Q^2}{C_c^2 d^4}} \quad (46)$$

Incluyendo este elemento en la ecuación de la energía y despejando Q tendremos el resultado.

Para el caso particular del funcionamiento de un sifón. Este caso se presenta cuando la línea piezométrica corta a la tubería y se originan presiones negativas en los puntos de la tubería sobre la línea piezométrica, por lo tanto son sitios importantes de cavitación.

Se denomina cavitación a la formación de cavidades llenas de vapor o de gas en el seno de un líquido en movimiento. Este fenómeno se produce en razón del movimiento de un líquido, su presión llega a ser localmente inferior a su tensión de vapor.

Ahora se analizara un sifón; ignorando las pérdidas menores y con $\alpha = 1$:



[2] Fuente: Introducción a la hidráulica- Ing. Marco Escobar (año 2004)

Fig. 8.17 Sifón

Utilizando la ecuación de la energía de A a C, tenemos:

$$\frac{p_A}{\gamma} + z_A + \alpha_A \frac{V_A^2}{2g} = \frac{p_C}{\gamma} + z_C + \alpha_C \frac{V_C^2}{2g} + H_e + \sum_A^C H_r$$

De la misma manera que el caso anterior:

$$z_A = z_C + \frac{V_C^2}{2g} + \sum_A^C H_r \quad \Rightarrow \quad \Delta H = \frac{V_C^2}{2g} + \sum_A^C H_r$$

Donde:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{V_C^2}{2g} &= \frac{1}{2g} \frac{Q^2}{C_C^2 A_0^2} = \frac{1}{2g} \frac{Q^2}{C_C^2 \pi d^4} \\ \frac{V_C^2}{2g} &= 0,083 \frac{Q^2}{C_C^2 d^4} \end{aligned}} \quad (47)$$

Incluyendo este ultimo en la ecuación de la energía y despejando el caudal, obtendremos el resultado.

Para determinar la presión en B, también usamos la ecuación de energía de A a B:

$$\frac{p_A}{\gamma} + z_A + \alpha_A \frac{V_A^2}{2g} = \frac{p_B}{\gamma} + z_B + \alpha_B \frac{V_B^2}{2g} + H_e + \sum_A^B H_r$$

En el punto B, existe velocidad y presión:

$$z_A = \frac{p_B}{\gamma} + z_B + \alpha_B \frac{V_B^2}{2g} + \sum_A^B H_r \quad (48)$$

Es importante notar que por continuidad, el valor del caudal es el mismo en todos los puntos de la tubería, por esta razón la velocidad también es la misma, además que las perdidas ya las calculamos con anterioridad, entonces la única incógnita en esta ecuación es la presión en B.

7. TUBERÍA MÚLTIPLES

Un sistema de tuberías múltiples, también llamado red abierta, se da cuando los tubos que la componen se ramifican, sucesivamente, sin intersectarse después para formar circuitos. Los extremos finales de las ramificaciones pueden terminar en un estanque o descargar libremente a la atmósfera.

Cuando las tuberías se ramifican, los problemas se resuelven con los mismos principios que se usaron hasta ahora, incluyendo los siguientes:

- En los puntos de unión de las tuberías (nodos) debe cumplirse la ecuación de la continuidad; es decir, la suma de los gastos afluentes al nodo es igual a lo de los efluentes.
- La elevación de la línea de energía en cada nodo es una sola, por cuanto no pueden existir en un solo punto dos niveles de energía.

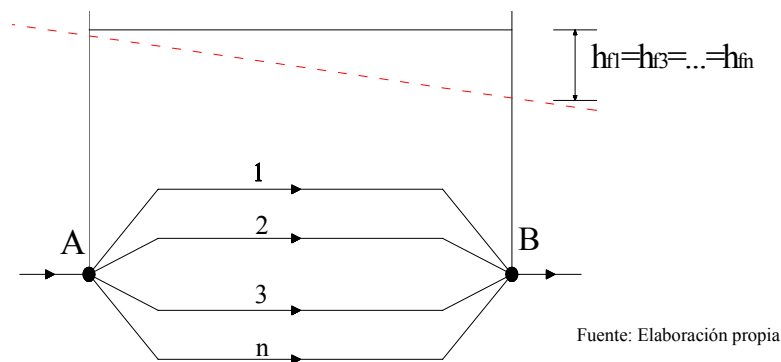
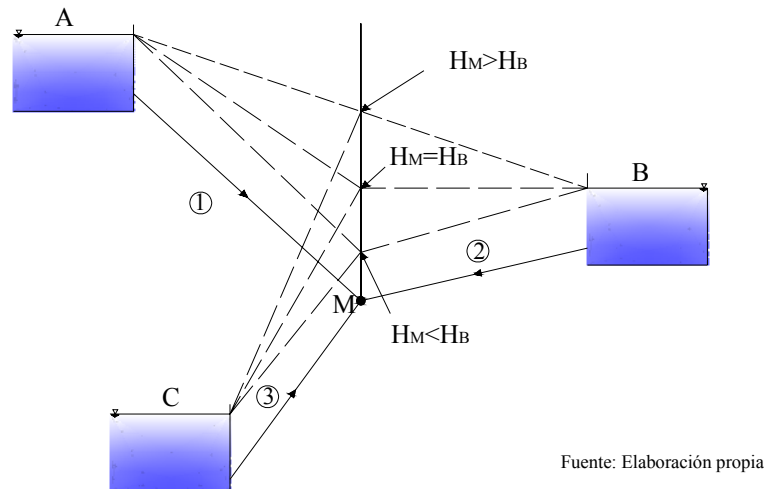


Fig. 8.18 Sistema múltiple de tuberías

La primera representa la ecuación de la continuidad y la segunda proviene del hecho que las tuberías parten de un mismo nivel de energía (nodo A) y llegan a otro único nivel de energía (nodo B), entonces todas las tuberías tendrán necesariamente la misma pérdida de energía.

Un caso típico de tuberías múltiples es el clásico problema de los tres estanques. El punto principal es determinar el sentido de flujo en el estanque B intermedio. Desde el estanque A, por ser el mas

alto, el agua sale y entra al C por ser este el mas bajo. El sentido de flujo de la tubería 2 depende de la línea de energía en el nodo M respecto al de la superficie del estanque B.



Fuente: Elaboración propia

Fig. 8.19 Problema de los tres estanques

Si la elevación de la línea de energía en M es mayor que en B, el agua entra al estanque intermedio, por lo tanto:

$$H_A - h_{f1} - h_{f2} = H_B$$

$$H_A - h_{f1} - h_{f3} = H_C$$

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

O bien:

$$H_A - K_{f1} Q_1^n - K_{f2} Q_2^n = H_B$$

$$H_A - K_{f1} Q_1^n - K_{f3} Q_3^n = H_C$$

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

En el caso contrario, la elevación de M es menor que la elevación de B, el agua sale del estanque B, por lo tanto las ecuaciones son:

$$H_A - K_{f1} Q_1^n - K_{f2} Q_2^n = H_B$$

$$H_A - K_{f1} Q_1^n - K_{f3} Q_3^n = H_C$$

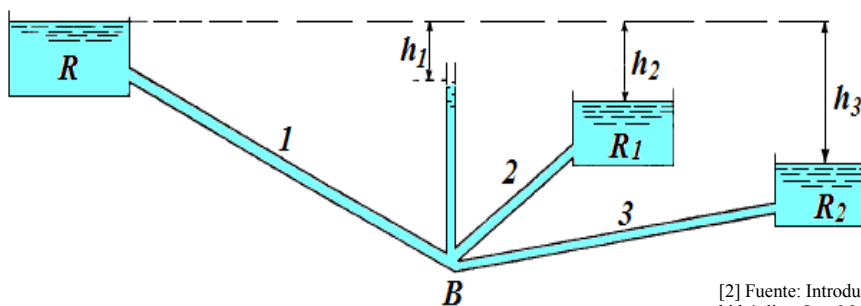
$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

8. GOLPE DE ARIETE

Supongamos que por un tubo con una válvula en su salida se descarga un depósito. Si se cierra la válvula súbitamente, se crea dentro de la tubería una presión dinámica, además de la presión estática normal. A la presión dinámica se le llama comúnmente “golpe de ariete” y se produce por la transformación súbita de energía cinética a energía de presión (Fig.8.20). Si “p” es la fuerza de

presión debida al golpe de ariete, y “m” es la masa de agua contenida en el tubo, cuya velocidad decrece en dv durante el intervalo dt ,

$$p = m \frac{dv}{dt}$$



[2] Fuente: Introducción a la hidráulica- Ing. Marco Escobar (año 2004)

Fig. 8.20 Esquema del Golpe de Ariete

Este golpe violento denominado Golpe de Ariete producido sobre las paredes del conducto forzado, suele suceder cuando hay una caída, o existen bombas en el sistema de las tuberías estas paran y arrancan bruscamente.

$$h_i = \frac{145 \cdot v}{\sqrt{1 + \frac{E_a \cdot d}{E_t \cdot e}}} \quad [\text{m}] \quad \boxed{\text{Ecuación de Allievi}} \quad (49)$$

Donde:

h_i ; Sobre presión por golpe de ariete

v ; velocidad del agua en la tubería

E_a ; modulo de elasticidad del agua

E_t ; modulo de elasticidad del material de la tubería

d ; Diámetro interior de la tubería

e ; Espesor de la tubería

Al cerrar instantáneamente el equipo de bombeo, la compresión del agua y expansión de la tubería comienzan en el punto de cierre, transmitiéndose hacia arriba a una velocidad determinada, conocida como velocidad de propagación de la onda. El tiempo requerido para que la onda de presión regrese a la válvula es:

$$T = \frac{2L}{a} \quad (50)$$

Donde: L ; Longitud de la tubería

a ; Celeridad de la onda de presión

9. PLANTEAMIENTO PARA REDES

Es común el uso para sistemas de distribución de agua potable, utilizar unas mallas de tuberías, estas consisten en tuberías interconectadas configurando una red. Una red de tuberías es en realidad un sistema de tuberías múltiples, por lo tanto su solución se basa en los siguientes principios.

- La cantidad de agua que entra a la red debe ser igual a la que sale de ella. En sistemas de agua potable, los caudales de salida se denominan consumos, este principio corresponde al principio de continuidad.

$$\Sigma Q_a = \Sigma C$$

Donde:

Q_a ; caudales que alimentan la red.

C : Consumos.

Esta ecuación representa el balance global de la red.

- En cada nodo debe cumplirse la ecuación de la continuidad. Al asignarle signo a los gastos que concurren a un nodo (positivos afluentes y negativos efluentes):

$$\Sigma Q_{ij} + C = 0$$

donde para un nodo determinado, el subíndice “j” indica el nodo hacia donde va el flujo y el subíndice “i” desde donde proviene; el termino C representa los caudales retirados.

- En cada nodo existe un solo nivel de energía, en consecuencia, las pérdidas de un nodo a otro, independientemente del camino de unión seleccionado, son iguales. Esto lleva a la siguiente conclusión: si se considera pérdida de energía positiva a aquella que ocurre en sentido contrario a las agujas del reloj y viceversa, se podrá establecer para cada malla de red:

$$\Sigma h_{ij} = 0 \Rightarrow \Sigma K_{ij} Q_{ij}^{n_{ij}}$$

Una red que tenga “n” nodos y “m” mallas independientes se podrá, en principio, plantear n+m ecuaciones; sin embargo como debe cumplirse la ecuación del balance global de la red, únicamente “n-1” ecuaciones de nodo son independientes entre si, dado lo cual solo se dispone de “m+(n-1)” ecuaciones. Es importante hacer notar que si las incógnitas son los gastos, las ecuaciones de nodo son lineales, mientras las ecuaciones de malla no lo son. Para la resolución de problemas de redes existen varios métodos, plantearemos algunos de ellos.

9.1 Sistema ΔQ

Consiste en suponer unos gastos iniciales cuales quiera en las tuberías de la red que cumplen con las ecuaciones de nodo. Cada gasto inicial es afectado por un incremento correctivo ΔQ que se considera constante para las tuberías de cada malla. Los incrementos se calculan mediante las ecuaciones de malla.

El sistema de ecuaciones constará entonces de “m” ecuaciones no lineales con un numero igual de incógnitas que son los ΔQ de cada malla.

$$\left[\sum K_{ij} (Q_{oij} + \Delta Q_I)^{n_{ij}} \right]_I = 0$$

$$\left[\sum K_{ij} (Q_{oij} + \Delta Q_I)^{n_{ij}} \right]_{II} = 0$$

.....
.....

$$\left[\sum K_{ij} (Q_{oij} + \Delta Q_I)^{n_{ij}} \right]_m = 0$$

Donde: Q_o ; gasto inicial supuesto.

$I, II, .. m$; cantidad de mallas

9.2 Sistema H

Las incógnitas en este sistema son los niveles o alturas de energía “H” en cada nodo. Los gastos en las tuberías se expresan en función de estos niveles y a continuación se establecen las ecuaciones de nodo correspondientes. Como solo existen “n-1” ecuación es independientes de nodo, es necesario conocer el nivel de energía en un nodo cualquiera. Tomando en cuenta que:

$$\sum h_{ij} = H_i - H_j = K_{ij} Q_{ij}^{n_{ij}} \quad ; \quad Q_{ij} = \left(\frac{H_i - H_j}{K_{ij}} \right)^{1/n_{ij}}$$

El sistema H es:

$$\begin{aligned} \left[\Sigma \left(\frac{H_i - H_j}{K_{ij}} \right)^{1/n_{ij}} + C \right]_1 &= 0 \\ \left[\Sigma \left(\frac{H_i - H_j}{K_{ij}} \right)^{1/n_{ij}} + C \right]_2 &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ \left[\Sigma \left(\frac{H_i - H_j}{K_{ij}} \right)^{1/n_{ij}} + C \right]_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

Donde los subíndices 1, 2,..., n-1; representan los n-1 nodos con ecuaciones independientes, las ecuaciones de este sistema son no lineales.

9.3 Sistema Q

Es el planteamiento general, es decir, tanto las ecuaciones de nodo como las de malla, considerando como incógnitas a los gastos en las tuberías. El sistema constará de $m+(n-1)$ ecuaciones y se puede expresar de la siguiente manera:

Ecuaciones de nodo:

$$\begin{aligned} \left[\Sigma Q_{ij} + C \right]_1 &= 0 \\ \left[\Sigma Q_{ij} + C \right]_2 &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \left[\Sigma Q_{ij} + C \right]_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

Ecuaciones de malla:

$$\begin{aligned} \left[\Sigma K_{ij} Q_{ij}^{n_{ij}} \right]_I &= 0 \\ \left[\Sigma K_{ij} Q_{ij}^{n_{ij}} \right]_{II} &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \left[\Sigma K_{ij} Q_{ij}^{n_{ij}} \right]_m &= 0 \end{aligned}$$

En este sistema existen n-1 ecuaciones lineales y m ecuaciones no lineales.

9.4. Métodos de solución de redes.

a) Método de Cross

Este método consiste en hacer lineales las ecuaciones del sistema ΔQ mediante el binomio de Newton aplicando la siguiente forma:

$$\Sigma K_{ij} (Q_{oij} + \Delta Q_m)^{n_{ij}} = \Sigma K_{ij} (Q_{oij} + n_{ij} Q_{oij}^{n_{ij}-1} \Delta Q_m) = 0$$

con lo cual ignora todos los términos del binomio a partir del tercero. Como ΔQ_m es constante para cada malla, puede sacarse fuera del paréntesis, resultando entonces que el factor de corrección de gasto en una determinada malla es:

$$\Delta Q = - \frac{\Sigma K_{ij} Q_{oij}^{n_{ij}}}{\Sigma n_{ij} K_{ij} Q_{oij}^{n_{ij}-1}}$$

Para aplicar esta ecuación es oportuno recordar que únicamente los sumandos del numerador, es decir las pérdidas de energía, tienen signo; el denominador es siempre positivo. Los gastos corregidos se calculan mediante la expresión siguiente:

$$Q_{lij} = Q_{oij} \pm \Delta Q_m$$

Donde el signo negativo corresponde a tuberías con pérdidas de carga negativas y viceversa. Si el valor de Q_{lij} resulta negativo significa que el flujo tiene sentido contrario al supuesto en la iteración previa.

b) Método de Newton- Raphson

Este método puede aplicarse a cualquier sistema, en esta ocasión solo presentaremos su aplicación al sistema H.

$$F_j = \Sigma \left[\frac{H_i - H_j}{K_{ij}} \right]^{1/n_{ij}} + C$$

El método se basa en el proceso iterativo de Newton para encontrar el valor de la variable que anula una función de ella, proceso que fue ampliado a funciones de varias variables por Raspón, extendiendo de esta forma su campo de aplicación, uno de los cuales es la solución de redes de tuberías. El sistema H es el formado por las ecuaciones de nodo; en consecuencia, el problema reside

en encontrar los valores de los niveles de energía o cotas piezométricas “H” que anulen la siguiente función:

En cada nodo de la red existirá una función F_j , por lo tanto, si los gastos alimentadores de la tubería son conocidos, existirán “n-1” funciones y cuando no lo sean es decir mallas imaginarias el número será “n”.

Se comienza a trabajar con unos valores de H cuales quiera supuestos. Sin embargo, las suposiciones deben ser razonables, en caso contrario, el método podría no converger. Estos valores iniciales se corrigen sustrayéndoles un incremento finito ΔH que, puede calcularse mediante la siguiente ecuación, expresada en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial H_1} & \frac{\partial F_1}{\partial H_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial H_j} \\ \frac{\partial F_2}{\partial H_1} & \frac{\partial F_2}{\partial H_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial H_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_j}{\partial H_1} & \frac{\partial F_j}{\partial H_2} & \dots & \frac{\partial F_j}{\partial H_j} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Delta H_1 \\ \Delta H_2 \\ \vdots \\ \Delta H_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ \vdots \\ F'_j \end{bmatrix}$$

Donde F'_1 , F'_2 , etc., son los valores de las funciones F_j para los valores iniciales de H. Para los efectos de colocar signos, es oportuno recordar que la función F_j representa la ecuación de la continuidad en cada uno de los nodos, esto implica que el gasto efluente es positivo y el gasto afluente es negativo, además que el subíndice “i” corresponde al nodo de donde proviene el flujo, y “j” hacia el nodo donde se dirige.

10. APLICACIÓN DE FLUJO EN TUBERIAS.

Dentro del desarrollo del capítulo presente, se da a conocer las distintas situaciones de flujo permanente y las diferentes consideraciones como ser; Conocer la resistencia al flujo en las tuberías (perdidas por: rozamiento, ensanchamiento, contracciones, válvulas, etc.), Corrientes de flujo en tuberías laminar y turbulenta. Por lo tanto su aplicación en lo que se refiere a la construcción civil en la mayoría de los casos se da en el diseño de sistemas de abastecimiento de agua potable ya sea en redes cerradas o abiertas en el cual se determinaran las pérdidas existentes debido a los accesorios que existen en la conexión de tuberías.

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Propósito u objetivo: Aplicando las ecuaciones empíricas deducidas en el presente capítulo. Determinar la pérdida de energía cada 100 [m], para el Agua (viscosidad cinemática $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$), que fluye en una tubería de 20 cm de diámetro, con un gasto de 200 l/s. Donde la rugosidad artificial de la tubería es de 1 mm

Solución:

Primero debemos conocer el comportamiento de la tubería:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.200}{\frac{\pi(0.2)^2}{4}} \Rightarrow V = 6,37 \text{ [m/s]}$$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{(6,37)(0,2)}{10^{-6}} \Rightarrow Re = 1,27 \times 10^6$$

$$\frac{K}{D} = \frac{0,001}{0,2} = 0,005$$

Ingresando estos valores en el grafico de Moody, obtenemos que la tubería se comporta como rugosa. Por esta razón usamos la ecuación de K'arman – Prandtl, para tuberías rugosas:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{D}{2ke} + 1,74$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{0,2}{2(0,001)} + 1,74$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 5,74 \Rightarrow f = 0,0304$$

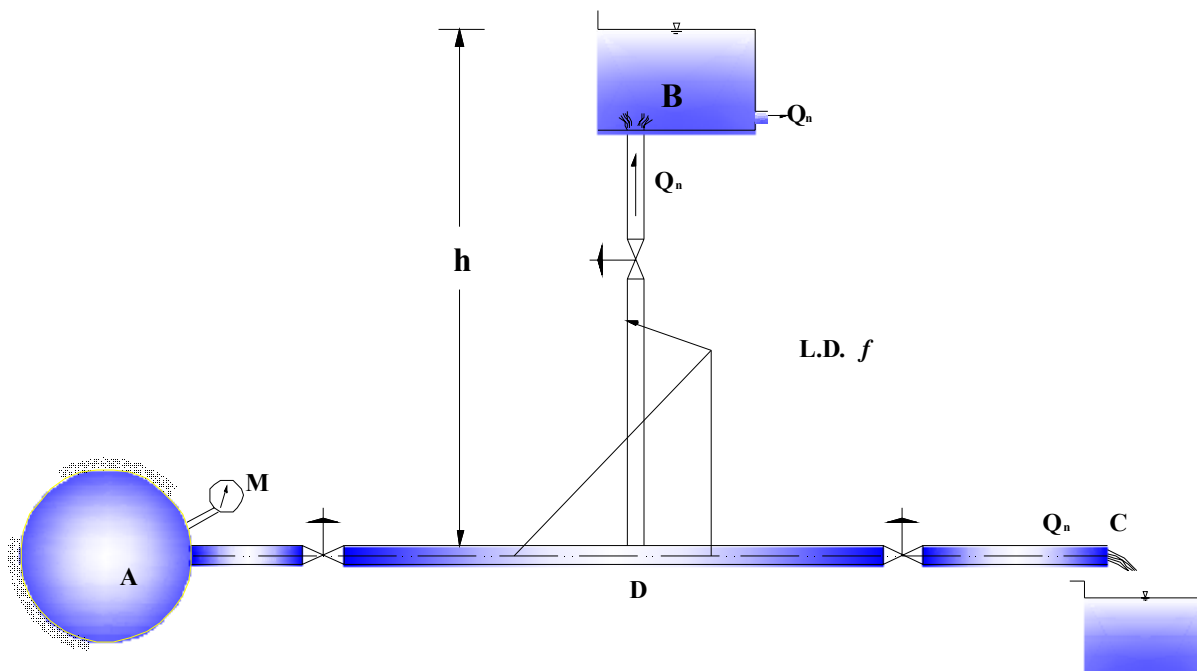
Usando la ecuación de Darcy – Weisbach:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

$$h_f = (0,0304) \frac{100}{0,2} \frac{6,37^2}{2(9,81)}$$

$$\boxed{h_f = 31,34[m]}$$

2.- Propósito u objetivo: Aplicando las ecuaciones de energía y continuidad. Calcular la carga h para que el gasto alimentado al recipiente B sea de 5 lt/seg, con las tres válvulas abiertas. Donde una tubería principal A, abastece el sistema mostrado en la figura, en el punto de unión el manómetro M marca una presión de 4,3 atm., Las características de los tres tubos son iguales: $L=210\text{m}$, $D=100\text{mm}$, $f=0,025$.



Solución:

El área de los tubos es:

$$A = 0,7854(0,1)^2 = 0,007854 \text{ m}^2$$

La velocidad y carga de velocidad del tubo que conduce el gasto Q_B son:

$$V_B = \frac{0,005}{0,007854} = 0,637 \text{ m/s}$$

$$\frac{V_B^2}{2g} = 0,0207 \text{ m}$$

Las velocidades en los otros tramos son las siguientes:

$$V_0^2 = 16\,205 Q_A^2$$

y también

$$V_A^2 = 16\,205 Q_A^2$$

El coeficiente de pérdida por fricción es el mismo en los tres tubos:

$$K_f = f \frac{L}{D} = 0,025 \frac{210}{0,1} = 52,5$$

De la ecuación de la energía, entre A y B ($p_A/\gamma = 43$ m), se tiene que

$$43 = h + 52,5 \frac{V_A^2}{2g} + (52,5 + 1)0,0207$$

$$43 = h + 43\,406 Q_A^2 + 1,11 \quad (a)$$

Ahora, entre los reservorios A y C, tenemos:

$$43 = 52,5 \frac{V_A^2}{2g} + (52,5 + 1) \frac{V_0^2}{2g}$$

o bien

$$43 = \frac{52,5 \times 16\,205 Q_A^2}{19,6} + \frac{53,5 \times 16\,205}{19,6} Q_0^2$$

Además, la ecuación de la continuidad, resulta:

$$Q_A = 0,005 + Q_0^2 \quad (b)$$

$$Q_A^2 = 0,000025 + 0,01 Q_0 + Q_0^2 \quad (d)$$

En el sistema de ecuaciones (a),(b) y (d), existen tres incógnitas: h, Q_A y Q_0 ; si sustituimos la ecuación (d) en la (b), obtenemos:

$$43 = 43\,406(0,000025 + 0,01 Q_0 + Q_0^2) + 44\,233 Q_0^2$$

$$43 = 1,09 + 434 Q_0 + 43\,406 Q_0^2 + 44\,233 Q_0^2$$

$$Q_0^2 + 0,00495 Q_0 - 0,000478 = 0$$

La solución de esta ecuación será:

$$Q_0 = -0,002475 \pm 0,022$$

El signo menos no tiene significado físico por las condiciones en las que se planteo el problema, por lo tanto:

$$Q_0 = 0,0195 \, m^3 / seg$$

Substituyendo este resultado en la ecuación (c) nos da:

$$Q_A = 0,0245 \, m^3 / seg$$

Finalmente en la ecuación (a), resulta que:

$$\boxed{h = 15,84 \, m}$$

Caso: Único

3. Propósito u objetivo: Aplicando la deducción de la fórmula de Darcy – Weisbach. Calcular la presión p necesaria en el recipiente A, para el gasto $Q_4 = 40$ lt/seg, despreciando las pérdidas locales que existieran, donde en la en la figura se muestra un sistema con un tanque (en el cual existe la presión p sobre la superficie libre) que conecta con otro recipiente a través de una tubería maestra con tres derivaciones; siendo la geometría del sistema:

$$L_1 = 400 \text{ m}$$

$$L_2 = 180 \text{ m}$$

$$L_3 = 50 \text{ m}$$

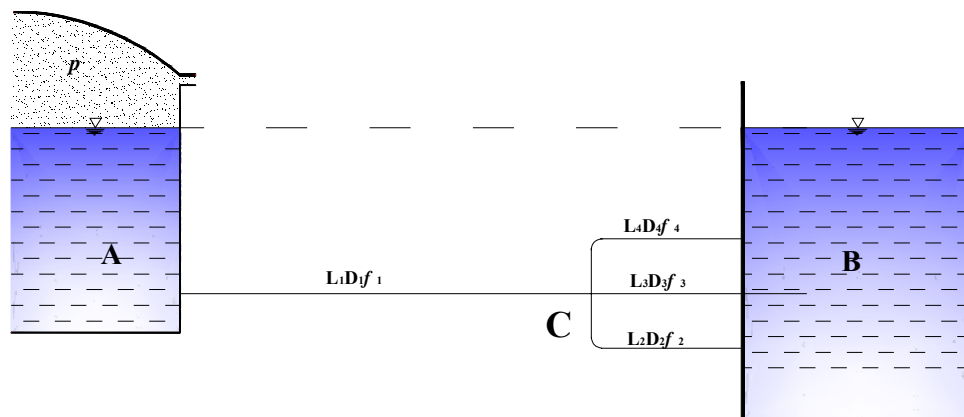
$$L_4 = 400 \text{ m}$$

$$D_1 = D_4 = 200 \text{ mm},$$

$$D_3 = D_2 = 100 \text{ mm};$$

$$f_1 = f_4 = 0,02$$

$$f_2 = f_3 = 0,025$$



Solución:

La pérdida de energía entre los puntos C y B se determina con el gasto en el tubo cuatro. Eligiendo como plano de referencia la elevación de la superficie libre en los dos recipientes, de la ecuación de la energía entre A y B, se tiene:

$$\frac{p}{\gamma} = (\Delta H)_1 + (\Delta H)_4 + \frac{V_4^2}{2g}$$

El área, la velocidad y la carga de velocidad en el tubo 4 son:

$$A_1 = A_4 = 0,7854(0,2)^2 = 0,0314 \text{ m}^2$$

$$\frac{V_4^2}{2g} = \frac{1,62}{19,6} = 0,083 \text{ m}$$

Como únicamente se considera la pérdida por fricción de la formula de Darcy – Weisbach tenemos:

$$(\Delta H)_4 = 0,02 \frac{400}{0,20} \times 0,083 = 3,306m$$

Y de las ecuaciones $V_i = \sqrt{\frac{2g\Delta H}{K_f}}$, $Q_i = A_i V_i$ resulta:

$$Q_3 = 0,7854(0,1)^2 \times \sqrt{\frac{19,6 \times 3,306 \times 0,1}{0,025 \times 50}} = 0,0179m^3 / seg.$$

$$Q_2 = 0,7854(0,1)^2 \times \sqrt{\frac{19,6 \times 3,306 \times 0,1}{0,025 \times 180}} = 0,0094m^3 / seg.$$

Conduce a un gasto total, igual a

$$Q_1 = 0,040 + 0,01791 + 0,0094 = 0,06731m^3 / seg.$$

La velocidad, carga de velocidad y perdida en el tubo 1 son:

$$V_1 = \frac{0,06731}{0,0314} = 2,14m / seg,$$

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{4,59}{19,6} = 0,234m$$

$$(\Delta H)_1 = 0,02 \frac{400}{0,2} \times 0,234 = 9,36m$$

Finalmente la carga de presión en el recipiente A, vale:

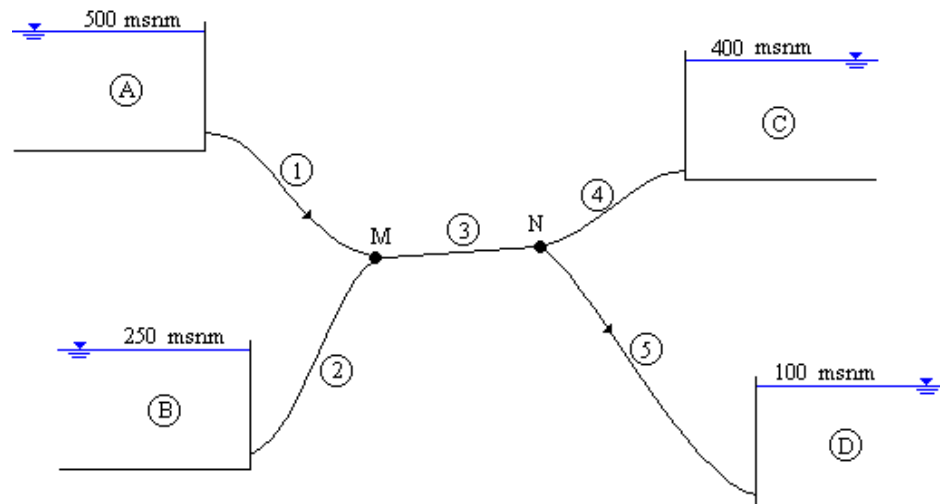
$$\frac{p}{\gamma} = 9,36 + 3,304 + 0,083 = 12,75m$$

O bien:

$$\boxed{\frac{p}{\gamma} = 1,275kg/cm^2}$$

Caso: Único

4.- Propósito u objetivo: Realizando la aplicación de las formulas deducidas en el presente capitulo para los gastos que existieran en el sistema. Calcular los gastos en el sistema de tuberías que conectan los 4 estanques mostrados en la siguiente figura,



Tubería	f	D [m]	L [m]
1	0,020	1,20	10000
2	0,020	1,00	8000
3	0,020	1,20	10000
4	0,020	1,00	8000
5	0,020	1,20	10000

Solución:

Aplicando la ecuación de Darcy – Weisbach:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

$$V^2 = \frac{Q^2}{A^2} = \frac{Q^2}{\frac{\pi^2 D^4}{16}} = \frac{16 Q^2}{\pi^2 D^4} \Rightarrow V^2 = 1,62 \frac{Q^2}{D^4}$$

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{1}{2} (1,62) \frac{Q^2}{D^4}$$

$$h_f = 0,083 f \frac{L}{D^5} Q^2$$

$$h_f = K_f Q^2$$

$$Q = \sqrt{\frac{h_f}{K_f}}$$

$$K_f = 0,083 f \frac{L}{D^5}$$

Por lo tanto:

$$K_{f1} = K_{f3} = K_{f5} = (0,083)(0,020) \frac{10000}{1,20^5} = 6,67$$

$$K_{f2} = K_{f4} = (0,083)(0,020) \frac{8000}{1,00^5} = 13,28$$

Se puede decir que el agua sale del estanque A por ser el mas alto y entra en el D por ser el mas bajo. Debemos suponer la elevación de la línea de energía en el nudo M, con valores entre 500 y 100 msnm, y comprobar su validez con la ecuación de la continuidad en N.

Si: $h_M = 400$ msnm.

$$h_{f1} = 500 - 400 = 100[m]$$

$$h_{f2} = 400 - 250 = 150[m]$$

$$Q_1 = \sqrt{\frac{100}{6,67}} = 3,87[m^3/s]$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{150}{13,28}} = 3,36[m^3/s]$$

Por continuidad en M:

$$Q_3 = Q_1 - Q_2 = 3,87 - 3,36 [m^3/s]$$

Por lo tanto h_N :

$$h_N = h_M - h_{f3} = 400 - (6,67)(0,51)^2 \Rightarrow h_N = 398,27[m]$$

Las pérdidas en las tuberías 4 y 5:

$$h_{f4} = 400 - 398,27 = 1,73[m]$$

$$h_{f5} = 398,27 - 100 = 298,27[m]$$

$$Q_4 = \sqrt{\frac{1,73}{13,28}} = 0,36[m^3/s]$$

$$Q_5 = \sqrt{\frac{298,27}{6,67}} = 6,69[m^3/s]$$

Por continuidad en N:

$$Q_3 + Q_4 = Q_5 = 0,51 + 0,36 = 0,87[m^3/s]$$

$$Q_5 = 0,51[m^3/s] \neq 6,69[m^3/s] \text{ Mal!!}$$

Debemos iterar, dando valores de h_M , y verificar con continuidad en N, hasta alcanzar que los caudales en la tubería 5 sean iguales. El procedimiento anterior se puede resumir en la siguiente

h_M	h_{f1}	h_{f2}	Q_1	Q_2	Q_3	h_{f3}	h_N	h_{f4}	h_{f5}	Q_4	Q_5	ΔQ_N
300	200	50	5,48	1,94	3,54	83,58	216,42	183,58	116,42	3,72	4,18	3,08
350	150	400	4,74	2,74	2,00	26,68	323,32	76,68	223,32	2,40	5,79	- 1,39
330	167	83	5,00	2,50	2,50	41,69	291,31	108,69	191,31	2,86	5,36	0,00

tabla:

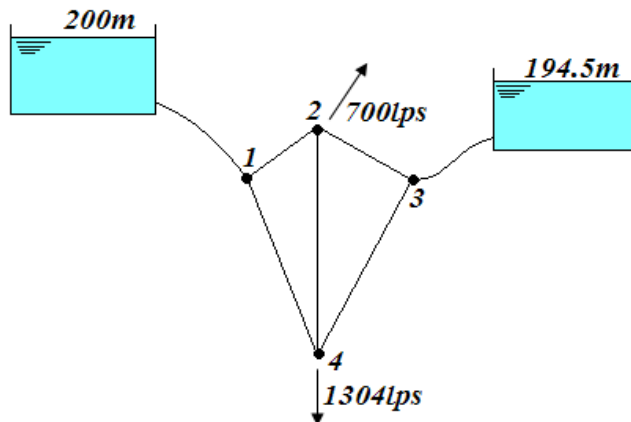
Por lo tanto:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 5,00[m^3/s] \\ Q_2 &= 2,50[m^3/s] \\ Q_3 &= 2,50[m^3/s] \\ Q_4 &= 2,86[m^3/s] \\ Q_5 &= 5,36[m^3/s] \end{aligned}$$

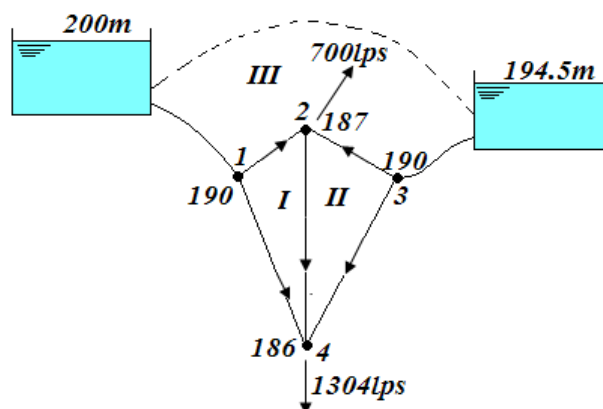
5. Propósito u objetivo: Aplicando la formula Hazen-Williams.

Determinar los caudales en las tuberías mostrado en la figura para la red alimentada por dos estanques de niveles conocidos, para los datos indicados.

Tubería	K_{ij}
A-1	6.00
1-2	4.00
1-4	15.65
3-2	3.00
3-4	2.10
2-4	1.00
B-3	8.65

**Solución.**

Para solucionar esta red, usaremos el método de Newton-Rapson, con el sistema H. Primero debemos suponer niveles de energía razonables para cada nodo:



Es necesario crear malla imaginaria con el propósito de disponer de una ecuación en cada nodo; es decir, cuatro ecuaciones. Las funciones F correspondientes a cada nodo son:

$$F_j = \sum \left[\frac{H_i - H_j}{K_{ij}} \right]^{1/n_{ij}} + C$$

$$F_1 = \left(\frac{200 - H_1}{6} \right)^{0.54} - \left(\frac{H_1 - H_2}{4} \right)^{0.54} - \left(\frac{H_1 - H_4}{15.65} \right)^{0.54}$$

$$F_1 = 0.380(200 - H_1)^{0.54} - 0.473(H_1 - H_2)^{0.54} - 0.226(H_1 - H_4)^{0.54}$$

$$F_2 = \left(\frac{H_1 - H_2}{4} \right)^{0.54} + \left(\frac{H_3 - H_2}{3} \right)^{0.54} - \left(\frac{H_2 - H_4}{1} \right)^{0.54} - 0.70$$

$$F_2 = 0.473(H_1 - H_2)^{0.54} - 0.553(H_3 - H_2)^{0.54} - (H_2 - H_4)^{0.54} - 0.70$$

$$F_3 = \left(\frac{194.5 - H_3}{8.65} \right)^{0.54} - \left(\frac{H_3 - H_2}{3} \right)^{0.54} - \left(\frac{H_3 - H_4}{2.1} \right)^{0.54}$$

$$F_3 = 0.312(194.5 - H_3)^{0.54} - 0.553(H_3 - H_2)^{0.54} - 0.670(H_3 - H_4)^{0.54}$$

$$F_4 = \left(\frac{H_1 - H_4}{15.65} \right)^{0.54} + \left(\frac{H_2 - H_4}{1} \right)^{0.54} + \left(\frac{H_3 - H_4}{2.1} \right)^{0.54} - 1.304$$

$$F_4 = 0.226(H_1 - H_4)^{0.54} + (H_2 - H_4)^{0.54} - 0.670(H_3 - H_4)^{0.54} - 1.304$$

Las derivadas parciales correspondientes a cada función son:

$$\frac{\partial F_1}{\partial H_1} = -0.205(200 - H_1)^{-0.46} - 0.255(H_1 - H_2)^{-0.46} - 0.122(H_1 - H_4)^{-0.46}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial H_2} = 0.255(H_1 - H_2)^{-0.46}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial H_3} = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial H_4} = 0.122(H_1 - H_4)^{-0.46}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial H_1} = -0.255(H_1 - H_2)^{-0.46}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial H_2} = -0.255(H_1 - H_2)^{-0.46} - 0.299(H_3 - H_2)^{-0.46} - 0.540(H_2 - H_4)^{-0.46}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial H_3} = 0.299(H_3 - H_2)^{-0.46}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial H_4} = 0.540(H_2 - H_4)^{-0.46}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial H_2} = 0.299(H_3 - H_2)^{-0.46}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial H_3} = -0.169(194.5 - H_3)^{-0.46} - 0.299(H_3 - H_2)^{-0.46} - 0.362(H_3 - H_4)^{-0.46}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial H_4} = 0.362(H_3 - H_4)^{-0.46}$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial H_1} = 0.122(H_1 - H_4)^{-0.46}$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial H_2} = 0.540(H_2 - H_4)^{-0.46}$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial H_3} = 0.362(H_3 - H_4)^{-0.46}$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial H_4} = -0.122(H_1 - H_4)^{-0.46} - 0.540(H_2 - H_4)^{-0.46} - 0.362(H_3 - H_4)^{-0.46}$$

Sustituyendo los valores asumidos tenemos:

$$F_1 = -0.016 \quad F_2 = 0.156 \quad F_3 = -1.713 \quad F_4 = 1.590$$

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial F_1}{\partial H_1} = -0.290 & \frac{\partial F_1}{\partial H_2} = 0.154 & -\frac{\partial F_1}{\partial H_3} = 0 & \frac{\partial F_1}{\partial H_4} = 0.065 \\ \frac{\partial F_2}{\partial H_1} = 0.154 & \frac{\partial F_2}{\partial H_2} = -0.873 & -\frac{\partial F_2}{\partial H_3} = 0.179 & \frac{\partial F_2}{\partial H_4} = 0.540 \\ \frac{\partial F_3}{\partial H_1} = 0 & \frac{\partial F_3}{\partial H_2} = 0.179 & \frac{\partial F_3}{\partial H_3} = -0.455 & \frac{\partial F_3}{\partial H_4} = 0.191 \\ \frac{\partial F_4}{\partial H_1} = 0.065 & \frac{\partial F_4}{\partial H_2} = 0.540 & \frac{\partial F_4}{\partial H_3} = 0.191 & \frac{\partial F_4}{\partial H_4} = -0.796 \end{array}$$

Incluyendo todos estos valores en la forma matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} -0.290 & 0.154 & 0 & 0.065 \\ 0.154 & -0.83 & 0.179 & 0.540 \\ 0 & 0.190 & -0.455 & 0.191 \\ 0.065 & 0.540 & 0.191 & -0.796 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta H_1 \\ \Delta H_2 \\ \Delta H_3 \\ \Delta H_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.016 \\ 0.156 \\ -1.713 \\ 1.590 \end{bmatrix}$$

Este sistema matricial nos da los siguientes resultados:

$$\begin{array}{ccc} \Delta H_1 = -1.94 & \Delta H_2 = -2.33 & \Delta H_3 = 1.42 \\ \Delta H_4 = -3.39 \end{array}$$

Ahora restamos estos incrementos a su correspondiente cota (no olvidarse incluir el signo del incremento en la resta), para obtener unos nuevos valores de cotas piezométricas:

$$\begin{array}{ccc} H_1 = 191.94 & H_2 = 189.33 & H_3 = 188.58 \\ H_4 = 189.39 \end{array}$$

Estos valores se utilizan como iniciales para la segunda iteración; en este sentido, deben tenerse presente los cambios de sentido de los flujos en las tuberías que pudieran producirse por las modificaciones sufridas por los niveles de energía. La ecuación para la segunda iteración queda definida de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} -0.322 & 0.164 & 0 & 0.079 \\ 0.164 & -2.475 & 0.341 & 1.970 \\ 0 & 0.341 & -0.815 & 0.399 \\ 0.079 & 1.970 & 0.399 & -2.443 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta H_1 \\ \Delta H_2 \\ \Delta H_3 \\ \Delta H_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.004 \\ -0.160 \\ 1.866 \\ -1.746 \end{bmatrix}$$

Los nuevos resultados obtenidos, expresados en metros son:

$$\Delta H_1 = 1.14 \quad \Delta H_2 = 1.41 \quad \Delta H_3 = -0.87$$

$$\Delta H_4 = 1.75$$

Los nuevos valores de H son:

$$H_1 = 190.8 \quad H_2 = 187.92 \quad H_3 = 189.45$$

$$H_4 = 187.64$$

Procediendo de la misma forma y luego de tres iteraciones más (se itera hasta que los ΔH , sean lo más pequeños posibles con un 0.2% de variación), se llega a los siguientes resultados, que se consideran aceptables, en *msnm*:

$$H_1 = 191.32 \quad H_2 = 188.57 \quad H_3 = 188.92$$

$$H_4 = 188.38$$

Ahora con los valores de energía obtenidos, calculamos los caudales por tuberías con la ecuación de Hazen-Williams:

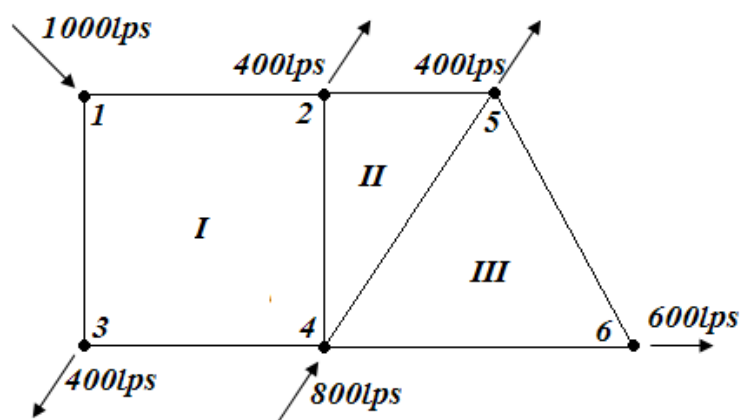
$$\begin{aligned} Q_{A1} &= \frac{(200 - 191.32)^{0.54}}{6^{0.54}} \Rightarrow \boxed{Q_{A1} = 1.22 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]} \\ Q_{12} &= \frac{(191.32 - 188.57)^{0.54}}{4^{0.54}} \Rightarrow \boxed{Q_{12} = 0.817 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]} \\ Q_{14} &= \frac{(191.32 - 188.38)^{0.54}}{15.65^{0.54}} \Rightarrow \boxed{Q_{14} = 0.405 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]} \\ Q_{32} &= \frac{(188.92 - 188.57)^{0.54}}{3^{0.54}} \Rightarrow \boxed{Q_{32} = 0.314 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]} \\ Q_{24} &= \frac{(188.57 - 188.38)^{0.54}}{1^{0.54}} \Rightarrow \boxed{Q_{24} = 0.408 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]} \\ Q_{34} &= \frac{(188.92 - 188.38)^{0.54}}{2.1^{0.54}} \Rightarrow \boxed{Q_{34} = 0.480 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]} \\ Q_{B3} &= \frac{(194.50 - 188.92)^{0.54}}{8.65^{0.54}} \Rightarrow \boxed{Q_{B3} = 0.790 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]} \end{aligned}$$

Todos en el mismo sentido del flujo originalmente supuesto.

6.- Propósito u objetivo: Utilizar la formula Darcy-Weisbach para ($n = 2$) y el método de Cross.

Calcular los caudales en cada tubería y los niveles de energía en cada nodo, si en el nodo 1 es 600msnm , para la figura que muestra una red y los coeficientes K_f de cada tubería (incluyendo longitud equivalente de perdidas localizadas); se indican, así mismo, los gastos alimentadores y los consumos.

Tubería	K_f
1.2	2.0
1.3	1.0
3.4	1.5
2.4	2.1
2.5	0.8
4.5	1.2
5.6	0.9
4.6	1.1



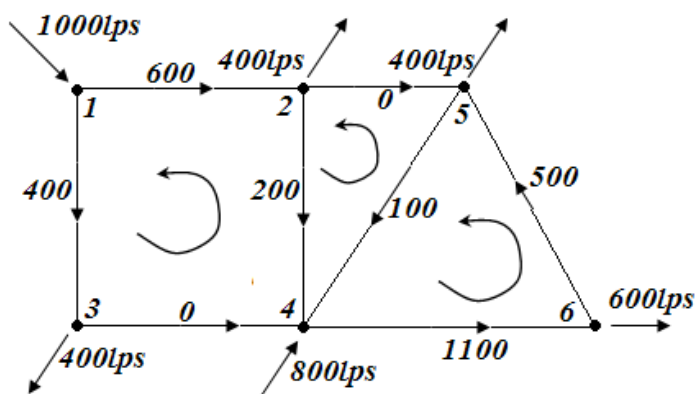
Solución.

Primero revisaremos que la suma de todos los caudales que ingresan es igual que los caudales de salida (consumos):

$$Q_a = 1000 + 800 = 1800\text{ lps}$$

$$Q_c = 400 + 400 + 600 = 1800\text{ lps}$$

Debemos suponer gastos iniciales Q_{0ij} en cada tramo, deben cumplir la ecuación de la continuidad en cada uno. Estos caudales serán con los que comenzaremos las iteraciones, además dividimos toda la red en mallas individuales donde los caudales con sentido contrario a las manecillas del reloj:



El proceso de calcule se resume en la tabla siguiente:

Tabla 1. Primera iteración, Q_{0ij} caudales asumidos:

Malla	Tubería	K_{ij}	Q_{0ij}	Sentido	$K_{ij} Q_{0ij}^2$	$2K_{ij} Q_{0ij}$	ΔQ_M	Q_{1ij}
I	1.2	2	0.6	-1	-0.7200	2.4000	-0.1590	0.4410
	1.3	1	0.4	1	0.1600	0.8000	0.1590	0.5590
	3.4	1.5	0	1	0.0000	0.0000	0.1590	0.1590
	2.4	2.1	0.2	-1	-0.0840	0.8400	-0.2260	-0.0260
					-0.6440	4.0400		
					ΔQ_M	0.1590		
II	2.4	2.1	0.2	1	0.0840	0.8400	-0.2260	-0.0260
	2.5	0.8	0	-1	0.0000	0.0000	0.0670	-0.0670
	4.5	1.2	0.1	-1	-0.0120	0.2400	0.3730	-0.2730
					0.0720	1.0800		
					ΔQ_M	-0.0670		
III	4.5	1.2	0.1	1	0.0120	0.2400	-0.3730	-0.2730
	5.6	0.9	0.5	1	0.2250	0.9000	-0.4400	0.0600
	4.6	1.1	1.1	1	1.3310	2.4200	-0.4400	0.6600
					1.5680	3.5600		
					ΔQ_M	-0.4400		

Tabla 2. Segunda iteración, Q_{1ij} caudales calculados en la primera iteración:

Malla	Tubería	K_{ij}	Q_{1ij}	Sentido	$K_{ij} Q_{1ij}^2$	$2K_{ij} Q_{1ij}$	ΔQ_M	Q_{2ij}
I	1.2	2	0.4410	-1	-0.3890	1.7640	-0.0107	0.4303
	1.3	1	0.5590	1	0.3125	1.1180	0.0107	0.5697
	3.4	1.5	0.1590	1	0.0379	0.4770	0.0107	0.1697
	2.4	2.1	0.0260	1	0.0014	0.1092	0.1076	0.1336
					-0.0371	3.4682		
					ΔQ_M	0.0107		
II	2.4	2.1	0.0260	-1	-0.0014	0.1092	0.1076	0.1336
	2.5	0.8	0.0670	-1	-0.0036	0.1072	0.0969	0.1639
	4.5	1.2	0.2730	1	0.0894	0.6552	0.0805	0.3535

					0.0844	0.8716		
					ΔQ_M	-0.0969		
III	4.5	1.2	0.2730	-1	-0.0894	0.6552	0.0805	0.3535
	5.6	0.9	0.0600	1	0.0032	0.1080	-0.1774	-0.1174
	4.6	1.1	0.6600	1	0.4792	1.4520	-0.1774	0.4826
					0.3930	2.2152		
					ΔQ_M	-0.1774		

Tabla3. Tercera iteración, Q_{2ij} caudales asumidos:

Malla	Tubería	K_{ij}	Q_{2ij}	Sentido	$K_{ij} Q_{2ij}^2$	$2K_{ij} Q_{2ij}$	ΔQ_M	Q_{3ij}
I	1.2	2	0.4303	-1	-0.3703	1.7212	0.0089	0.439
	1.3	1	0.5697	1	0.3246	1.1394	-0.0089	0.561
	3.4	1.5	0.1697	1	0.0432	0.5091	-0.0089	0.161
	2.4	2.1	0.1336	1	0.0375	0.5610	0.0456	0.179
					0.0349	3.9307		
					ΔQ_M	-0.0089		
II	2.4	2.1	0.1336	-1	-0.0014	0.5610	0.0456	0.179
	2.5	0.8	0.1174	-1	-0.0036	0.2622	0.0545	0.218
	4.5	1.2	0.3535	1	0.0894	0.8485	-0.0102	0.343
					0.0844	1.6717		
					ΔQ_M	-0.0545		
III	4.5	1.2	0.3535	-1	-0.0894	0.8485	-0.0102	0.343
	5.6	0.9	0.1174	-1	0.0032	0.2106	0.0443	0.161
	4.6	1.1	0.4826	1	0.4792	1.0617	-0.0443	0.439
					0.3930	2.1208		
					ΔQ_M	-0.0443		

Debemos hallar el valor de ΔQ_M con la siguiente ecuación:

$$\Delta Q = - \frac{\sum K_{ij} Q_{0ij}^{n_{ij}}}{\sum n_{ij} K_{ij} Q_{0ij}^{n_{ij}-1}}$$

Donde el valor de n depende de la ecuación que usaremos, en este caso usamos la ecuación de Darcy-Weisbach, por lo que $n = 2$.

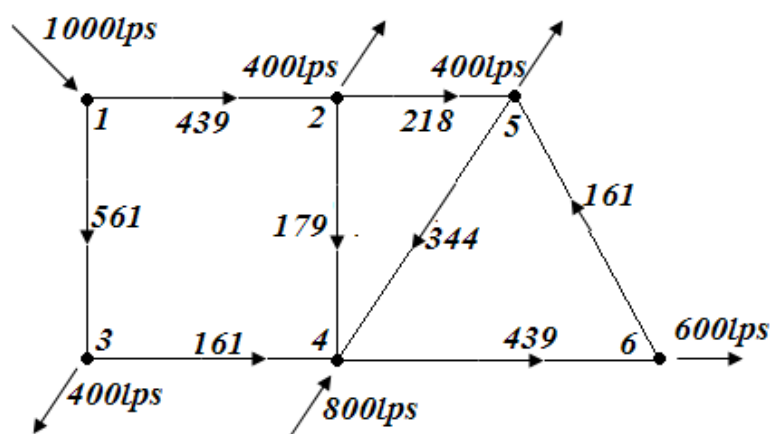
La columna 4 desde la izquierda, representa el sentido del flujo en esa tubería, en caso de ser 1 el flujo esta en contra a las agujas del reloj -1 el flujo esta en sentido de las agujas del reloj. La columna

5 es el valor, $K_{ij}Q_{0ij}^{n_{ij}}$ que es el numerador de la ecuación ΔQ este valor se halla para cada tubería y toma el signo del sentido de flujo. La columna 6 es $n_{ij}K_{ij}Q_{0ij}^{n_{ij}-1}$ también para cada tubería.

Se realizan en numero de iteraciones necesarias hasta que el valor de ΔQ alcance una tolerancia.

Los valores son:

Tubería	Q[lps]	Tubería	Q[lps]
1.2	439	2.5	218
1.3	561	4.5	343
3.4	161	5.6	161
2.4	179	4.6	439



Para determinar las elevaciones de la línea de energía en los diferentes nodos, se parte en el nodo 1:

$$h_f = K_f Q^2$$

$$h_2 = h_1 - (2)(0.439)^2 = 600 - 0.385 \Rightarrow h_2 = 599.62 [msnm]$$

$$h_3 = h_1 - (1.5)(0.561)^2 = 600 - 0.472 \Rightarrow h_3 = 599.53 [msnm]$$

$$h_4 = h_3 - (2.1)(0.161)^2 = 599.53 - 0.054 \Rightarrow h_4 = 599.48 [msnm]$$

$$h_5 = h_2 - (0.8)(0.218)^2 = 599.62 - 0.038 \Rightarrow h_5 = 599.58 [msnm]$$

$$h_6 = h_4 - (1.1)(0.439)^2 = 599.48 - 0.212 \Rightarrow h_6 = 599.27 [msnm]$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Propósito u objetivo: Aplicando las ecuaciones para pérdidas por accesorios de flujo en tuberías. Para una tubería de 0,20 m de diámetro que funciona como lisa, cuando la pérdida de energía es de 7,9 m por cada Km de longitud. El líquido tiene una $D_r = 0,92$ y una viscosidad cinemática de $2 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

a) Calcular el gasto que fluye.

b) ¿Cuál sería el gasto para la misma pérdida, si la tubería funciona como rugosa, si la rugosidad artificial es de 0,5 mm?

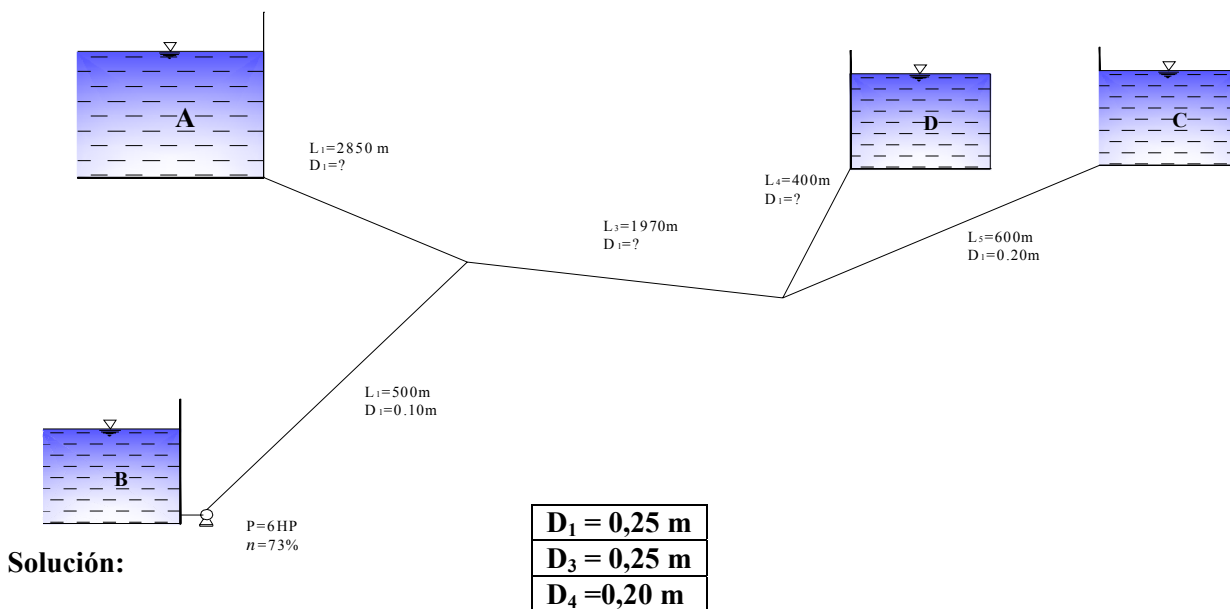
Solución:

$$\text{a) } Q = 0,031 \left[\text{m}^3/\text{s} \right] = 31,1 [\text{lps}]$$

$$\text{b) } Q = 0,348 \left[\text{m}^3/\text{s} \right] = 34,8 [\text{lps}]$$

2. Propósito u objetivo: Aplicando las ecuaciones empíricas deducidas para la determinación de pérdidas en tuberías.

Determinar los diámetros D_1 , D_3 , D_4 necesarios para que se satisfagan las condiciones impuestas. El factor de fricción en todo los tubos es $f = 0,014$ y los tanques A y B abastecen a C y D. Mostrados en la figura donde se presenta una red abierta y su geometría. Se desean que los gastos sean: $Q_5 = 25 \text{ lt/seg}$, $Q_4 = 30 \text{ lt/seg}$, hacia los tanques C y D respectivamente y que $Q_2 = 11 \text{ lt/seg}$ desde la bomba.



2. Propósito u objetivo: Aplicando las ecuaciones empíricas para pérdidas.

Determinar el caudal que transporta cada una de las tuberías, del sistema mostrado en la figura, así como la pérdida total de A y B. Las longitudes y diámetros son:

$$L_1 = L_5 = 750 \text{ m};$$

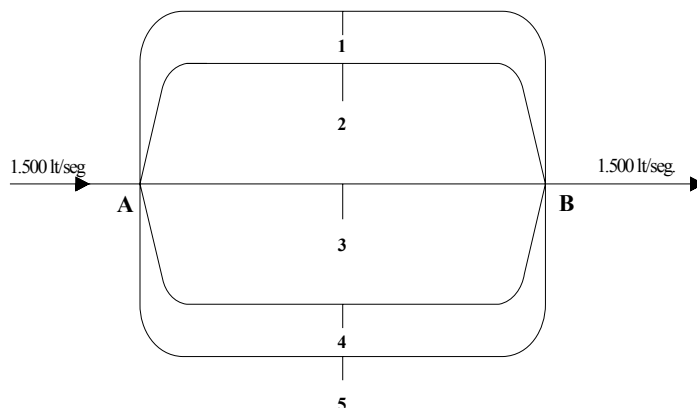
$$L_2 = L_4 = 500 \text{ m};$$

$$L_3 = 300 \text{ m};$$

$$D_1 = D_5 = 0,50 \text{ m};$$

$$D_2 = D_4 = 0,40 \text{ m};$$

$$D_3 = 0,60 \text{ m}.$$



4. Propósito u objetivo: Aplicar los conceptos y formulas de flujo en tuberías.

Calcular los caudales en cada tubo, despreciando las pérdidas en sistema mostrado en la figura donde tiene la siguiente geometría:

$$H = 24 \text{ m};$$

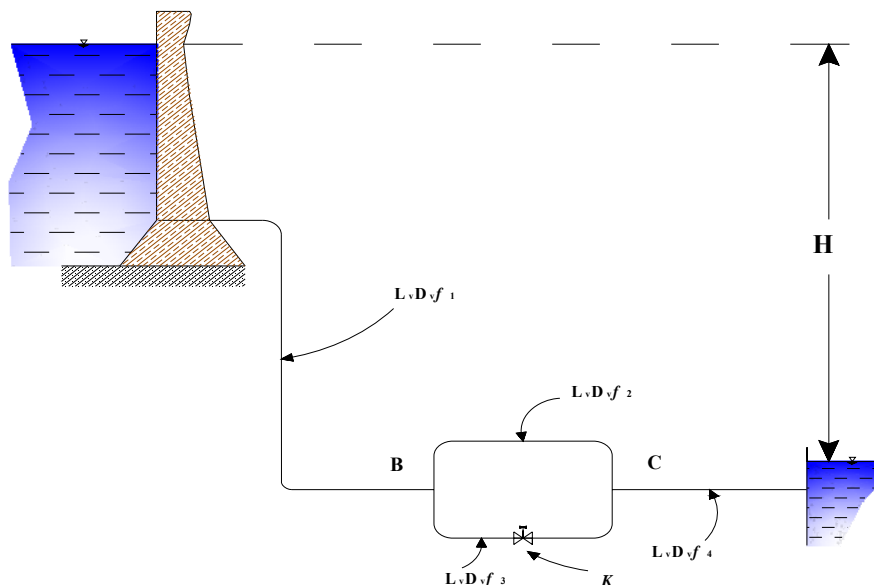
$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 100 \text{ m};$$

$$D_1 = D_2 = D_4 = 100 \text{ mm};$$

$$D_3 = 200$$

mm;

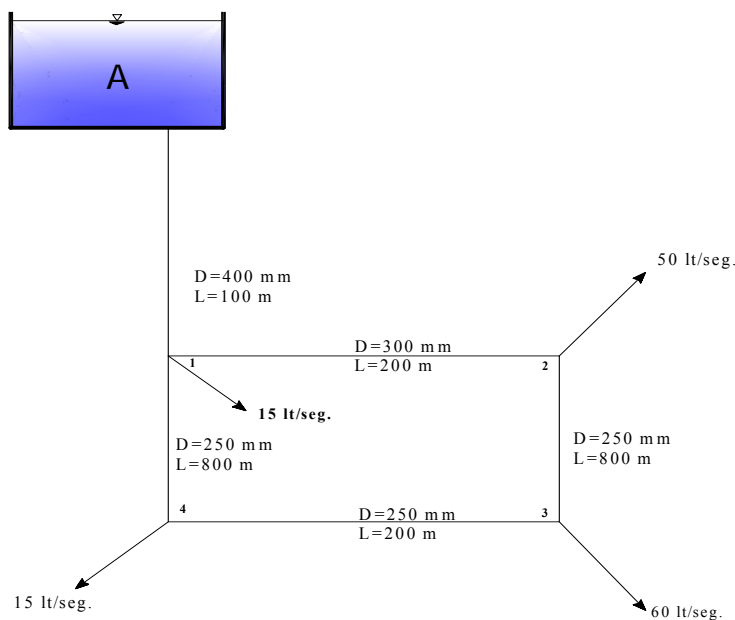
Además, $f_1 = f_2 = f_4 = 0,025$ y $f_3 = 0,02$; el coeficiente de pérdida en la válvula $K_0 = 30$ locales.



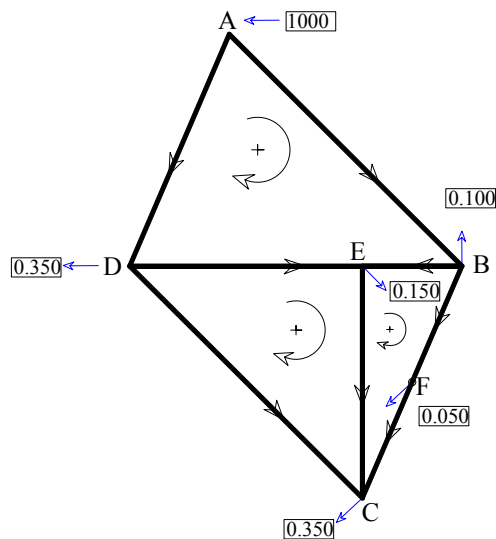
5.- Propósito u objetivo: Utilice formula de Hazen Williams, ($C_{HW}= 95$).

Determinar el gasto en los tubos del sistema considerando que la elevación de todos los nudos de la red es de 70,00 m;

Para la figura mostrada en el proyecto del sistema de tubos para combatir incendios en una instalación industrial. En los puntos 1, 2, 3, 4 se requiere instalar hidrantes para abastecer gastos de 15, 30, 60 y 15 lt/seg, respectivamente.



6.- Propósito u objetivo: Utilice el método de Cross para solucionar la red de tuberías. Para calcular la distribución de la descarga en el trabajo neto mostrado en la figura. Donde las alturas piezométricas encabezan en A y también todas las descargas entrantes y salientes son conocidas.



Q en m³/s n = Manning: 0.015

$h_A=200\text{ m}$

Tubería	L (m)	D(mm)	K	Suposición inicial de la Descarga (m3/s)
A-B	2700	400	0.30697	0.4
B-F	2700	500	0.093378	0.2
F-C	1500	500	0.093378	0.15
C-D	4100	350	0.625729	0.15
D-A	1600	450	0.63788	0.6
B-E	1400	200	12.3763	0.1
E-D	1700	250	3.76475	0.1
E-C	3800	200	12.3763	0.05

$$A : 1.000=0.4+0.6$$

$$B : 0.4=0.1+0.1+0.2$$

$$C : 0.15+0.05+0.15=0.35$$

$$D : 0.6=0.35+0.15+0.10$$

$$E : 0.1+0.1=0.15+0.05$$

$$F : 0.2=0.05+0.15$$

Solución:

Tubería	Q (m3/s)
A-B	0.398(de A a B)
B-F	0.258
F-C	0.208
C-D	0.152(de D a C)
D-A	0.602
B-E	0.04
E-D	0.1
E-C	0.01(de C a E)

h (m)

$$A : 200$$

$$B : 68.6$$

$$C : 45.7$$

$$D : 105$$

$$E : 41$$

$$F : 51.8$$

Capítulo 9:

MAQUINARIAS HIDRÁULICAS

1. BOMBAS



Fuente: Elaboración propia – fotos
Lab. Hidráulica (UMSS)

Fig. 9.1 Bombas hidráulicas

1.1 INTRODUCCIÓN

Las bombas son equipos mecánicos que sirven para elevar los líquidos y conducirlos de un lugar a otro. O lo que es lo mismo, comunicarle cierta cantidad de energía (carga) que les permita vencer la resistencia de las tuberías a la circulación, así como la carga que representa la diferencia de nivel entre el lugar de donde se toma el líquido y el lugar a donde se pretende llevar.

Los líquidos circulan de lugar de mayor energía al lugar de menor energía; el suministrarle energía la bomba a líquido tiene el objeto de producir el gradiente necesario para establecer la circulación y vencer las resistencias.

1.2 TIPOS DE BOMBAS

Las bombas se dividen en dos grupos, que son los siguientes:

- a) Bombas de desplazamiento positivo (Directas)
- b) Bombas de desplazamiento no positivo (Indirectas) o rotodinámicas.

Al primer pertenecen las bombas de pistón de acción recíprocante o bombas recíprocantes y las bombas rotatorias. Las características principales de este grupo son:

- a) Que a una velocidad determinada la descarga (Caudal) es en general fijo e independiente de la carga de bombeo.
- b) Que la carga posible de bombeo puede aumentarse, dentro de los límites de resistencia de los materiales de que esta construida la bomba, con solo aumentar la potencia del motor que la mueve y sin variar la velocidad de operación.

Al segundo pertenecen las bombas centrífugas o rotor en hélice (Flujo Axial) y sus características principales son:

- a) Que a una velocidad determinada la descarga esta en función inversa de la carga posible de bombeo, y es variable es decir que a mayor descarga, menor carga de bombeo y viceversa.
- b) Que la carga de bombeo no puede aumentarse con solo aumentarse la potencia del motor, si no que hay que aumenta la velocidad o el diámetro del rotor para lograrlo.

En ambos tipos o grupos de bombas la descarga de la bomba aumenta cuando aumenta la velocidad de trabajo de la misma.

1.2.1 Bombas de desplazamiento positivo (directas)

Características generales de funcionamiento.-

Las bombas de este tipo son bombas de desplazamiento que crean la succión y la descarga, desplazado agua con un elemento móvil. El espacio que ocupa el agua se llena y vacía alternativamente forzando y extrayendo el líquido mediante movimiento mecánico.

➤ Clases de bombas de desplazamiento positivo.-

Hay dos clases de bombeo de desplazamiento positivo:

- a) Las de Pistón o reciprocantes, que desplazan el líquido por la acción de un embolo o pistón con movimiento rectilíneo alternativo, o con movimiento de oscilación.
- b) Las rotatorias, en las cuales el desplazamiento se logra por el movimiento de rotación de los elementos de la bomba.

1.2.2 Bombas de desplazamiento no positivo (Indirecta) o rotodinamicas

Características generales de las bombas no positivo.-

Las bombas de este grupo son los que mas se usan en las distintas aplicaciones y prácticamente han desplazado casi completamente a las bombas reciprocantes y rotativas por su adaptabilidad a las condiciones de servicio mas diversas. Podemos decir que las bombas, de flujo mixto y axiales se

encuentran entre las maquinas que mas se usan en la técnica moderna, paralelamente al motor eléctrico.

Estas bombas transmiten la energía a líquido por la rotación del impelente. El impelente esta provisto de una serie de alabes o paletas que son las que transmiten la energía y dirigen la circulación de liquido para lograr la transformación efectiva de energía mecánica suministrada por el motor de energía Hidráulica, representada por la carga a presión a la salida y el volumen de liquido en circulación.

➤ **Clasificación de bombas de desplazamiento no positivo**

Este tipo de bombas consiste esencialmente en un impelente, rodete o rotor, colocado dentro de una caja y dispuesto de tal manera que cuando rota le transmite la energía a líquido bombeado aumentando la presión y la velocidad del mismo. La caja de la bomba tiene una forma tal que transformará la carga a velocidad (energía en forma de velocidad) a la salida del impelente, encarga a presión a la salida de la bomba, ya que de esta forma el liquido puede vencer mejor la diferencia de nivel y la resistencia que ofrecen las tuberías a la circulación.

La acción de bombeo se dice que no es positiva, ya que la carga es limitada por la velocidad en la periferie del impelente, la cual depende del diámetro del rotor y de su velocidad de rotación.

Las bombas de desplazamiento no positivo pueden clasificarse atendiendo a tipo de flujo dentro del impelente y por consiguiente a su forma, en tres grupos principales:

- Bombas de flujo radial o centrifugas
- Bombas de flujo diagonal o mixto
- Bombas de flujo axial.

Generalmente las bombas incluidas en los dos primeros grupos se conocen en mercado como bombas centrifugas. En comparación con las bombas de desplazamiento positivo, puede decirse que las bombas de desplazamientos no positivos suministran una carga pequeña y una descarga grande.

1.3 POTENCIA REQUERIDA POR BOMBAS

La potencia se define como la rapidez con que se realiza un trabajo. En mecánica de fluidos podemos modificar este enunciado y considerar que la potencia es la rapidez con que la energía está siendo transferida. La unidad de potencia en el SI es el watt (W), que es equivalente a $1.0 \text{ N} \cdot \text{m/s}$.

Con el fin de calcular la potencia transferida, debemos determinar cuántos newtons están fluyendo por la bomba en un intervalo dado de tiempo. A esto se le conoce como rapidez de flujo de peso, W , se le expresa en unidades de N/s. La potencia se calcula multiplicando la energía transferida por newton de fluido por la rapidez de flujo de peso. Es decir,

$$\boxed{P_A = h_A W} \quad [\text{watt}] \quad (1)$$

pero como $W = \gamma Q$, podemos escribir también:

$$\boxed{P_A = h_A \gamma Q} \quad [\text{watt}] \quad (2)$$

En la que P_A representa la potencia añadida al fluido, γ es el peso específico de fluido que fluye por la bomba y Q es la rapidez de flujo de volumen de fluido.

1.4 EFICIENCIA MECANICA DE LAS BOMBAS

El término eficiencia se utiliza para denotar el cociente de la potencia transmitida por la bomba al fluido entre la potencia suministrada a la bomba. Debido a las pérdidas de energía ocasionadas por la fricción mecánica en los componentes de la bomba, la fricción del fluido en la misma y la excesiva turbulencia del fluido que se forma en ella, no toda la potencia suministrada a la bomba es transmitida al fluido.

Entonces, utilizando el símbolo e_M para representar la eficiencia mecánica, tenemos:

$$\boxed{e_M = \frac{\text{Potencia transmitida al fluido}}{\text{Potencia puesta en la bomba}} = \frac{P_A}{P_l}} \quad (3)$$

El valor de e_M siempre será menor que 1.0. El valor de la eficiencia de las bombas depende no solamente de su diseño, sino también de las condiciones en las cuales esta funcionando, particularmente, de la cabeza total y de la rapidez de flujo. Para las bombas que se usan en sistemas hidráulicos, como las que se muestran en las (figuras 9.2 y 9.3)

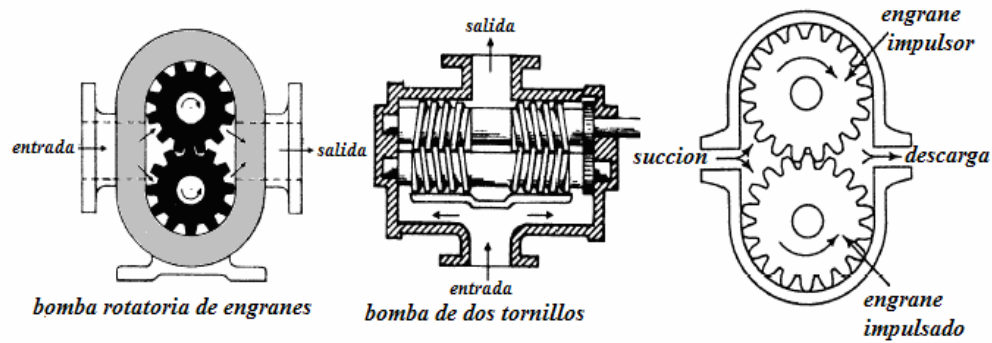
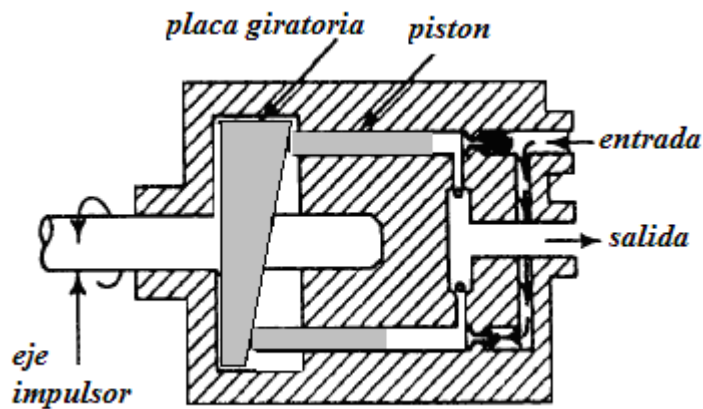


Fig. 9.2 Bombas que se usan en sistemas hidráulicos



[12] Fuente: Bombas centrífugas y volumétricas - Pedro Fernández Díez

Fig. 9.3

1.5 POTENCIA SUMINISTRADA A MOTORES DE FLUIDO

La energía transmitida por el fluido a un dispositivo mecánico, como a un motor de fluido o a una turbina, está representada en la ecuación general de energía por el término hr , que es una medida de la energía transmitida por cada unidad de peso de fluido al tiempo que pasa por el dispositivo. Encontramos la potencia transmitida multiplicando hr por la rapidez de flujo de peso, W :

$$p_R = h_R W = h_R \gamma Q \quad (4)$$

en la que P_R es la potencia transmitida por el fluido al motor.

1.6 EFICIENCIA MECÁNICA DE LOS MOTORES DE FLUIDO

Del mismo modo en que lo describimos para las bombas, las pérdidas de energía en un motor de fluido se producen por fricción mecánica y de fluido. Por consiguiente, no toda la potencia transmitida al motor es convertida a potencia de salida del dispositivo. La eficiencia mecánica se define entonces como:

$$e_M = \frac{\text{salida de potencia del motor}}{\text{potencia transmitida por el fluido}} = \frac{P_O}{P_R} \quad (5)$$

De nuevo aquí, el valor de la eficiencia e_M es siempre menor que 1.0

2. TURBINAS



Fuente: Elaboración propia – fotos Lab. Hidráulica (UMSS)

Fig. 9.4 Turbina hidráulica

2.1. INTRODUCCION

En la actualidad es imposible imaginar la vida sin energía eléctrica, estamos tan acostumbrados a encender y apagar el interruptor de la luz y otros aparatos que muy rara vez nos ponemos a pensar de donde viene esta electricidad; pues bien, un tipo de centrales generadoras son las HIDROELÉCTRICAS, éstas son plantas encargadas de convertir la energía del agua en energía eléctrica, pero mas específicamente, la TURBINA es la encargada de transformar esa energía hidráulica en energía mecánica, para posteriormente convertirla en energía eléctrica con un generador. Como decía La turbina es el alma de una central hidroeléctrica y dependiendo de la turbina que se use es la cantidad de electricidad que se produzca. En este capítulo hablaremos de las turbinas de impulso, y específicamente de la turbina PELTON.

2.2 CLASIFICACION DE TURBINAS

Según el grado de reacción:

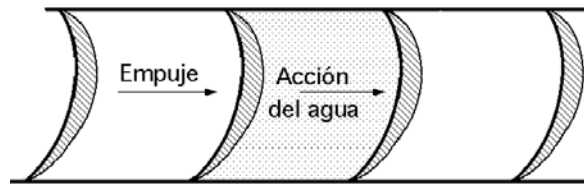
Acción: $GR = 0, P_1 = P_2$

Reacción: $GR = 1, P_1 > P_2$

La clasificación fundamental de una turbina (convierte la energía del flujo en una energía mecánica en el eje, lo contrario sería una bomba) es las de acción y las de reacción.

- **Turbinas de acción:** Se llaman así cuando la transformación de la energía potencial en energía cinética se produce en los órganos fijos anteriores al rodete (inyectores o toberas). En consecuencia el

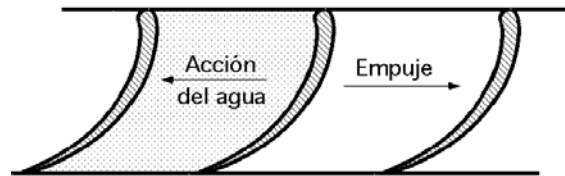
rodete solo recibe energía cinética. La presión a la entrada y salida de las cucharas (o alabes) es la misma e igual a la atmosférica.



[12] Fuente: Turbinas Hidráulicas - Pedro Fernández Díez

Fig. 9.5 Acción

;- **Turbinas de reacción:** Se llama así (en el caso de pura) cuando se transforma la energía potencial en cinética íntegramente en el rodete. Este recibe solo energía potencial. La presión de entrada es muy superior a la presión del fluido a la salida. Esto ocurre en un aspersor. En la realidad no se ha desarrollado este tipo de turbina industrialmente. Se llaman así aun que habría que considerarlas como un tipo mixto.



[12] Fuente: Turbinas Hidráulicas - Pedro Fernández Díez

Fig. 9.6 Reacción

Según la admisión:

Admisión parcial

Chorro tangencial

Admisión total:

Todo el rodete inmerso en el agua

Según la dirección del flujo:

Radiales

Diagonales

Axiales

Tangenciales

Según la posición del eje:

Vertical

Horizontal

Inclinado

Según la velocidad específica de giro:

Lentas

Normales

Rápidas

$$N_s = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}}$$

2.3. TURBINAS HIDRÁULICAS O DE AGUA

Una máquina hidráulica es un dispositivo capaz de convertir energía hidráulica en energía mecánica; pueden ser motrices (turbinas), o generatrices (bombas), modificando la energía total de la vena fluida que las atraviesa. En el estudio de las turbomáquinas hidráulicas no se tienen en cuenta efectos de tipo térmico, aunque a veces habrá necesidad de recurrir a determinados conceptos termodinámicos; todos los fenómenos que se estudian serán en régimen permanente, caracterizados por una velocidad de rotación de la máquina y un caudal, constantes.

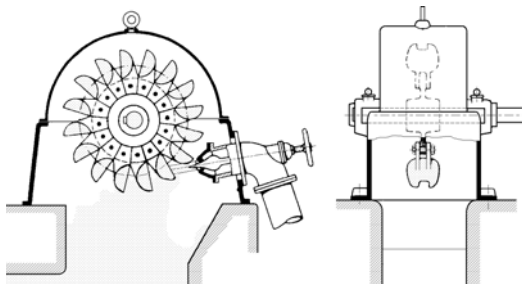
En una máquina hidráulica, el agua intercambia energía con un dispositivo mecánico de revolución que gira alrededor de su eje de simetría; éste mecanismo lleva una o varias ruedas, (rodetes o rotores), provistas de alabes, de forma que entre ellos existen unos espacios libres o canales, por los que circula el agua.

2.4 TIPOS DE TURBINAS HIDRÁULICAS

a). Turbinas Pelton (Saltos grandes y caudales pequeños)

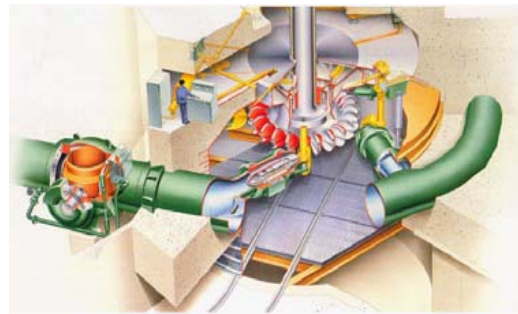
Una turbina Pelton es una turbo máquina motora, de flujo transversal. Consiste en una rueda (rodete o rotor) dotada de cucharas en su periferia, las cuales están especialmente realizadas para convertir la energía de un chorro de agua que incide sobre las cucharas.

Al final de la galería de presión se suministra el agua a la turbina por medio de una o varias válvulas de aguja, también llamadas inyector, los cuales tienen forma de tobera para aumentar la velocidad del flujo que incide sobre las cucharas.

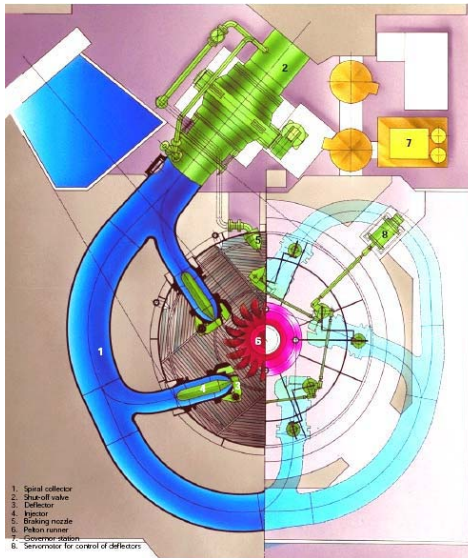


[12] Fuente: Turbinas Hidráulicas - Pedro Fernández Díez

Fig. 9.7 Turbina Pelton



[13] Fuente: "Mecánica de Fluidos Incompresibles y Turbomáquinas Hidráulicas", Catedrático Profesor D. José Agüera Soriano

- Principales Partes:

1. Colector espiral
2. Válvula de admisión.
3. Deflector
4. Inyector (Tobera +Válvula aguja)
5. Chorro de freno
6. Rodete
7. Sistema gobernador
8. Servomotor de los deflectores

[13] Fuente: "Mecánica de Fluidos Incompresibles y Turbomáquinas Hidráulicas", Catedrático Profesor D. José Agüera Soriano

- Características Generales

- Turbina de acción
- Flujo Tangencial (turbina de chorro)
- Saltos netos entre 50 y 2000 m
- Rango de n_s : 8 a 66
- Sobre los 800 m es la única turbina aplicable
- $P_{\text{máx.}} = 423 \text{ Mw.}$ (Cleuson Dixence 1995) Suiza
- Puede utilizar múltiples chorros (6) lo que permite aumentar la potencia.
- No existe peligro de cavitación
- Problema de erosión (erosión por las gotas de agua y sólidos en suspensión)

b). Turbinas Kaplan (Salto muy pequeño y caudal muy grande)

En los casos en que el agua sólo circule en dirección axial por los elementos del rodete, tendremos las turbinas de hélice o Kaplan. Las turbinas Kaplan tienen álabes móviles para adecuarse al estado de la carga. Estas turbinas aseguran un buen rendimiento aún con bajas velocidades de rotación. La figura muestra un croquis de turbina a hélice o Kaplan.

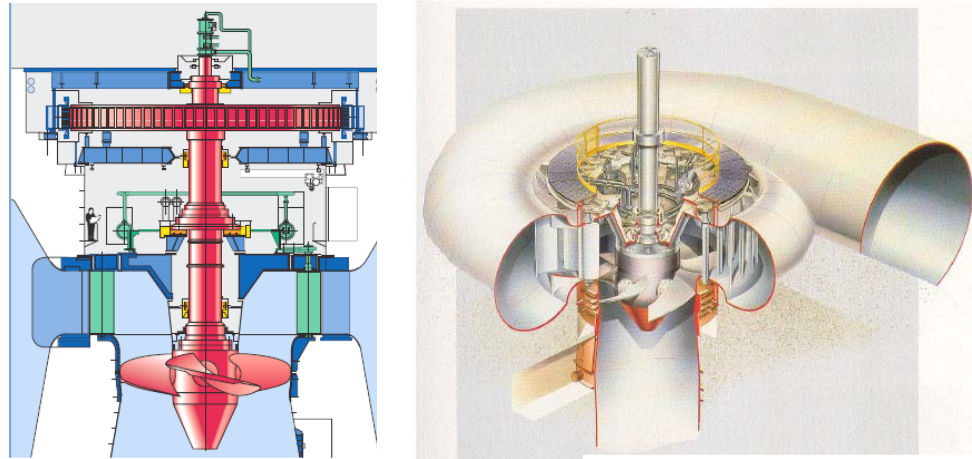


Fig. 9.8 Turbina Kaplan

[13] Fuente: "Mecánica de Fluidos Incompresibles y Turbomáquinas Hidráulicas", Catedrático Profesor D. José Agüera Soriano

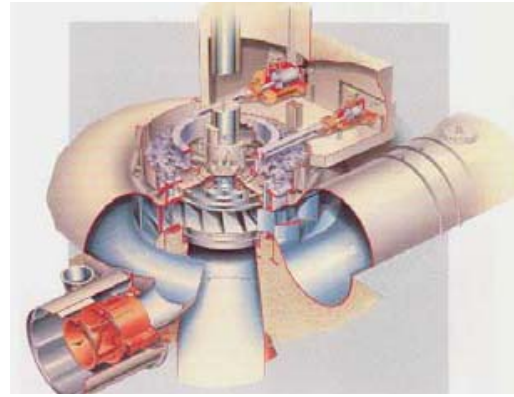
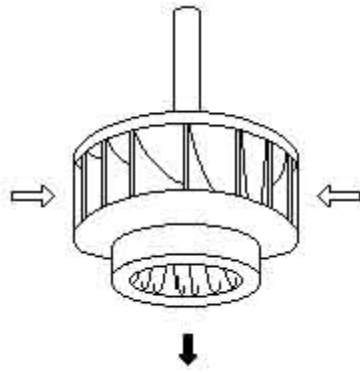
- Características Generales

- Turbina de reacción.
- Flujo axial $U = U_1 = U_2$, $V_R = 0$
- Saltos netos entre 4 y 80 m (rango competitivo hasta 20 m).
- Rango de n_s : 350 a 600
- $\eta \geq 90\%$
- $P_{\text{máx.}} = 180 \text{ MW}$. (Central Caruachi) Venezuela.
- Peligro de cavitación
- Problemas de transporte por su gran tamaño.
- Máxima capacidad de regulación de carga Doble regulación alabes del aparato distribuidor y rodete ajustables.

c) Turbinas Francis (Salto mas reducido y mayor caudal)

Para saltos medianos se emplean las turbinas Francis, que son de reacción.

En el dibujo podemos apreciar la forma general de un rodete y el importante hecho de que el agua entre en una dirección y salga en otra a 90° , situación que no se presenta en las ruedas Pelton. Las palas o álabes de la rueda Francis son alabeadas.

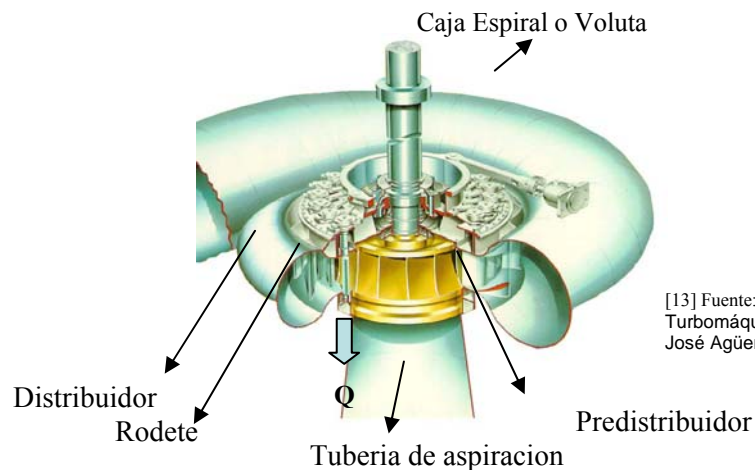


[13] Fuente: "Mecánica de Fluidos Incompresibles y Turbomáquinas Hidráulicas", Catedrático Profesor D. José Agüera Soriano

Fig. 9.9 Turbina Francis

Un hecho también significativo es que estas turbinas en vez de toberas, tienen una corona distribuidora del agua. Esta corona rodea por completo al rodete. Para lograr que el agua entre radialmente al rodete desde la corona distribuidora existe una cámara espiral o caracol que se encarga de la adecuada dosificación en cada punto de entrada del agua. El rodete tiene los álabes de forma adecuada como para producir los efectos deseados sin remolinos ni pérdidas adicionales de carácter hidrodinámico.

- Principales Partes:



[13] Fuente: "Mecánica de Fluidos Incompresibles y Turbomáquinas Hidráulicas", Catedrático Profesor D. José Agüera Soriano

Fig. 9.10 Partes de una turbina Francis

- Características Generales

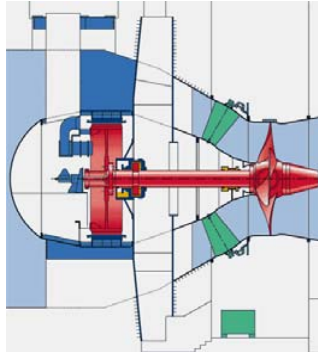
- Turbina de reacción.
- Flujo radial centrípeto
- Saltos netos entre 20 y 700 m.
- Rango de n_s : 50 a 420
- $\eta \geq 90\%$

- $P_{\text{máx.}} = 820 \text{ MW}$. $D = 9,70 \text{ m}$ (Gran Coulee III 1974) EE.UU.
- Construcción: similar a la de una bomba centrífuga.
- Empleo de tubo de aspiración
- Peligro de cavitación (en la entrada y en la salida de los álabes)
- Alabes del aparato distribuidor ajustable.

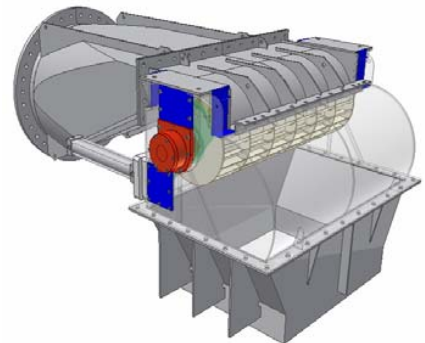
2.5 Otras Turbinas Poco Conocidas



TURBINA DERIAZ



TURBINA BULBO



TURBINA BANKI

[13] Fuente: "Mecánica de Fluidos Incompresibles y Turbomáquinas Hidráulicas", Catedrático Profesor D. José

Fig. 9.11 Otras turbinas

2.6 VALORES TÍPICOS (Velocidad específica de giro y altura para diferentes tipos de turbinas) Tabla 16 (Anexo)

2.7 TURBINAS DE VAPOR



[12] Fuente: Turbinas Hidráulicas - Pedro Fernández Díez

Fig. 9.12 Rotor de una turbina de vapor producida por Siemens, Alemania.

La **turbina de vapor** es otro tipo de motor de combustión externa. Es una máquina que utiliza vapor de agua en un sistema parecido al de la máquina de vapor. El vapor a presión que choca contra las paletas del rotor de la turbina hace girar una rueda. Las ventajas de la turbina de vapor sobre la máquina de vapor son muchas: es más rápida, su velocidad puede regularse más fácilmente, consume

menos vapor y, a causa de su gran simplicidad, es más fácil de construir y de hacer funcionar. Una **turbina de vapor** es una *turbomáquina motora*, que transforma la energía de un flujo de vapor en energía mecánica a través de un intercambio de cantidad de movimiento entre el *fluido de trabajo* (entiéndase el vapor) y el rodete, órgano principal de la turbina, que cuenta con palas o álabes los cuales tienen una forma particular para poder realizar el intercambio energético. Las *turbinas de vapor* están presentes en diversos ciclos de potencia que utilizan un fluido que pueda cambiar de fase, entre éstos el más importante es el Ciclo Rankine, el cual genera el vapor en una caldera, de la cual sale en unas condiciones de elevada temperatura y presión. En la turbina se transforma la energía interna del vapor en energía mecánica que, típicamente, es aprovechada por un generador para producir electricidad. En una turbina se pueden distinguir dos partes, el rotor y el estator. El rotor está formado por ruedas de álabes unidas al eje y que constituyen la parte móvil de la turbina. El estator también está formado por álabes, no unidos al eje sino a la carcasa de la turbina.

El término turbina de vapor es muy utilizado para referirse a una máquina motora la cual cuenta con un conjunto de turbinas para transformar la energía del vapor, también al conjunto del rodete y los álabes directores.

2.8. ECUACIÓN DE BERNOULLI PARA TURBINAS

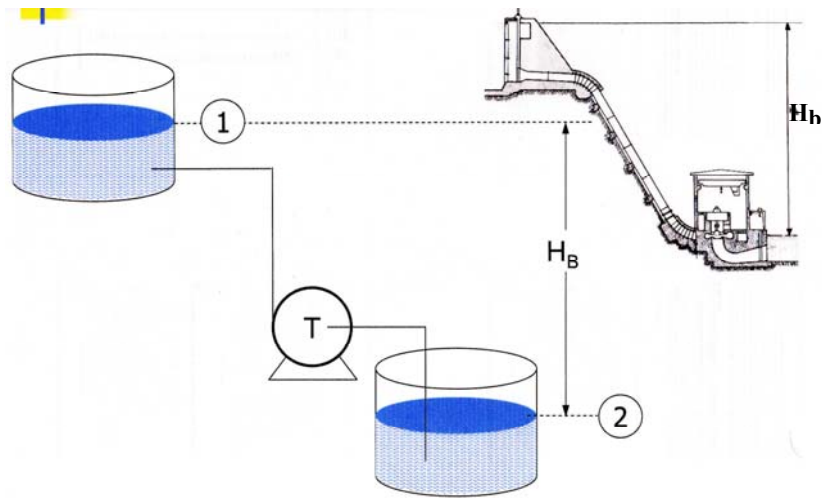
2.8.1 Motores Hidráulicos

Ruedas y Turbinas

Máquinas que transforman energía hidráulica en energía mecánica

- Ruedas (Motores gravimétricos.) Energía potencial. $H = z_1 - z_2$

- Turbinas :
$$H = \frac{P_1 - P_2}{\gamma} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} + z_2 - z_1 \quad (6)$$



Ecuación de Bernoulli entre 1 y 2:

$$H = H_2 + H_{Turb.} + \sum h_{12}$$

$$\sum h_{12} = h_{tuberia\ forzada} + h_{salida}$$

$$H_{Turb.} = z_1 - z_2 - h_{tuberia\ forzada} - h_{salida}$$

$$H_{Turb.} = H \quad (Altura\ neta)$$

$$h_{tuberia\ forzada} + h_{salida} \approx Q^2$$

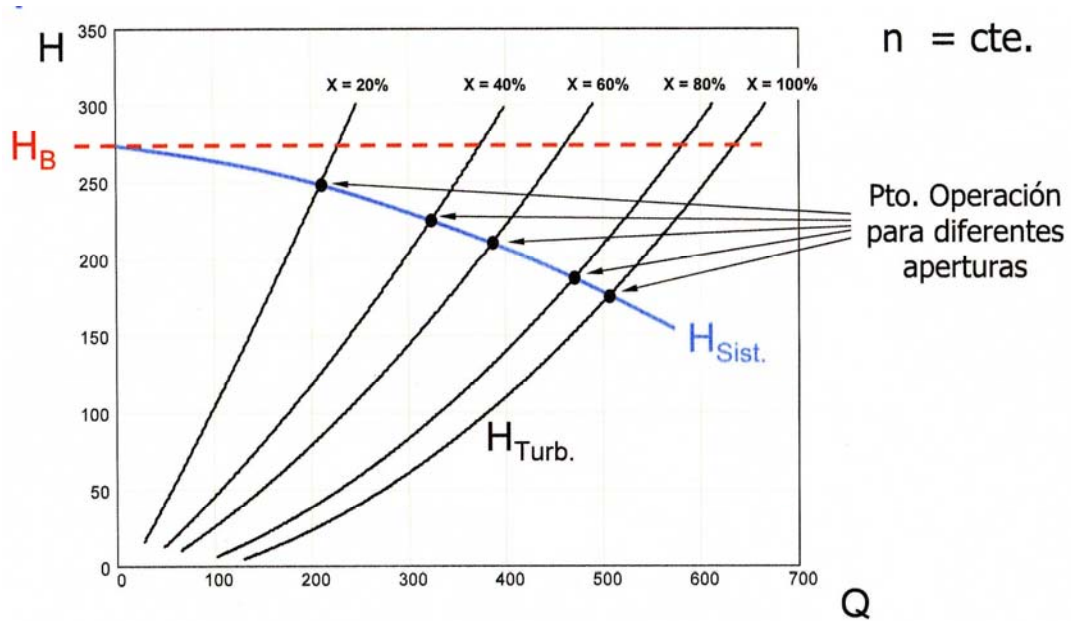
$$H_B = z_1 - z_2$$

$$H_{Turb.} = H_B - kQ^2$$

$$H_{Turb.} = H_{Sistema}$$

$$H_{Sistema} = H_B - kQ^2$$

(7)



Altura dinámica: $H_d = \frac{1}{2g} (V_1^2 - V_2^2)$

Altura de presión: $H_p = \frac{1}{2g} (U_1^2 - U_2^2 + W_2^2 - W_1^2)$

Grado de reacción: $G_R = \frac{H_P}{H_t} = \frac{U_1^2 - U_2^2 + W_2^2 - W_1^2}{V_1^2 - V_2^2 + U_1^2 - U_2^2 + W_2^2 - W_1^2}$

$$G_R = \begin{cases} = 0 & \text{Turbina de reacción } (p_1 = p_2) \\ = 1 & \text{Turbina de reacción } (p_1 > p_2) \end{cases}$$

Numero específico de revoluciones: $H_{11} = \frac{n.D}{\sqrt{H}}$

Caudal específico: $Q_{11} = \frac{Q_m}{D^2 \cdot \sqrt{H}}$

Potencia específica:

$$P_{11} = \frac{P_m}{D^2 \cdot H \sqrt{H}}$$

Velocidad específica de giro referida a la potencia:

$$n_s = \frac{n \cdot \sqrt{P_m}}{H^{5/4}} \quad (8)$$

Para el cálculo de los coeficientes antes mencionados se emplean las siguientes unidades:

Sistema métrico	Sistema ingles
[n] = RPM	[n] = RPM
[Q] = m ³ /s	[Q] = GPM
[H] = m	[H] = pies
[Pm] = CV	[Pm] = HP

n_sNumero específico de revoluciones en sistema métrico.

N_s Numero específico de revoluciones en sistema ingles.

$$N_s = 4,44 \cdot n_s$$

2.8.2 Selección Del Tipo De Turbina Para Aplicaciones Específicas De Trabajo

Estimación de la potencia de una central hidroeléctrica

$$P = KQH$$

k; Valor constante (ver tabla)

Q; Caudal de diseño

H; Altura neta

Rango de potencia	Valores de k
Pico centrales	3.5 – 5.0
Microcentrales	5.0 – 6.5
Minicentrales	6.0 – 7.0
Rangos mayores	7.0 – 7.5

- Criterios De Selección

- El principal criterio de selección de turbinas es la velocidad específica (Ns)

$$N_s = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}}$$

-Entre otros criterios a tener en cuenta están:

Eficiencia, capacidad de la máquina para trabajar a cargas parciales, existencia de repuestos y servicios, velocidad de \square mpalamiento, cavilación, costo, otros.

-Velocidad Específica

Turbinas hidráulicas y velocidad específica (SI) Tabla 17 (*Anexo*)

2.9. DIAGRAMA DE SELECCION DE TURBINAS

Las gráficas 7 y 8 (*Anexo*) muestran las condiciones de trabajo de altura y caudal para diferentes tipos de turbinas para micro y mini centrales hidroeléctricas.

Ejemplo

Determinar la velocidad específica de la tubería de una micro-central de 100 kw, instalada a una altura de 140m acoplada directamente a un generador de 1800 RPM.

1) Determinar la velocidad específica

$$N_s = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}} = \frac{1800 \cdot \sqrt{100}}{140^{5/4}} = 37.7$$

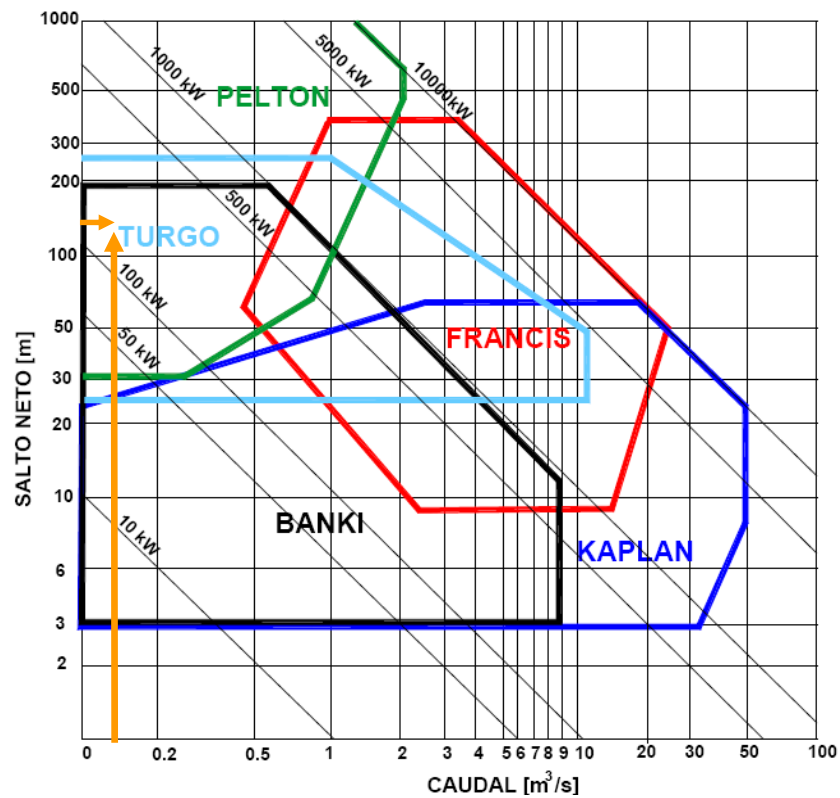
La turbina mas recomendada según NS será: tipo flujo transversal, tipo turgo o bomba como turbina, sin embargo se podría utilizar tipo Pelton de múltiples inyectores.

Tipo de turbina	Rango de velocidad específica
Pelton	4 - 26
Turgo	20 – 56
Flujo transversal	20 – 170
Bombas como turbinas	30 – 170

2. Utilizando la grafica Caudal vs. Altura. Calculando el caudal según utilizando la formula de potencia.

$$Q = 110 \text{ lt/s} \quad (P = k \cdot Q \cdot H) \quad \dots \quad k = 6.5$$

Según el grafico de aplicación de microcentrales se podría utilizar una turbina Pelton.



3. INTRODUCCIÓN A CENTRALES HIDROELÉCTRICAS

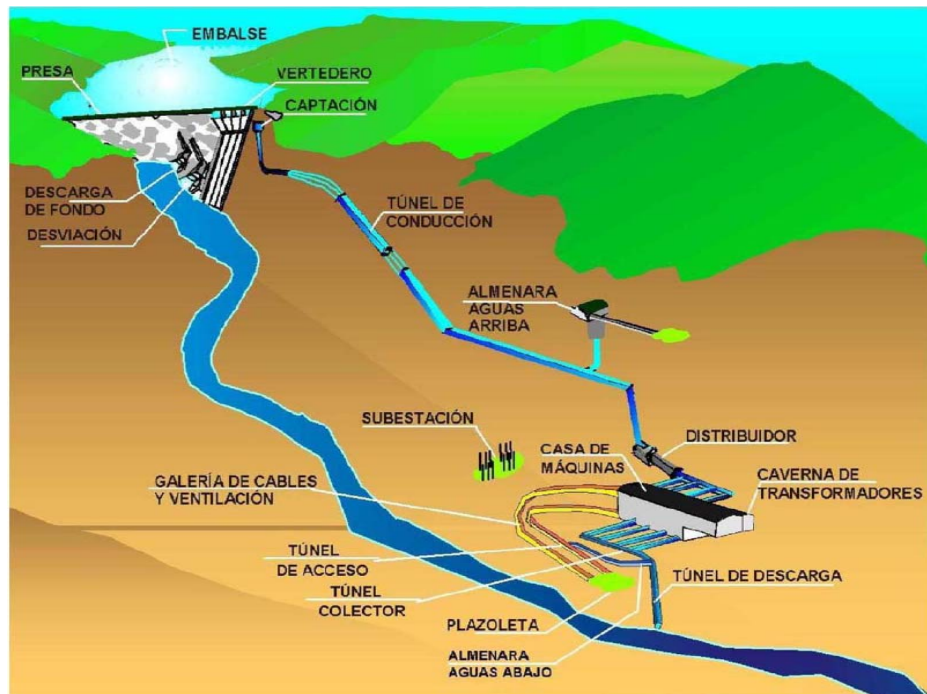


Fig. 9.13 Esquema de una Central hidroeléctrica

[14] Fuente: Aprovechamiento Hidráulico – Profesores; Orlando Aguillon, Miguel Aguaje, Antonio Vidal (2008)

3.1 INTRODUCCIÓN

- Desarrollo de la energía hidroeléctrica

La primera central hidroeléctrica se construyó en 1880 en Northumberland, Gran Bretaña. El renacimiento de la energía hidráulica se produjo por el desarrollo del generador eléctrico, seguido del perfeccionamiento de la turbina hidráulica y debido al aumento de la demanda de electricidad a principios del siglo XX. En 1920 las centrales hidroeléctricas generaban ya una parte importante de la producción total de electricidad.

La tecnología de las principales instalaciones se ha mantenido igual durante el siglo XX. Las centrales dependen de un gran embalse de agua contenido por una presa. El caudal de agua se controla y se puede mantener casi constante. El agua se transporta por unos conductos o tuberías forzadas, controlados con válvulas y turbinas para adecuar el flujo de agua con respecto a la demanda de electricidad. El agua que entra en la turbina sale por los canales de descarga. Los generadores están situados justo encima de las turbinas y conectados con árboles verticales. El diseño de las turbinas depende del caudal de agua; las turbinas Francis se utilizan para caudales grandes y saltos medios y bajos, y las turbinas Pelton para grandes saltos y pequeños caudales.

Además de las centrales situadas en presas de contención, que dependen del embalse de grandes cantidades de agua, existen algunas centrales que se basan en la caída natural del agua, cuando el caudal es uniforme. Estas instalaciones se llaman de agua fluente. Una de ellas es la de las Cataratas del Niágara, situada en la frontera entre Estados Unidos y Canadá.

A principios de la década de los noventa, las primeras potencias productoras de hidroelectricidad eran Canadá y Estados Unidos. Canadá obtiene un 60% de su electricidad de centrales hidráulicas. En todo el mundo, la hidroelectricidad representa aproximadamente la cuarta parte de la producción total de electricidad, y su importancia sigue en aumento. Los países en los que constituye fuente de electricidad más importante son Noruega (99%), Zaire (97%) y Brasil (96%). La central de Itaipú, en el río Paraná, está situada entre Brasil y Paraguay; se inauguró en 1982 y tiene la mayor capacidad generadora del mundo.



[14] Fuente: Aprovechamiento Hidraulico – Profesores; Orlando Aguillon, Miguel Aguaje, Antonio Vidal (2008)

Fig. 9.14

Presa de Itaipú En esta fotografía aérea puede observarse la presa de Itaipú, proyecto conjunto de Brasil y Paraguay sobre las aguas del río Paraná, y su central hidroeléctrica, la mayor del mundo, de la que se obtienen importantes recursos energéticos para ambos países y el conjunto regional. Con una altura de 196 m, y 8 km. de largo, cuenta con 14 vertederos que actúan como cataratas artificiales. Como referencia, la presa Grand Coulee, en Estados Unidos, genera unos 6.500 Mw y es una de las más grandes. En algunos países se han instalado centrales pequeñas, con capacidad para generar entre un kilovatio y un megavatio. En muchas regiones de China, por ejemplo, estas pequeñas presas son la principal fuente de electricidad. Otras naciones en vías de desarrollo están utilizando este sistema con buenos resultados.

- Función de una central hidroeléctrica

La función de una central hidroeléctrica es utilizar la energía potencial del agua almacenada y convertirla, primero en energía mecánica y luego en eléctrica.

El esquema general de una central hidroeléctrica puede ser: Esquema Central Hidroeléctrica

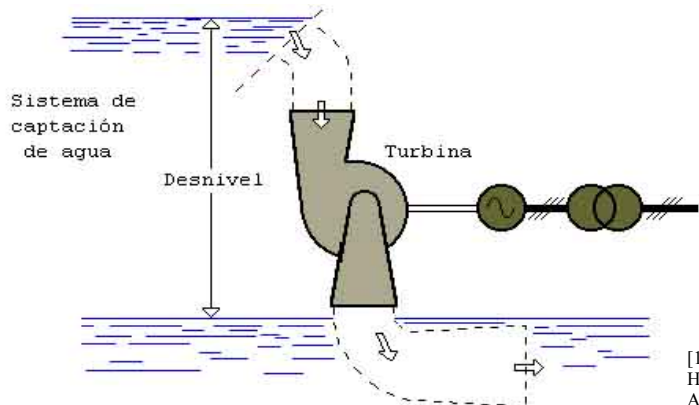


Fig. 9.15

[14] Fuente: Aprovechamiento Hidráulico – Profesores; Orlando Aguillon, Miguel Aguaje, Antonio Vidal (2008)

Un sistema de captación de agua provoca un desnivel que origina una cierta energía potencial acumulada. El paso del agua por la turbina desarrolla en la misma un movimiento giratorio que acciona el alternador y produce la corriente eléctrica.

3.2 VENTAJAS DE LAS CENTRALES HIDROELÉCTRICAS

- No requieren combustible, sino que usan una forma renovable de energía, constantemente repuesta por la naturaleza de manera gratuita.
- Es limpia, pues no contamina ni el aire ni el agua.
- A menudo puede combinarse con otros beneficios, como riego, protección contra las inundaciones, suministro de agua, caminos, navegación y aún ornamentación del terreno y turismo.
- Los costos de mantenimiento y explotación son bajos.
- Las obras de ingeniería necesarias para aprovechar la energía hidráulica tienen una duración considerable.
- La turbina hidráulica es una máquina sencilla, eficiente y segura, que puede ponerse en marcha y detenerse con rapidez y requiere poca vigilancia siendo sus costos de mantenimiento, por lo general, reducidos.

3.3 DESVENTAJAS DE LAS CENTRALES HIDROELÉCTRICAS

Contra estas ventajas deben señalarse ciertas desventajas:

- g. Los costos de capital por kilovatio instalado son con frecuencia muy altos.
- h. El emplazamiento, determinado por características naturales, puede estar lejos del centro o centros de consumo y exigir la construcción de un sistema de transmisión de electricidad, lo que significa un aumento de la inversión y en los costos de mantenimiento y pérdida de energía.
- i. La construcción lleva, por lo común, largo tiempo en comparación con la de las centrales termoeléctricas.
- j. La disponibilidad de energía puede fluctuar de estación en estación y de año en año.

3.4 TIPO DE CENTRALES HIDROELÉCTRICAS

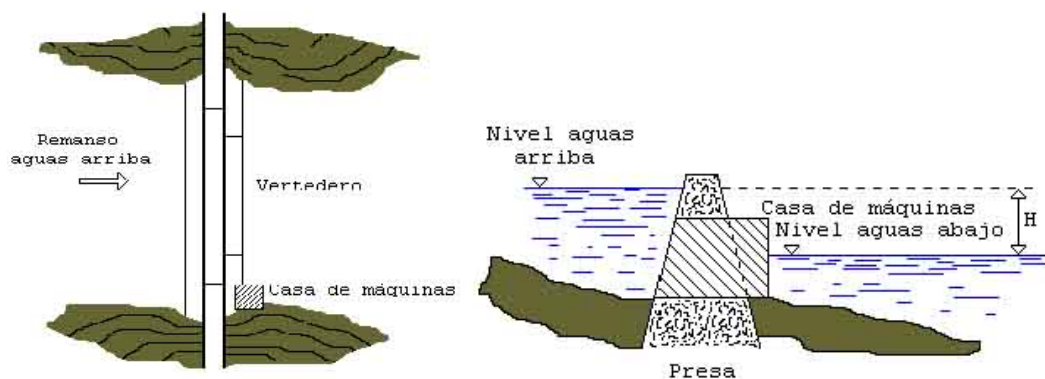
3.4.1 Central Hidroeléctrica de Pasada

Una central de pasada es aquella en que no existe una acumulación apreciable de agua "corriente arriba" de las turbinas.

En una central de este tipo las turbinas deben aceptar el caudal disponible del río "como viene", con sus variaciones de estación en estación, o si ello es imposible el agua sobrante se pierde por rebosamiento.

En ocasiones un embalse relativamente pequeño bastará para impedir esa pérdida por rebosamiento.

El esquema de una central de este tipo puede ser el siguiente:



[14] Fuente: Aprovechamiento Hidráulico – Profesores; Orlando Aguillon, Miguel Aguaje, Antonio Vidal (2008)

Fig. 9.16

En la misma se aprovecha un estrechamiento del río, y la obra del edificio de la central (casa de máquinas) puede formar parte de la misma presa.

El desnivel entre "aguas arriba" y "aguas abajo", es reducido, y si bien se forma un remanso de agua a causa del azud, no es demasiado grande.

Este tipo de central, requiere un caudal suficientemente constante para asegurar a lo largo del año una potencia determinada.

3.4.2 Central Hidroeléctrica con Embalse de Reserva

En este tipo de proyecto se embalsa un volumen considerable de líquido "aguas arriba" de las turbinas mediante la construcción de una o más presas que forman lagos artificiales. El embalse permite graduar la cantidad de agua que pasa por las turbinas. Del volumen embalsado depende la cantidad que puede hacerse pasar por las turbinas. Con embalse de reserva puede producirse energía eléctrica durante todo el año aunque el río se seque por completo durante algunos meses, cosa que sería imposible en un proyecto de pasada.

Las centrales con almacenamiento de reserva exigen por lo general una inversión de capital mayor que las de pasada, pero en la mayoría de los casos permiten usar toda la energía posible y producir kilovatios-hora más baratos.

Pueden existir dos variantes de estas centrales hidroeléctricas:

➤ **La de casa de máquina al pie de la presa:**

En las figuras siguientes observamos en PLANTA y CORTE el esquema de una central de este tipo:

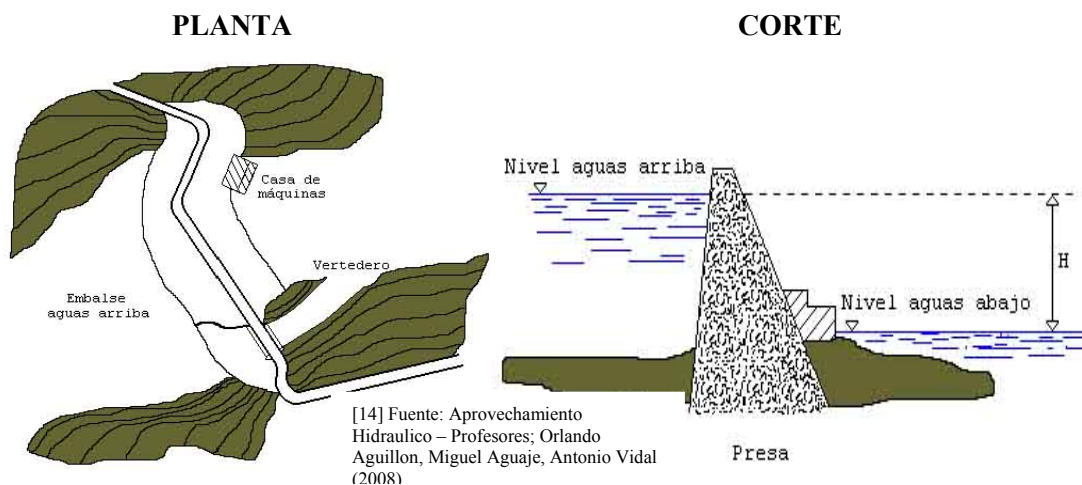


Fig. 9.17

La casa de máquinas suele estar al pie de la presa, como ilustra el dibujo, en estos tipos de central, el desnivel obtenido es de carácter mediano.



Fig. 9.18

[14] Fuente: Aprovechamiento Hidraulico – Profesores; Orlando Aguillon, Miguel Aguaje, Antonio Vidal (2008)

➤ **Aprovechamiento por derivación del agua:**

En las figuras siguientes tenemos un esquema en PLANTA y CORTE de una central de este tipo:
PLANTA

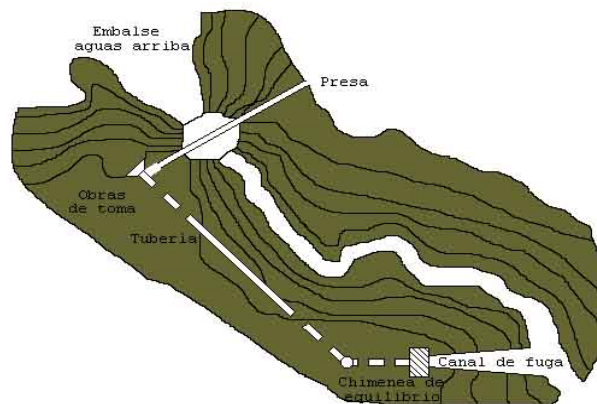
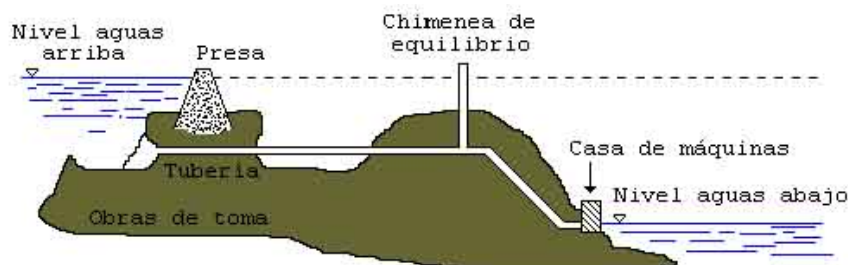


Fig. 9.19

[14] Fuente: Aprovechamiento Hidraulico – Profesores; Orlando Aguillon, Miguel Aguaje, Antonio Vidal (2008)

CORTE



[14] Fuente: Aprovechamiento Hidraulico – Profesores; Orlando Aguillon, Miguel Aguaje, Antonio Vidal (2008)

Fig. 9.20

En el lugar apropiado por la topografía del terreno, se ubica la obra de toma de agua, y el líquido se lleva por medio de canales, o tuberías de presión, hasta las proximidades de la casa de máquinas.

Allí se instala la chimenea de equilibrio, a partir de la cual la conducción tiene un declive más pronunciado, para ingresar finalmente a la casa de máquinas.



Fig. 9.21

[14] Fuente: Aprovechamiento Hidraulico – Profesores; Orlando Aguillon, Miguel Aguaje, Antonio Vidal (2008)



Fig. 9.22

La chimenea de equilibrio es un simple conducto vertical que asegura al cerrar las válvulas de la central, que la energía cinética que tiene el agua en la conducción, se libere en ese elemento como un aumento de nivel y se transforme en energía potencial.



Fig. 9.23

[14] Fuente: Aprovechamiento Hidraulico – Profesores; Orlando Aguillon, Miguel Aguaje, Antonio Vidal (2008)

Los desniveles en este tipo de central suelen ser mayores comparados con los que se encuentran en los tipos anteriores de centrales.

3.4.3 Centrales Hidroeléctricas de Bombeo

Las centrales de bombeo son un tipo especial de centrales hidroeléctricas que posibilitan un empleo más racional de los recursos hidráulicos de un país.

Disponen de dos embalses situados a diferente nivel. Cuando la demanda de energía eléctrica alcanza su máximo nivel a lo largo del día, las centrales de bombeo funcionan como una central convencional generando energía.

Al caer el agua, almacenada en el embalse superior, hace girar el rodete de la turbina asociada a un alternador.

Después el agua queda almacenada en el embalse inferior. Durante las horas del día en la que la demanda de energía es menor el agua es bombeada al embalse superior para que pueda hacer el ciclo productivo nuevamente.

Para ello la central dispone de grupos de motores-bomba o, alternativamente, sus turbinas son reversibles de manera que puedan funcionar como bombas y los alternadores como motores.

Situada en el curso alto del Aragón, casi en su cabecera, la Central de Ip es la más importante de las obras realizadas para la regulación y aprovechamiento hidroeléctrico de las aguas de este río, procedentes de los deshielos de las cumbres pirenaicas.

Consta, en síntesis, de un embalse superior —utilizando el ibón de Ip— capaz de regular las aportaciones naturales de la pequeña cuenca propia, la del vecino ibón de Iserías y otros de posible captación, y de recibir, a la vez, la aportación por bombeo que se produzca. Un embalse inferior sobre el Aragón permite tanto la recepción del agua turbinada y su almacenamiento hasta la hora aconsejable de bombeo como la regulación de parte de las aportaciones naturales del río



[14] Fuente: Aprovechamiento Hidráulico – Profesores; Orlando Aguillon, Miguel Aguaje, Antonio Vidal (2008)

Fig. 9.24

3.5 PRINCIPALES COMPONENTES DE UNA CENTRAL HIDROELÉCTRICA

a) La Presa

El primer elemento que encontramos en una central hidroeléctrica es la presa o azud, que se encarga de atajar el río y remansar las aguas.

Con estas construcciones se logra un determinado nivel del agua antes de la contención, y otro nivel diferente después de la misma. Ese desnivel se aprovecha para producir energía.

Las presas pueden clasificarse por el material empleado en su construcción y estas son las

- Presa de tierra

Se denominan igualmente **presas de tierra** o de **escollera**.

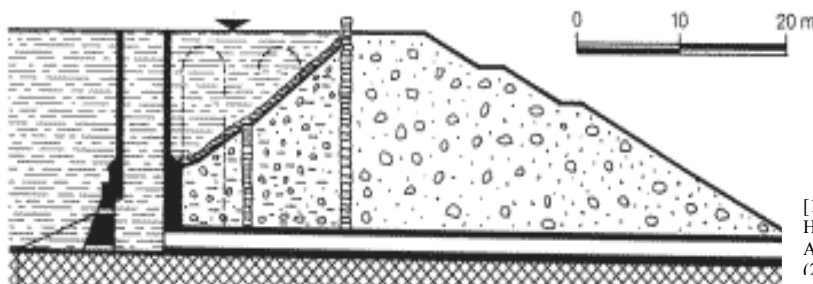
Se realizan sobre terreno con suficiente grado de impenetrabilidad al agua, situando una pantalla impermeable en el paramento de aguas arriba, o formando un núcleo central, completándose la estructura con relleno de tierra, piedras, capas de escollera, etc., estando todo el conjunto convenientemente apisonado y compactado para poder resistir el empuje del agua.

La superficie en contacto con el suelo es muy grande, ya que la presa aguanta el empuje del agua exclusivamente por rozamiento.

Las pantallas impermeables se construyen utilizando, indistintamente, arcilla, hormigón, capas asfálticas, etc.

El paramento de aguas abajo puede ir cubierto con mampostería.

Es un sistema de aplicación frecuente en la construcción de diques (Fig. 9.25).



[14] Fuente: Aprovechamiento Hidráulico – Profesores; Orlando Aguillon, Miguel Aguaje, Antonio Vidal (2008)

Fig. 9.25 – Dique de materiales sueltos. Aplicación de la capa asfáltica.



[14] Fuente: Aprovechamiento Hidraulico – Profesores; Orlando Aguillon, Miguel Aguaje, Antonio Vidal (2008)

Fig. 9.26 Represa de tierra y de mampostería de piedra

- Presa de hormigón

Constituidas de hormigón en masa, cemento y grava solamente; o en casos especiales con hormigón armado, mediante barras de acero.

Es el procedimiento generalmente utilizado en la actualidad para la mayoría de las presas de reciente construcción.



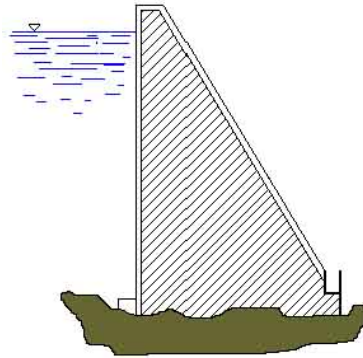
[14] Fuente: Aprovechamiento Hidraulico – Profesores; Orlando Aguillon, Miguel Aguaje, Antonio Vidal (2008)

Fig.9.27 – Presa de hormigón. Proceso de obra.

Las presas de hormigón son las más utilizadas y se puede a su vez clasificar en:

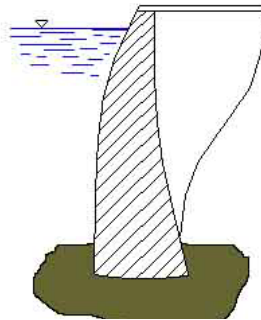
i) De gravedad

Como se muestra en la figura tienen un peso adecuado para contrarrestar el momento de vuelco que produce el agua

**Fig. 9.28****ii) De bóveda:**

Necesita menos materiales que las de gravedad y se suelen utilizar en gargantas estrechas.

En estas la presión provocada por el agua se transmite íntegramente a las laderas por el efecto del arco.



[14] Fuente: Aprovechamiento
Hidráulico – Profesores; Orlando
Aguillon, Miguel Aguaje, Antonio Vidal
(2008)

Fig. 9.29**b) Los Aliviaderos**

Los aliviaderos son elementos vitales de la presa que tienen como misión liberar parte del agua detenida sin que esta pase por la sala de máquinas.

Se encuentran en la pared principal de la presa y pueden ser de fondo o de superficie.

La misión de los aliviaderos es la de liberar, si es preciso, grandes cantidades de agua o atender necesidades de riego.

Para evitar que el agua pueda producir desperfectos al caer desde gran altura, los aliviaderos se diseñan para que la mayoría del líquido se pierda en una cuenca que se encuentra a pie de presa, llamada de amortiguación.

Para conseguir que el agua salga por los aliviaderos existen grandes compuertas, de acero que se pueden abrir o cerrar a voluntad, según la demanda de la situación.

c) Tomas de agua

Las tomas de agua son construcciones adecuadas que permiten recoger el líquido para llevarlo hasta las máquinas por medios de canales o tuberías.

La toma de agua de las que parten varios conductos hacia las tuberías, se hallan en la pared anterior de la presa que entra en contacto con el agua embalsada. Esta toma además de unas compuertas para regular la cantidad de agua que llega a las turbinas, poseen unas rejillas metálicas que impiden que elementos extraños como troncos, ramas, etc. puedan llegar a los álabes y producir desperfectos.

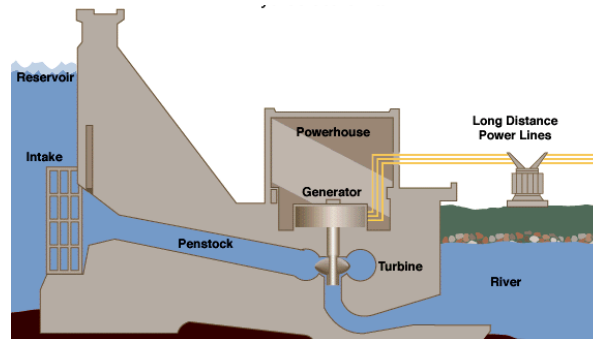


Fig. 9.30

[2] Fuente: Aprovechamiento Hidráulico
– Material de apoyo didáctico Ing. Marco Escobar Selemé

El canal de derivación se utiliza para conducir agua desde la presa hasta las turbinas de la central. Generalmente es necesario hacer la entrada a las turbinas con conducción forzada siendo por ello preciso que exista una cámara de presión donde termina el canal y comienza la turbina. Es bastante normal evitar el canal y aplicar directamente las tuberías forzadas a las tomas de agua de las presas.

d) Casa de máquinas

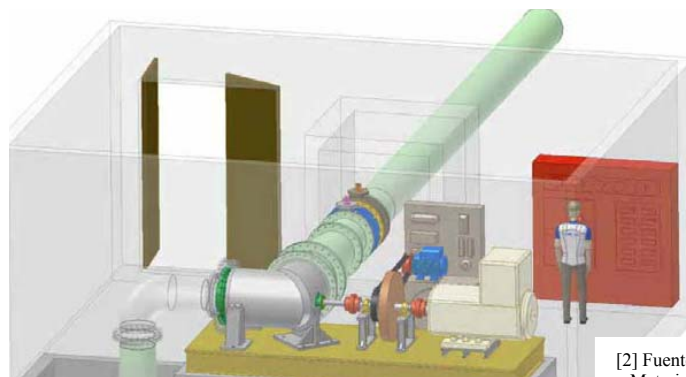


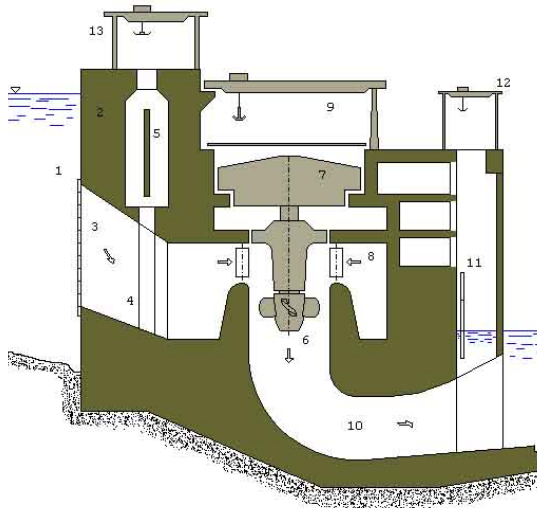
Fig. 9.31

[2] Fuente: Aprovechamiento Hidráulico
– Material de apoyo didáctico Ing. Marco Escobar Selemé

Es la construcción en donde se ubican las máquinas (turbinas, alternadores, etc.) y los elementos de regulación y comando.

En la figura siguiente tenemos el corte esquemático de una central de caudal elevado y baja caída. La presa comprende en su misma estructura a la casa de máquinas.

Se observa en la figura que la disposición es compacta, y que la entrada de agua a la turbina se hace por medio de una cámara construida en la misma presa. Las compuertas de entrada y salida se emplean para poder dejar sin agua la zona de las máquinas en caso de reparación o desmontajes.



[14] Fuente: Aprovechamiento Hidráulico – Profesores; Orlando Aguillon, Miguel Aguaje, Antonio Vidal (2008)

- 0. Embalse
- 1. Presa de contención
- 2. Entrada de agua a las máquinas (toma), con reja
- 3. Conducto de entrada del agua
- 4. Compuertas planas de entrada, en posición "izadas".
- 5. Turbina hidráulica
- 6. Alternador
- 7. Directrices para regulación de la entrada de agua a turbina
- 8. Puente de grúa de la sala de máquinas.
- 9. Salida de agua (tubo de aspiración)
- 10. Compuertas planas de salida, en posición "izadas"
- 11. Puente grúa para maniobrar compuertas de salida.
- 12. Puente grúa para maniobrar compuertas de entrada.

Fig. 9.32

En la figura siguiente mostramos el croquis de una central de baja caída y alto caudal, como la anterior, pero con grupos generadores denominados "a bulbo", que están totalmente sumergidos en funcionamiento.

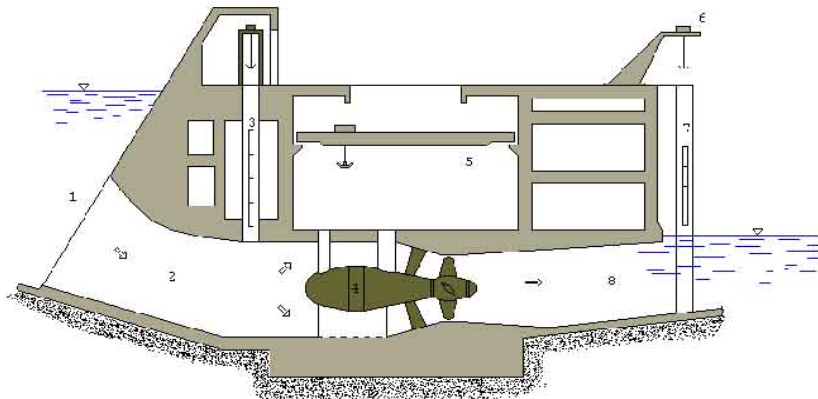


Fig. 9.33

[14] Fuente: Aprovechamiento Hidráulico – Profesores; Orlando Aguillon, Miguel Aguaje, Antonio Vidal (2008)

0. Embalse
1. Conducto de entrada de agua
2. Compuertas de entrada "izadas"
3. Conjunto de bulbo con la turbina y el alternador
4. Puente grúa de las sala de máquina
5. Mecanismo de izaje de las compuertas de salida
6. Compuerta de salida "izada"
7. Conducto de salida

En la figura que sigue se muestra el corte esquemático de una central de caudal mediano y salto también mediano, con la sala de máquinas al pie de la presa.

El agua ingresa por la toma practicada en el mismo dique, y es llevada hasta las turbinas por medio de conductos metálicos embutidos en el dique.

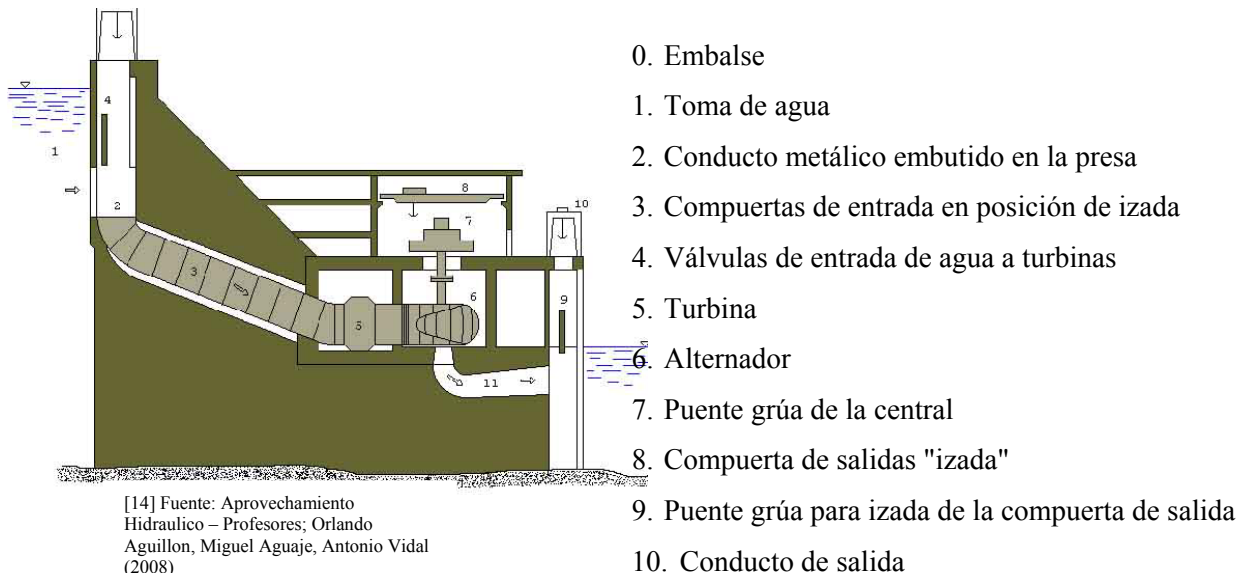
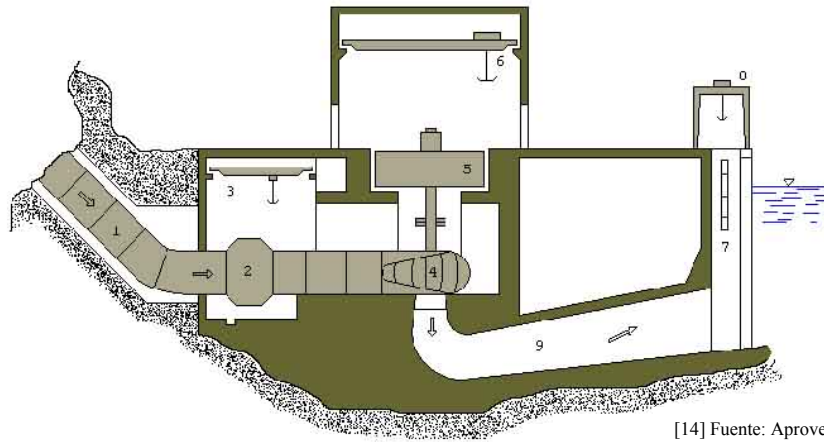


Fig. 9.34

En la figura siguiente tenemos el esquema de una central de alta presión y bajo caudal. Este tipo de sala de máquinas se construye alejada de la presa.

El agua llega por medio de una tubería a presión desde la toma, por lo regular alejada de la central, y en el trayecto suele haber una chimenea de equilibrio.

La alta presión del agua que se presenta en estos casos obliga a colocar válvulas para la regulación y cierre, capaces de soportar el golpe de ariete.



[14] Fuente: Aprovechamiento Hidráulico – Profesores; Orlando Aguillon, Miguel Aguaje, Antonio Vidal (2008)

Fig. 9.35

0. Conducto forzado desde la chimenea de equilibrio
1. Conducto forzado desde la chimenea de equilibrio
2. Válvula de regulación y cierre
3. Puente grúa de sala de válvulas
4. Turbina
5. Alternador
6. Puente grúa de la sala de máquinas
7. Compuertas de salida, en posición "izadas"
8. Puente grúa para las compuertas de salida
9. Conducto de salida (tubo de aspiración)

4. APLICACIÓN DE MAQUINARIAS HIDRÁULICAS

Una vez definida los conceptos de bombas, conocer la diferencia entre algunos tipos de ellas, calcular potencia y eficiencia de las bombas, definir motores de fluido, definir turbinas, y diferenciar entre los distintos modelos que existen en el mercado tanto de bombas como turbinas. En lo que se refiere a la aplicación dentro la ingeniería civil estas maquinarias son aplicadas en el diseño de centrales hidroeléctricas, en general donde cada una de estas maquinas tanto la bomba como la turbina tienen distintas funciones como se desarrollo en el capítulo presente.

FACTORES DE CONVERSIÓN

LONGITUD :

$$\begin{aligned}
 1 \text{ pulg} &= 2.54 \text{ cm} = 0.08333 \text{ pies} \\
 1 \text{ Pie} &= 12 \text{ pulg} = 0.3048 \text{ m} \\
 1 \text{ milla} &= 1609.35 \text{ m} \\
 1 \text{ milla náutica} &= 1853.25 \text{ m} \\
 1 \text{ Yarda} &= 0.9144 \text{ m}
 \end{aligned}$$

MASA :

$$\begin{aligned}
 1 \text{ Kg-m} &= 1 \text{ Kg} = 2.205 \text{ lb} \\
 1 \text{ lb-m} &= 1 \text{ lb} = 0.4536 \text{ Kg} \\
 1 \text{ Slug} &= 32.2 \text{ lb} \\
 1 \text{ UTM} &= 9.81 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

FUERZA :

$$\begin{aligned}
 1 \text{ kg-f} &= 1 \text{ kgf} = 2.205 \text{ lbf} = 9.81 \text{ N} \\
 1 \text{ lb-f} &= 1 \text{ lbf} = 0.4536 \text{ kgf} = 32.2 \text{ poundals} \\
 1 \text{ Tonelada métrica} &= 1000 \text{ kgf} \\
 1 \text{ dina} &= 10^{-5} \text{ N} = 2.248 \times 10^{-6} \text{ lbf}
 \end{aligned}$$

TRABAJO Y ENERGIA:

$$\begin{aligned}
 1 \text{ kgf x m} &= 9.81 \text{ J} \\
 1 \text{ CV x h} &= 2.648 \times 10^6 \text{ J} \\
 1 \text{ KW x h} &= 3.6 \times 10^6 \text{ J} = 860 \text{ kcal/h} \\
 1 \text{ KW x h} &= 3.413 \text{ BTU} \\
 1 \text{ lbf x pie} &= 0.001285 \text{ BTU} \\
 1 \text{ Joule} &= 9.478 \times 10^{-4} \text{ BTU} \\
 1 \text{ Kilocaloria} &= 4187 \text{ J} = 3.968 \text{ BTU} \\
 1 \text{ BTU} &= 778.2 \text{ lbf x pie}
 \end{aligned}$$

POTENCIA :

$$\begin{aligned}
 1 \text{ W} &= 1 \text{ J/s} = 0.101972 \text{ Kg f x m/s} = 0.00136 \text{ CV} \\
 1 \text{ CV} &= 735.499 \text{ W} \\
 1 \text{ W} &= 0.859845 \text{ Kcal/h} \\
 1 \text{ HP} &= 745.7 \text{ W} = 76.042 \text{ Kg f x m/s} \\
 1 \text{ HP} &= 550 \text{ lbf x pie/s}
 \end{aligned}$$

VOLUMEN

$$\begin{aligned}
 1 \text{ pie}^3 &= 28.32 \text{ lts} = 1728 \text{ pulg}^3 \\
 1 \text{ litro} &= 10^{-3} \text{ m}^3 \\
 1 \text{ pie}^3 &= 7.48 \text{ galones} \\
 1 \text{ galón} &= 3.7854 \text{ lts}
 \end{aligned}$$

VISCOSIDAD ABSOLUTA:

$$\begin{aligned}
 1 \text{ centipoise} &= 2.09 \times 10^{-5} \text{ lbf x } \frac{\text{seg}}{\text{pie}^2} \\
 &= 0.0102 \times 10^{-7} \text{ kgf x } \frac{\text{seg}}{\text{cm}^2} \\
 &= 6.72 \times 10^{-4} \frac{\text{lb}}{\text{pie x seg}} \\
 &= 10^{-3} \frac{\text{Kg}}{\text{m x seg}} \\
 1 \text{ lbf x seg/pie}^2 &= 478.78 \text{ Poise}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 478.78 \frac{\text{dina x seg}}{\text{cm}^2} \\
 &= 4.876 \text{ kgf x } \frac{\text{seg}}{\text{m}^2}
 \end{aligned}$$

VISCOSIDAD CINEMATICA :

$$\begin{aligned}
 1 \text{ pie}^2/\text{seg} &= 92,903.4 \text{ cstok} \\
 &= 0.0929 \text{ m}^2/\text{seg}
 \end{aligned}$$

PRESION :

$$\begin{aligned}
 1 \text{ N/m}^2 &= 1 \text{ Pa} \\
 1 \text{ kgf/cm}^2 &= 98,066.5 \text{ Pa} \\
 1 \text{ atm} &= 760 \text{ mm Hg} \\
 &= 101,325 \text{ Pa} \\
 1 \text{ kgf/m}^2 &= 1 \text{ mm H}_2\text{O} \\
 &= 9.80665 \text{ Pa} \\
 1 \text{ mm Hg} &= 133.322 \text{ Pa}
 \end{aligned}$$

DENSIDAD:

$$1 \text{ kg/m}^3 = 62.4 \text{ lb/pie}^3$$

TABLA 1. Sistema de unidades más utilizadas

Concepto	Símbolo	Sistema de medición		
		Internacional	Ingles	Técnico
Longitud	L	Metro [m]	Pulgada [Plg]	Metro [m]
Tiempo	t	Segundo [s]	Segundo [s]	Segundo [s]
Velocidad	v	[m/s]	[Plg./s]	[m/s]
Acelera.	a	[m/s ²]	[Plg./s]	[m/s ²]
Masa	M, m	Kilogramo [Kg]	Slug.	[Kg s ⁻² /m]
Fuerza	F	Newton [N]	Libra [lbf.]	Kilogram o [Kg]
Presión	P	Pascal [Pa.]	[Lbf./m ²]	[Kg / m ²]
Trabajo	T	[N m]	[Lbf. in]	[Kg / m]
Temperatura	T	° K [Kelvin]	°R [Rankine]	° C sius]

TABLA. 2 PREFIJOS DE UNIDADES (S.I.)

Prefijo	Símbolo SI	Factor
Giga	G	$10^9 = 1\ 000\ 000\ 000$
Mega	M	$10^6 = 1\ 000\ 000$
Kilo	k	$10^3 = 1\ 000$
Mili	m	$10^{-3} = 0.001$
Micro	μ	$10^{-6} = 0.000\ 001$

Fuente: Mecánica de Fluidos Aplicada-
Robert L. Mott

TABLA. 3
PROPIEDADES FÍSICAS LÍQUIDOS A PRESIÓN ATMOSFÉRICA

Líquido	Temp. [°C]	Densidad [Kg/m ³]	Densidad relativa	Tensión superficial [n/m]	Presión de vapor Kpa	(abs) Kg/m ²
Benceno	20	876.2	0.88	0.029	10	1.019
CCL ₄	20	1567.4	1.59	0.026	13.1	1.336
Alcohol etílico	20	788.6	0.79	0.022	5.86	598
gasolina	20	680.3	0.68	55.2	5625
Petróleo crudo	20	855.6	0.86	0.03
Glicerina	20	257.6	1.26	0.063	1.4*10E-5	1.43*10E-3
Mercurio	15.6	13555	13.57	0.51	1.7*10E-4	1.73*10E-2
Agua	0	999.8	1	0.076	0.61	62.2
	5	1000	1	0,075	0,87	87,7
	10	999,7	1	0,074	1,23	125,4
	20	998,2	0,998	0,073	2,34	235,6
	40	992,2	0,992	0,07	7,38	752,5
	60	983,2	0,983	0,066	19,92	2031,3
	80	971,8	0,972	0,063	47,34	4827,3
	100	958,4	0,956	0,059	101,33	10332,7

TABLA. 4
PROPIEDADES MECANICAS DEL AGUA A LA PRESION ATMOSFERICA

Temp.	Densidad	Peso Especifico	Viscosidad dinámica	Tensión superficial	Presion de vapor	Modulo de elasticidad volumétrico
°C	UTM/m3	kg/m3	kg seg/m2	kg/m3	kg/cm2 (ab)	kg/cm2
0	101,96	999,87	18,27x10E-5	0,00771	0,0056	20200
5	101,97	999,99	15,5	0,00764	0,0088	20900
10	101,95	999,73	13,34	0,00756	0,012	21500
15	101,88	999,12	11,63	0,00751	0,0176	22000
20	101,79	998,23	10,25	0,00738	0,0239	22400
25	101,67	997,07	9,12	0,00735	0,0327	22800
30	101,53	995,68	8,17	0,00728	0,0439	23100
35	101,37	994,11	7,37	0,00718	0,0401	23200
40	101,18	992,25	6,69	0,00711	0,078	23300
50	100,76	988,07	5,60x10E-5	0,00693	0,1249	23400

TABLA 5.

DENSIDAD RELATIVA Y VISCOSIDAD CINEMATICA DE ALGUNOS LIQUIDOS

(Viscosidad cinematica = valor de la tabla x 10⁻⁶)

	Agua**		Disolvente comercial		Tetracloruro de carbono		Aceite lubricante medio	
Temp. (C°)	Densid. Relat.	Visc. Cinem.	Densid. Relat.	Visc. Cinem.	Densid. Relat.	Visc. Cinem.	Densid. Relat.	Visc. Cinem.
5	1,000	1,520	0,728	1,476	1,620	0,763	0,905	471,0
10	1,000	1,308	0,725	1,376	1,608	0,696	0,900	260,0
15	0,999	1,142	0,721	1,301	1,595	0,655	0,896	186,0
20	0,998	1,007	0,718	1,189	1,584	0,612	0,893	122,0
25	0,997	0,897	0,714	1,101	1,572	0,572	0,890	92,0
30	0,995	0,804	0,710	1,049	1,558	0,531	0,886	71,0
35	0,993	0,727	0,706	0,984	1,544	0,504	0,883	54,9
40	0,991	0,661	0,703	0,932	1,522	0,482	0,875	39,4
50	0,990	0,556					0,866	25,7
65	0,980	0,442					0,865	15,4

TABLA. 6 VALORES DEL MÓDULO VOLUMÉTRICO PARA ALGUNOS LÍQUIDOS

Líquido	Módulo Volumétrico	
	(lb/pulg2)	(Mpa)
Alcohol etílico	130 000	896
Benceno	154 000	1 062
Aceite industrial	189 000	1 303
Agua	316 000	2 179
Glicerina	654 000	4 509
Mercurio	3 590 000	24 750

Fuente: Mecánica de Fluidos Aplicada-
Robert L. Mott

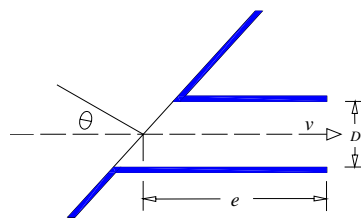
TABLA 7. Coeficientes para orificios de pared delgada

Cv	1	0,99	0,98	0,97	0,96	0,95
Cc	0,586	0,6	0,615	0,31	0,47	0,664
Cd	0,586	0,594	0,603	0,12	0,621	0,631

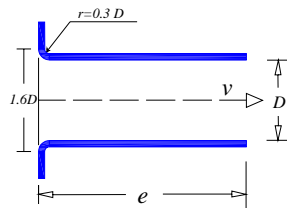
Fuente: Introducción a la Hidráulica-Texto
auxiliar de la materia

TABLA 8. Coeficientes de gasto para diferentes tipos de Orificios de pared gruesa

a) Tubo corto

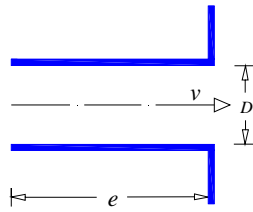


$e/D \leq$	0,5	1	1,5	2	2,5	3	5
C_d	0,6	0,75	0,78	0,79	0,8	0,82	0,79
e/D	12	25	36	50	60	75	100
C_d	0,77	0,71	0,68	0,64	0,6	0,59	0,55
Con $e/D = 3$ C_d Según Weisbach:							
θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
C_d	0,82	0,8	0,78	0,76	0,75	0,73	0,72



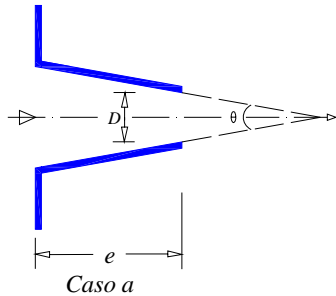
$C_d=0.952$ Según Propow

b) Tubos cilíndricos reentrantes (tubos de borda).

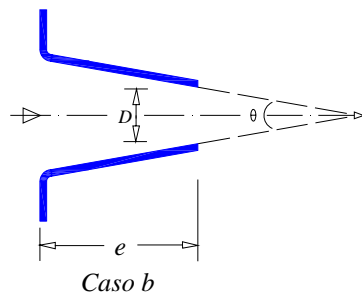


	C_d	C_v	C_c
$e > 3D$	0,71	0,71	1
$e < 3D$	0,51	0,97	0,53

c) Tubos convergentes con aristas agudas y redondeadas respectivamente.



θ	0°	4°	8°	12°	16°	30°
C_d Caso a	0,82	0,916	0,942	0,95	0,941	0,92
C_d Caso b	0,96	0,96	0,959	0,955	0,941	0,92



θ	45°	60°	75°	90°
C_d Caso a	0,87	0,82	0,78	0,74
C_d Caso b	0,87	0,82	0,78	0,74

d) Tubos divergentes, Si $\theta \geq 8^\circ$ la vena líquida no llena toda la sección y ocurre la separación. En el caso de aristas redondeadas el coeficiente C_d , referido a la sección de salida, se obtiene de la siguiente grafica: El coeficiente máximo de gasto se obtiene para $\theta = 5^\circ$.

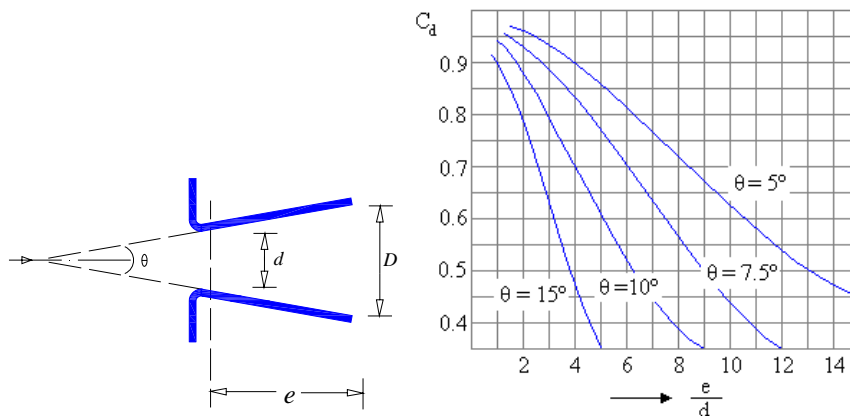


TABLA 9. DENSIDAD RELATIVA Y VISCOSIDAD CINEMATICA

	Aceite a prueba de polvo*		Fuel - oil medio*		Fuel-oil pesado*		Gasolina	
Temp. (C°)	Densid. Relat.	Visc. Cinem.	Densid. Relat.	Visc. Cinem.	Densid. Relat.	Visc. Cinem.	Densid. Relat.	Visc. Cinem.
5	0,917	72,9	0,865	6,01	0,918	400	0,737	0,749
10	0,913	52,4	0,861	5,16	0,915	290	0,733	0,710
15	0,910	39,0	0,857	4,47	0,912	201	0,729	0,683
20	0,906	29,7	0,855	3,94	0,909	156	0,725	0,648
25	0,903	23,1	0,852	3,44	0,906	118	0,721	0,625
30	0,900	18,5	0,849	3,11	0,904	89	0,717	0,595
35	0,897	15,2	0,846	2,77	0,901	68	0,713	0,570
45	0,893	12,9	0,842	2,39	0,898	53	0,709	0,545

TABLA 10**Densidad relativa y viscosidad cinemática para algunos líquidos**

Líquido y temperatura	Densid. Relat.	Visc. Cinem. (m ² /s)
Turpentina a 20° C	0,862	1,7
Aceite de linaza a 30° C	0,925	35,9
Alcohol etílico a 20° C	0,789	1,5
Benceno a 20° C	0,879	0,7
Glicerina a 20° C	1,262	661,0
Aceite de casto a 20 ° C	0,960	1031,0
Aceite ligero de máq. A 16,5° C	0,907	137,0

TABLA.11**Coefficientes de rugosidad para algunos materiales**

Material	Ke [mm]
Vidrio, Plástico, bronce y cobre, asbesto cemento*	Lisos
Asbesto cemento**	0,028
Acero comercial	0,046
Hierro forjado	0,046
Hierro colado recubierto de asfalto	0,12
Hierro galvanizado	0,45
Hierro colado	0,26
Concreto	0,3 a 3
Acero remachado	0,9 a 9

* con recubrimiento interno

** sin recubrimiento interno

Fuente: Mecánica de Fluidos Aplicada-
Robert L. Mott

TABLA 12.**Coefficiente de Hazen – Wiliams para algunos materiales**

Material	C_{HW}
Tuberías lisas y rectas	140
Tuberías lisas	130
Hierro fundido nuevo	130
Hierro fundido 10 años	110
Hierro fundido 30 años	96
Concreto, Bien acabado	120 a 130
Acero soldado	120
Acero con remache	110

Fuente: Introducción a la Hidráulica-
Texto auxiliar de la materia

TABLA 13**Coefficiente de rugosidad de Maning**

TUBERIAS	Coefficiente de rugosidad de manning (n)
Concreto simple hasta 0,45 m de diámetro	0,011
Concreto reforzado de 0,60 m de diam. O mayor	0,011
Asbesto - Cemento	0,010
Acero galvanizado	0,014
Acero sin revestimiento	0,014
Acero con revestimiento	0,011
Polietileno de alta densidad	0,009
PCV (Policloruro de vinilo)	0,009

TABLA 14.**Modulo de elasticidad para algunos materiales**

MATERIAL	E [Kg/cm²]
Acero	$2,10 \cdot 10^{06}$
Hierro Fundido	$9,3 \cdot 10^{05}$
Concreto simple	$1,25 \cdot 10^{05}$
Asbesto-cemento	$3,28 \cdot 10^{05}$
PVC	$3,14 \cdot 10^{04}$
Polietileno	$5,2 \cdot 10^{03}$
Agua	$2,067 \cdot 10^{04}$

Fuente: Abastecimiento de Agua
potable-Enrique Cesar Valdez

TABLA 15. Perdidas singulares (II)**Coefficientes de pérdidas (Ks)**

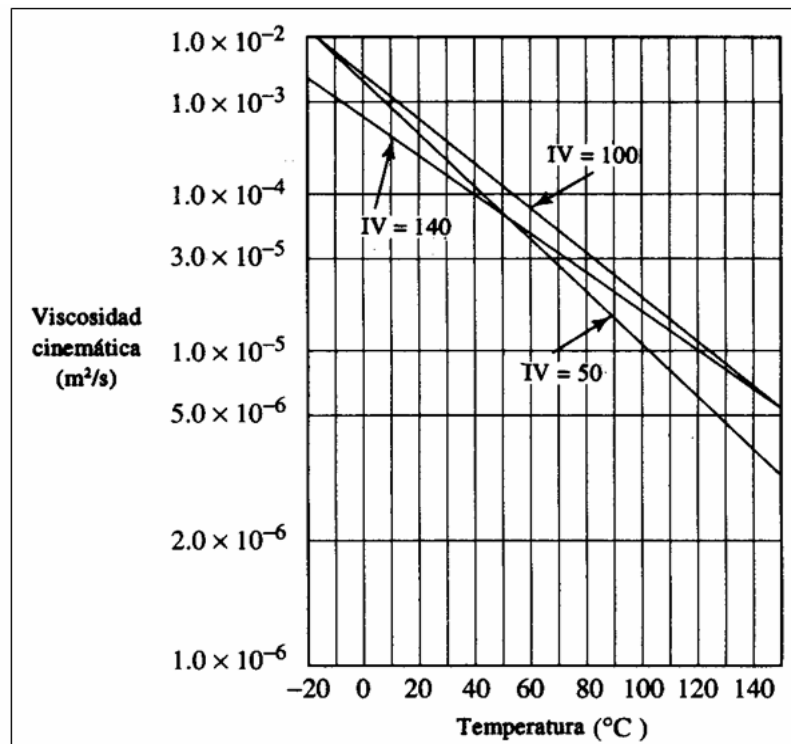
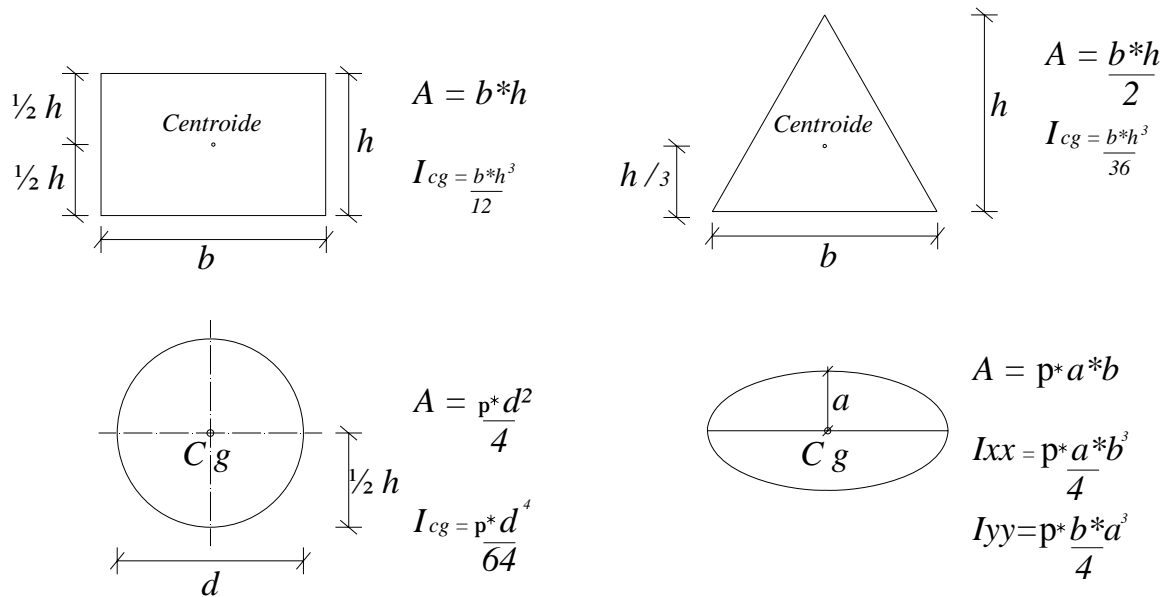
Válvula esférica, totalmente abierta	$K = 10$
Válvula de ángulo, totalmente abierta	$K = 5$
Válvula de retención de clapeta	$K = 2,5$
Válvula de pie con colador	$K = 0,8$
Válvula de compuerta, totalmente abierta	$K = 0,19$
Codo de retroceso	$K = 2,2$
Empalme en T normal	$K = 1,8$
Codo de 90° normal	$K = 0,9$
Codo de 90° de radio medio	$K = 0,75$
Codo de 90° de radio grande	$K = 0,60$
Codo de 45°	$K = 0,42$

TABLA 16.**VALORES TÍPICOS** (Velocidad específica de giro y altura para diferentes tipos de turbinas)

Tipo	n_s	H [m]
Pelton	8 – 60	50 - 2000
Banki	40 -240	1 -200
Francis	50 -450	20 -800
Deriaz	250 -500	40 -250
Kaplan	350 -600	5 - 80
Bulbo	500 -1000	1 - 15
Straflo (axial concéntrica)	900 – 2000	1 -10

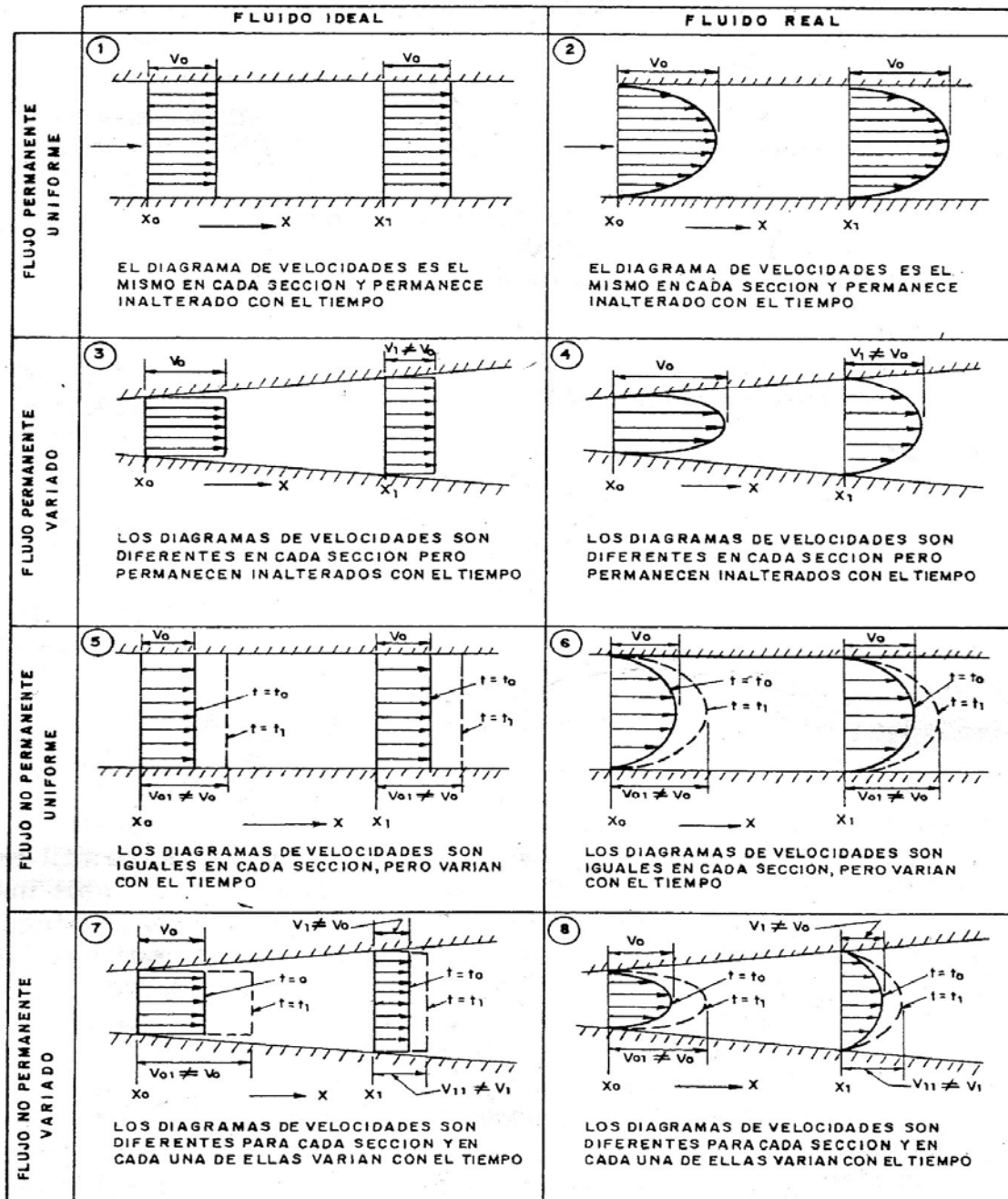
TABLA 17. Turbinas hidráulicas y velocidad específica (SI)

Tipo de turbina	Rango de velocidad específica
Pelton	4 - 26
Turgo	20 – 56
Flujo transversal	20 – 170
Bombas como turbinas	30 – 170
Francis (carcaza espiral)	45 – 300
Francis (de pozo)	255 – 300
Kaplan y Hélice	255 – 800
Ref. (UNIDO, 2004)	

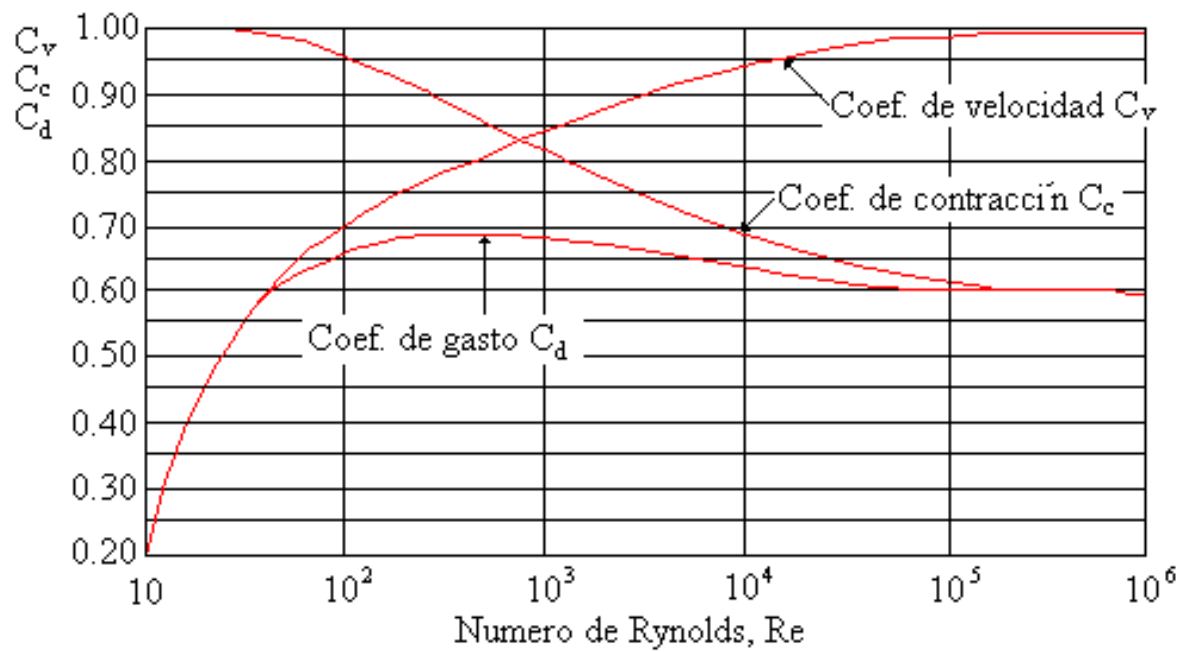
GRAFICA 1 Índice de viscosidad**GRAFICA 2.** Figuras geométricas

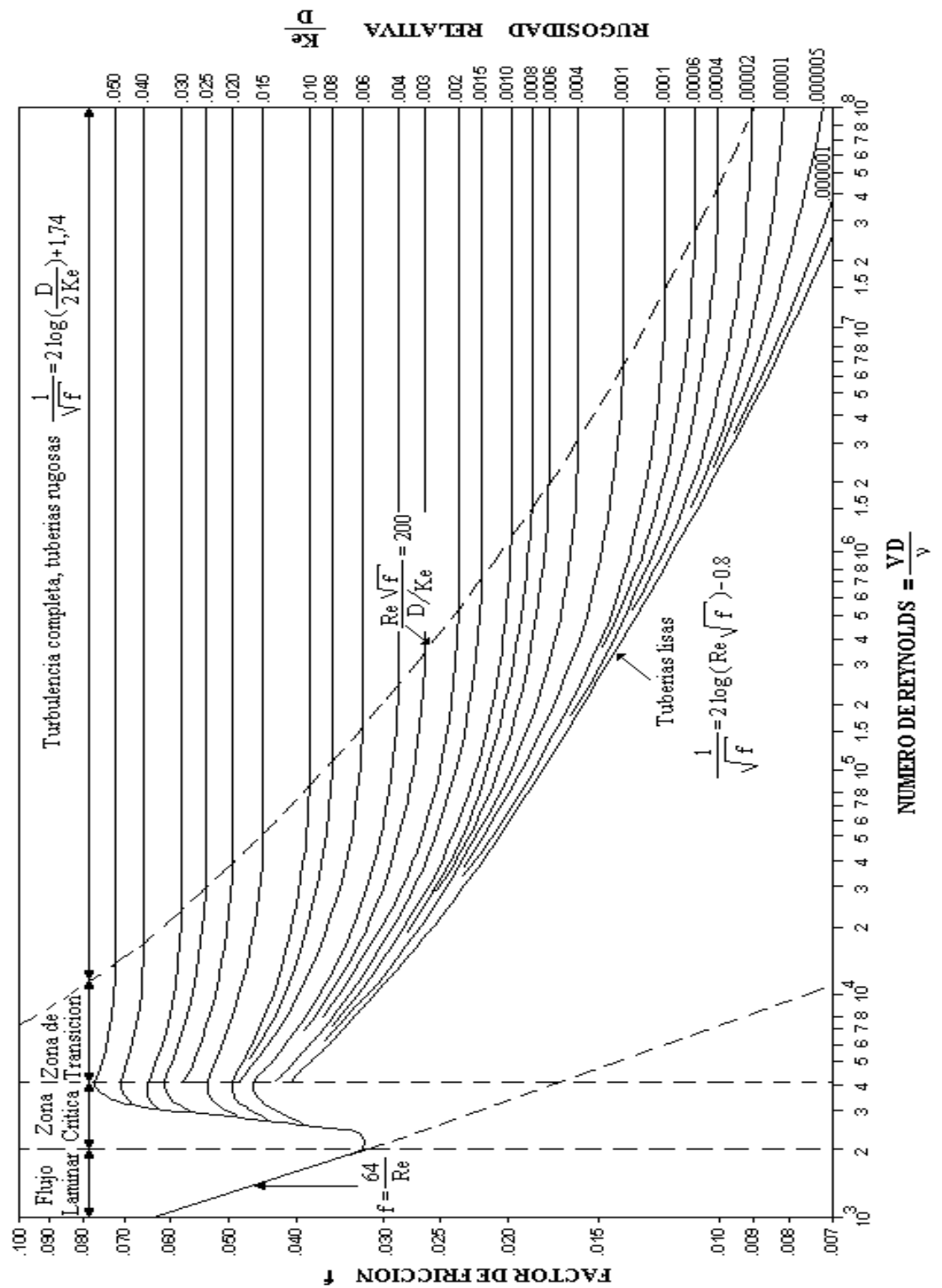
GRAFICA 3. Permanencia y uniformidad de las velocidades

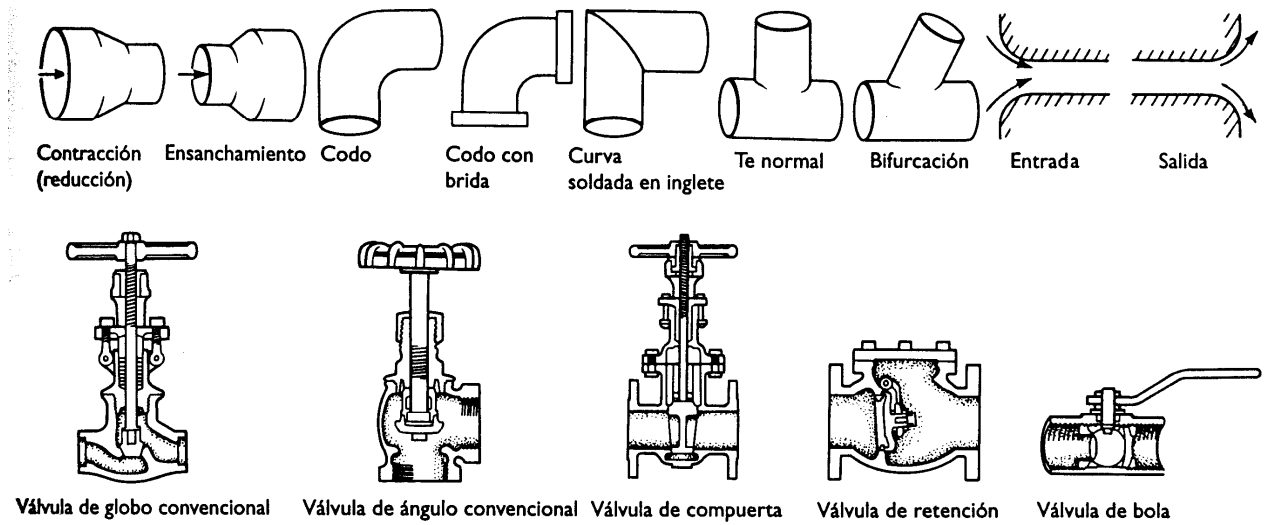
(Ejemplos representativos de los diferentes tipos de flujos)



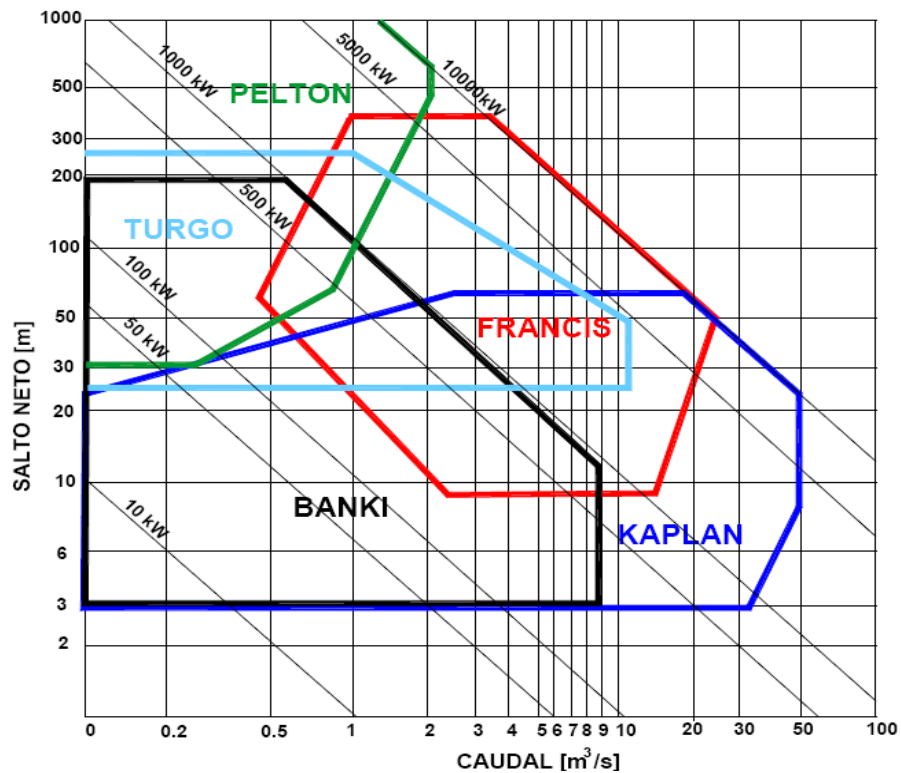
GRAFICA. 4. *coeficientes para orificios de pared delgada*

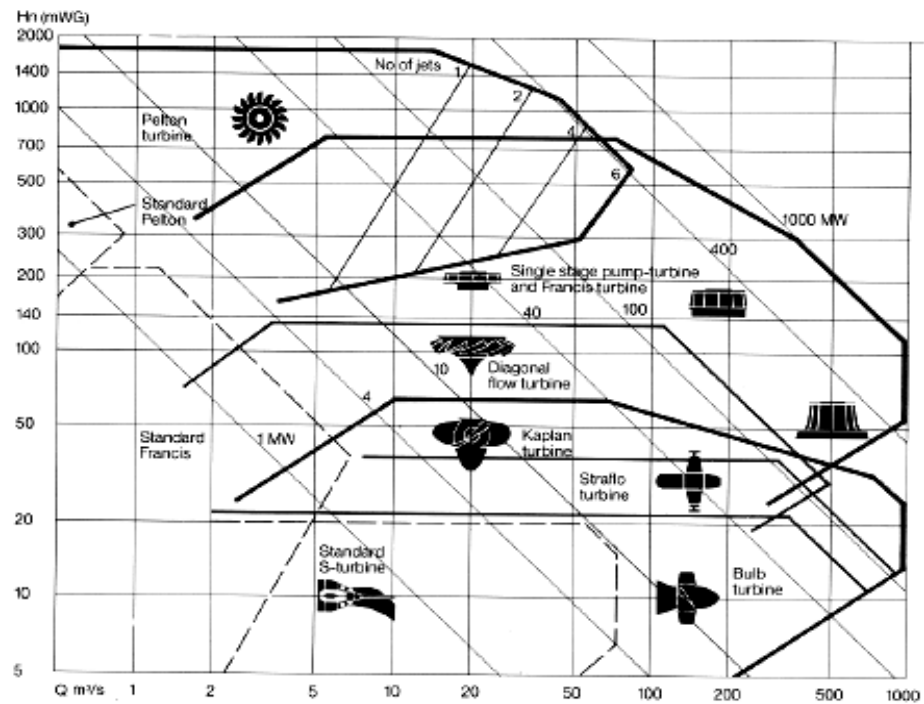


GRAFICA 5. DIAGRAMA DE MOODY

GRAFICA 6. Perdidas singulares (I)

Javier Blasco Alberto. Noviembre 2000

GRAFICA 7. DIAGRAMA DESELECCION DE TURBINAS

GRAFICA 8.

GLOSARIO

A:	Área	°K:	Grados kelvin
Atm:	Atmósfera	K_c :	Coefficiente de perdida de carga en contracciones
A_T :	Área de la sección interior del tanque	k :	Numero adimensional = 0.4
a:	Aceleración	Lb :	Libra (unidad de masa)
C_c :	Coefficiente de contracción	lbm:	libra metro
C_v :	Coefficiente de velocidad	L:	Longitud
C_d :	Coefficiente de descarga	L_E :	Longitud equivalente
°C:	Grados centígrados	MB:	Distancia del mc al centro de flotabilidad
CG:	Centro de gravedad	M:	Numero de Mach
d :	Igualdad dimensional	mc:	Metacentro
Dr:	Densidad relativa	m :	Masa
D, d :	Diámetro	N:	Newton
E:	Modulo volumétrico	n :	Coefficiente de rugosidad
Eu:	Numero de Euler	p:	Presión
e :	Rendimiento	P:	Potencia
Fa:	Fuerza ascensional	Pa:	Pascal
F:	Fuerza, empuje	P_i :	Presión interna
Fr:	Numero de Froude	Pv:	Presión de Vapor
Fb:	Fuerza boyante	Pn:	Fuerza actuante sobre la hipotenusa
f :	Factor o coeficiente de rozamiento	P_x, P_y, P_z :	Fuerza actuante sobre los lados de un elemento diferencial
g :	Aceleración de la gravedad=9.81m/s=32.2 pies/s	q :	Caudal unitario
h:	Altura de carga, altura o profundidad, altura o carga de presión	Q:	Caudal en volumen
H_L, h_L :	Perdida de carga, perdidas localizadas.	Qr:	Caudal real
h_f :	Perdida de carga por fricción	Qt:	Caudal teórico
H:	Altura o carga total (energía por unidad de peso)	R:	Constante de un gas en m/°K
Hg:	Mercurio	Re:	Numero de Reynolds
I:	Momento de inercia	r:	Radio
I_{xy} :	Producto de inercia	S:	Pendiente de la línea de alturas piezometricas
		SI:	Sistema internacional de unidades
		T:	Temperatura

t :	Tiempo	η :	factor que depende de la densidad del fluido (efectos debidos a la turbulencia)
μ :	Viscosidad dinámica	ΔP :	Variación de presión
V :	Volumen	ΔV :	Variación de volumen
V :	Velocidad media	$\Delta z, \Delta x$:	Lados de un elemento diferencial
v :	Velocidad local, velocidad relativa en maquinarias hidráulicas	Δn :	Hipotenusa de un elemento diferencial triangular
v_s :	volumen específico o volumen ocupado por la unidad de peso en m^3/Kg		
W, w :	Peso		
W :	Numero de Weber		
ω :	Velocidad angular		
x :	Distancia		
y :	Profundidad, distancia		
Y_{cg} :	Altura al centro de gravedad		
z :	Elevación, altura piezometrica		

ε, η, ζ :	Coordenadas espaciales del campo de velocidad en un flujo estacionario
i, j, k :	Vectores unitarios direccionales
u, v, w :	Componentes de la velocidad en las direcciones x, y, z
ν :	Viscosidad cinemática
ρ :	Densidad de Fluidos
∂ :	Derivada parcial
τ (tau):	Esfuerzo de corte
σ (sigma):	Tensión superficial
γ (gamma):	Peso específico
α (alfa):	Angulo, Coeficiente de corrección de la energía cinética
β (beta):	Angulo, Coeficiente de corrección de la cantidad de movimiento
δ (delta):	Espesor de la capa limite
θ (theta):	Angulo geométrico

BIBLIOGRAFIA

- [1]. J. HERNÁNDEZ A. (Abril 2002) “*Introducción a la Mecánica de Fluidos*” Primera Edición; Lima-Perú
- [2]. ING. MSC. ESCOBAR SELEME M. (Febrero 2004). Texto base para la materia de Hidráulica I “*Introducción a la Hidráulica*” Primera Edición, Bolivia-Cbba.
- [3]. PROF. J. BERLAMONT (1986) “*Hydraulics of Pipe and Canal Networks*” Primera Edición
- [4]. JHAMES W. DAILY, DONALD R. F. HARLEMAN (Marzo 1975) “*Dinámica de los Fluidos con Aplicación en Ingeniería*” Primera Edición; México
- [5]. SOTELO ÁVILA G. (1997) “*Hidráulica general*” volumen 1; México
- [6]. IRVING H. SHAMES (1995) “*Mecánica de Fluidos*” Tercera Edición
- [7]. FRANK KREITH (1999) “*Fluid Mechanics* “
- [8]. MSC. A. E. TORRES ABELLO (2003) “*Mecánica de Fluidos*” (Notas de clase); Bogotá
- [9]. RONALD V. GILES (1969) y (1994) “*Mecánica de los Fluidos e Hidráulica*” Segunda Edición y tercera Edición Serie de Compendios Shaum.
- [10]. A. ROCHA FELICES (2001) “*Hidráulica de Tuberías y Canales*” Primera Edición
- [11]. ROBERT L. MOTT (1986) “*Mecánica de Fluidos Aplicada*” Primera Edición
- [12]. <http://www.libros.redsauce.net> Palabra clave “*Mecánica de Fluidos*, Pedro Fernández Díez”; (Enero 2011)

- [13]. <http://www.turbinas/hidraulic.net> *Palabra clave* “Mecánica de Fluidos Incompresibles y Turbomáquinas Hidráulicas, Catedrático Profesor D. José Agüera Soriano”; (Enero 2011)
- [14] Prof.; ORLANDO AGUILÓN, MIGUEL AGUAJE, ANTONIO VIDAL (2008)
“*Aprovechamiento Hidráulico*” Material de apoyo didáctico; Bolivia
- [15] <http://www.oceanologia.ens.uabc.mx> *Palabra clave* “Estabilidad de los cuerpos flotantes; (Marzo 2011)